

УДК 534.2

Модально-селективная обработка случайных сигналов колебательных систем на основе ARMA/ARX-моделей

Карпов Иван Андреевич^()*karpov@imash.ac.ru
SPIN-код: 7944-8767

ИМАШ РАН, Москва, Россия

Аннотация. Представлен метод модально-селективной обработки случайных сигналов линейных колебательных систем на основе дискретно-временных ARMA/ARX-моделей, основанный на переходе от полиномиальной формы модели к представлению частотной характеристики в виде суммы простых дробей. Использовано свойство соответствия комплексно-сопряженных пар полюсов и соответствующих вычетов отдельным модам колебаний, что позволяет формировать вклад выбранной моды в передаточной функции и осуществлять ее селективное исключение или выделение. На численном примере продемонстрирована возможность подавления отдельных мод без применения полосовой частотной фильтрации. Обсуждены особенности, ограничения и возможные направления применения предложенного подхода при анализе вибрационных и акустических сигналов.

Ключевые слова: дискретно-временные случайные процессы, ARMA- и ARX-модели, модальный анализ, разложение на простые дроби, измерение собственных частот и коэффициентов потерь

Modal-selective processing of random oscillatory signals based on ARMA/ARX

Karpov Ivan Andreevich^()*karpov@imash.ac.ru
SPIN-code: 7944-8767

IMASH RAN, Moscow, Russia

Abstract. A method of modal-selective processing of random signals of linear oscillatory systems based on discrete-time ARMA/ARX models is presented, relying on the transition from the polynomial form of the model to the partial fraction expansion of the frequency response. The property of coupling complex conjugate pairs of poles and corresponding residues to individual oscillation modes is used, which makes it possible to form the contribution of the selected mode in the transfer function and to perform its selective suppression or extraction. A numerical example demonstrates the possibility of suppressing individual modes without frequency bandpass filtering. The features, limitations and possible directions of application of the proposed approach in the analysis of vibration and acoustic signals are discussed.

Keywords: discrete-time random processes, ARMA and ARX models, modal analysis, partial fraction expansion, measurement of natural frequencies and loss factors

Введение. В акустике и виброакустике инженерных систем одной из ключевых задач является интерпретация измеренных сигналов через модальную структуру системы — совокупность ее собственных форм и частот колебаний. Случайные и широкополосные возбуждения (шум, технологические воздействия, эксплуатационные нагрузки) приводят к формированию спектров отклика, в которых отдельные резонансные моды определяют локальные усиления уровней звукового давления и вибрации. Корректное выделение вкладов отдельных мод имеет принципиальное значение как для анализа, так и для последующей обработки и управления характеристиками систем.

Традиционно для выделения резонансных областей применяется полосовая фильтрация. Однако такой подход использует фиксированную частотную полосу и не обеспечивает строгого разделения модальных вкладов: из-за конечной крутизны амплитудно-частотной характеристики фильтра и перекрытия соседних резонансов возникает взаимное влияние мод, особенно в случае близко расположенных мод или при наличии мод с высоким коэффициентом потерь. Это затрудняет интерпретацию спектра и усложняет анализ исследуемых систем.

В настоящей статье применяется альтернативный подход, основанный на использовании дискретно-временных моделей семейства ARMA (Auto-Regressive Moving Average models) [1]. Данные модели описывают временные ряды посредством конечно-разностных уравнений, в которых текущее значение сигнала выражается через конечное число его предыдущих значений и значений входного воздействия. Такой подход позволяет моделировать динамику линейных систем по экспериментальным данным без явного задания непрерывной физической модели.

В качестве рабочей модели данной статьи рассматривается ARX-модель (AutoRegressive with eXogenous input), представляющая собой частный случай семейства ARMA-моделей при отсутствии стохастической составляющей и используемая для описания системы с заданным входом [2, 3]. В этом случае измеренный отклик системы описывается конечно-разностным уравнением:

$$x[n] + \sum_{p=1}^P a_p x[n-p] = \sum_{q=0}^{Q-1} b_q w[n-q], \quad (1)$$

где $x[n]$ — отклик системы, $w[n]$ — внешнее воздействие (заданный вход), a_p и b_q — параметры модели, а (P, Q) — ее порядок.

При корректном выборе порядка модель (1) аппроксимирует динамику линейной колебательной системы и позволяет перейти к полиномиальной форме частотной характеристики

$$H(\omega) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{\sum_{q=0}^{Q-1} b_q z^{-q}}{1 + \sum_{p=1}^P a_p z^{-p}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-i\omega T} + \dots + b_{Q-1} e^{-i\omega T(Q-1)}}{1 + a_1 e^{-i\omega T} + \dots + a_P e^{-i\omega T P}}, \quad (2)$$

где $A(z^{-1})$ и $B(z^{-1})$ — полиномы, определяемые параметрами модели, $z^{-1} = e^{-i\omega T}$, $T = Fs^{-1}$, Fs — частота дискретизации сигнала. Такое представление обеспечивает прямой переход к анализу спектральной плотности мощности и модальной структуры системы. Полюса системы определяются корнями полинома $A(z^{-1})$, а их комплексно-сопряженные пары соответствуют отдельным модам колебательной системы.

В ранних работах авторов [4] был сформулирован критерий эквивалентности дискретной (1) и непрерывной моделей колебательной системы, согласно которому при соответствующем выборе коэффициентов конечно-разностного уравнения его решение (импульсная переходная функция $h[nT]$) совпадает со значениями решения соответствующего дифференциального уравнения движения в дискретные моменты времени ($h[nT] = h(t)$, где $t = nT$). Тем самым была обоснована применимость дискретно-временных ARMA/ARX-моделей для описания колебательных систем, подчиняющихся непрерывным уравнениям движения, и подтверждена корректность их использования в задачах акустики и виброакустики.

Материалы и методы. По измеренным входному $w[n]$ и выходному $x[n]$ сигналам можно определить параметры ARX-модели a_p и b_q , а следовательно, полиномы $A(z^{-1})$ и $B(z^{-1})$, входящие в выражение частотной характеристики (2). Однако для колебательных систем более удобным является модальное представление передаточной функции. В модальном анализе частотная характеристика системы может быть записана в виде разложения на простые дроби [5, 6]:

$$H(\omega) = \sum_k \left(\frac{\Gamma_k}{1 - p_k z^{-1}} + \frac{\Gamma_k^*}{1 - p_k^* z^{-1}} \right) + k(z^{-1}), \quad (3)$$

где p_k и p_k^* — комплексно-сопряженная пара полюсов, а Γ_k и Γ_k^* — соответствующие вычеты. Каждая такая пара определяет вклад отдельной моды колебательной системы в частотную характеристику и спектральную плотность мощности отклика (СПМ). Функция $k(z^{-1})$ представляет собой полиномиальную часть разложения, возникающую в случае, когда порядок числителя полиномиальной формы (2) не меньше порядка знаменателя.

Таким образом, частотная характеристика системы может быть представлена как сумма вкладов отдельных мод. Это позволяет выполнять модально-селективную обработку сигналов непосредственно на уровне модального представления передаточной функции $H(\omega)$. Вклад отдельной моды может быть выделен или исключен из передаточной функции путем удаления соответствующей пары полюсов и вычетов из разложения (3).

Практически это реализуется следующим образом. После определения параметров модели a_p и b_q находятся полюса системы — корни полинома $A(z^{-1})$. Далее определяется пара комплексно-сопряженных полюсов p_i и p_i^* , соответствующая выбранной моде (конкретной резонансной частоте и, вообще говоря, коэффициенту потерь). Процедура определения модальных пара-

метров через p_i и p_i^* и наоборот подробно описана в работах [4]. Благодаря тому, что существует развитый математический аппарат перехода от полиномиального представления передаточной функции (2) к разложению (3), также можно определить соответствующие паре полюсов p_i и p_i^* вычеты γ_i и γ_i^* . После этого вклад выбранной моды может быть исключен из передаточной функции, что соответствует исключению соответствующих слагаемых из разложения (3).

Полученная таким образом модифицированная передаточная функция описывает систему без выбранной моды колебаний. В отличие от традиционной полосовой фильтрации, такой подход не требует задания фиксированной частотной полосы и позволяет работать непосредственно с параметрами динамической модели системы. При этом возможна не только селективная компенсация отдельных мод, но и их анализ в изолированном виде — путем рассмотрения соответствующих слагаемых модального разложения отдельно от остальных вкладов.

Для анализа спектральных характеристик системы используется спектральная плотность мощности отклика [7]:

$$S_x(\omega) = |H(\omega)|^2 S_w(\omega), \quad (4)$$

где $S_w(\omega)$ — спектральная плотность мощности входного возбуждающего воздействия $w[n]$. В случае широкополосного случайного возбуждения (белого шума) $S_w(\omega) = \text{const}$, и форма спектра отклика определяется квадратом модуля передаточной функции $H(\omega)$. Таким образом, анализ спектральной плотности мощности может выполняться непосредственно на основе модифицированной передаточной функции системы.

Это представление лежит в основе предлагаемого в работе подхода модально-селективной обработки сигналов.

Результаты. Для иллюстрации предложенного подхода рассмотрен численный пример линейной колебательной системы с тремя резонансными модами. Система возбуждается широкополосным случайным сигналом $w[n]$, после чего по входному $w[n]$ и выходному $x[n]$ сигналам идентифицируется модель вида (1). На основании найденных коэффициентов модели формируется полиномиальное представление передаточной функции (2), которое далее преобразуется в модальное разложение (3).

В результате идентификации модели получено три комплексно-сопряженные пары полюсов p_i и p_i^* , соответствующие трем модам колебательной системы, а также соответствующие им вычеты γ_i и γ_i^* . Для анализа влияния отдельных мод использовалось представление передаточной функции (3), позволяющее выделить вклад выбранной моды. Для i -й моды этот вклад имеет вид:

$$H_{\text{mode}}(\omega) = \frac{\gamma_i}{1 - p_i z^{-1}} + \frac{\gamma_i^*}{1 - p_i^* z^{-1}}. \quad (5)$$

Тогда передаточная функция системы без выбранной моды определяется выражением

$$H_{\text{rest}}(\omega) = H(\omega) - H_{\text{mode}}(\omega). \quad (6)$$

Таким образом формировалась модифицированная передаточная функция, описывающая систему без выбранной моды.

На рис. 1 представлены результаты такого анализа. Пунктирной линией показана спектральная плотность мощности отклика системы, полученная по реализации сигнала $x[n]$ классическим спектральным методом. Сплошной линией показана спектральная плотность мощности, вычисленная на основе модифицированной передаточной функции согласно выражениям (4)–(6). Каждый график на рисунке соответствует случаям последовательного исключения мод системы.

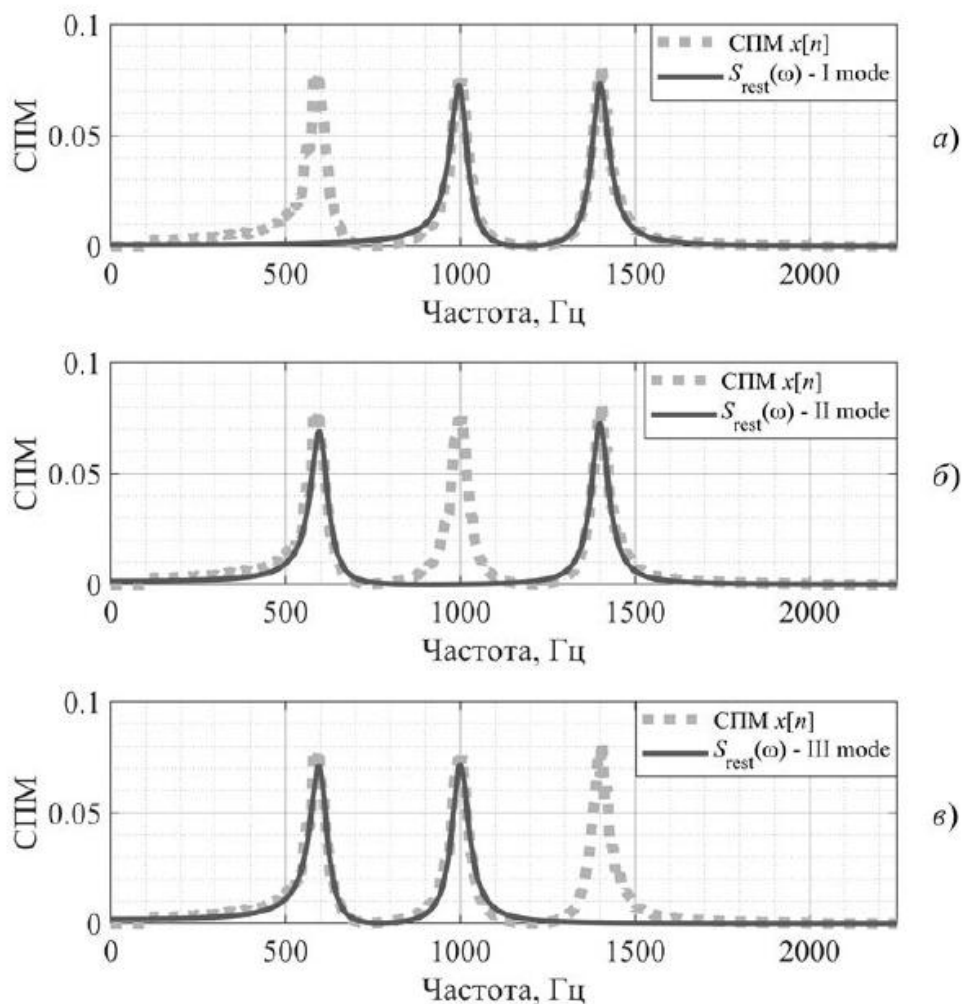


Рис. 1. Спектральная плотность мощности (СПМ) отклика системы $x[n]$ с тремя модами и результаты последовательного исключения мод: а — исключена первая мода; б — исключена вторая мода; в — исключена третья мода. Пунктир — СПМ, полученная по реализации сигнала $x[n]$; сплошная линия — СПМ, вычисленная по модифицированной передаточной функции $H_{\text{rest}}(\omega)$

Из представленных результатов видно, что исключение соответствующей пары полюсов приводит к исчезновению соответствующего резонансного пика в спектральной плотности мощности, тогда как остальные моды сохраняют свою структуру. При этом рассчитанная по модели спектральная плотность мощности хорошо согласуется со спектром, полученным по реализации сигнала.

Полученные результаты подтверждают возможность селективного анализа отдельных мод колебательной системы непосредственно на уровне модального представления передаточной функции без применения традиционной частотной полосовой фильтрации.

Обсуждение. Представленный численный пример иллюстрирует возможность анализа и модификации спектральной структуры отклика колебательной системы. В отличие от традиционной полосовой фильтрации, при которой воздействие осуществляется на фиксированную частотную полосу, предложенный подход позволяет работать непосредственно с отдельными модами системы как с элементами модального разложения. Это позволяет как исключать вклад отдельных мод, так и рассматривать их изолированно, анализируя вклад конкретной моды в спектральную структуру сигнала.

Особенностью рассматриваемого подхода является использование дискретно-временных ARMA/ARX-моделей в качестве рабочей модели системы. Такие модели строятся непосредственно по измеренным временным сигналам и позволяют получить полиномиальное представление передаточной функции без необходимости подгонки модели к частотной характеристике системы. В отличие от методов, основанных на аппроксимации спектров или кривых частотного отклика (например, методов *curve fitting*), параметры ARMA/ARX-модели определяются непосредственно из временных рядов и позволяют относительно просто перейти к представлению (3) передаточной функции. Это существенно упрощает дальнейшее выделение отдельных мод и делает процедуру модально-селективной обработки сигналов более формализованной и удобной.

Следует отметить, что эффективность метода определяется корректностью идентификации модели и адекватностью выбранного порядка ARMA/ARX-модели. При неточном определении полюсов и вычетов возможно искажение модального представления системы. Тем не менее предложенный подход может быть полезен в задачах анализа вибрационных и акустических сигналов, в частности при исследовании резонансных свойств конструкций, анализе акустических характеристик помещений, обработке аудиосигналов и выделении отдельных модальных компонент в сложных спектрах. Перспективным направлением является также использование модального представления сигналов в гибридных методах обработки данных, включая системы машинного обучения, где параметры мод могут использоваться как информативные признаки.

Заключение. В работе рассмотрен подход к модально-селективной обработке случайных сигналов линейных колебательных систем на основе дис-

кретно-временных ARMA/ARX-моделей. Показано, что использование полиномиального представления передаточной функции модели позволяет перейти к разложению на простые дроби, в котором каждая комплексно-сопряженная пара полюсов и соответствующие вычеты определяют вклад отдельной моды колебаний.

На численном примере продемонстрировано, что вклад выбранной моды может быть выделен или исключен из передаточной функции путем удаления соответствующих слагаемых модального разложения. Полученные результаты подтверждают возможность селективной обработки мод непосредственно на уровне параметров модели без применения частотной полосовой фильтрации.

Предложенный подход может быть использован при анализе акустических и вибрационных сигналов, исследовании резонансных свойств инженерных систем, а также при обработке сигналов со сложной модальной структурой. Перспективным направлением дальнейших исследований является применение предложенного подхода к экспериментальным акустическим данным, полученным при исследовании музыкальных инструментов и других сложных многомодовых систем [5-8].

*Работа выполнена за счет средств Государственного задания,
код научной темы FFGU-2026-0001.*

Список источников

- [1] Карпов И.А., Бобровницкий Ю.И. Экспериментальный метод определения потерь энергии в колебательных системах, основанный на ARMA-моделировании. *Акустический журнал*, 2025, т. 71, № 2, с. 155–175.
<https://doi.org/10.31857/S0320791925020018>
- [2] Льюнг Л. *Идентификация систем. Теория для пользователя*. Москва, Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1991, 432 с.
- [3] ARMAX model. MathWorks System Identification Toolbox Documentation. URL: <https://www.mathworks.com/help/ident/ref/armax.html> (дата обращения 06.03.2026).
- [4] Бобровницкий Ю.И., Карпов И.А., Дискретная акустика: ARMA-моделирование временных процессов, теория. *Акустический журнал*, 2023, т. 69, № 6, с. 665–684.
<https://doi.org/10.31857/S0320791923600671>
- [5] Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. *Цифровая обработка сигналов*. Москва, Техносфера, 2019, 1048 с.
- [6] Ewins D.J. *Modal Testing: Theory and Practice*. Letchworth, England, Research Studies Press, 1986, 562 p.
- [7] Марпл мл. С.Л. *Цифровой спектральный анализ и его приложения*. Москва, Мир, 1990, 584 с.
- [8] Smith III J.O. *Physical Audio Signal Processing: for Virtual Musical Instruments and Digital Audio Effects*. Stanford, W3K Publishing, 2010, 826 p.