

УДК 519.6:514.74

Моделирование эффективных ядер ползучести и релаксации полимерных композитов на основе метода асимптотического осреднения

Яхновский Алексей Денисович^(*) ayahnovsky@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация. Рассмотрен алгоритм вычисления эффективных ядер релаксации и ползучести полимерных композиционных материалов с периодической структурой. Для вычисления эффективных интегральных свойств вязкоупругости используются преобразование Фурье и метод асимптотического осреднения в сочетании с методом конечных элементов для решения локальных задач. Также приведен пример вычисления эффективных свойств однонаправленного (1D) композита.

Ключевые слова: вязкоупругость, релаксация, ползучесть, метод асимптотического осреднения, полимерные композиты

Modeling of effective creep and relaxation kernels of polymer composites based on the method of asymptotic averaging

Yakhnovskiy Aleksey Denisovich^(*) ayahnovsky@mail.ru

BMSTU, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, an algorithm for calculating effective relaxation and creep kernels of polymer composite materials with a periodic structure is considered. To calculate the effective integral properties of viscoelasticity, the Fourier transform and the asymptotic averaging method are used in combination with the finite element method to solve local problems. An example of calculating the effective properties of a unidirectional (1D) composite is also given.

Keywords: viscoelasticity, relaxation, creep, asymptotic averaging method, polymer composites

Введение. Полимерные композиционные материалы широко используются во многих областях современной промышленности. Поскольку такие материалы демонстрируют значительные вязкоупругие свойства, возникает необходимость их численного моделирования. Модели для описания изотропных вязкоупругих сред и их численные реализации обрели широкое развитие за последние годы, в то время моделирование вязкоупругости у анизотропных материалов, например, композитов, заметно отстает. В данной статье приводится реализация одного из методов вычисления эффективных вязкоупругих свойств композиционных материалов.

Материалы и методы. Существует множество различных способов вычисления осредненных свойств композиционных материалов, среди которых

одним из наиболее математически обоснованных является метод асимптотического осреднения (МАО) [1]. В сочетании с методом конечных элементов (МКЭ) для решения локальных задач [2], возникающих в МАО, он позволяет вычислять осредненные характеристики для композитов с ячейкой периодичности любой геометрической сложности.

В данной работе используется МАО в сочетании с МКЭ. Для описания вязкоупругих свойств используется модель линейной теории вязкоупругости.

Результаты. Определяющие соотношения каждой компоненты композиционного материала представим в форме Вольтерры [3]:

$$\sigma(t) = {}^4C \cdot \varepsilon(t) - \int_0^t {}^4K(t - \tau) \cdot \varepsilon(\tau) d\tau,$$

где $\sigma(t)$ — тензор напряжений; 4C — тензор мгновенных модулей упругости; $\varepsilon(t)$ — тензор малых деформаций; ${}^4K(t)$ — тензор ядер релаксации. При установившихся моногармонических колебаний для величин амплитуд напряжений и деформаций это соотношение примет вид

$$\sigma^* = {}^4C^*(\omega) \cdot \varepsilon^*,$$

где σ^* и ε^* — комплексные амплитуды тензоров напряжений и деформации

соответственно, а ${}^4C^*(\omega) = {}^4C - \int_0^\infty {}^4K(y) e^{-i\omega y} dy$ — тензор комплексных модулей упругости, вычисляемый с помощью Фурье-преобразования ядра релаксации, ω — частота колебаний. Таким образом, можно записать постановку задачи при моногармонических колебаниях вязкоупругой среды в следующем виде:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma^* = 0; \\ \varepsilon^* = \frac{1}{2}(\nabla \otimes u^* + (\nabla \otimes u^*)^T); \\ \sigma^* = {}^4C^*(\omega) \cdot \varepsilon^*; \\ \Sigma_\sigma: \sigma^* \cdot n = S^* e; \\ \Sigma_u: u^* = u^* e. \end{cases}$$

Здесь первое уравнение представляет собой условие равновесия, второе — выражение для амплитуды тензора малых деформаций через амплитуду вектора перемещений u^* , третье — определяющее соотношение для линейно-вязкоупругих сред при моногармонических колебаниях, четвертое и пятое — граничные условия.

Применение для данной системы МАО позволяет вычислить тензор эффективных комплексных модулей упругости ${}^4C^{\text{eff}}$ для композита, а взятие обратного Фурье-преобразования позволяет вычислить тензор эффективных ядер релаксации ${}^4K^{\text{eff}}(t)$.

Для изотропных сред ${}^4\mathbf{K}(t)$ задается через сдвиговое $K_G(t)$ и объемное $K_V(t)$ ядра релаксации. При этом для большинства сред полагают, что объемная релаксация отсутствует, то есть $K_V(t) \equiv 0$. Для трансверсально-изотропных сред ${}^4\mathbf{K}(t)$ задается через 5 спектральных ядер, а для ортотропных — через 9 [4].

Рассмотрим 1D-композит, состоящий из эпоксидной матрицы (ЭДТ-10) и керамических моноволокон. Керамические волокна положим чисто упругими с модулем Юнга $E_f = 300$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu_f = 0.27$. У матрицы $E_m = 3,3$ ГПа, $\nu_m = 0,35$, а ядро релаксации представимо в виде суммы убывающих экспонент: $K_G(t) = \sum_{\gamma=1}^3 \frac{A_G^{(\gamma)}}{\tau_G^{(\gamma)}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_G^{(\gamma)}}\right)$, где $A_G^{(1)} = 0,354$ ГПа, $A_G^{(2)} = 0,483$ ГПа, $A_G^{(3)} = 0,2175$ ГПа, $\tau_G^{(1)} = 4,218 \cdot 10^3$ с, $\tau_G^{(2)} = 5,793 \cdot 10^6$ с, $\tau_G^{(3)} = 7,792 \cdot 10^7$ с. Экспериментальные данные для определения ядра релаксации ЭДТ-10 взяты из работы [5].

С помощью предложенного алгоритма вычислим эффективные свойства для 1D-композита: 5 констант упругости и 5 ядер, представленных в аналогичном $K_G(t)$ виде. Константы упругости приведены в табл. 1, а константы ядер релаксации — в табл. 2. Константы ядер ползучести могут быть вычислены через константы ядер релаксации, поэтому в данной работе приведены лишь константы ядер релаксации.

Таблица 1

Эффективные упругие константы 1D-композита

Техническая константа упругости	Значение
E_L , ГПа	181,276
E_T , ГПа	13,1357
ν_L	0,297127
ν_T	0,423646
G_L , ГПа	4,74104

Таблица 2

Константы эффективных спектральных ядер релаксации 1D-композита

Спектральное ядро релаксации	Спектр значений, ГПа	Спектр времен, с
K_{11}^{eff}	0,21290922	4225,6169
	0,29157793	5809770,6
	0,13223623	78144862
K_{12}^{eff}	0,17129157	4254,9056
	0,2385001	5872693,7
	0,11062903	78796576

Окончание табл. 2

Спектральное ядро релаксации	Спектр значений, ГПа	Спектр времен, с
K_{22}^{eff}	1,5350927 2,1155718 0,96546708	4237,3628 5831746,9 78274566
K_{33}^{eff}	2,1667147 3,3022512 1,9241873	4383,9774 6336742,4 85609462
K_{44}^{eff}	2,6719224 3,7371155 1,7273743	4265,4717 5882345 78476151

Обсуждение полученных результатов. Предложенный алгоритм позволяет вычислять эффективные интегральные характеристики полимерных композиционных материалов, которые в основном являются анизотропными и требуют большее количество констант для описания свойств. В приведенном примере вычисленные ядра релаксации 1D-композита представимы в том же виде, что и у исходных компонент. Это позволяет далее использовать ту же самую постановку задачи для моделирования второго уровня, в котором вычисленный 1D-композит сам будет являться компонентом другого композита, например, тканевого.

Заключение. В данной работе предложен и реализован алгоритм, позволяющий вычислять эффективные вязкоупругие свойства композиционных материалов. Алгоритм представляется перспективным, поскольку позволяет моделировать полимерные композиты со сложной многоуровневой структурой путем последовательного вычисления эффективных свойств на каждом уровне. Также был произведен показательный расчет 1D-композита.

Список источников

- [1] Shapery R. Viscoelastic behavior and analysis of composite materials. *Mechanics of Composite Materials*, 1974, vol. 4, pp. 85–168
- [2] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. *Метод конечных элементов для решения локальных задач механики композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 68 с.
- [3] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.
- [4] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.
- [5] Максимов Р.Д., Плуме Э.З. Ползучесть однонаправленно армированных полимерных композитов. *Механика композитных материалов*, 1984, № 2, с. 215–223.