

УДК 519.714+681.5.013

Вычисление средней анизотропии для двумерных дискретных формирующих фильтров

Титов Александр Дмитриевич titov.alex31@yandex.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация. Рассмотрена двумерная линейная дискретная стационарная система, описывающей повторяющийся процесс. Для последовательности случайных векторов, сгенерированной двумерным фильтром, разработан способ вычисления уровня средней анизотропии на основе векторизации в пределах одного профиля. С помощью специальных функций получено описание формирующего фильтра в частотной области, указана связь с представлением во временной области. Уровень средней анизотропии представлен в виде двух слагаемых, первое из которых равно анизотропии расширенного вектора на установившемся режиме, а второе слагаемое связано с уровнем взаимной информации между расширенным вектором выхода на установившемся режиме и его предысторией.

Ключевые слова: анизотропия, средняя анизотропия, дискретные системы, 2D-системы, формирующий фильтр, случайные процессы

Calculation of mean anisotropy for two-dimensional discrete shaping filters

Titov Alexander Dmitrievich titov.alex31@yandex.ru

BMSTU, Moscow, Russia

Abstract. A two-dimensional linear discrete stationary system describing a repetitive process is considered. For a sequence of random vectors generated by a two-dimensional filter, a method has been developed for calculating the level of average anisotropy based on vectorization within a single profile. Using special functions, a description of the shaping filter in the frequency domain is obtained, and the relationship with the representation in the time domain is indicated. The average anisotropy level is represented as two terms, the first of which is equal to the anisotropy of the extended vector in steady state, and the second term is related to the level of mutual information between the extended output vector in steady state and its background.

Keywords: anisotropy, average anisotropy, discrete systems, 2D-systems, shaping filter, stochastic processes

Введение. Многие производственные системы выполняют серию циклов, которые называются повторениями. Каждое повторение происходит в течение определенного ограниченного временного интервала, который называется длительностью повторения [1]. В таких системах, которые используются, например, в электротехнике, передаче и обработке информации, робототех-

нике и других областях, происходят процессы, чьи динамические свойства зависят от двух или более независимых переменных. И.Г. Владимировым в 1990-х годах была разработана анизотропная теория управления, которая предлагает стохастический подход к H_∞ -управлению, основанный на терминах, заимствованных из теории информации. Центральными понятиями данной теории является анизотропия случайного вектора, средняя анизотропия и анизотропная норма системы [2, 3]. В данной работе рассмотрен вопрос вычисления в пространстве состояний средней анизотропии для двумерной системы.

Материалы и методы. Рассмотрим дискретную двумерную систему вида

$$\begin{cases} x_{k+1}(p+1) = A_{11}(p)x_k(p) + A_{12}(p)y_k(p) + B_1(p)v_k(p); \\ y_{k+1}(p) = A_{21}(p)x_k(p) + A_{22}(p)y_k(p) + B_2(p)v_k(p+1); \\ w_{k+1}(p) = C_1(p)x_k(p) + C_2(p)y_k(p) + D_0(p)v_k(p). \end{cases} \quad (1)$$

На проходе k заданы: $x_k(p) \in \mathbf{R}^n$ — вектор состояния; $y_k(p) \in \mathbf{R}^m$ — вектор выходных значений размерности; $w_k(p) \in \mathbf{R}^l$ — вектор входных возмущений; $v_k(p) \in \mathbf{R}^l$ является гауссовским белым шумом. Параметр длины прохода p принимает значения: $0 \leq p \leq \alpha - 1$.

Средняя анизотропия стационарной последовательности векторов $W = \{w_k\}$ определяется как

$$\bar{A}(W) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(W_{0:N-1})}{N},$$

где $W_{0:N-1} = (w_0^T, w_1^T, w_2^T, \dots, w_{N-1}^T)^T$ является расширенным вектором последовательности. Представляет собой усреднение по времени анизотропии неограниченно растущего фрагмента последовательности [4].

Приведем аналог формулы для вычисления средней анизотропии из [5]:

$$\bar{A}(W) = A(w_\infty(0:M)) + I(w_\infty(0:M), \{w_k(0:M)\}_{k < \infty}).$$

Первое слагаемое равно:

$$A(w_\infty(0:M)) = \frac{m(M+1)}{2} (\ln \Phi_\infty(q) - \Psi_\infty(q)),$$

где

$$\Phi_\infty(q) = \frac{1}{m(M+1)} \sum_{p=0}^M \text{Tr} (C_\infty(p)P_\infty(p)C_\infty^T(p) + D_\infty(p)D_\infty^T(p));$$

$$\Psi_\infty(q) = \frac{1}{m(M+1)} \sum_{p=0}^M \ln \det D_\infty(p)D_\infty^T(p);$$

$$P_\infty(p+1) = A_\infty(p)P_\infty(p)A_\infty^T(p) + B_\infty(p)D_\infty(p)D_\infty^T(p)B_\infty^T(p).$$

Важно учитывать, что в последнем равенстве полагается $P_\infty(0) = 0$.

При этом

$$A_{\infty}(p) = A_{11}(p) + A_{12}(p)(I - A_{22}(p))^{-1}A_{21}(p);$$

$$B_{\infty}(p) = B_1(p) + A_{12}(p)(I - A_{22}(p))^{-1}B_2(p);$$

$$C_{\infty}(p) = C_1(p) + C_2(p)(I - A_{22}(p))^{-1}A_{21}(p);$$

$$D_{\infty}(p) = D_0(p) + C_2(p)(I - A_{22}(p))^{-1}B_2(p).$$

Второе слагаемое равно

$$I(w_{\infty}(0:M), \{w_k(0:M)\}_{k<\infty}) = \\ = \frac{1}{2} \ln \det(E[w_{\infty}(0:M)w_{\infty}^T(0:M)]E^{-1}[\tilde{w}_{\infty}(0:M)\tilde{w}_{\infty}^T(0:M)]).$$

При этом стоит учитывать, что

$$E[w_{\infty}(0:M)w_{\infty}^T(0:M)]E^{-1}[\tilde{w}_{\infty}(0:M)\tilde{w}_{\infty}^T(0:M)] = \\ = (C(:)P(:)C^T(:) + D(:)D^T(:))((C(:)R(:)C^T(:) + D(:)D^T(:))^{-1},$$

где

$$P(:) = A(:)P(:)A^T(:) + B(:)B^T(:);$$

$$R(:) = A(:)R(:)A^T(:) + B(:)B^T(:) - \Lambda(:)\theta(:)\Lambda^T(:);$$

$$\Lambda(:) = (A(:)R(:)C^T(:) + B(:)D^T(:))\theta^{-1}(:);$$

$$\theta(:) = C(:)R(:)C^T(:) + D(:)D^T(:).$$

Для проведения вычислений по указанным соотношениям требуется проведения процесса векторизации и решение уравнений Ляпунова и Риккати с помощью математических пакетов.

Результаты. Для вычислительного эксперимента была выбрана система вида (1) со следующими значениями матричных коэффициентов:

$$A_{11}(p) = \begin{bmatrix} -0,4 & 0,02 \\ -0,6 & 0,03 \end{bmatrix} + \sin(\omega_1 p) \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix};$$

$$A_{12}(p) = \begin{bmatrix} 0,1423 & 0 \\ -0,0342 & 0 \end{bmatrix}; B_1(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_{22}(p) = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,75 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sin(\omega_2 p) \begin{bmatrix} -\varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{21}(p) = \begin{bmatrix} 0,097375 & 0,03895 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_2(p) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix};$$

$$C_1(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; C_2(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; D_0(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выбраны следующие значения параметров:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{5}, \omega_2 = \frac{\pi}{10}, \varepsilon_1 = 0,15, \varepsilon_2 = 0,04, \varepsilon_3 = 0,1.$$

Стоит отметить, что эти значения выбраны из соображения устойчивости.

Далее приведена таблица значений средней анизотропии в зависимости от параметра длины прохода.

Значения средней анизотропии и ее составляющих при различных значениях параметра длины прохода для системы с непостоянными коэффициентами

Значение параметра α	Средняя анизотропия $\bar{A}(W)$
2	1,0826
5	2,879
10	5,8461
15	8,3497
20	10,7882
25	13,6748
30	16,6443
40	21,5821
50	27,439
60	32,3759
70	38,2332
80	43,1698
90	49,0272
100	53,9636

График зависимости значения средней анизотропии от параметра длины прохода для системы с переменными матричными коэффициентами представлен на рис. 1.

Также для сопоставления был построен график разности между средней анизотропией и прямой, соединяющей максимальное (при $\alpha = 2$) и минимальное значения (при $\alpha = 100$). Данная прямая имеет вид $\bar{A}(W) \approx 0,5396 \alpha + 0,0034$. Выявлено, что максимальное отклонение (по модулю) составляет 0,4596 (рис. 2).

Обсуждение полученных результатов. В данном случае не наблюдается явной линейной зависимости средней анизотропии. Подобная форма зависимости соотносится с первоначальным представлением. Стоит отметить, что линейная зависимость может быть только в случае постоянных матричных коэффициентов. Вид графика отклонений также ожидаем ввиду формы непостоянных параметров моделируемой системы.

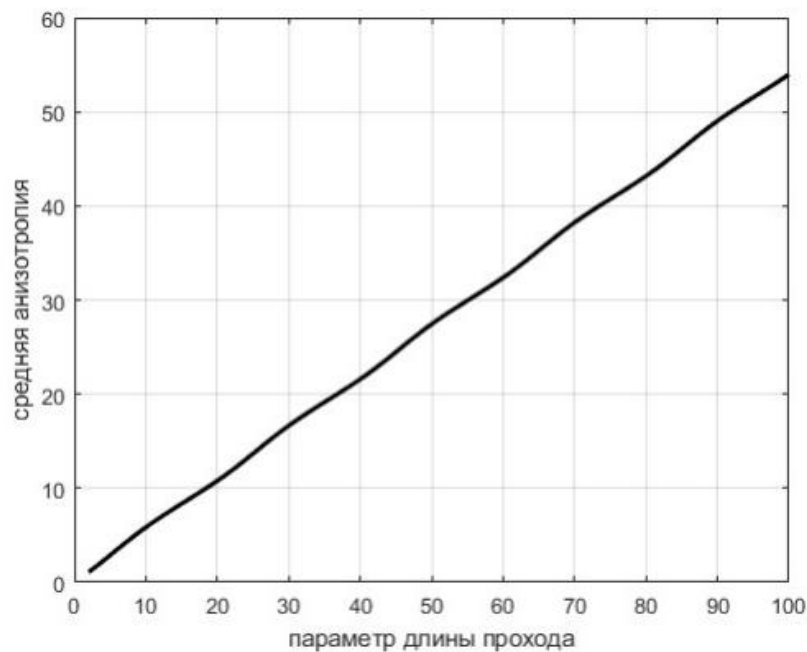


Рис. 1. График зависимости средней анизотропии от параметра длины прохода для системы с непостоянными коэффициентами

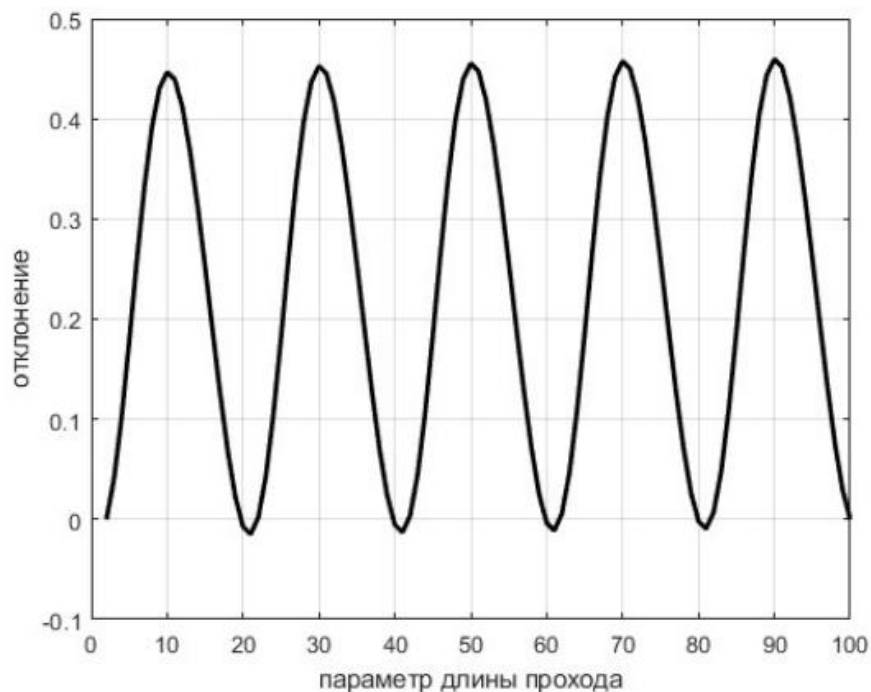


Рис. 2. График отклонения значения средней анизотропии от прямой, соединяющей наименьшее и наибольшее значения

Закключение. Проведено исследование линейной дискретной стационарной системы, описывающей повторяющийся процесс в рамках анизотропийной теории управления. Получено решение задачи по вычислению средней анизотропии подобного рода систем. Обозначены аспекты для осуществления необходимых расчетов. С помощью пакета прикладных программ

MATLAB было реализовано численное моделирование. Представлены результаты вычислительного эксперимента на предмет поиска средней анизотропии в зависимости от значения параметра длины прохода.

Список источников

- [1] Rogers E., Galkowski K., Owens D.H. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes*. Berlin, Springer, 2007, vol. 349, 468 p.
- [2] Vladimirov I.G., Diamond P., Kloeden P. Anisotropy-based Robust Performance Analysis of Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems. *Autom. Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 7. pp. 1265–1282.
- [3] Титов А.Д., Юрченков А.В. Анизотропийная норма линейной двумерной системы с нулевыми граничными условиями. *XIV Всерос. совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024): сб. тр.* Москва, ИПУ РАН, 2024, с. 100–104.
- [4] Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем. *Доклады РАН*, 1995, т. 342, № 5, с. 583–585.
- [5] Кустов А.Ю., Курдюков А.П., Начинкина Г.Н. *Стохастическая теория анизотропийного робастного управления*. Москва, ИПУ РАН, 2012, 127 с.