

На правах рукописи

ИВАНОВА Ольга Алексеевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПРОВОДА
ЛИНИИ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ**

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иванова

Москва — 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана»

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Марчевский Илья Константинович

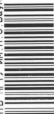
Официальные оппоненты: **Аринчев Сергей Васильевич**,
доктор технических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана», профессор кафедры «Аэрокосмические системы»

Нестеров Сергей Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук», главный научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела

Ведущая организация: федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт машиноведения имени А.А. Бравова Российской академии наук»

Защита состоится «10» декабря 2013 года в 13 час. 00 м
заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана по :
Москва, Рубцовская наб., д. 2/18, ауд. 1006 л.

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



2039296

Иванова О. А. Математическ

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан «07» ноября 2013 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат технических наук, доцент

А.В. Аттетков

201

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Устойчивый поперечный ветер, воздействующий на провода воздушных линий электропередачи (ЛЭП), может приводить к пляске (галошированию) — высокоамплитудным низкочастотным колебаниям, происходящим преимущественно в вертикальной плоскости. Пляске наиболее подвержены провода, покрытые несимметричной наледью. Высокие динамические нагрузки, действующие на провода, опоры и арматуру ЛЭП при пляске, могут всего за несколько часов привести к значительным повреждениям. Поэтому большое значение имеет численный анализ математических моделей проводов ЛЭП, позволяющий на этапе проектирования ЛЭП получить информацию о поведении линии под воздействием ветра.

Наиболее простой моделью провода ЛЭП является жесткий цилиндр, совершающий колебания под воздействием поперечного ветра; движение сечений цилиндра при этом является плоскопараллельным, поэтому математической моделью этой конструкции является профиль, обтекаемый двумерным потоком среды. Эксперименты по исследованию колебаний упругозакрепленных цилиндров с различными поперечными сечениями показали, что их пляска может вызываться либо аэродинамической неустойчивостью положений равновесия сечений цилиндра, либо эффектом сближения собственных частот воступательных и крутильных колебаний; теми же механизмами вызывается и развитие больших колебаний проводов ЛЭП.

При проведении численного анализа колебаний проводов ЛЭП применяется гипотеза о том, что аэродинамические нагрузки, действующие на провод, являются квазистационарными, однако известны эксперименты, результаты которых не могут быть воспроизведены на основе данной гипотезы. Альтернативой квазистационарному подходу к определению аэродинамических нагрузок, действующих на провод, является прямое моделирование его нестационарного обтекания. Для этого целесообразно применять бессеточные вихревые (лагранжевы) методы расчета, позволяющие моделировать течение вокруг движущегося тела и определять действующие на него аэродинамические нагрузки с приемлемой точностью и разумными затратами вычислительных ресурсов, а также допускающие эффективное распараллеливание.

Известно лишь о единичных работах, посвященных математическому моделированию нестационарных аэро- или гидроупругих колебаний протяженной конструкции (провода, кабеля), поэтому задача разработки программного комплекса для моделирования аэроупругого движения провода ЛЭП с учетом действия на него нестационарных аэродинамических нагрузок является актуальной.

Цель исследования. Целью настоящей работы является математическое моделирование аэроупругих колебаний провода линии электропередачи с учетом нестационарности аэродинамических нагрузок путем разработки эффективного алгоритма на базе метода вихревых элементов. На основе данного алгоритма необходимо разработать и верифицировать программный комплекс, позволяющий проводить расчеты с использованием различных вычислительных комплексов, включая современные многопроцессорные системы кластерного типа.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач.**

1. Адаптация известных математических моделей к решению задач расчета аэроупругих колебаний провода с учетом нестационарности аэродинамических нагрузок.

2. Разработка алгоритма моделирования аэроупругих колебаний провода, основанного на определении нестационарных аэродинамических нагрузок, а также позволяющего использовать гипотезу об их квазистационарности.

3. Построение методики определения собственных частот и форм малых колебаний провода однопролетной и многопролетной ЛЭП для различных граничных условий.

4. Разработка и верификация алгоритма определения эквивалентной жесткости пружин, моделирующих граничные условия для рассматриваемого пролета многопролетной линии.

5. Программная реализация и верификация метода вихревых элементов для моделирования обтекания движущегося профиля и определения действующих на него аэродинамических нагрузок.

6. Программная реализация и верификация параллельного программного комплекса для расчета аэроупругих колебаний провода.

Методы исследования. При решении задач, возникших в ходе выполнения диссертационной работы, использовались различные классы математических методов: механики гибких стержней и нитей, теории колебаний, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики, бессеточных лагранжевых методов вычислительной гидродинамики, вычислительной математики и параллельных вычислений.

Достоверность и обоснованность полученных результатов гарантируется строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов расчетов с известными точными решениями, экспериментальными данными, а также результатами, полученными ранее другими авторами.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты, которые выносятся на защиту.

1. Методика определения собственных частот и форм малых колебаний провода многопролетной ЛЭП, основанная на применении метода передаточной матрицы и метода сакиттарной функции.

2. Характеристические уравнения для приближенного определения собственных частот малых колебаний провода многопролетной ЛЭП.

3. Методика задания эквивалентных жесткостей пружин, моделирующих влияние изоляторов и соседних пролетов на колебания рассматриваемого пролета.

4. Алгоритм моделирования аэроупругих колебаний провода под действием нестационарных аэродинамических нагрузок, основанный на применении метода плоских сечений.

5. Параллельный программный комплекс, реализующий предложенный алгоритм, в котором расчет нестационарного обтекания сечений провода и вычисление аэродинамических нагрузок производятся методом вихревых элементов.

Практическая значимость диссертационной работы связана с ее методологической и прикладной направленностью и состоит в возможности математического моделирования колебаний провода ЛЭП или, в частном случае, упругозакрепленного профиля, как при непосредственном определении нестационарных аэродинамических нагрузок, так и с применением гипотезы об их квазистационарности.

Разработан и зарегистрирован программный комплекс «PROVOD — Численное моделирование движения провода ЛЭП под действием ветра», позволяющий выполнять расчеты на современных многопроцессорных вычислительных комплексах (свидетельство о государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ № 2013617549 от 20.08.2013 г.).

Апробация работы. Результаты диссертационной работы апробированы на IX Международной конференции по математическому моделированию (Феодосия, 2008), XIV, XV и XVI Международных симпозиумах «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (Херсон, 2009, 2011 и 2013), V, VI и VII Всероссийских конференциях «Необратимые процессы в природе и технике» (Москва, 2009, 2011 и 2013), 4-й Международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии» (Уфа, 2010), 5-м Международном конгрессе по вихревым течениям и вихревым моделям ICVFM-2010 (Казерта, Италия, 2010), X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011), XXXVIII Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения» (Москва, 2012), 6-м Европейском конгрессе по вычис-

лительным методам в прикладных науках и инженерной деятельности ECCOMAS-2012 (Вена, 2012), 41-й Международной летней школе-конференции «Актуальные проблемы механики» (Санкт-Петербург, 2013).

Результаты исследований обсуждались также на Международном авиационно-космическом научно-гуманитарном семинаре им. С. М. Белоцерковского под рук. А. И. Желанникова, В. В. Вышинского (ЦАГИ им. проф. Н. Е. Жуковского, ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 2010).

Диссертация является составной частью фундаментальных исследований, проводимых в рамках гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (грант НШ-255.2012.8) и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (грант МК-6482.2012.8).

Публикации. Основные научные результаты диссертации отражены в 18 научных работах, в том числе в 5 статьях в научных журналах и изданиях, которые включены в Перечень российских рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций, 1 статье в зарубежных научных изданиях, а также 9 тезисах и докладах международных и всероссийских конференций.

Личный вклад соискателя. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 143 страницах, содержит 34 иллюстрации и 16 таблиц. Список литературы включает 102 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении проведен обзор литературы по теме исследования, обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе рассмотрена задача о математическом моделировании движения провода, сопротивляющегося растяжению и кручению, в воздушном потоке, перпендикулярном плоскости начального провисания провода (Рис. 1).

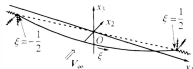


Рис. 1. Расчетная схема

Движение провода описывается уравнениями

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Q}{1+Q/EF} x_1' \right)' + C_1 - \ddot{x}_1 = 0, \\ & \left(\frac{Q}{1+Q/EF} x_2' \right)' + C_2 + \left(1 + \frac{Q}{EF} \right) q_2^a - \\ & \quad - \ddot{x}_2 - h (\sin(\theta_G + \theta_e + \theta) \ddot{\theta} + \cos(\theta_G + \theta_e + \theta) \dot{\theta}^2) = 0, \\ & \left(\frac{Q}{1+Q/EF} x_3' \right)' + C_3 + \left(1 + \frac{Q}{EF} \right) q_3^a - 1 - \\ & \quad - \ddot{x}_3 - h (\cos(\theta_G + \theta_e + \theta) \ddot{\theta} - \sin(\theta_G + \theta_e + \theta) \dot{\theta}^2) = 0, \\ & (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 = \left(1 + \frac{Q}{EF} \right)^2, \\ & -\ddot{\theta} + C_\theta + M^a + GJ\theta'' - h\beta (\sin(\theta_G + \theta_e + \theta) \ddot{x}_2 + \\ & \quad + \cos(\theta_G + \theta_e + \theta) \ddot{x}_3 + \cos(\theta_G + \theta_e + \theta)) = 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее производные по безразмерной пространственной координате $\xi \in [-1/2; 1/2]$ и безразмерному времени τ обозначены соответственно штрихом и точкой; $x_j(\xi, \tau)$, $j = 1, 2, 3$, — декартовы координаты оси провода — линии, проходящей через центры его сечений без обледенения; $\theta(\xi, \tau)$ — угол поворота сечения с координатой ξ вокруг оси; $Q(\xi, \tau)$ — тяжесть провода; EF и GJ — жесткости на растяжение и кручение соответственно (считается, что наличие обледенения не влияет на их величины); $q_i^a(\xi, \tau)$, $i = 2, 3$ — аэродинамические силы (в расчете на единицу длины провода), действующие в направлении декартовых координатных осей Ox_2 , Ox_3 ; $M^a(\xi, \tau)$ — аэродинамический момент; $C_j(\xi, \tau)$, $j = 1, 2, 3$, $C_\theta(\xi, \tau)$ — функции, определяющие демпфирование; $\theta_e(\xi)$ — угол поворота сечений провода в ненапряженном состоянии; $\beta = \bar{\rho} \bar{L}^2 / \bar{I}$, где $\bar{\rho}$ — погонная плотность провода, $\bar{L}$ — длина пролета, $\bar{I}$ — погонный момент инерции провода относительно его оси (здесь и далее знак «тильда» указывает на то, что обозначаемая им величина является размерной). Все сечения провода считаются перпендикулярными оси, а положение оси в конкретном сечении обозначается за C . Положение центра масс G сечения провода с обледенением задается с помощью расстояния $h = CG$ и угла θ_G , отсчитываемого по ходу часовой стрелки от хорды сечения в положении, соответствующем нулевому углу атаки.

В качестве начального условия задается равновесное положение провода в отсутствие ветра $x_{10}(\xi)$, $x_{20}(\xi) \equiv 0$, $x_{30}(\xi)$, $\theta_0(\xi)$:

$$\begin{aligned} x_j(\xi, \tau_0) &= x_{j0}(\xi), & \frac{\partial x_j(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_0} &= 0, & j &= 1, 2, 3, \\ \theta(\xi, \tau_0) &= \theta_0(\xi), & \frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_0} &= 0. \end{aligned}$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} x_i(\pm 1/2, \tau) - x_{i0}(\pm 1/2) &= \mp S_i^\pm \left(\frac{Q x_i'}{1 + Q/EF} - \frac{Q_0 x_{i0}'}{1 + Q_0/EF} \right) \Big|_{\xi=\pm \frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \theta(\pm 1/2, \tau) &= 0, \end{aligned}$$

т. е. концы провода закреплены с помощью линейных безынерционных пружин с податливостями $S_j^\pm$, $j = 1, 2, 3$, где, как правило, $S_3^\pm = 0$.

Считая, что демпфирование и аэродинамические нагрузки отсутствуют, и пренебрегая связью поступательного и крутильного движений, можно записать уравнения малых колебаний провода, распадающиеся на 3 подсистемы:

$$\begin{aligned} (P_{13} \cdot \{U_1', U_3'\}^T)' + \omega^2 \{U_1, U_3\}^T &= 0, \\ (P_2 \cdot U_2')' + \omega^2 U_2 &= 0, \\ GJ\Theta'' + h\beta \sin(\theta_0 + \theta_e + \theta_0)\Theta + \omega^2 \Theta &= 0, \end{aligned}$$

где $P_{13}(\xi) = P_{13}^T(\xi)$ — положительно определенная матрица второго порядка, $P_2(\xi)$ — положительная функция, определяемые равновесным положением провода; $U_j(\xi)$, $j = 1, 2, 3$, $\Theta(\xi)$ — собственные формы малых колебаний провода в соответствующем направлении; ω — собственная частота. Граничные условия для уравнений малых колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} \{U_1(\pm 1/2), U_3(\pm 1/2)\}^T &= \mp S^\pm P_{13}(\pm 1/2) \{U_1'(\pm 1/2), U_3'(\pm 1/2)\}^T, \\ U_2(\pm 1/2) &= \mp S_2^\pm P_2(\pm 1/2) U_2'(\pm 1/2)', \\ \Theta(\pm 1/2) &= 0, \end{aligned}$$

где $S^\pm$ — диагональные матрицы с элементами $S_1^\pm$ и $S_3^\pm$. В случае, если рассматриваются малые колебания многопролетной ЛЭП либо провода с точечными массами, моделирующими гасители вибрации или иную подобную арматуру, вышеуказанные граничные условия ставятся в крайних точках линии, а в промежуточных точках задаются условия равенства перемещений провода на соседних участках и условия равенства нулю главного вектора сил, приложенных в этой точке.

Собственные частоты и формы малых колебаний одного пролета могут быть определены численно с помощью метода сагиттарной функции или метода ускоренной сходимости (Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров, 2004); при этом известно (A. Simpson, 1966; H.M. Irvine, T.K. Caughey, 1974), что при $S_1^+ = S_1^- = S_1$ собственные частоты ω с высокой точностью удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$\sin \lambda \left(\sin \lambda - \lambda \left(1 - c_1^2 \omega^2 \left(\frac{1}{EF} + 2S_1 \right) \right) \cos \lambda \right) = 0, \quad \lambda = \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}},$$

где c_1 — горизонтальная составляющая тяжения провода.

Для определения собственных частот малых колебаний многопролетной ЛЭП применяется метод передаточной матрицы (Р. Клаф, Дж. Пензиен, 1979). Предложены два подхода к построению общего решения уравнений малых колебаний провода, необходимого для реализации этого метода. Первый подход состоит в численном определении общего решения на основе метода сагиттарной функции. Второй подход предполагает использование приближенного аналитического общего решения, полученного на основе идеи работы Д.С. Саксона и А.С. Кана (D.S. Saxton, A.S. Cahn, 1953), и позволяет получить характеристические уравнения для определения собственных частот малых колебаний линии. При некоторых упрощениях в частном случае, когда линия состоит из N равных пролетов, получено характеристическое уравнение

$$\sin^N \lambda \cos^{N-1} \lambda \left(\sin \lambda - \lambda \left(1 - \frac{c_1^2 \omega^2}{EF} \right) \cos \lambda \right) = 0, \quad \lambda = \frac{\omega}{2N\sqrt{c_1}},$$

а в случае двухпролетной линии с длинами пролетов l_1 и l_2 — уравнение

$$\sin \frac{\omega l_1}{2\sqrt{c_1}} \sin \frac{\omega l_2}{2\sqrt{c_1}} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} - \frac{\omega}{4\sqrt{c_1}} \left(1 - \frac{c_1^2 \omega^2}{EF} \right) \cos \frac{\omega l_1}{2\sqrt{c_1}} \cos \frac{\omega l_2}{2\sqrt{c_1}} \right) = 0.$$

Данные уравнения позволяют оценить интервалы локализации собственных частот, а также их кратности. В частном случае одного пролета полученное уравнение совпадают с известным ранее.

При математическом моделировании движения одного пролета многопролетной линии принято вычислять эквивалентные податливости пружин $S_1^\pm$, $S_2^\pm$ на основе информации о соседних пролетах, а также длине и массе изолирующих подвесок (A.S. Veletsos, G.R. Darbre, 1983; R.K. Mathur et al., 1987). В диссертационной работе показано, что такой подход может приводить к неверным значениям первых собственных частот малых колебаний провода в вертикальном и горизонтальном направлениях, в то время как динамика провода в основном определяется

именно ими. Предложен способ определения таких податливостей $S_1^\pm$, $S_2^\pm$, что первые собственные частоты малых колебаний одного пролета с пружинами на концах совпадают с первыми собственными частотами его колебаний в составе многопролетной линии.

Во второй главе рассмотрена плоская задача о математическом моделировании обтекания движущегося профиля K потоком вязкой несжимаемой среды, движение которой описывается уравнениями неразрывности и Навье — Стокса

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} + \Omega \times \mathbf{V} = -\nabla \left(p + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{V},$$

где $\mathbf{V}(\mathbf{r}, \tau)$ — скорость среды в точке $\mathbf{r} = (x_2, x_3)$ в момент времени τ ; $\Omega = \Omega \mathbf{e}_1 = \nabla \times \mathbf{V}$ — завихренность ($\mathbf{e}_1$ — орт оси Ox_1); $p(\mathbf{r}, \tau)$ — давление; $\text{Re} = \tilde{V}_\infty \tilde{d} / \tilde{\nu}$ — число Рейнольдса; $\tilde{V}_\infty$ — скорость набегающего потока; $\tilde{d}$ — характерный размер профиля; $\tilde{\nu}$ — коэффициент кинематической вязкости. Граничные условия имеют вид

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_K(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial K, \\ \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{V}_\infty = \text{const}, \quad p(\mathbf{r}) \rightarrow p_\infty = \text{const}, \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty.$$

Скорость произвольной точки $\mathbf{r}$ профиля равна $\mathbf{V}_K(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_C + \omega \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C)$. Закон движения профиля может либо быть заданным, либо определяться аэродинамическими нагрузками, действующими на профиль. В последнем случае задача является связанной, или сопряженной.

Для решения поставленной задачи используется метод вихревых элементов, основанный на интегральных представлениях скорости $\mathbf{V}$ и давления p через завихренность Ω ; при этом скорость $\mathbf{V}$ может быть восстановлена по распределению Ω с помощью закона Био — Савара, а давление — на основе аналога интеграла Коши — Лагранжа, разработанного Г.Я. Дынниковой (2000). В случае, если профиль совершает вращательное движение, его внутренняя область должна быть заменена кинематически эквивалентным распределением «фиктивной» завихренности Ω_f , которая также вносит вклад в $\mathbf{V}$ и p .

В расчетах непрерывное поле завихренности Ω заменяется набором из $N_{\text{ВЭ}}$ вихревых элементов (ВЭ) — вихревых нитей, характеризующихся положениями $\mathbf{r}_i$ и циркуляциями Γ_i ; профиль заменяется ломаной, состоящей из M отрезков-панелей, на каждом из которых задается контрольная точка и точка рождения вихревого элемента. Выполнение условия прилипания на профиле на каждом шаге расчета по времени обеспечивается равенством касательных компонент скорости среды и профиля на

его границы (В.С. Морева, И.К. Марчевский, 2012) и приводит к образованию на каждой панели вихревого элемента. Далее вихревые элементы пополняют вихревой след и перемещаются со скоростями V_i , где

$$V_i = V(r_i) + V_d(r_i), \quad V_d = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\nabla \Omega}{\Omega}.$$

Новые положения вихревых элементов определяются путем интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений их движения методом Эйлера. В случае, если задача является сопряженной, на каждом шаге расчета также определяется новое положение профиля. Отметим, что вычисление скоростей вихревых элементов — наиболее трудоемкий этап алгоритма, требующий выполнения $O(N_{\text{вз}}^2)$ операций, поэтому целесообразно реализовать его распараллеливание.

Алгоритм расчета обтекания профиля и определения аэродинамических нагрузок, действующих на него, методом вихревых элементов, реализован в виде программного модуля. На примере задачи о математическом моделировании явления ветрового резонанса кругового профиля показано, что метод вихревых элементов позволяет качественно и количественно правильно моделировать аэроупругие колебания профиля.

Полученные зависимости стационарных аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления C_{xa} , подъемной силы C_{ya} и момента C_m профиля обледенелого провода от угла атаки будут использованы в главе 3 при моделировании колебаний упругозакрепленного профиля и провода ЛЭП целиком.

В третьей главе описан разработанный алгоритм численного решения уравнений движения провода, реализованный в программном комплексе PROVOD. Предполагается, что все сечения провода имеют одинаковую форму и их обтекание является плоскопараллельным; тогда распределенные аэродинамические нагрузки, действующие на провод, могут быть определены путем интерполяции аэродинамических нагрузок, действующих на отдельные его сечения (С.И. Девнин, 1983). Аэродинамические нагрузки считаются нестационарными и определяются в ходе моделирования обтекания сечений провода методом вихревых элементов. Алгоритм допускает также использование известного квазистационарного подхода, в соответствии с которым аэродинамические нагрузки пропорциональны стационарным коэффициентам.

Для моделирования движения провода применен метод Бубнова — Галеркина, в соответствии с которым неизвестные функции x_1 , x_2 , x_3 , Q и θ , зависящие от ξ и τ , представляются в виде линейных комбинаций функций, зависящих от ξ , с коэффициентами, зависящими от τ :

$$x_j(\xi, \tau) = x_{j0}(\xi) + \sum_{k=1}^{S_j} a_k^{(j)}(\tau) \varphi_k^{(j)}(\xi), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$Q(\xi, \tau) = Q_0(\xi) + \sum_{k=1}^{S_Q} a_k^{(Q)}(\tau) \varphi_k^{(Q)}(\xi), \quad \theta(\xi, \tau) = \theta_0(\xi) + \sum_{k=1}^{S_\theta} a_k^{(\theta)}(\tau) \varphi_k^{(\theta)}(\xi),$$

где φ_k^* , $k = 1, \dots, S_*$ (символ $*$ заменяет индексы 1, 2, 3, Q или θ) — ортонормированные системы базисных функций. В качестве базисных функций для координат провода x_j целесообразно выбрать первые $(S_j - 2)$ собственные формы малых свободных колебаний провода, алгоритм определения которых описан в главе 1, и две дополнительные функции, необходимые для корректного учета нелинейных граничных условий. В качестве базисных функций для тяжения Q также выбираются $(S_Q - 2)$ первые собственные функции и две дополнительные функции. В качестве базисных функций для угла поворота выбираются функции $\varphi_k^{(\theta)}(\xi) = \sqrt{2} \sin \pi k(\xi + 1/2)$, близкие к собственным формам малых крутильных колебаний провода.

Функции $C_j(\xi, \tau)$, $j = 1, 2, 3$, $C_\theta(\xi, \tau)$, определяющие демпфирование, задаются в виде

$$C_j(\xi, \tau) = -2\zeta_j \sum_{k=1}^{S_j-2} \omega_k^{(j)} \frac{da_k^{(j)}(\tau)}{d\tau} \varphi_k^{(j)}(\xi), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$C_\theta(\xi, \tau) = -2\zeta_\theta \sum_{k=1}^{S_\theta} \omega_k^{(\theta)} \frac{da_k^{(\theta)}(\tau)}{d\tau} \varphi_k^{(\theta)}(\xi),$$

где ω_k — собственные частоты малых колебаний провода в соответствующих направлениях; ζ_j , ζ_θ — коэффициенты демпфирования.

Подставляя разложение решения по базисным функциям в уравнения движения провода и вычитая из них уравнения равновесия, получаем невязку, требование ортогональности которой базисным функциям приводит к системе $(S_1 + S_2 + S_3 + S_\theta - 6)$ обыкновенных дифференциальных уравнений; граничные условия представляют собой $(S_Q + 6)$ алгебраических уравнений. Получившаяся система дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) решается с помощью полуневяжной численной схемы, имеющей при $h = 0$ второй порядок точности.

Базисные функции и необходимые для перехода к системе ДАУ интегралы типа $\int_{-1/2}^{1/2} \left(\varphi_j^{(Q)} \varphi_i^{(m)'} \right)' \varphi_k^{(m)} d\xi$ определяются в системе компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* и записываются в текстовые файлы, являющиеся исходными данными для программного комплекса.

Поскольку проведение нестационарного расчета с применением метода вихревых элементов требует значительных вычислительных затрат, а для развития пляски провода ЛЭП, первоначально находившегося в положении равновесия, и достижения им периодической траектории иногда необходимо длительное время (порядка десятков–сотен секунд), предлагается проводить расчет в несколько стадий.

1. Построение зависимостей стационарных аэродинамических характеристик профиля сечения провода от угла атаки. Данный этап исследования является трудоемким с вычислительной точки зрения. Целесообразно проводить его на многопроцессорной ЭВМ.
2. Проведение расчета по квазистационарным нагрузкам до достижения проводом периодической траектории движения.
3. Проведение расчета, в котором провод движется по заданному закону — участку полученной на предыдущем этапе периодической траектории, с генерацией вихревых элементов и моделированием эволюции вихревых следов за каждым сечением. Данный этап необходим для формирования за сечениями провода развитого вихревого следа.
4. Проведение расчета по нестационарным аэродинамическим нагрузкам до заданного конечного момента времени.

Для сокращения времени расчета в программном комплексе предусмотрена возможность распараллеливания вычислений с помощью библиотеки MPI. Расчет проводится $(N \cdot m)$ процессорами, где N — заданное число сечений на проводе; m — число процессоров, моделирующих обтекание каждого сечения. Все процессоры делятся на N подгрупп, каждая из которых производит расчет обтекания одного сечения и управляется «локальным» головным процессором (ЛГП). Также выделяется один «глобальный» головной процессор (ГП), являющийся одновременно ЛГП первой группы. Этот процессор считывает из текстовых файлов исходные данные, обеспечивает синхронизацию расчетов, пересылку данных между процессорами, а также производит расчет динамики провода.

Программный комплекс PROVOD работает в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Загрузка ГП исходных данных, их пересылка на все ЛГП, построение ЛГП расчетной схемы на профиле.
2. Генерация ЛГП завихренности и вычисление скоростей вихревых элементов всеми процессорами подгрупп.
3. Вычисление ЛГП аэродинамических нагрузок и их пересылка на ГП.
4. Вычисление ГП нового положения провода и пересылка его на ЛГП.
5. Перемещение профилей, реструктуризация вихревых следов за всеми сечениями; возврат к п. 2.

Если производится квазистационарный расчет, то блоки 2 и 5 не выполняются, а в блоке 3 аэродинамическая нагрузка определяется по стационарным аэродинамическим коэффициентам.

Помимо моделирования движения провода программный комплекс позволяет моделировать движение упругозакрепленного профиля или обтекание набора неподвижных одинаковых профилей, расположенных под разными углами атаки.

Верификация алгоритма. В отчете Канадской электроэнергетической ассоциации (J.K. Chan, 1992) описаны результаты наблюдения пляски центрального пролета трехпролетной линии, на котором имела насадка U-образной формы, имитирующая обледенение. Влияние крайних пролетов учитывалось путем введения пружин, эквивалентные жесткости которых определялись в соответствии с разработанной в диссертации методикой. На Рис. 2 приведены результаты расчета по квазистационарным нагрузкам. Видно, что они хорошо согласуются с расчетом (R. Keutgen, 1998) и удовлетворительно согласуются с экспериментом.

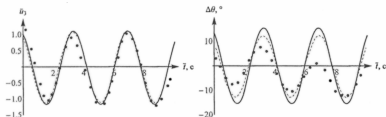


Рис. 2. Зависимость вертикального y_3 и вращательного $\Delta\theta$ перемещения центра пролета от времени: точки — эксперимент, пунктир — расчет (R. Keutgen, 1998), сплошная линия — данная работа

В работе (X. Liu et al., 2009) описаны результаты вычислительного эксперимента по исследованию пляски пролета с несимметричным обледенением. На Рис. 3 показаны траектории движения центральной точки провода в разные периоды времени, полученные в данной работе. Видно, что сначала развиваются вертикальные колебания, на которые затем накладываются горизонтальные колебания, в результате чего траектория движения центральной точки провода приобретает подковообразную форму. Данный эффект объясняется тем, что отношение первых собственных частот колебаний провода в вертикальной плоскости и в горизонтальном направлении близко к 2: указанные собственные частоты составляют 0.70 Гц и 0.38 Гц соответственно. Форма и амплитуда колебаний, полученные в данном расчете, хорошо согласуются с результатами вышеупомянутой работы.

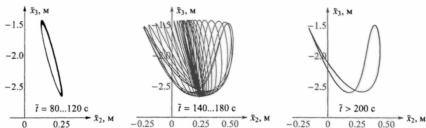


Рис. 3. Развитие колебаний

Моделирование нестационарных колебаний профиля. На Рис. 4, б приведены зависимости стационарных аэродинамических коэффициентов C_{xa} , C_{ya} и C_m профиля обледенелого провода ЛЭП, изображенного на Рис. 4, а, от угла атаки, определенные с помощью программного комплекса PROVOD. На Рис. 4, в показана периодическая траектория движения упругозакрепленного профиля и траектория его нестационарного движения.

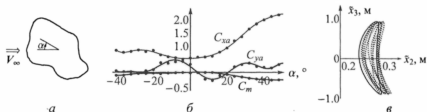


Рис. 4. Зависимости C_{xa} , C_{ya} , C_m от угла атаки α профиля обледенелого провода (а), аппроксимированные гладкими функциями (б); траектория движения профиля (в): результат квазистационарного (сплошная линия) и нестационарного (пунктир) расчета

Моделирование нестационарных колебаний провода. Для провода ЛЭП с профилем сечения, рассмотренным выше, был проведен расчет его движения по квазистационарным аэродинамическим нагрузкам до момента времени $\bar{t}^* = 180$ с, а затем — расчет с вычислением нестационарных аэродинамических нагрузок методом вихревых элементов.

На Рис. 5 приведена зависимость вертикальной координаты $\bar{x}_3$ и угла поворота θ центральной точки пролета от времени. Видно, что амплитуда вертикальных колебаний провода, полученная в результате нестационарного расчета, снижается на 12 % по сравнению с квазистационарным расчетом и составляет в итоге 0.65 м. Амплитуда угловых колебаний остается практически неизменной и составляет около 9° .

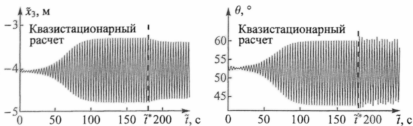


Рис. 5. Зависимость вертикальной координаты $\bar{x}_3$ и угла поворота θ центрального сечения провода от времени

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

В диссертационной работе рассмотрена задача о математическом моделировании аэроупругих колебаний провода ЛЭП с вычислением нестационарных аэродинамических нагрузок методом вихревых элементов. Для моделирования движения провода применен метод Бубнова — Галеркина с представлением решения в виде разложения по собственным формам малых колебаний провода. По результатам проведенных исследований могут быть сделаны следующие выводы.

1. Разработана и верифицирована методика определения собственных частот и форм малых колебаний провода многопролетной ЛЭП, основанная на применении метода передаточной матрицы и метода сагиттарной функции и получены характеристические уравнения для приближенного определения собственных частот малых колебаний провода многопролетной ЛЭП.

2. Разработана и верифицирована методика задания эквивалентных жесткостей пружин, моделирующих влияние изоляторов и соседних пролетов на колебания рассматриваемого пролета.

3. Предложен алгоритм моделирования аэроупругих колебаний провода под действием нестационарных аэродинамических нагрузок. На его основе разработан параллельный программный комплекс PROVOD, в котором расчет нестационарного обтекания сечений провода и вычисление аэродинамических нагрузок производятся методом вихревых элементов.

4. Разработанные модели, алгоритмы и программы могут использоваться при исследовании движения провода в существенно нестационарных условиях.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНЫ В РАБОТАХ

1. Иванова О.А. Исследование колебаний эллиптического профиля в жидкости методом вихревых элементов // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XIV Международного симпозиума. Харьков-Херсон, 2009. С. 306–309.

2. Иванова О.А., Марчевский И.К. Численное моделирование вращательного движения профиля в жидкости вихревым методом // Необратимые процессы в природе и технике: труды V Всероссийской конференции. М., 2009. Ч. 2. С. 102–105.

3. Марчевский И.К., Иванова О.А. Численное моделирование ветрового резонанса кругового профиля методом вихревых элементов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 5. С. 8–12.

4. Marchevskii I.K., Ivanova O.A. Numerical simulation of wind resonance of a circular profile by means of the vortex element method // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2009. V.38, N 5. P. 420–424.

5. Иванова О.А. Численное моделирование движения провода ЛЭП с учетом ветровых нагрузок // Параллельные вычислительные технологии: труды международной научной конференции. Уфа, 2010. С. 662.

6. Ivanova O.A. Numerical Simulation of Wind Induced Conductor Motion // The 5th International Conference on Vortex Flows and Vortex Models: book of proceedings. Caserta (Italy), 2010. 6 p.

7. Иванова О.А. Определение собственных частот колебаний одиночного провода ЛЭП // Необратимые процессы в природе и технике: труды VI Всероссийской конференции. М., 2011. Ч. 2. С. 247–250.

8. Иванова О.А. Численное моделирование захвата частоты схода вихрей с вибрирующего профиля // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XV Международного симпозиума. Харьков-Херсон, 2011. С. 193–196.

9. Иванова О.А. Приближенные методы определения собственных частот колебаний проводов многопролетных линий электропередачи // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2011. Спец. выпуск «Прикладная математика». С. 34–44.

10. Исследование аэроупругих колебаний провода, вызываемых отрывным вихревым обтеканием / О.А. Иванова [и др.] // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Ч. 2, № 4. С. 157–159.

11. Иванова О.А. Численное и аналитическое определение собственных частот колебаний многопролетной ЛЭП // XXXVIII Гагаринские чтения: сб. докладов Международной молодежной научной конференции. М., 2012. Т. 5. С. 63–65.

12. Иванова О.А. Численное моделирование движения провода ЛЭП под воздействием ветра // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2012. Спец. выпуск № 2 «Математическое моделирование в технике». С. 67–74.

13. Ivanova O.A. Numerical and analytical determination of multispans cable eigenfrequencies // The 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering: book of proceedings. Vienna, 2012. 9 p.

14. Иванова О.А. Численное моделирование аэроупругого движения провода ЛЭП с использованием метода плоских сечений // Необратимые процессы в природе и технике: труды VII Всероссийской конференции. М., 2013. Ч. 2. С. 115–118.

15. Иванова О.А. Расчет аэроупругих колебаний провода ЛЭП с использованием метода вихревых элементов // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XVI Международного симпозиума. Харьков-Херсон, 2013. С. 185–188.

16. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013617549. PROVOD — Численное моделирование движения провода ЛЭП под действием ветра / О.А. Иванова, И.К. Марчевский, Г.А. Щеглов. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20.08.2013.

17. Ivanova O.A. On numerical simulation of conductor galloping using vortex element method // Advanced Problems in Mechanics: proceedings of the XLI summer school-conference. St. Petersburg: IPME RAS, 2013. P. 268–274.

18. Иванова О.А. О выборе базиса для моделирования движения провода ЛЭП методом Галеркина // Наука и образование. Электронный журнал. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 9. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/602290.html>.