

УДК 519.714

Сравнительный анализ вычисления анизотропийной нормы линейных двумерных систем с различными граничными условиями

Титов Александр Дмитриевич

titov.alex31@yandex.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация. Проведено исследование линейной дискретной стационарной системы с нулевыми и ненулевыми граничными условиями, описывающей повторяющийся процесс. Внешнее возмущение представляет собой стационарную последовательность случайных векторов, имеющее ограничение на уровень средней анизотропии. Рассмотрен способ вычисления оценки верхней границы анизотропийной нормы в терминах системы матричных неравенств при условии ограничения начального состояния на каждом цикле повторяющегося процесса. Осуществлена серия вычислительных экспериментов на предмет способа подсчета верхней границы анизотропийной нормы, продемонстрированы и сопоставлены результаты моделирования.

Ключевые слова: анизотропия, анизотропийная норма, дискретные системы, 2D-системы, стохастические системы

Comparative analysis of the calculation of the anisotropy norm of linear two-dimensional systems with different boundary conditions

Titov Alexander Dmitrievich

titov.alex31@yandex.ru

BMSTU, Moscow, Russia

Abstract. A linear discrete stationary system with zero and nonzero boundary conditions describing a repetitive process is studied. The external perturbation is a stationary sequence of random vectors with a limit on the level of average anisotropy. A method for calculating an estimate of the upper bound of the anisotropic norm in terms of a system of matrix inequalities is considered, provided that the initial state is limited at each cycle of a repetitive process. A series of computational experiments has been carried out on the subject of a method for calculating the upper bound of the anisotropic norm, and simulation results have been demonstrated and compared.

Keywords: anisotropy, anisotropic norm, discrete systems, 2D-systems, stochastic systems

Введение. Подавляющее число технических систем испытывает на себе влияние множества внешних факторов и возмущений. При решении задачи управления поведением систем необходимо их учитывать. Закон управления может быть синтезирован либо для ограничения воздействий с целью поддержания фиксированного диапазона значений измеряемой величины, либо с целью полного подавления любых внешних возмущений. Для этого требуется

исследовать степень воздействия этих возмущений на характеристики системы. Для этого вводятся такие понятия, как относительная энтропия и средняя анизотропия последовательности случайных величин. В данной работе исследуется основная характеристика системы — анизотропийной нормы. Рассматривается и реализуется метод ее вычисления. В качестве объекта исследования выступает двумерная дискретная система, описывающая повторяющийся процесс [1, 2].

Материалы и методы. Рассмотрим двумерную динамическую систему следующего вида:

$$\begin{cases} x_{k+1}(p+1) = Ax_k(p+1) + Bw_{k+1}(p) + B_0y_k(p); \\ y_{k+1}(p) = Cx_k(p+1) + Dw_{k+1}(p) + D_0y_k(p), \end{cases} \quad (1)$$

где $x_k(p) \in \mathbf{R}^n$ — вектор состояния; $y_k(p) \in \mathbf{R}^m$ — вектор выходных значений; $w_k(p) \in \mathbf{R}^l$ — вектор входных возмущений.

Заданы следующие граничные условия: $x_{k+1}(0) = d_{k+1} \in \mathbf{R}^n$ является начальным вектором состояния, $y_0(p) = f(p)$ — начальный выходных значений (известная функция от аргумента p , не является тождественно нулевой); параметр длины прохода α ($0 \leq p \leq \alpha - 1$), номер прохода $k \geq 0$. Внешнее возмущение $W = \{w_k\}$ представляет собой последовательность случайных векторов, имеющей уровень средней анизотропии, не превосходящий фиксированное неотрицательное число a .

В случае нулевых граничных условий (т. е. при $d_{k+1} = 0$) данная система имеет следующую форму уравнений динамики (получена с помощью процесса векторизации)

$$\begin{cases} y_k = (\hat{C}\hat{A}_y + \hat{D}_y)y_{k-1} + (\hat{C}\hat{B} + \hat{D})w_k, \\ z_{k-1} = I y_{k-1} + O w_k \end{cases},$$

где y_k можно интерпретировать как состояние, а z_{k-1} — выход системы (I — единичная матрица, O — нулевая матрица) [3].

Следующие теоремы устанавливают достаточные условия строгой ограниченности анизотропийной нормы системы заданным пороговым значением [3, 4].

Теорема 1. Рассмотрим систему (1), описывающую повторяющийся процесс. Пусть заданы граничные условия $x_{k+1}(0) = d_{k+1} = 0 \in \mathbf{R}^n$ и условие относительно матрицы собственной динамики $\rho(A) < 1$. Анизотропийная норма такой системы строго ограничена заданным значением $\gamma > 0$, то есть $|||F|||_a < \gamma$, если следующая система неравенств:

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & (\hat{C}\hat{B} + \hat{D})^T \Phi & 0 \\ \Phi(\hat{C}\hat{B} + \hat{D})^T & -\Phi & 0 \\ 0 & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0;$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & 0 & (\hat{C}\hat{A}_y + \hat{D}_y)^T \Phi & I_m \\ 0 & -\eta I_m & (\hat{C}\hat{B} + \hat{D})^T \Phi & 0 \\ \Phi(\hat{C}\hat{A}_y + \hat{D}_y) & \Phi(\hat{C}\hat{B} + \hat{D}) & -\Phi & 0 \\ I_m & 0 & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0;$$

$$\eta - (e^{2a} \det(\Psi))^{\frac{1}{m}} < \gamma^2;$$

$$\eta - \gamma^2 > 0$$

имеет решение относительно скалярных переменных η , γ^2 и симметричных положительно определенных матриц Φ , Ψ .

Для системы с ненулевыми граничными условиями (т. е. при $d_{k+1} \neq 0$) используется иной подход, который не учитывает вид этих условий. Он сформулирован в виде теоремы.

Теорема 2. Рассмотрим систему (1), описывающую повторяющийся процесс с произвольными граничными данными. При этом выполняется следующее требование: $\rho(\hat{A}) < 1$. Тогда анизотропийная норма такой системы строго ограничена значением $\gamma > 0$, такое, что, $\|F\|_a < \gamma$, если система не-

$$\eta - (e^{2a} \det(\Psi))^{\frac{1}{m}} < \gamma^2;$$

$$\eta - \gamma^2 > 0;$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I & \hat{B}^T \Phi & 0 \\ \Phi \hat{B} & -\Phi & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0;$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \hat{A}^T \Phi & I \\ 0 & -\eta I & \hat{B}^T \Phi & 0 \\ \Phi \hat{A} & \Phi \hat{B} & -\Phi & 0 \\ I & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

имеет решение относительно скалярных переменных η , γ^2 и симметрично положительно определенных матрицы Φ , Ψ .

Стоит отметить, что матрицы $\hat{A}$, $\hat{B}$ получаются из исходных матриц системы путем использования различного рода преобразований (применение операторов сдвига, разложение обратных матриц, матричные преобразования) [5].

Результаты. Для моделирования была выбрана система вида (1) со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 1,9118 & -0,9559 & -1,4706 & 0,7353 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \quad B_0 = [0,7794 \ 0 \ 1 \ 0]^T;$$

$$C = [1,9118 \ -0,9559 \ -1,4706 \ 0,7353];$$

$$D = 0; \quad D_0 = 0,7794.$$

с граничными условиями

$$d_{k+1} = 0; \quad f(p) = -1.$$

Также было проведено моделирование при ненулевых граничных данных:

$$d_{k+1} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T; \quad f(p) = -1.$$

Параметры длины прохода равны $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 5$.

На рис. 1 и 2 представлены графики зависимости α -анизотропийной нормы от параметра α (при длине прохода α_2).

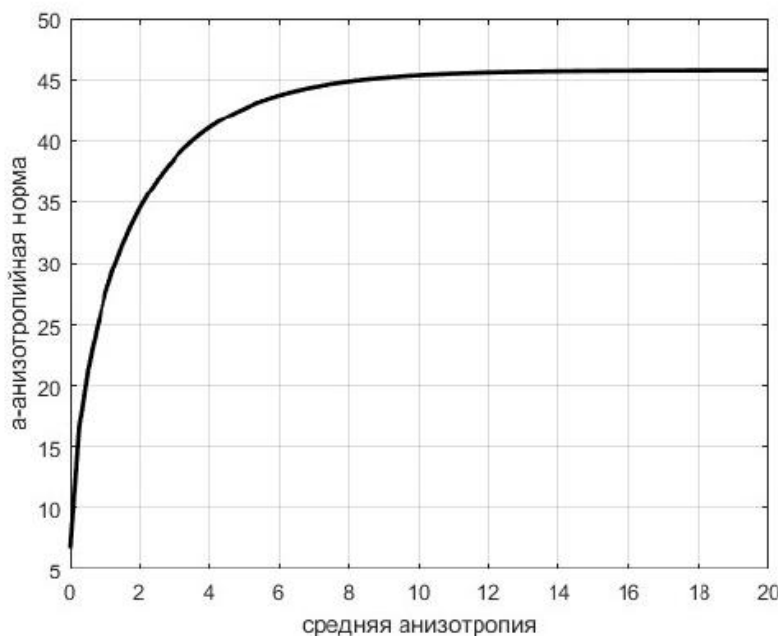


Рис. 1. График α -анизотропийной нормы в зависимости от значения средней анизотропии при длине прохода $\alpha_2 = 5$ (нулевые граничные данные)

При значении параметра длины прохода α_1 также наблюдается схожая асимптотика. Ниже приведена таблица значений верхней оценки α -анизотропийной нормы.

**Значения верхней оценки анизотропийной нормы в зависимости
от параметра длины прохода**

Значения параметра длины прохода α	Верхняя оценка $ F _a$ при нулевых граничных условиях	Верхняя оценка $ F _a$ при ненулевых граничных условиях
$\alpha_1 = 2$	10,9439	30,2934
$\alpha_2 = 5$	45,7357	3486,3

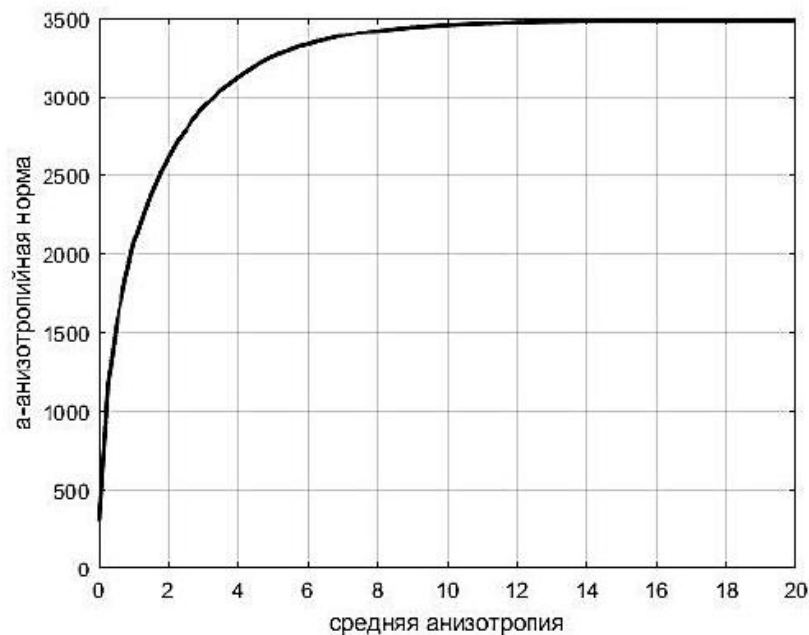


Рис. 2. График α -анизотропийной нормы в зависимости от значения средней анизотропии при длине прохода $\alpha_2 = 5$ (ненулевые граничные данные)

Обсуждение полученных результатов. По приведенным результатам здесь можно наблюдать, что с ростом числа точек внутри прохода наблюдается рост нормы, в зависимости от значения средней анизотропии норма тоже растет. Также стоит отметить, что при нулевых граничных условиях получается получить более низкое значение верхней оценки анизотропийной нормы. Это можно объяснить тем, что при получении необходимых соотношений (ЛМН) для вычисления нормы были применены различного рода допущения касательно конкретно заданного вида граничных данных. Поэтому оценка анизотропийной нормы при ненулевых граничных условиях считается более «грубой».

Закключение. Рассмотрен способ вычисления верхней границы анизотропийной нормы для двумерных стационарных систем. Приведена формулировка задачи и получены условия для вычисления минимальной границы сверху. Представлены результаты моделирования и проведен сравнительный анализ систем с нулевыми и ненулевыми граничными условиями. Вычислительный эксперимент был осуществлен с помощью пакета прикладных программ MATLAB с применением интерфейса YALMIP.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- [1] Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete Time-Invariant Systems. *Proc. 13th IFAC World Congress*, San-Francisco, 1996, pp. 179–184.
- [2] Rogers E., Galkowski K., Owens D.H. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes*. Berlin, Springer, 2007, vol. 349, 468 p.
- [3] Титов А.Д., Юрченков А.В. Анизотропийная норма линейной двумерной системы с нулевыми граничными условиями. *XIV Всерос. совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024): сб. тр.* Москва, ИПУ РАН, 2024, с. 100–104.
- [4] Чайковский М.М. Синтез анизотропийных регуляторов методами выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования. *Управление большими системами*. 2013, вып. 42, с. 100–152.
- [5] Tchaikovsky M.M., Timin V.N., Kustov A.Yu., Kurdyukov A.P. Numerical Procedures for Anisotropic Analysis of Time-Invariant Systems and Synthesis of Suboptimal Anisotropic Controllers and Filters. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79 (1), pp. 128–114.