

ЕРМОЛАЕВА Мария Андреевна

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ
ФОРСИРОВАННЫХ ИСПЫТАНИЙ
ПРИ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЕ ДАННЫХ**

05.13.01 – Системный анализ, управление и
обработка информации (информатика, машиностроение)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»

**Научный
руководитель:**

доктор физико-математических наук, доцент
Тимонин Владимир Иванович

**Официальные
оппоненты:**

Дикусар Василий Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Вычислительный центр имени А.А. Дородницына РАН», главный научный сотрудник

Баскаков Валерий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное бюджетное научное учреждение «Институт макроэкономических исследований», заведующий лабораторией страхования и пенсионного обеспечения

2,

**Ведущая
организация:**

федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт системного анализа Российской академии наук»

Защита состоится «11» мая/мв 2014 г. В 11 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: Москва, Рубцовская наб., 2/18, ауд. 1006л.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан «10» февраля 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат технических наук, доцент



А.В.

3069

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



2045409

Статистические модели обр

-470

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Проведение испытаний на надежность является основным способом определения показателей надежности изделия, при этом испытываемое изделие должно безотказно работать довольно продолжительное время. В связи с этим оценка показателей надежности традиционными статистическими методами, требующая длительных испытаний больших объемов выборок изделий, ведет к большим временным и материальным затратам. По этой причине в 60-ых годах прошлого столетия стало развиваться направление, связанное с проведением ускоренных испытаний, позволяющих определять показатели надежности в сжатые сроки. Такой эффект достигается применением более жестких условий функционирования изделий в процессе испытаний – форсированных режимов испытаний. Идеи ускоренных испытаний во многом были взяты из методов проведения усталостных испытаний материалов, в которых были сформулированы основные принципы, используемые в теории форсированных испытаний различных изделий (принцип Пальмгрена-Майнера, переменные режимы испытаний и др.)

Проблемам форсированных испытаний посвящено большое количество публикаций как у нас в стране, так и за рубежом. Среди отечественных авторов отметим работы Х.Б. Кордонского, А.И. Перроте, Г.Д. Карташова, Н.М. Седякина, Л.Я. Пешеса. Из иностранных авторов – Д. Кокса, В. Нельсона, Н. Сингпурваллу, Д. Хана, Ф. Прошана, Н. Манн.

При проведении испытаний сложных изделий в виду многообразия физико-химических процессов, протекающих в них, в большинстве случаев невозможно теоретически обосновать существование каких-либо закономерностей, связывающих между собой наработки до отказа этих изделий в разных режимах. Тогда необходимы предварительные испытания и исследования, которые различаются для случая стабильного и нестабильного производства. Во время их проведения:

- выбираются форсированные режимы;
- определяются функции пересчета результатов форсированных испытаний на нормальный режим;
- проверяются различные модели расходования ресурса;
- обосновывается возможность применения полученных результатов для новых партий исследуемых изделий.

Степень разработанности. Для случая нестабильного производства общая методология проведения предварительных исследований была разработана Г.Д. Карташовым (Г.Д. Карташов; 1981). Предложенные им методы проведения предварительных испытаний позволяли решить перечисленные выше задачи, однако требовали испытаний двух выборок – одной в переменном режиме, другой – в нормальном режиме, что влекло за собой большие временные и материальные затраты. В ряде случаев применение оценок Каплана-Мейера позволяет исключить испытания изделий в нормальном режиме в комплексе предварительных исследований, что приводит к снижению стоимости и продолжительности их проведения (В.И. Тимонин; 2004). Вместе с тем, эти результаты применимы не для всех видов предварительных исследований.

Для стабильного производства основной задачей является установление связей между законами распределения наработок до отказа в различных режимах. Различные модели определения этих зависимостей рассмотрены в работе Nelson Wayne (1990). Однако большинство из них требуют знание вида закона распределения наработок до отказа, что на практике, как правило, неизвестно. Исключением является применение непараметрической модели Кокса (Д. Кокс, Д. Оукс; 1988). Однако существующие методы проверки адекватности модели Кокса, основанные на адаптации к рассматриваемой проблеме критерия отношения правдоподобия (N. Balakrishnan, C.R. Rao; 2004), применимы только для больших объемов выборок, что часто приводит к неверной интерпретации результатов испытаний.

Для нестабильного производства в диссертации обобщены результаты В.И.Тимонина на значительно более широкий класс предварительных испытаний, что в значительной степени позволяет сократить их объем и продолжительность. Для стабильного производства предложены методы, позволяющие проверить адекватность модели Кокса и построить на их основе оценки функций связи. Важно отметить, что предложенные в данной работе методы не требуют знания вида распределения наработок до отказа, которые практически всегда неизвестны. Таким образом, решаемые в диссертации задачи являются важными и актуальными для проведения форсированных испытаний.

Цель работы - разработка новых методов предварительных испытаний и соответствующих статистических моделей для обработки их результатов, которые должны обеспечить, во-первых, существенное снижение их времени проведения и стоимости и, во-вторых, независимость выводов от вида распределения наработок до отказа.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач**:

1. Разработка непараметрических методов проверки адекватности модели Кокса для результатов испытаний в постоянных режимах, а также основанных на них методов оценки параметров этой модели, применимые для выборок любых объемов.

2. Разработка новых процедур проведения испытаний в переменном режиме и статистического аппарата для обработки их результатов, применимых для выборок любых объемов.

3. Методами статистического моделирования обосновать состоятельность предложенных методов.

4. Разработка программного комплекса, реализующего разработанные алгоритмы.

Методы исследования. При решении задач, возникших в ходе выполнения диссертационной работы, использовались методы теории вероятностей и математической статистики, функционального анализа и вычислительной математики, а также методы математического моделирования.

Достоверность и обоснованность научных результатов и выводов гарантируется строгостью используемого математического аппарата и подтверждается

сравнением результатов, полученных в диссертационной работе, с известными результатами других авторов. Сформулированные в работе допущения обоснованы как содержательным образом, так и методами математического моделирования.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту.

1. Получен новый непараметрический критерий, позволяющий устанавливать связи между функциями распределения наработок в нескольких форсированных режимах, являющийся обобщением критерия Кифера-Гихмана.

2. Получен новый непараметрический критерий типа Колмогорова-Смирнова, позволяющий устанавливать связи между наработками до отказа изделий в форсированном и нормальном режимах.

3. Разработано программное обеспечение, позволяющее вычислять точные и асимптотические распределения статистик, предложенных в диссертации.

Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы связана с ее прикладной направленностью, а полученные результаты могут быть использованы при оптимизации проведения предварительных испытаний, повышения достоверности оценок показателей надежности за счет применения непараметрических методов анализа их результатов.

Апробация результатов. Результаты диссертационной работы неоднократно докладывались на научных семинарах кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (2009, 2010); Международных конференциях «Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации» (Суздаль, 2009, 2011); 65-ой научной сессии, посвященной Дню радио (Москва, 2010); Международной научной конференции «Актуальные направления развития прикладной математики в энергетике, энергоэффективности и информационно-коммуникационных технологиях» (Москва, 2010).

Публикации. Основные научные результаты диссертации отражены в 9 научных работах, в том числе 5 статей в научных журналах и изданиях, которые включены в Перечень российских рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертации, и материалах трех международных конференций.

Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю; заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Диссертационная работа изложена на 98 страницах, содержит 14 иллюстраций и 6 таблиц. Библиография включает 84 наименования.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность решаемой проблемы, сформулированы цель и задачи исследования, определены научная новизна и теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность, основные

положения, выносимые на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертационной работе.

В первой главе дан краткий обзор существующих методов обработки результатов форсированных испытаний. Рассмотрена часто используемая модель анализа результатов испытаний – модель Кокса, которая имеет следующий вид

$$\lambda(t, x, \beta) = \lambda_0(t) \psi(x, \beta) \quad (1)$$

где $\lambda_0(t)$ – базовая функция интенсивности отказов, β – вектор неизвестных параметров, x – вектор известных переменных, определяющих «жесткость» режима испытаний.

Для проверки адекватности данной модели рассмотрены наиболее известные критерии Хосмера и Лемешева, а также Гроннесби и Боргана. Все эти методы являются разновидностями критерия отношения правдоподобия и строго могут быть использованы только для больших объемов выборок. Кроме того, для получения конкретных статистик критериев адекватности необходимо задавать альтернативные гипотезы к гипотезе Кокса, которые, как правило, неизвестны на практике.

Для определения функциональных связей между наработками до отказа изделий ξ_0 в нормальном режиме ε_0 и наработками $\xi_1^1, \dots, \xi_1^q$ в форсированных $\varepsilon_1^1, \dots, \varepsilon_1^q$ режимах рассмотрены существующие способы проведения испытаний в переменном режиме и методы анализа их результатов. Детально рассмотрен классический метод проведения предварительных испытаний (Г.Д. Карташов; 1981) и их улучшенные варианты: методы «двоек» и «троек» (В.И. Тимонин; 2004).

Вторая глава посвящена исследованию проблемы непараметрического анализа связей между показателями надежности устройств при их функционировании в различных условиях.

Обозначим $\xi_i = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^n)$ – наработки до отказа в режиме ε^i , $\xi_j^i \sim F_i(t)$,

$i = 1, \dots, q$; $j = 1, \dots, n_i$; $n = \sum_{i=1}^q n_i$, где n_i – объем i -ой выборки. Основная проверяемая гипотеза имеет вид:

$$H_0 : F_1^{k_1}(t) = \dots = F_q^{k_q}(t). \quad (2)$$

Для проверки гипотезы (2) предлагается использовать статистику:

$$T_k^2 = \max_i \frac{\sum_{j=1}^q n_j (\hat{F}_i^{k_j} - \bar{F})^2 + \bar{F} \cdot (\Phi \sqrt{q-1} - \Phi_1)}{\Gamma^2}. \quad (3)$$

Здесь $\hat{F}_i(t)$ – эмпирическая функция распределения i -ой выборки;

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^q \rho_i \cdot \hat{F}_i^{k_i}(t); \quad \rho_i = n_i/n; \quad \Phi_1 = \sum_{i=1}^q k_i^2 (1 - \rho_i) \bar{F}^{1-k_{0i}} (1 - \bar{F}^{k_{0i}}); \quad \Gamma = \bar{F} + \Phi / \sqrt{q-1};$$

$$k_{0i} = 1/k_i; \quad \Phi = \left[\left(\sum_{i=1}^q k_i^2 \rho_i \bar{F}^{1-k_{0i}} (1 - \bar{F}^{k_{0i}}) \right)^2 + \sum_{i=1}^q k_i^4 \bar{F}^{2(1-k_{0i})} (1 - \bar{F}^{k_{0i}})^2 (1 - 2\rho_i) \right]^{1/2}.$$

Для вычисления точных распределений статистики (3) разработан метод, являющийся специализацией метода вычисления вероятностей невыхода траектории случайного блуждания из некоторого множества.

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_j < \gamma_{j+1}$, $j = 1, \dots, n-1$ - объединенный вариационный ряд компонент векторов ξ_i , $i = 1, \dots, q$. Пусть $z_j = i$, если γ_j - элемент i -й выборки. Обозначим $z = (z_1, \dots, z_n)$. Для определения точных распределений T_k^2 воспользуемся q -мерной моделью случайного блуждания: частица движется по q -мерному массиву ячеек $\Omega = \{a_{i_1, \dots, i_q} \mid 0 \leq i_j \leq n_j, j = 1 \dots q\}$, выходя на первом шаге из $a_{0, \dots, 0}$ и передвигаясь из ячейки $a_{i_1, i_2, \dots, i_q}$ в ячейку $a_{i_1', i_2', \dots, i_q'}$ на i -ом шаге, $i_1' = \sum_{j=1}^q \chi(z_j = j)$, $\chi(A)$ - индикатор события A . Блуждание оканчивается в ячейке $a_{n_1, n_2, \dots, n_q}$.

Определим множество

$$\Omega' = \left\{ \omega'_{i_1, \dots, i_q} = \sum_{j=1}^q n_j \left[\left(\frac{i_1}{n_1} \right)^{k_1} + \dots + \left(\frac{i_q}{n_q} \right)^{k_q} - z_{i_1, \dots, i_q} \right]^2, 0 \leq i_j \leq n_j, j = 1 \dots q \right\},$$

где $z_{i_1, \dots, i_q} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^q n_j \left(\frac{i_j}{n_j} \right)^{k_j}$.

Обозначим

$$\begin{aligned} T_{i_1, i_2, \dots, i_q} &= \left(\sum_{j=1}^q k_j^2 \rho_j \left(\sum_{v=1}^q \rho_v \left(\frac{i_v}{n_v} \right)^{k_v} \right)^{1-k_{0j}} \left(1 - \left(\sum_{v=1}^q \rho_v \left(\frac{i_v}{n_v} \right)^{k_v} \right)^{k_{0j}} \right) \right)^2 + \\ &+ \sum_{v=1}^q k_v^4 \left(1 - \left(\sum_{v=1}^q \rho_v \left(\frac{i_v}{n_v} \right)^{k_v} \right)^{k_{0j}} \right)^2 (1 - 2\rho_v) \left(\sum_{v=1}^q \rho_v \left(\frac{i_v}{n_v} \right)^{k_v} \right)^{2-2k_{0j}}; \\ A_{i_1, i_2, \dots, i_q} &= \omega'_{i_1, \dots, i_q} + \left(\sum_{v=1}^q \rho_v \left(\frac{i_v}{n_v} \right)^{k_v} \right) \times \\ &\times \left(\left(\sum_{j=1}^q k_j^2 (1 - \rho_j) \left(\frac{i_j}{n_j} \right)^{k_j-1} \left(1 - \frac{i_j}{n_j} \right) \right) - \sqrt{(q-1) \cdot T_{i_1, i_2, \dots, i_q}} \right); \\ B_{i_1, i_2, \dots, i_q} &= \left(\sum_{j=1}^q \rho_j \left(\frac{i_j}{n_j} \right)^{k_j} + \sqrt{\frac{T_{i_1, i_2, \dots, i_q}}{q-1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Теорема 1. Вероятность $P(T_k^2 < h)$ равна величине $\pi_{n_1, n_2, \dots, n_q}(h)$, которую можно определить повторным применением соотношения

$$\pi_{i_1 j_2 \dots j_q}(h) = \left(\pi_{i_1-1 j_2 \dots j_q}(h) i_1 k_{01} + \dots + \pi_{i_1 j_2 \dots j_q-1}(h) i_q k_{0q} \right) \cdot \frac{\chi_{i_1 j_2 \dots j_q}(h)}{\sum_{j=1}^q i_j k_{0j}}, \quad (4)$$

с начальными и граничными условиями: $\pi_{0 \dots 0}(h) = 1$, $\pi_{-1, 0 \dots 0} = \dots = \pi_{0 \dots 0, -1} = 0$.
Здесь

$$\chi_{i_1 j_2 \dots j_q}(h) = \begin{cases} 1, & \omega_{i_1 j_2 \dots j_q} < h, 0 \leq i_j \leq n_j; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\omega_{i_1 j_2 \dots j_q} = A_{i_1 j_2 \dots j_q} / B_{i_1 j_2 \dots j_q}$.

Разработанный метод позволяет вычислять вероятности для значительных объемов выборок. Табулированные точные вероятности $P(T_k^2 < h)$ для случая трех выборок одинакового объема представлены в табл. 1.

Таблица 1.

Значения точных вероятностей статистики T_k^2 , при $h=2$

Объем выборки, n_i	$k_1 = k_2 = k_3 = 1$	$k_1 = 1, k_2 = 1.5, k_3 = 2$	$k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 2$
100	0.88896	0.89632	0.89468
200	0.88893	0.89055	0.88945
300	0.88690	0.88809	0.88724
400	0.88559	0.88672	0.88594
500	0.88544	0.88579	0.88497
600	0.88370	0.88503	0.88437

Асимптотическое распределение статистики T_k^2 определялось методами теории слабой сходимости вероятностных мер в метрических пространствах. Рассмотрены эмпирические случайные процессы: $y_{ni}(t) = \sqrt{n_i}(\hat{F}_i^k(t) - \bar{F})$, $t \in [0, 1]$,

$Y_n^1(t) = \sum_{i=1}^q n_i (\hat{F}_i^k(t) - \bar{F})^2$. Процесс $Y_n^1(t)$ имеет вид

$$Y_n^1(t) = \sum_{i=1}^q \left(y_{ni}(t) - \sqrt{\rho_i} \sum_{j=1}^q \sqrt{\rho_j} \cdot y_{nj}(t) \right)^2.$$

Теорема 2. Эмпирический случайный процесс $Y_n^1(t)$ слабо сходится при $n_i \rightarrow \infty$, $n_i/n \rightarrow \rho_i > 0$ к распределению непрерывного процесса

$Y^1(t) = \sum_{i=1}^q \left(y_i(t) - \sqrt{\rho_i} \sum_{j=1}^q \sqrt{\rho_j} \cdot y_j(t) \right)^2$, где $y_i(t)$ - нормальный случайный процесс

с характеристиками $E(y_i(t)) = 0$, $E(y_i(s) y_i(t)) = k_i^2 s \cdot t^{1-k_{0i}} (1 - t^{k_{0i}})$, $0 \leq s \leq t \leq 1$.

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_{\infty}(t) = \left[\left(\sum_{i=1}^q k_i^2 \rho_i t^{1-k_{0i}} (1 - t^{k_{0i}}) \right)^2 + \sum_{i=1}^q k_i^4 t^{2(1-k_{0i})} (1 - t^{k_{0i}})^2 (1 - 2\rho_i) \right]^{1/2};$$

$$\Phi_{1,\infty}(t) = \sum_{i=1}^q k_i^2 (1 - \rho_i) t^{1-k_{0i}} (1 - t^{k_{0i}}); \quad \Gamma_{\infty}(t) = t + \Phi_{\infty}(t)/\sqrt{q-1};$$

$$\tau = \tau(t) = t/\Gamma_{\infty}(t); \quad h(t) = (\Gamma_{\infty}(t))^2.$$

Теорема 3. Математическое ожидание и функция ковариации процесса $Y^1(t)$ имеют вид:

$$EY^1(t) = \tau \cdot (1 - \tau)(q - 1) - \frac{t}{h(t)} \cdot (\Phi_{\infty}(t)\sqrt{q-1} - \Phi_{1,\infty}(t));$$

$$\text{cov}(Y^1(s), Y^1(t)) = 2 \frac{s^2}{h(s)} \cdot \frac{\Phi_{\infty}^2(t)}{h(t)}.$$

Доказано, что процесс

$$W^*(\tau) = \frac{Y^1(t(\tau)) + t(\tau) [\Phi(t(\tau))\sqrt{q-1} - \Phi_1(t(\tau))]}{\Gamma^2(t(\tau))}$$

имеет среднее значение вида $EW^*(\tau) = (q-1)\tau(1-\tau)$ и функцию ковариации вида $\text{cov}(W^*(s), W^*(\tau)) = 2s^2(q-1)(1-\tau)^2$, $0 \leq s \leq \tau \leq 1$. Эти характеристики равны соответствующим характеристикам суммы квадратов $(q-1)$ броуновских мостов. Теоретически обосновано, что для больших объемов выборок в качестве приближенного асимптотического распределения целесообразно использовать распределение Кифера-Гихмана, являющееся распределением супремума суммы квадратов $(q-1)$ броуновских мостов. Его функция распределения имеет вид:

$$G(h) = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{q-1}{2}\right)(2h^2)^{\frac{q-1}{2}}} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{\mu_s^{q-3}}{I'_{\frac{q-3}{2}}(\mu_s)} \right] \cdot e^{-\frac{\mu_s^2}{2h^2}},$$

где $h > 0$, μ_s - s -ый положительный нуль функции Бесселя $I_{\frac{q-3}{2}}(z)$.

На рис. 1 показаны графики зависимости точных вероятностей $\pi_{n_1, n_2, \dots, n_q}(h)$ от n_i и h для случая трех выборок одинакового объема (горизонтальная прямая соответствует значению $G(h)$).

Статистика T_k^2 использована для оценки неизвестных значений k_i по результатам испытаний; в качестве оценок $\hat{k}_i$ выбирались значения, минимизирующие T_k^2 .

С целью определения точности предлагаемого метода оценивания было проведено статистическое моделирование.

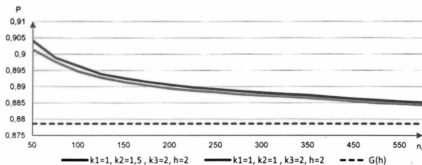


Рис. 1. Значения $P(T_k^2 < h)$ и $G(h)$ при $q=3, h=2$

Алгоритм моделирования для случая трех выборок включает в себя следующие шаги:

- 1) фиксируются значения $k_1 = 1, k_2, k_3$;
- 2) моделируются 3 выборки по n_i элементов в каждой (здесь представлены результаты моделирования для $F_1 = 1 - e^{-\lambda x}$, $F_1 = F_2^{k_1} = F_3^{k_3}$, $\lambda = 0.001$);
- 3) определяются значения $\hat{k}_i$, минимизирующие значение T_k^2 .

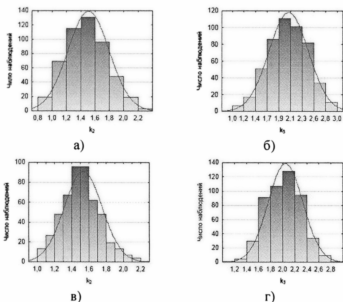


Рис. 2. Гистограмма оценок $\hat{k}_2, \hat{k}_3$ для трехвыборочного случая с параметрами:

- а) $n_1 = n_2 = n_3 = 50, k_2 = 1.5, \hat{k}_2 = 1.504, S^2 = 0.082$;
- б) $n_1 = n_2 = n_3 = 50, k_3 = 2, \hat{k}_3 = 2.068, S^2 = 0.141$;
- в) $n_1 = n_2 = n_3 = 100, k_2 = 1.5, \hat{k}_2 = 1.531, S^2 = 0.048$;
- г) $n_1 = n_2 = n_3 = 100, k_3 = 2, \hat{k}_3 = 2.042, S^2 = 0.083$

Пункты 2 – 3 повторяются 500 раз. По полученным значениям оценок строится их гистограмма и вычисляются среднее $\bar{k}_i$ и дисперсия S^2 выборки.

Третья глава посвящена определению корреляционных или функциональных связей между наработками изделия в нескольких режимах.

Пусть наработки одного и того же изделия $\xi_0, \xi_1^1, \dots, \xi_{m-1}^1$ в режимах $\varepsilon_0, \varepsilon_1^1, \dots, \varepsilon_{m-1}^1$ соответственно связаны соотношением

$$H: \xi_0 = \varphi_1(\xi_1^1), \dots, \xi_{m-1} = \varphi_{m-1}(\xi_{m-1}^1), \quad (5)$$

где $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$ – некоторые функции. В дальнейшем для упрощения обозначений (без ограничения общности) рассматривается один форсированный режим, с функцией пересчета $\xi_0 = \varphi(\xi_1^1)$.

Испытания в переменном режиме $\bar{\varepsilon}(t)$ проводятся следующим образом. Изделия в количестве $N = mn$, разбитые случайным образом на n групп по m изделий, начинают испытываться в режиме ε_0 , и, при первом отказе изделия в группе, оставшиеся $(m-1)$ изделия переключаются в форсированный режим ε_1 . Пусть $\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_m^1$ – теоретические наработки до отказа в режиме ε_0 изделий i -ой группы. Обозначим $\theta_0^i, \theta_1^i, \dots, \theta_{m-1}^i$ – реальные времена работы изделий i -ой группы в режимах $\varepsilon_0, \varepsilon_1$, тогда $\theta_0^i = \min\{\xi_1^i, \dots, \xi_m^i\}$. При соблюдении некоторых слабых ограничений (Г.Д. Карташов; 1981) на распределение наработок ξ_1^i , при справедливости гипотезы (5) величины $\eta_1^i = \theta_0^i + \varphi(\theta_1^i), \dots, \eta_{m-1}^i = \theta_0^i + \varphi(\theta_{m-1}^i)$ будут совпадать с наработками ξ_j^i . Назовем η_j^i прогнозными наработками изделия в нормальном режиме.

Обозначим через $Q = (\theta_0^1, \eta_1^1, \dots, \eta_{m-1}^1, \dots, \theta_0^n, \eta_1^n, \dots, \eta_{m-1}^n)$ объединенную выборку из наработок изделий, $\Theta = (\theta_0^1, \dots, \theta_0^n)$ – выборку из минимумов по каждой группе. Тогда при справедливости (5) функцию надежности $P_0(t)$ можно оценить по выборкам Q и Θ как:

$$\hat{P}_\Theta(t) = \begin{cases} 1, d_1(t) = 0, \\ \prod_{i=1}^{d_1(t)} \left(1 - \frac{1}{m(n-i+1)} \right), & 1 \leq d_1(t) \leq (n-1), \\ 0, d_1(t) = n, \end{cases}$$

$$\hat{P}_Q(t) = 1 - \frac{d_2(t)}{mn}, \quad (6)$$

где $d_1(t), d_2(t)$ – количество элементов выборок Θ и Q соответственно, меньших t . Оценка $\hat{P}_\Theta(t)$ называется оценкой Каплана-Мейера функции $P_0(t)$ по цензурированным данным. Для проверки (5) предлагается статистика вида

$$T_{mn} = m\sqrt{n} \max_i \frac{(\hat{P}_q(t))^{m-1}}{1 - m \cdot (1 - \hat{P}_q(t)) \cdot (\hat{P}_q(t))^{m-1}} \cdot |\hat{P}_\theta(t) - \hat{P}_q(t)|. \quad (7)$$

Статистика (7) является аналогом статистики Н.В. Смирнова (1939) применительно к рассматриваемой проблеме.

Чтобы вычислить точные распределения статистики T_{mn} , введем модель случайного блуждания. Пусть $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1 + \left[\frac{j-1}{m-1} \right], \dots, n$; $j = 0, \dots, n(m-1)$ – двумерный массив ячеек. Частица на первом шаге выходит из ячейки $a_{n, n(m-1)}$ и на l -ом шаге переходит из $a_{n-W_l, n(m-1)+W_{l-1}-l+1}$ в ячейку $a_{n-W_l, n(m-1)+W_{l-1}}$, где W_l – количество элементов выборки Θ на последних $mn-l+1$ местах элементов объединенного вариационного ряда Q . На mn -ом шаге она заканчивает блуждание в ячейке $a_{0,0}$.

Теорема 4. Вероятность $P\{T_{mn} < h\}$ равна величине $\pi_{0,0}$, которую можно получить повторным применением соотношения

$$\pi_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = n, j = n(m-1); \\ \left(\frac{im-i-j}{mn-i-j} \pi_{i,j+1} + \frac{m(n-i)}{mn-i-j} \pi_{i+1,j} \right) \chi_{ij}, & 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq (m-1)(i-1); \end{cases}$$

с начальными и граничными условиями $\pi_{n, n(m-1)n} = 1$, $\pi_{i, j(m-1)+1} = 0$, $i = \overline{0, n}$, $\pi_{n+1, j} = 0$,

$j = \overline{1, n(m-1)}$. Здесь $\chi_{ij} = \begin{cases} 1, & a_{ij} \in A_0; \\ 0, & a_{ij} \notin A_0 \end{cases}$ – индикатор массива A_0 , где $A_0 = \{a_{ij}\}$, чьи

индексы i, j удовлетворяют условиям:

1. $i = 0, j = 0$;

$$2. \left\{ m\sqrt{n} \cdot \frac{mn(mn-i-j)^{m-1}}{(mn)^m - m(mn-i-j)^{m-1}(i+j)} \cdot \left| \frac{mn-i-j}{mn} - \prod_{k=1}^i \left(1 - \frac{1}{m(n-k+1)} \right) \right| < h \right\},$$

если $1 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq (m-1)i$;

$$3. \left\{ m\sqrt{n} \cdot \frac{mn((m-1)n-j)^{m-1}}{(mn)^m - m((m-1)n-j)^{m-1}(n+j)} \cdot \left| \frac{(m-1)n-j}{mn} \right| < h \right\}, i = n, 0 \leq j \leq (m-1)n.$$

Для предельного распределения статистики (7) справедлива теорема.

Теорема 5. Предельным распределением случайной величины T_{mn} является стандартное распределение Колмогорова-Смирнова

$$P\{T_{mn} < x\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}.$$

В табл. 2 рассчитаны вероятности точного распределения T_{mn} для значения $h=1.36$, которое является квантилем уровня 0.9506 асимптотического распределения Колмогорова-Смирнова.

Таблица 2.

Точные вероятности для квантиля $h=1.36$

Количество групп, n	Количество элементов в группе, m					
	2	3	4	5	7	8
50	0.94631	0.90212	0.84697	0.78989	0.68676	0.64479
500	0.95434	0.95319	0.95199	0.94962	0.93830	0.92859
5 000	0.95201	0.95178	0.95166	0.95160	0.95152	0.95151
50 000	0.95102	0.95095	0.95093	0.95091	0.95090	0.95089
100 000	0.95087	0.95083	0.95081	0.95080	0.95080	0.95079

На рис. 3 графически проиллюстрирована сходимость точных вероятностей к асимптотическому значению для $h=1.36$.

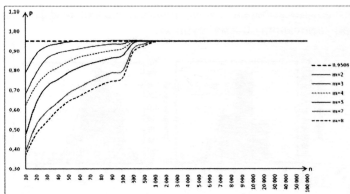


Рис. 3. Сходимость точных вероятностей к их асимптотическому значению

В работе проведено статистическое моделирование с целью определения свойств оценок функций связи между наработками до отказа изделий в нормальном и форсированных режимах.

Рассмотрим случай линейной зависимости между наработками $\xi_0 = k\xi_*$, где k — заданный коэффициент ускорения. Моделировались nm случайных величин $(\xi_1^i, \dots, \xi_m^i)$, $i = 1, \dots, n$, распределенные по экспоненциальному закону (с параметром $\lambda = 0.0001$). Определялись исходные данные $\theta_0^i = \min(\xi_1^i, \dots, \xi_m^i)$ и $\theta_j^i = \frac{(\xi_j^i - \theta_0^i)}{k}$, для $\xi_j^i \neq \theta_0^i$. В качестве оценки k выбиралось значение, минимизирующее статистику T_{mn} , т.е. $\hat{k} = \arg \min_k (T_{mn})$. Процедура повторялась 500 раз, а затем вычислялись среднее значение и дисперсия для $\hat{k}$ (табл. 3). По полученным данным строилась гистограмма полученных оценок для различных наборов параметров моделирования k, m (рис. 4).

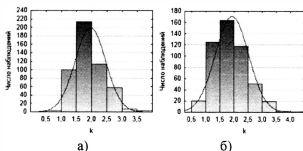
Таблица 3.

Результаты моделирования для экспоненциального распределения

$$\lambda = 0.0001, N=120$$

Коефф. ускорения	Количество изделий в группе							
	m=2		m=3		m=4		m=5	
	$\bar{k}$	S^2	$\bar{k}$	S^2	$\bar{k}$	S^2	$\bar{k}$	S^2
2.0	1.9459	0.2422	1.9197	0.3403	1.9406	0.4645	1.8932	0.4539
3.0	2.8847	0.6336	2.8221	0.7258	2.8692	0.9820	2.9396	1.3257
4.0	3.9332	1.1496	3.8885	1.4913	3.7954	1.6037	3.8352	2.0607
5.0	4.9199	1.7441	4.8431	2.1848	4.8157	2.8820	4.7865	3.0519
6.0	5.8590	2.2538	5.6978	3.2491	5.8304	3.6422	5.6946	4.4305

Результаты вычислительного эксперимента показывают, что при фиксированном общем объеме выборки $N = mn$ точность оценки коэффициента ускорения снижается при увеличении объема групп m .

Рис. 4. Сравнение точности методов для $k=2$

а) $m = 2, \hat{k} = 1.95, S^2 = 0.24$; б) $m = 3, \hat{k} = 1.92, S^2 = 0.34$

В этом случае предлагается модификация проведения испытаний, заключающаяся в следующем: изделия группы переключаются в форсированный режим после отказа r -ого ($r > 1$) изделия. При этом условии значительно усложняется статистический аппарат обработки результатов испытаний, так как оценка Каплана-Мейера будет зависеть от порядка следования отказов в нормальном и форсированном режимах. По этой причине в диссертации рассматривались условные распределения статистик типа Колмогорова-Смирнова, проверяющих основную гипотезу

$$H_0: \xi_0 = k \xi_*, \quad (8)$$

Пусть ξ_i^j - теоретические наработки j -го изделия из i -ой группы в нормальном режиме, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$. Обозначим $\xi_{(r)}^i$ - момент отказа r -ого изделия i -ой группы в режиме ε_0 , $\theta_{r+1}^i, \dots, \theta_m^i$ - наработки неотказавших в ε_0 изделий i -ой группы в форсированном режиме ε_* . Пусть

$\eta'_{r,i} = \xi'_{(r)} + k\theta'_{*,r+1}, \dots, \eta'_{i,n} = \xi'_{(r)} + k\theta'_{*,n}, \quad i = \overline{1, n} -$ прогнозируемые наработки в нормальном режиме этих изделий i -ой группы.

Аналогично случаю $r=1$ при справедливости гипотезы (8) функцию надежности $P_\theta(t)$ можно оценить двумя способами: стандартной оценкой $\hat{P}_q(x)$ по объединенной выборке Q из реальных и прогнозируемых наработок и с помощью оценки Каплана-Мейера $\hat{P}_\theta(x)$ по реальным наработкам $\xi'_{(1)}, \dots, \xi'_{(r)}$ (выборка Θ)

$$\hat{P}_q(t) = 1 - \frac{d_2(t)}{mn},$$

где $d_2(t)$ – количество элементов выборки Q , меньших t ;

$$\hat{P}_\theta(t) = \begin{cases} 1, & d_1(t) = 0; \\ \frac{mn - d_1(t)}{mn}, & 1 \leq d_1(t) \leq u_1; \\ \left(\frac{mn - u_1}{mn} \right) \cdot \left(\frac{mn - d_1(t) - (m-r)}{mn - u_1 - (m-r)} \right), & u_1 < d_1(t) \leq u_2 \\ \dots & \\ \frac{\prod_{q=1}^p (mn - (q-1)(m-r) - u_q)}{\prod_{q=1}^{p+1} (mn - (q-1)(m-r) - u_{q-1})} \cdot (mn - p(m-r) - d_1(t)), & u_p < d_1(t) \leq u_{p+1}, \\ & 0 \leq p \leq n-1; \\ \dots & \\ 0, & d_1(t) = nr. \end{cases}$$

Разработан метод вычисления точных распределений статистик типа Колмогорова-Смирнова $T = \max \rho(\hat{P}_\theta(x), \hat{P}_q(x))$, где $\rho(x, y)$ – некоторая функция, определяющая расстояние между x, y .

Пусть τ_i – время r -ого отказа изделия в i -ой группе (момент переключения в форсированный режим) $i = \overline{1, \dots, n}$; $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$; u_i – количество отказов элементов из выборки Θ , меньших или равных τ_i . Обозначим Π_u – множество перестановок, у которых одинаковое количество отказов u_i из множества Θ до момента τ_i , $i = \overline{1, n}$. Здесь $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $r \leq u_1 < u_2 < \dots < u_n = nr$, $u_i \geq i \cdot r$.

Теорема 6. Условная вероятность $P(T < h | \Pi_u)$ при заданном $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ равна величине $\pi_{nr, n(m-r)}$, которую можно получить повторным соотношением

$$\pi_{ij} = \begin{cases} 1, & i=0, j=0; \\ \left(\pi_{i-1,j} \frac{d(i) \cdot (m-r) - j + 1}{mn - i - j + 1} + \pi_{i,j-1} \frac{mn - d(i-1) \cdot (m-r) - i + 1}{mn - i - j + 1} \right) \chi_{ij}, & a_{ij} \in A_v; \\ 0, & (j=-1) \cup ((i=v_k-1) \cap ((k-1)(m-r)+1 \leq j \leq k(m-r))) \end{cases}$$

Здесь $d(i) = k, u_k \leq i < u_{k+1}, u_0 = 0, \chi_{ij} = \begin{cases} 1, & a_{ij} \in A_0; \\ 0, & a_{ij} \notin A_0; \end{cases}$ — индикатор множества

$$A_0 = \{a_{ij} \in A_u \mid \rho(t_{ij}, q_{ij}) < h\}; q_{ij} = 1 - \frac{i+j}{m \cdot n}; t_{ij} = \prod_{d=1}^i \mu_d;$$

$$\mu_d = \begin{cases} 1, & d \leq v_1; \\ 1 - \frac{1}{mn - d + 1 - \lambda(d) \cdot (m-r)}, & d \neq n \cdot r; \lambda(d) = s \text{ при } u_s < d \leq u_{s+1}, s = \overline{1, n-1}; \\ 0, & d = nr. \end{cases}$$

Проанализированы различные возможные виды функции $\rho(x, y)$, определяющие статистику T . Методом Монте-Карло установлено, что наиболее приемлемым видом статистики T является статистика

$$T_{mn}^r = \max_i \sqrt{(m-r+1)n} \frac{\hat{P}_q^{m-r}(t) |\hat{P}_q(t) - \hat{P}_\theta(t)|}{1 - (m-r+1) \hat{P}_q^{m-r}(t) (1 - \hat{P}_q(t))}. \quad (9)$$

Заметим, что при $r=1$ статистика (9) совпадает с (7).

Аналогично случаю $r=1$ методом Монте-Карло исследованы свойства оценок $\hat{k}$ и получены гистограммы их распределения (рис. 5).

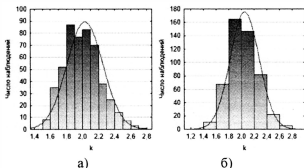


Рис. 5. Гистограммы оценок $\hat{k}$ при $k=2, m=5, n=300$
а) $r=3, \bar{k}=2.0264, S^2=0.2231$; б) $r=4, \bar{k}=2.0468, S^2=0.2274$

Исследование показало, что предложенный метод дает приемлемую точность оценки при $n > 40$, а гистограммы показывают хорошие статистические свойства полученных оценок.

Основные результаты диссертационной работы

1. Для предварительных испытаний в нескольких постоянных режимах предложена статистика типа Кифера-Гихмана, которая позволяет проверить адекватность модели Кокса-Лемана для нескольких форсированных режимов. Для этой цели получены точные и асимптотические распределения этой статистики при справедливости модели Кокса-Лемана. Разработан метод оценки параметров степенной модели Кокса-Лемана, основанный на минимизации статистики типа Кифера-Гихмана. Методами статистического моделирования показана состоятельность этих оценок.

2. Для предварительных испытаний в переменных режимах получен метод оценивания функций пересчета с форсированных режимов на нормальный режим, позволяющий не проводить в ходе исследования испытания в постоянном режиме. Это существенно снижает продолжительность и стоимость этих испытаний. Для реализации полученного метода оценивания функций пересчета предложена статистика типа Смирнова, основанная на применении оценки Каплана-Мейера функции надежности. Получены точные и асимптотические распределения этой статистики.

3. Методами статистического моделирования показана состоятельность оценок функций пересчета, основанных на минимизации этой статистики. Предложен метод планирования предварительных испытаний в том случае, если известен диапазон возможных значений коэффициента ускорения испытаний.

Основные результаты диссертации отражены в работах:

1. Ермолаева М.А. Непараметрический анализ зависимости между распределениями наработок до отказа изделий и устройств в разных условиях эксплуатации // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. М., 2009. Вып. 3. С. 227-230.

2. Тимонин В. И., Ермолаева М.А. Оценки Каплана-Мейера в статистиках типа Колмогорова-Смирнова при проверке гипотез в испытаниях с переменной нагрузкой // Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. Т.15, №7. С. 18-26 (0,56 п.л./0,35 п.л.).

3. Ермолаева М.А. Непараметрическая оценка зависимости коэффициента пропорциональности в модели кокса от фактора нагрузки // Актуальные направления развития прикладной математики в энергетике, энергоэффективности и информационно-коммуникационных технологиях: Сборник трудов международной научной конференции. М., 2010. С. 100-105.

4. Ермолаева М.А., Тимонин В.И. Новый метод определения коэффициентов ускорения форсированных испытаний радиоэлектронной аппаратуры // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. Научная сессия, посвященная дню радио. М., 2010. Вып. 65. С. 57-59.

5. Ермолаева М.А., Тимонин В.И. Анализ цензурированных данных в испытаниях с переменной нагрузкой // Труды Российского научно-технического обще-

ства радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. М., 2011. Вып. 4. С. 114-116.

6. Тимонин В.И., Ермолаева М.А. Многовыборочный аналог критерия Смирнова проверок степенных гипотез Лемана // Электромагнитные волны и электронные системы. 2011. Т.16, №11. С. 6-11 (0,38 п.л./0,25 п.л.).

7. Ермолаева М.А. Исследование минимаксных оценок параметров модели Кокса-Лемана методами статистического моделирования // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2012. №7. С. 67-70.

8. Тимонин В.И., Ермолаева М.А. Точные распределения статистик типа Колмогорова-Смирнова, применяемых для анализа остаточной надежности резервированных систем // Электромагнитные волны и электронные системы. 2012. Т.17, №10. С. 66-72 (0,31 п.л./0,18 п.л.).

9. Тимонин В.И., Ермолаева М.А. Оценка параметра степенной модели Лемана-Кокса методом минимизации функционалов типа Колмогорова-Смирнова и Сэвиджа // Наука и образование. Электрон. журнал. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. № 7. DOI: 10.7463/0712.0410885. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/410885.html> (0,5 п.л./0,26 п.л.).