

УДК 534.833.5

Расчет собственных частот трехкамерного резонатора Гельмгольца

Попов Юрий Николаевич^{1,2}

2360460yk@gmail.com

SPIN-код: 1036-8372

Корнилаев Роман Валерьевич^{3(*)}

rpcath@yandex.ru

SPIN-код: 2117-9442

¹ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

²ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет», Санкт-Петербург, Россия

³АО «Северо-Восточный ремонтный центр», Вилючинск, Россия

Аннотация. Рассмотрен резонатор Гельмгольца, состоящий из трех полостей сферической формы. Получена аналитическая зависимость в виде 6-степенного многочлена в частотной области для трехкамерного резонатора Гельмгольца. Подготовлена программа на языке программирования Python для численного определения трех первых резонансных частот. Результаты численных расчетов по найденной аналитической зависимости достаточно хорошо соответствуют результатам определения резонансных частот методом конечных элементов.

Ключевые слова: резонатор Гельмгольца, резонансный поглотитель, метод конечных элементов, трехкамерный резонатор Гельмгольца, собственная частота, расчет, резонанс

Calculation of natural frequencies of a three-cavity Helmholtz resonator

Popov Yurii Nikolaevich^{1,2}

2360460yk@gmail.com

SPIN-code: 1036-8372

Kornilaev Roman Valerievich^{3(*)}

rpcath@yandex.ru

SPIN-code: 2117-9442

¹Krylov State Research Centre, Saint Petersburg, Russia

²St. Petersburg State Marine Technical University, Saint Petersburg, Russia

³Joint-stock company "North-Eastern Repair Center", Vilyuchinsk, Russia

Abstract. A Helmholtz resonator consisting of three spherical cavities is considered. An equation in the form of a polynomial of the 6th degree in the frequency domain for a three-cavity Helmholtz resonator was obtained. A program has been written in the Python programming language for the numerical determination of the first three resonant frequencies. The results of numerical calculations based on the analytical dependence found correspond fairly well to the results of the determination of resonant frequencies by the finite element method.

Keywords: Helmholtz resonator, resonant sound absorber, finite element method, three-cavity Helmholtz resonator, natural frequency, calculation, resonance

грамм Comsol Multiphysics v.6.2. Средствами САПР «Компас» подготовлены 10 различных комбинаций полостей с параметрами, представленными в табл. 1, после чего модели загружены в Comsol. Объемы полостей определены с учетом примыкания горла к сфере.

Исследование методом конечных элементов выполнено при амплитуде подаваемого сигнала 10 Па, излучение и прием звука выполнялись через порты на торцах канала. Тип портов «Circular». Все границы модели, кроме портов, определены как твердые отражающие поверхности «Sound Hard Boundary». Среда распространения звука — вода из встроенной библиотеки.

Результаты. Обозначим L_1, L_2, L_3 — как эффективную длину соответствующего горла L_{G1}, L_{G2}, L_{G3} с учетом присоединенной длины. Обозначим M_1, M_2, M_3 — как массу объема среды в полостях; ρ — плотность среды, принимаем $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ для воды при 20 °С; c — скорость распространения звука в среде, принимаем $c = 1481 \text{ м/с}$ для воды при 20 °С; P_1, P_2, P_3 — давление среды в полостях; v_1, v_2, v_3 — удельный объем среды; m_1, m_2, m_3 — масса среды в соответствующем горле; dv_1, dv_2, dv_3 — мгновенные приращения объема за dt .

Для корректного определения резонансной (собственной) частоты необходимо учесть присоединенную длину горла — участки среды с обоих окончаний горла, колеблющиеся совместно с внутренней областью горла.

Присоединенная длина горла зависит от геометрической конфигурации системы канал-горло и горло-полость. Возможно применение разнообразных оценок для определения присоединенной длины [3, 4, 5], включая использование функции Карала, Фока, Бесселя и применение эмпирических формул. Как правило, присоединенная длина не одинакова с разных концов горла и эффективная (итоговая) длина горла складывается из суммы присоединенных длин с внешней стороны L_{Ext} , с внутренней стороны горла L_{Int} и геометрической длины

$$L_i = L_{Ext(i)} + L_{Int(i)} + L_{Gi}.$$

В данном исследовании с левой («внешней») стороны каждого горла использована следующая формула [4, 5] для определения первого слагаемого присоединенной длины

$$l_{Ext} = (\alpha - 1,34 g_i) r_i,$$

где α — коэффициент, зависящий от длины горла, для горла №1 и горла №3 $\alpha = 0,820$, а для горла №2 значение $\alpha = 0,817$ (кроме комбинации №10, где $\alpha = 0,820$); g_i — отношение диаметра соответствующего горла к диаметру канала, из которого выходит данное горло: $g_i = 2 r_i / D$. В данном исследовании принято значение $D = 50 \text{ мм}$ — диаметр цилиндрического канала. Для горла № 2 и № 3 в качестве диаметра канала используется удвоенный радиус соответствующей полости, из которой выходит горло; r_i — радиус соответствующего горла, мм.

Таблица 1

Геометрические параметры резонаторов

Наименование параметров	№ комбинации полостей резонатора									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Радиус горла № 1 (r_1), мм	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50
Радиус сферы № 1 (R_1), мм	8,000	12,000	12,000	12,000	10,000	8,000	12,000	12,000	12,000	10,000
Сечение горла № 1 (S_1), мм ²	28,274	28,274	28,274	28,274	28,274	63,617	63,617	63,617	63,617	63,617
Длина горла № 1 (L_{G1}), мм	15,000	15,000	15,000	15,000	15,000	15,000	15,000	15,000	15,000	9,000
Эффективная длина горла № 1 (L_1), мм	19,61443	19,61443	19,61443	19,61443	19,61443	21,62497	21,62497	21,62497	21,62497	15,62497
Объем полости № 1 (V_1), мм ³	2132,3	7230,2	7230,2	7230,2	4179,1	2095,2	7196,6	7196,6	7196,6	4137,8
Радиус горла №2 (r_2), мм	2,500	2,500	2,500	2,500	2,500	2,500	3,750	3,750	3,750	3,750
Радиус сферы № 2 (R_2), мм	14,000	14,000	17,500	17,500	15,000	14,000	14,000	17,500	17,500	15,000
Сечение горла № 2 (S_2), мм ²	19,635	19,635	19,635	19,635	19,635	19,635	44,179	44,179	44,179	44,179
Длина горла № 2 (L_{G2}), мм	3,200	3,200	3,200	3,200	3,200	3,200	3,200	3,200	3,200	7,500
Эффективная длина горла № 2 (L_2), мм	6,87876	6,87876	6,97651	6,97651	6,91134	6,87876	8,35158	8,57152	8,57152	12,73238
Объем полости № 2 (V_2), мм ³	11490,9	11490,9	22446,8	22446,8	14134,3	11490,9	11481,8	22436,6	22436,6	14122,3
Радиус горла № 3 (r_3), мм	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	3,000	3,000	3,000
Радиус сферы № 3 (R_3), мм	9,000	9,000	9,000	12,000	25,000	9,000	9,000	12,000	12,000	25,000
Сечение горла № 3 (S_3), мм ²	12,566	12,566	12,566	12,566	12,566	12,566	12,566	28,274	28,274	28,274
Длина горла № 3 (L_{G3}), мм	8,000	8,000	8,000	8,000	8,000	8,000	8,000	8,000	8,000	6,000
Эффективная длина горла № 3 (L_3), мм	10,85164	10,85164	10,85164	10,97373	11,16419	10,85164	10,85164	11,91120	12,18590	10,61443
Объем полости № 3 (V_3), мм ³	3052,2	3052,2	3052,2	7237,2	65449,3	3052,2	3052,2	3046,3	7232,8	65447,3

С правой («внутренней») стороны каждого горла использована следующая формула [3] для определения второго слагаемого присоединенной длины

$$l_{Int} = 0,85 r_i.$$

Таким образом, эффективная (итоговая) длина горла на каждом участке, с учетом присоединенной длины, составит

$$L_1 = \left(\alpha - 1,34 \frac{2r_1}{D} \right) r_1 + 0,85r_1 + L_{G1};$$

$$L_2 = \left(\alpha - 1,34 \frac{r_2}{R_1} \right) r_2 + 0,85r_2 + L_{G2};$$

$$L_3 = \left(\alpha - 1,34 \frac{r_3}{R_2} \right) r_3 + 0,85r_3 + L_{G3}.$$

Запишем ряд начальных допущений для составления системы уравнений работы резонатора в частотной области: полагаем малые адиабатические возмущения, так как длина горла значительно меньше длины волны; изменения давления в полостях выражаются через изменения удельных объемов $dv_i = dV_i/M_i$; принимаем однородную плотность в полостях и отсутствие диссипации; эффективные массы среды в горлах $m_i = \rho S_i L_i$; принимаем массу среды в полостях $M_i = \rho V_i$; принимаем, что положительное x_i увеличивает объем левой смежной полости и запишем изменения объемов: $dV_1 = S_1 x_1 - S_2 x_2$, $dV_2 = S_2 x_2 - S_3 x_3$, $dV_3 = S_3 x_3$.

Тогда

$$dv_1 = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{M_1};$$

$$dv_2 = \frac{S_2 x_2 - S_3 x_3}{M_2};$$

$$dv_3 = \frac{S_3 x_3}{M_3}.$$

Выразим малые приращения давления через смещения x_i

$$\Delta P_1 = dP_1 = -\rho^2 c^2 dv_1 = -\frac{\rho c^2 (S_1 x_1 - S_2 x_2)}{V_1};$$

$$\Delta P_2 = dP_2 = -\rho^2 c^2 dv_2 = -\frac{\rho c^2 (S_2 x_2 - S_3 x_3)}{V_2};$$

$$\Delta P_3 = dP_3 = -\rho^2 c^2 dv_3 = -\frac{\rho c^2 S_3 x_3}{V_3}.$$

Примем, что внешняя среда, воздействующая на левый торец горла №1 работает как жесткая опора, т. е. $dP_{Наруж} = 0$ и запишем уравнения динамики для массы в горлах

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\Delta P_1 S_1;$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = (\Delta P_1 - \Delta P_2) S_2;$$

$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = (\Delta P_2 - \Delta P_3) S_3;$$

Исходя из вышеперечисленного составим систему трех уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{c^2 S_1}{L_1 V_1} x_1 - \frac{c^2 S_2}{L_1 V_1} x_2 &= 0; \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{c^2 S_1}{L_2 V_1} x_1 + \left(\frac{c^2 S_2}{L_2 V_1} + \frac{c^2 S_2}{L_2 V_2} \right) x_2 - \frac{c^2 S_3}{L_2 V_2} x_3 &= 0; \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} - \frac{c^2 S_2}{L_3 V_2} x_2 + \left(\frac{c^2 S_3}{L_3 V_2} + \frac{c^2 S_3}{L_3 V_3} \right) x_3 &= 0; \end{aligned}$$

Дальнейшие математические преобразования выполним посредством искусственного интеллекта [6]. В ранее составленную систему уравнений подставим гармонические выражения: $x_1 = X_1 e^{-i\omega t}$, $x_2 = X_2 e^{-i\omega t}$, $x_3 = X_3 e^{-i\omega t}$ и получим матрицу $A(\omega)$

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} -\omega^2 + \frac{c^2 S_1}{L_1 V_1} & -\frac{c^2 S_2}{L_1 V_1} & 0 \\ -\frac{c^2 S_1}{L_2 V_1} & -\omega^2 + \frac{c^2 S_2}{L_2 V_1} + \frac{c^2 S_2}{L_2 V_2} & -\frac{c^2 S_3}{L_2 V_2} \\ 0 & -\frac{c^2 S_2}{L_3 V_2} & -\omega^2 + \frac{c^2 S_3}{L_3 V_2} + \frac{c^2 S_3}{L_3 V_3} \end{bmatrix};$$

Из условия $\det A(\omega) = 0$ получим многочлен 6 степени

$$\begin{aligned} \omega^6 - (a_1 + a_2 + a_3)\omega^4 + [a_1(a_2 + a_3) + a_2 a_3 - (b_2 c_2 + b_1 c_1)]\omega^2 - \\ - [a_1(a_2 a_3 - b_2 c_2) - b_1 c_1 a_3] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где коэффициенты следующие: $a_1 = \frac{c^2 S_1}{L_1 V_1}$; $a_2 = c^2 S_2 \left(\frac{1}{L_2 V_1} + \frac{1}{L_2 V_2} \right)$; $a_3 = c^2 S_3 \left(\frac{1}{L_3 V_2} + \frac{1}{L_3 V_3} \right)$; $b_1 = \frac{c^2 S_2}{L_1 V_1}$; $b_2 = \frac{c^2 S_2}{L_2 V_1}$; $c_1 = \frac{c^2 S_1}{L_2 V_1}$; $c_2 = \frac{c^2 S_2}{L_3 V_2}$.

Решение системы уравнений, состоящей из многочлена (1) и зависимости $\omega = 2\pi f$, для случая положительных вещественных корней, представляет собой выражение трех первых резонансных (собственных) частот f_1 , f_2 , и f_3 трехкамерного резонатора Гельмгольца.

Ввиду громоздкости получения явного выражения для корней, осуществлен численный поиск значений корней найденного 6-степенного многочлена. Для численного поиска подготовлена программа на языке программирования Python, обеспечивающая поиск вещественных положительных значений частот $f = \omega/2\pi$, соответствующих $\det A(\omega) = 0$. Результаты численных расчетов резонансных частот и результаты определения частот методом конечных элементов в Comsol представлены в табл. 2.

Обсуждение. Из таблицы 2 очевидно, что имеется устойчивое завышение резонансных частот при численном расчете, относительно метода конечных элементов в Comsol. Вероятно, более тщательный подбор зависимостей, отражающих слагаемые присоединенной длины каждого горла, позволит точнее рассчитывать резонансные частоты.

Сравнивая таблицы 1 и 2 можно сделать вывод, что при увеличении радиуса горла растет отличие между численным расчетом резонансов и определением резонансов в Comsol, т. е. при увеличении радиуса горла усиливается тенденция к завышению резонансных частот при численном расчете. Кроме того, наблюдаем, что основной вклад в резонансную частоту f_1 оказывает объем полости № 2 (V_2), основной вклад в резонансную частоту f_2 оказывает объем полости № 3 (V_3), а основной вклад в резонансную частоту f_3 дает объем полости № 1 (V_1).

Наибольшее отклонение Δf_i имеется у «верхней» частоты резонанса для комбинации полостей № 6 и составляет 6,6 %, что для данного варианта объясняется критическим сочетанием радиуса горла и полости — радиус горла занимает более половины радиуса сферы ($r_1/R_1 \approx 0,563$), что может значительно влиять на присоединительную длину. Действительно, уменьшив у данного варианта радиус горла до значения $r_1 = 3,48$ мм ($r_1/R_1 = 0,435$), получим новые резонансные частоты, численно в программе на Python: $f_1 = 1980$ Гц; $f_2 = 5234$ Гц; $f_3 = 11525$ Гц и методом конечных элементов в Comsol: $f_1 = 1931$ Гц; $f_2 = 5128$ Гц; $f_3 = 11049$ Гц, которые теперь различаются на 2,54, 2,07 и на 4,31 % соответственно. Однако у остальных комбинаций полостей определяются иные критические сочетания радиуса горла и полости r_i/R_i , что не дает возможности использовать данный параметр как статистически значимый.

Полученные в результате исследования значения дисперсии и стандартного отклонения говорят о том, что результаты численных расчетов по аналитической зависимости (1) достаточно хорошо соответствуют результатам определения резонансных частот методом конечных элементов, для рассмотренных комбинаций полостей резонаторов.

Заключение. Получен многочлен 6-степени в частотной области для трехкамерного резонатора Гельмгольца. Подготовлена программа на языке программирования Python для численного расчета трех первых резонансных (собственных) частот рассматриваемого резонансного поглотителя. При анализе результатов можно сделать вывод, что найденный многочлен и написанная программа пригодны для поиска частот резонансов трехкамерных резонаторов Гельмгольца со сферическими полостями.

Рассматриваемый резонансный поглотитель, в различных комбинациях, возможно применять в условиях ограниченного пространства на кораблях и судах для поглощения шума на заданных частотах.

Список источников

- [1] Стретт Д.В. (лорд Рэлей). *Теория звука*. Т. 2. Москва, Гостехиздат, 1955, 474 с.
- [2] Helmholtz H. von. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1860, bd. 57, no. 1, pp. 1–72. <https://doi.org/10.1515/crll.1860.57.1>
- [3] Xu M.B., Selamet A., Kim H. Dual Helmholtz resonator. *Applied Acoustics*, 2010, № 71, pp. 822–829. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2010.04.007>
- [4] Комкин А.И., Миронов М.А., Юдин С.И. О присоединенной длине отверстий. *Акустический журнал*, 2012, т. 58, № 6, с. 677–682.
- [5] Комкин А.И., Миронов М.А., Юдин С.И. Собственная частота резонатора Гельмгольца на стенке прямоугольного канала. *Акустический журнал*, 2014, т. 60, № 2, с. 145–151.
- [6] *Нейросеть искусственного интеллекта ChatGPT*. URL: <https://www.chatgpt.org/ru> (дата обращения 22.03.2026).