

УДК 534.2

Численное моделирование распространения звукового удара в турбулентном пограничном слое атмосферы с применением двух эволюционных моделей

Корунов Алексей Олегович^{1, 2(*)}

korunov.ao@phystech.edu

SPIN-код: 1321-0083

*Гусев Владимир Андреевич*³

vgusev@bk.ru

SPIN-код: 7817-0866

¹ МФТИ (НИУ), Долгопрудный, Московская обл., Россия² ЦАГИ, Жуковский, Московская обл., Россия³ МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия

Аннотация. На основе уравнений типов HOWARD и ХЗК проведено численное моделирование распространения N-волны звукового удара через атмосферную турбулентность, представленную однородными изотропными пульсациями скорости со спектром фон Кармана. Начальный профиль N-волны модифицирован с применением эмпирической формулы для времени нарастания на ударных фронтах. Исследована сеточная сходимость решений. Проведено сравнение физических результатов, полученных по обоим моделям. Показано, что модель типа HOWARD может обладать более высокой эффективностью счета, чем модель типа ХЗК, в двумерной пространственной постановке.

Ключевые слова: громкость звукового удара, атмосферная турбулентность, ХЗК, HOWARD, дифракция, WENO5

Numerical modelling of sonic boom propagation in atmospheric turbulent boundary layer using two evolutionary models

Korunov Aleksei Olegovich^{1, 2(*)}

korunov.ao@phystech.edu

SPIN-code: 1321-0083

*Gusev Vladimir Andreevich*³

vgusev@bk.ru

SPIN-code: 7817-0866

¹ MIPT MIPT (NRU), Dolgoprudny, Russia, Dolgoprudny, Moscow region, Russia² TsAGI, Zhukovsky, Moscow region, Russia³ Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, Russia

Abstract. Sonic boom N-wave propagation through atmospheric turbulence represented by homogeneous isotropic velocity pulsations with von Karman spectrum is performed on the basis of HOWARD and KZK type equations. Initial N-wave signature was modified with empirical formula for rise time at shocks. Grid convergence for numerical solutions is investigated. Physical results of models are compared. It is shown that two-dimensional HOWARD type equation can be solved with better numerical efficiency than KZK type equation.

Keywords: sonic boom loudness, atmospheric turbulence, KZK, HOWARD, diffraction, WENO5

Введение. Одним из существующих на сегодняшний день научно-технических вызовов является создание сверхзвуковых пассажирских самолетов (СПС) второго поколения [1]. При этом главным барьером оказывается экологический фактор, требующий применения большого числа взаимно согласованных технологических решений [2, 3, 4]. Одна из ключевых технологий разрабатываемых концепций СПС заключается в снижении уровня звукового удара [4, 5, 6].

Известно, что распространение нелинейных волн ЗУ на далекие расстояния приводит временной профиль избыточного давления к виду N-волны [7, 8]. Предметом изучения данной работы, как и работы [9], являются N-волны в турбулентном пограничном слое атмосферы (приземном слое толщиной порядка 1 км) [10]. Основной задачей статьи [9] было сравнение моделей типов HOWARD (Heterogeneous One-Way Approximation for Resolution of Diffraction) [11, 12] и ХЗК (Хохлова — Заболотской — Кузнецова) [13, 14] в задаче о распространении N-волны в турбулентном пограничном слое атмосферы в двумерной постановке. Сравнение численных решений при этом проводилось в «жестких» условиях: начальный профиль избыточного давления содержал математические разрывы, а дисперсионно-диссипативные факторы в среде были опущены. В результате применения избыточно сложного итерационного метода Гаусса — Зейделя [15] в рамках задачи дифракции уравнения типа ХЗК решение занимало большое количество времени. Более того, при очередном сгущении сетки оно теряло устойчивость, что явилось следствием использования комбинации WENO5 [16] и явной схемы Эйлера 1-го порядка в задаче переноса. Сходимости решения по модели типа ХЗК до практически интересного уровня точности в [9] не было достигнуто, хотя качественное и количественное соответствие «эталонному» решению по модели типа HOWARD было отмечено. Задачами текущей работы является повышение эффективности методов численного решения уравнений типов HOWARD и ХЗК и физическое сравнение результатов моделей в задаче из [9] при модифицированных начальных условиях, учитывающих конечность ширины реальных ударных фронтов в составе N-волны.

Материалы и методы. Распространение N-волн ЗУ в турбулентном пограничном слое атмосферы в данной статье моделируется путем численного решения однонаправленных нелинейных уравнений типов ХЗК и HOWARD с применением схемы расщепления операторов первого порядка [17]. Для повышения эффективности применяется упрощенный алгоритм решения задачи дифракции уравнения типа ХЗК. Схема Эйлера 1-го порядка в рамках задачи переноса заменена на явный метод Рунге-Кутты 3-го порядка (метод Хойна) [18].

Как и в [9], атмосферная турбулентность представлена однородными изотропными пульсациями скорости с энергетическим спектром фон Кармана, сгенерированными с помощью метода случайных мод Фурье [19]. Все остальные параметры среды приняты постоянными.

Целевой характеристикой расчетов является громкость в метрике PL [20], являющаяся наиболее употребляемой мерой восприятия ЗУ человеком

[4, 6, 19], учитывающей спектральный состав волн. Распределения громкости, полученные в результате численного моделирования, используются при анализе сеточной сходимости решения.

Результаты. Уравнения типов HOWARD и ХЗК в среде с пульсациями ветра в отсутствие диссипативных факторов записаны в безразмерном виде [9]:

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = D + \left(P + \frac{M_x}{2\alpha} \right) \frac{\partial P}{\partial \tau}. \quad (1)$$

Здесь $P = p'/p_{\text{ref}}$ — отношение размерного избыточного давления p' к некоторой постоянной p_{ref} ; $\sigma = x/\bar{x}$ — отношение координаты x вдоль направления распространения возмущения к величине $\bar{x} = \rho_0 c_0^3 / (\beta \omega_0 p_{\text{ref}})$ — длине формирования разрыва плоской волны с частотой ω_0 и амплитудой p_{ref} , распространяющейся в среде с плотностью ρ_0 , скоростью звука c_0 и коэффициентом нелинейности β ; $\eta = y/\bar{x}$ — обезразмеренная на $\bar{x}$ координата y , введенная в направлении, перпендикулярном к оси x ; $\tau = \omega_0(t - x/\bar{c}_0)$ — фазовая переменная; $\alpha = c_0/(2\omega_0\bar{x})$ — коэффициент, характеризующий отношение характерной длины волны возмущения к длине формирования разрыва; $M_x = u_x/c_0$ — число Маха продольной компоненты турбулентных пульсаций скорости u_x в пограничном слое атмосферы; D — дифракционный оператор, записывающийся для уравнения типа HOWARD в виде

$$D_H = \alpha \int_{-\infty}^{\tau} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} \right) d\tau', \quad (2)$$

а для уравнения типа ХЗК

$$D_{ХЗ} = \alpha \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} d\tau'. \quad (3)$$

Для численного решения (1) применяется схема расщепления операторов первого порядка. В рамках данной схемы оператор перехода от значения σ_0 к значению $\sigma_0 + \Delta\sigma$ эволюционной координаты σ был записан в виде

$$P(\sigma_0 + \Delta\sigma) = P_{\Delta\sigma}^D \quad P_{\Delta\sigma}^T + O(\Delta\sigma).$$

Здесь знак « $\circ$ » означает композицию решений двух подзадач, в качестве которых были выделены задача дифракции

$$P_{\Delta\sigma}^D: \frac{\partial P}{\partial \sigma} = D, \quad (4)$$

и задача переноса

$$P_{\Delta\sigma}^T: \frac{\partial P}{\partial \sigma} = \left(P + \frac{M_x}{2\alpha} \right) \frac{\partial P}{\partial \tau}. \quad (5)$$

Задача дифракции (4) с оператором (2) (уравнение типа HOWARD) решается с помощью спектрального подхода, предложенного в оригинальной работе [11] (более подробное описание см. в [9]). Та же задача с оператором (3) (уравнение типа ХЗК) решается с помощью явно-неявной схемы в рамках

метода конечных разностей, описанной в [17]. В качестве граничного условия по поперечной переменной η используется условие жесткой стенки $\frac{\partial P}{\partial \eta} = 0$. В работе [9] возникающая при этом система линейных уравнений с матрицей A размерности $N_\eta \times N_\eta$ разбивалась на полосы по переменной η и в каждой полосе подсистема уравнений решалась методом Гаусса — Зейделя. Данный алгоритм итерационный и требует множественных обменов между соседними процессами, что существенно замедляло решение. Такой подход актуален для задач, в которых матрица A зависит от переменной t . Однако в задачах, рассматриваемых авторами в текущей работе, она является функцией только переменной σ . Благодаря этому можно обратить матрицу A единожды за шаг по σ и находить решение системы, используя A^{-1} для всех слоев по t . По предварительным оценкам, такое упрощение позволяет ускорить решение системы в 60 раз по сравнению с методом Гаусса-Зейделя при решении целевой задачи [9] на сетке grid5 ($N_\eta = 2001$). При этом задача дифракции решается в одном потоке, т. е. алгоритмы распараллеливания не применяются.

В рамках обоих рассматриваемых уравнений задача переноса имеет вид (5). При решении уравнений типа HOWARD обычно применяется метод потенциала [11, 12], основанный на точном решении (5) как квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных. Другим применяемым в текущей работе подходом является метод конечных объемов (МКО) со схемой Хойна 3 порядка по переменной σ и аппроксимацией потоков на границах ячеек схемой WENO5.

В силу того что турбулентный пограничный слой обычно занимает менее 10% от общей дистанции распространения возмущений, влияние диссипативных эффектов проявляется главным образом при распространении волн ЗУ от ЛА до его верхней границы. С целью достижения физически более корректной постановки расчетной задачи начальное условие целевой задачи статьи [9] было модифицировано. Наряду с разрывным начальным профилем избыточного давления рассмотрены кусочно-линейный и гладкий профили (рис. 1, *a*) с конечным «временем нарастания» t_{sh} избыточного давления в скачках, заданным эмпирической формулой [21] $t_{sh} = \frac{C}{p'_{\max}}$, где $C = 150$ Па·мс — эмпирическая постоянная, $p'_{\max}$ — максимальное значение (амплитуда) в профиле N-волны. В данном случае $p'_{\max} = 50$ Па, а длительность волны задана равной $T_0 = 150$ мс. Гладкий профиль рис. 1, *a* задан по формуле [14]

$$p'_0(\tau) = p'_{\max} \frac{\tau}{2T_0} \left[-\operatorname{th} \left(\frac{\tau + T_0}{0.455t_{sh}} \right) + \operatorname{th} \left(\frac{\tau - T_0}{0.455t_{sh}} \right) \right].$$

Для чистоты сравнения результатов с результатами [9] значения параметров уравнения и размеры расчетной области заданы такими же: продольный размер $x_{\max} = 1500$ м ($x \in [0, x_{\max}]$), поперечный размер $y_{\max} = 2000$ м ($y \in [-y_{\max}, y_{\max}]$), скорость звука $c_0 = 340$ м/с, плотность $\rho_0 = 1,2$ кг/м³,

обезразмеривающие давление и частота $p_{\text{ref}} = 12000 \text{ Па}$, $\omega_0 = \frac{1}{T_0} \approx \approx 13.3 \text{ Гц}$. Поле пульсаций продольной компоненты скорости u_x идентично заданному в целевой задаче статьи [9] (рис. 1, б).

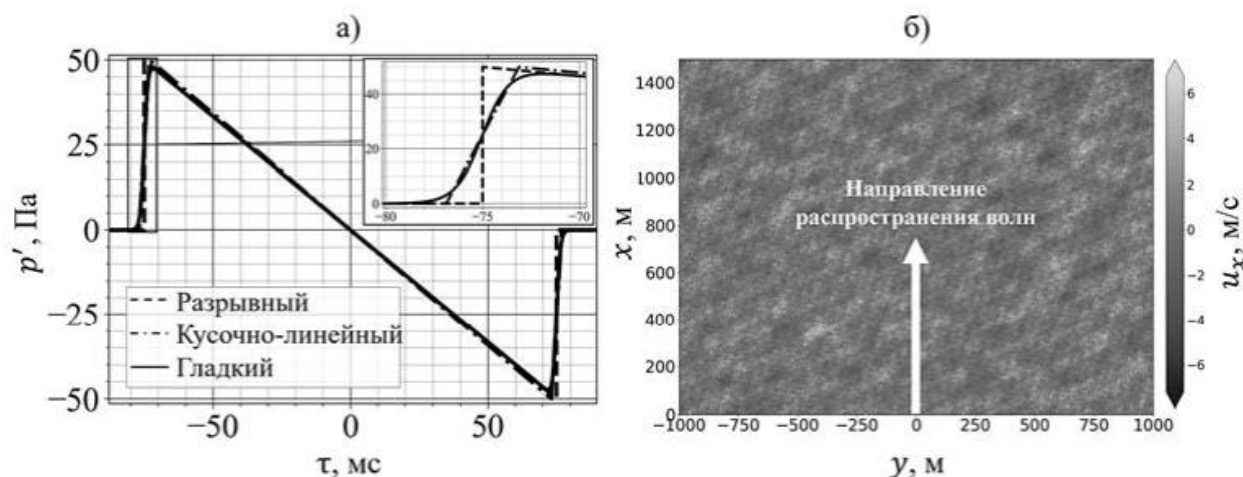


Рис. 1. Разрывный и модифицированные начальные профили избыточного давления (а) и поле турбулентных пульсаций продольной компоненты скорости (б)

Для проведения расчетов сформировано две системы из трех вложенных сеток (см. таблицу). На сетках первой системы (grid11, grid12, grid13) проведены расчеты по обоим уравнениям с применением МКО в задаче переноса, а сетках второй системы (grid21, grid22, grid23) — расчеты по модели типа HOWARD с применением метода потенциала. С учетом диссипативных свойств метода потенциала [9] сетки второй системы сгущены в 9.4 раза в направлении τ относительно сеток первой системы.

Параметры расчетных сеток с использованием МКО и метода потенциала

МКО (WENO5 + heun)		Метод потенциала	
Название сетки	Характеристики сеток ($\Delta x, \Delta y, f_s$)	Название сетки	Характеристики сеток ($\Delta x, \Delta y, f_s$)
grid11	(2 м, 2 м, 8 кГц)	grid21	(4 м, 4 м, 37.5 кГц)
grid12	(1 м, 1 м, 16 кГц)	grid22	(2 м, 2 м, 75 кГц)
grid13	(0.5 м, 0.5 м, 32 кГц)	grid23	(1 м, 1 м, 150 кГц)

На рис. 2 представлены фрагменты поперечных распределений громкости ЗУ в метрике PL на финальном слое $x = x_{\text{max}}$, полученные по модели типа HOWARD при использовании МКО в задаче переноса для случая кусочно-линейного начального профиля.

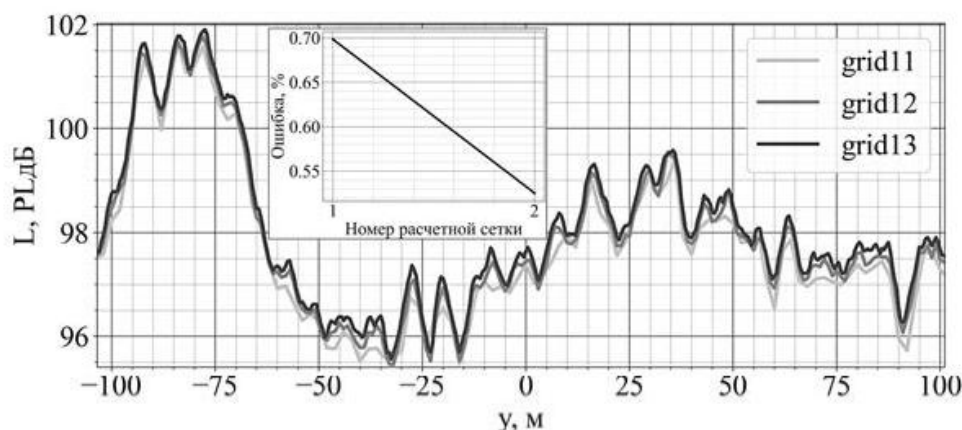


Рис. 2. Поперечные распределения громкости в метрике PL для решений уравнения типа HOWARD с применением МКО

По поперечным распределениям рассчитана относительная ошибка расчета в процентах (черный график внутри рис. 2). Видно, что для расчетов с применением МКО ошибка не превосходит 0,7 %, а уровень ошибки на второй сетке составил 0,53 %. Максимальный и минимальный уровни ошибки для соответствующих расчетов с применением метода потенциала (на второй системе сеток) составили соответственно 1,15 и 0,66 %. Сравнение решений по моделям типов HOWARD и ХЗК на сетке grid13 показало, что их отличие не превосходит 0,5 %.

Для оценки эффективности применяемых в работе методов моделирования на рис. 3, а приведены зависимости времени счета от пространственного шага расчетной сетки, а на рис. 3, б построены зависимости времени счета от относительной ошибки определения громкости в метрике PL для случая непрерывного начального профиля.

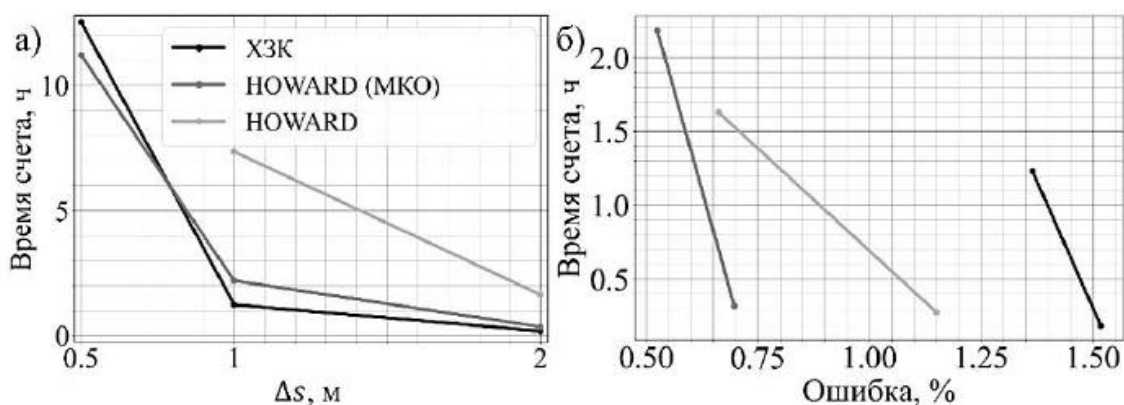


Рис. 3. Зависимости времени счета от пространственного шага сетки (а) и от относительной ошибки (б)

Обсуждение. В результате модификации алгоритмов расчета наблюдается существенное снижение расчетного времени по модели типа ХЗК, о чем свидетельствует черный график на рис. 3, а. Расчет на наиболее мелкой сетке

grid13, соответствующей пространственным шагам 0.5 м и частоте дискретизации временного профиля 32 кГц, занял не многим более 12 ч, тогда как расчет на сетке grid5 с характеристиками (1 м, 1 м, 8 кГц) занимал порядка 5 суток. При кусочно-линейном начальном профиле избыточного давления уже на сетке grid11 уровень ошибки расчета оказывается порядка 1,5 % (рис. 3, б), что является следствием исключения излишней высокочастотной составляющей в начальном условии, имевшей место при разрывном начальном профиле [9]. Следовательно, в результате модификаций подхода к численному решению уравнения типа ХЗК и учета характерной ширины ударных фронтов удалось добиться возможности проведения расчетов, дающих практически интересующие уровни точности при разумных временах счета.

Получена сходимость решения задачи с кусочно-линейным начальным профилем по уравнению типа HOWARD с применением МКО в задаче переноса (рисунок 2). При этом уровни ошибки (менее 0.7%) оказываются существенно ниже ошибок, полученных для модели типа ХЗК (порядка 1.5%) (рисунок 3б), при сопоставимых временах счета (рисунок 3а).

Сопоставление решений, полученных по двум моделям на сетке grid13 показало, что поперечные распределения громкости в метрике PL совпадают с точностью до 0.5%, что не превосходит уровня численной ошибки. С практической точки зрения решения можно считать физически эквивалентными.

Заключение. В целом, поставленные задачи данной работы можно считать выполненными. На рассмотренной модельной задаче о распространении N-волны ЗУ в турбулентном пограничном слое получена сеточная сходимость решений эволюционных уравнений типов HOWARD и ХЗК в упрощенной записи (1) до практически интересных уровней точности при разумных временах счета. Поскольку задача дифракции вида (4) является наиболее ресурсоемкой частью таких моделей, а метод разрешения нелинейности определяет устойчивость численного решения, полученные результаты свидетельствуют об эффективности применяемых методов и для более сложных уравнений данного типа, учитывающих скалярные неоднородности и диссипативные факторы в атмосфере. Рассмотренные физические модели показали свою идентичность в рамках рассмотренной задачи. Несмотря на замечания других авторов о высокой ресурсоемкости модели типа HOWARD за счет применения спектрального алгоритма для решения дифракционной задачи [12, 22], полученные результаты свидетельствуют о более высокой эффективности этого алгоритма по сравнению с уравнением типа ХЗК в двумерной постановке. Следовательно, сформированный алгоритм для уравнения типа HOWARD может эффективно применяться для задач с широким пространственным спектром, где модель типа ХЗК становится физически неприменимой [11].

Список источников

- [1] Chernyshev S.L., Pogosyan M.A., Sypalo K.I. On ecologically-safe high-speed vehicles: conceptual design study of the next generation supersonic transport. *Acta Astronautica*, 2024, no. 216, pp. 437–445.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2023.11.040>
- [2] Kopiev V.F., Belyaev I.V., Dunaevsky A.I., Poukhov A.A., Trofimovsky I.L. On the fundamental possibility of a supersonic civil aircraft to comply with ICAO noise requirements using existing technologies. *Aerospace*, 2022, vol. 9, no. 187.
<https://doi.org/10.3390/aerospace9040187>
- [3] Аландарь А.Д., Ланшин А.И., Евстигнеев А.А., Якубовский К.Я., Силуянова М.В. Обзор проблем создания сверхзвукового пассажирского самолета нового поколения в части силовой установки. *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*, 2023, т. 22, № 1, с. 7–28.
- [4] Bonavolontà G., Lawson C., Riaz A. Review of Sonic Boom Prediction and Reduction Methods for Next Generation of Supersonic Aircraft. *Aerospace*, 2023, vol. 10, no. 11, pp. 917–961. <https://doi.org/10.3390/aerospace10110917>
- [5] Коваленко В.В., Чернышев С.Л. К вопросу о снижении звукового удара. *Ученые записки ЦАГИ*, 2006, т. XXXVII, № 3, с. 53–63.
- [6] Han Z., Qiao J., Zhang L., Chen Q., Yang H., Ding Y., Zhang K., Song W., Song B. Recent progress of efficient low-boom design and optimization methods. *Progress in Aerospace Sciences*, 2024, vol. 146. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2024.101007>
- [7] Руденко О.В., Маков Ю.Н. Звуковой удар: от физики нелинейных волн до акустической экологии. *Акустический журнал*, 2021, т. 67, № 1, с. 3–30.
- [8] Руденко О.В., Солуян С.И. *Теоретические основы нелинейной акустики*. Москва, Наука, 1975, 288 с.
- [9] Bakhne S., Korunov A.O., Usov L.A. Modeling of Sonic Boom N-Wave Propagation through Atmospheric Turbulence Using Evolutionary Models. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2024, vol. 16, pp. S76–S95.
<https://doi.org/10.1134/S2070048224700820>
- [10] Salomons E.M. *Computational Atmospheric Acoustics*. Kluwer Academic Publications, 2001.
- [11] Dagrau F., Rénier M., Marchiano R., Coulouvrat F. Acoustic shock wave propagation in a heterogeneous medium: a numerical simulation beyond the parabolic approximation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, vol. 130, no. 1, pp. 20–32.
<https://doi.org/10.1121/1.3583549>
- [12] Luquet D., Marchiano R., Coulouvrat F. Long range numerical simulation of acoustical shock waves in a 3D moving heterogeneous and absorbing medium. *Journal of Computational Physics*, 2019, vol. 379, pp. 237–261.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.11.041>
- [13] Кузнецов В.П. Уравнения нелинейной акустики. *Акустический журнал*, 1970, т. 16, № 4, с. 548–553.
- [14] Юлдашев П.В., Карзова М.М., Хохлова В.А., Блан-Бенон Ф. Численное моделирование нелинейного параболического уравнения для анализа статистики воспринимаемого уровня шума волны звукового удара после прохождения турбулентного слоя атмосферы. *Акустический журнал*, 2021, т. 67, № 1, с. 31–44.

- [15] Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы*. Москва, Наука, 1989, 432 с.
- [16] Zhang R., Zhang M., Shu C.-W. On the order of accuracy and numerical performance of two classes of finite volume WENO schemes. *Commun. Comput. Phys.*, 2011, vol. 9, pp. 807–827. <https://doi.org/10.4208/cicp.291109.080410s>
- [17] Lee Y.S., Hamilton M.F. Time-domain modeling of pulsed finite-amplitude sound beams. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, vol. 97, no. 2, pp. 906–917. <https://doi.org/10.1121/1.412135>
- [18] Hermes V., Klioutchnikov I., Olivier H. Linear stability of WENO schemes coupled with explicit Runge-Kutta schemes. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2011, vol. 69, no. 6, pp. 1065–1095. <https://doi.org/10.1002/fld.2626>
- [19] Kanamori M., Takahashi T., Naka Y., Makino Y., Takahashi H., Ishikawa H. Numerical Evaluation of Effect of Atmospheric Turbulence on Sonic Boom Observed in D-SEND#2 Flight Test. 55th AIAA Aerospace Sciences Meeting, 2017. <https://doi.org/10.2514/6.2017-0278>
- [20] Jackson G., Leventhall H. Calculation of the perceived loudness of noise (PLdB) using Stevens' method (Mark VII). *Appl. Acoust.*, 1973, vol. 6, no. 1, pp. 23–34. [https://doi.org/10.1016/0003-682x\(73\)90027-3](https://doi.org/10.1016/0003-682x(73)90027-3)
- [21] Yuldashev P.V., Ollivier S., Karzova M.M., Khokhlova V.A., Blanc-Benon P. Statistics of peak overpressure and shock steepness for linear and nonlinear N-wave propagation in a kinematic turbulence. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2017, vol. 142, pp. 3402–3415. <https://doi.org/10.1121/1.5015991>
- [22] Stout T.A. Simulation of N-wave and shaped supersonic signature turbulent variations. Ph. D. Diss. The Pennsylvania State University, 2018.