

БЕЛЕНОВСКАЯ Юлия Владимировна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В КОМПОЗИЦИОННЫХ
МАТЕРИАЛАХ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ



АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Дмитриенко Юрий Иванович

Официальные оппоненты: **Георгиевский Дмитрий Владимирович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор кафедры механики композитов

Кантор Марк Михайлович,
кандидат физико-математических наук, закрытое акционерное общество «Транзас», специалист

Ведущая организация: Открытое акционерное общество «Композит»

Защита диссертации состоится «11» апреля 2014 года, в 13 часов 00 минут, на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: г. Москва, Рубцовская наб., д. 2/18, ауд. 1006л.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан «04» декабря 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат технических наук, доцент



А.В. Аттета

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



2045442

Математическое моделирование

- 443

Актуальность темы. Моделирование процессов высокоскоростного ударно-волнового взаимодействия ударников и преград является важным для многих практических задач, таких как создание защитных броневых систем от пробивания пулями, снарядами и осколками. Наиболее изученными в настоящее время можно считать процессы проникания ударников в изотропные среды с малыми упругими и упругопластическими деформациями (в основном это металлы и сплавы, керамики, некоторые горные породы и т.п.). Проникание же ударников в преграды, выдерживающие до разрушения большие деформации (грунты и некоторые виды горных пород, некоторые типы сплавов), существенно менее изучено.

В последнее время, в связи с разработкой новых текстильных высокопрочных композиционных материалов на основе арамидных волокон СВМ, Армос, Русар, Терлон (Россия), Кевлар (США), Тварон (Нидерланды), волокна из сверхвысокомолекулярного полиэтилена Спектра (США), Дайнема (Нидерланды), Текмилон (Япония), Эспелен (Россия), появился интерес к изучению процессов взаимодействия ударников с гибкими анизотропными средами, способными выдерживать конечные деформации. Механизмы динамического деформирования и разрушения таких сред существенно отличаются от механизма разрушения классических изотропных сред.

Как преграда текстильная броня представляет собой сложную дискретную структуру с внутренними степенями свободы, поскольку нити, из которых состоит текстильный бронепакет, обладают способностью к смещению, как в направлении воздействия пули, так и в плоскости ткани. Именно способность нитей ткани испытывать смещение при ударно-проникающем воздействии пули обеспечивает возможность преобразования кинетической энергии пули в энергию растяжения нитей ткани.

Развитию математических моделей динамического поведения материалов при ударно-волновых воздействиях, моделям деформирования и разрушения изотропных материалов, а также численным методам решения задач динамики ударно-волнового деформирования классических материалов посвящено большое количество работ авторов: Н.Н. Холина, А.Г. Багдоева, Г.А. Кириленко, В.И. Кондаурова, В.Н. Кукуджанова, А.Б. Киселева, Х.А. Рахматуллина, А.А. Ванцана, А.С. Кравчука, В.П. Майборода, В.К. Новацкого, И.Б. Петрова, Ю.А. Демьянова, А.С. Холодова, А.Я. Сагомояна, А.И. Гулидова, Г.А. Сапожникова, K. Morton, E. Love, B. Gross, A. Nadai, J. Bishop, E. Lee, W. Prager, C. Chu,

Г.А. Maugin и многих других.

В настоящее время существует сравнительно небольшое количество работ, посвященных разработке математических моделей механического поведения гибких броневого материалов, среди которых укажем работы: В.Г. Бова, А.И. Тихоновой, Ю.И. Ржевцевой, В.А. Григоряна, М.Е. Буланова, О.Б. Дашевской, В.М. Маринина, В.А. Хромушина, И.Ф. Кобылкина, С.Б. Сапожникова, Н.Ю. Долганиной, С.А. Сахарова, Е.Ф. Харченко, А.Ф. Ермоленко, Н.А. Зеленова, N. Bonora, A. Ruggiero, R. Barauskas, F. Baudry, H. Broos, V.B.C. Tan, H. Xie, G.L. Li. Эти модели относятся к классу «инженерных». В работах Ю.И. Димитриенко были предложены континуальные модели физико-механического поведения материалов с учетом больших упругих и неупругих деформаций, основанные на общих принципах термомеханики сплошной среды, а также метод обобщенного единого представления определяющих соотношений сплошных сред с помощью комплекса энергетических пар тензоров напряжений-деформаций при конечных деформациях.

При математическом моделировании процессов деформирования и разрушения гибких броневого композиционных материалов (ГБКМ) необходимо учитывать комплекс специфического механического поведения ГБКМ при ударно-волновом воздействии:

- нелинейно-упругий характер деформирования тканей в составе ГБКМ при растяжении по основе и утку, обусловленный распрямлением волокон в тканях;

- вязкоупругий характер деформирования тканевых ГБКМ при растяжении и упруго-пластический характер деформирования при сжатии по основе и утку;

- упруго-пластический характер деформирования при поперечном сжатии ГБКМ к плоскости слоев ткани;

- упруго-пластический характер деформирования при межслойном («межнитевом») сдвиге ГБКМ, обусловленный вытягиванием волокон друг относительно друга, а также проскальзыванием отдельных слоев ткани.

Диссертационная работа посвящена разработке математической модели деформирования гибких броневого материалов при ударных воздействиях, которая учитывает перечисленные выше эффекты, и основана на общих теоретических принципах построения моделей нелинейной механики сплошной среды при больших деформациях.

Цель проведенных исследований – разработка математических моделей механического поведения гибких броневого композитных материалов при квазистатических и ударно-волновых воздействиях и мето-

дики численной реализации разработанных моделей.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач**:

1. Разработка математической модели вязко-упруго-пластического деформирования гибких композиционных материалов с конечными деформациями при ударно-волновых воздействиях.

2. Исследование модели гибких композиционных сред с конечными деформациями на примере квазистатической задачи, определение материальных констант модели на основе анализа экспериментальных данных.

3. Постановка осесимметричной динамической задачи о нормальном ударе по композитной мишени с конечными деформациями.

4. Разработка численного алгоритма для решения осесимметричной задачи ударно-волнового деформирования, проведение численного моделирования ударно-волнового взаимодействия ударника с преградой на основе ГБКМ.

Методы исследования. При решении задач, возникших в ходе выполнения диссертационной работы, использовались различные классы методов: нелинейной термомеханики сплошной среды, метод представления определяющих соотношений сплошных сред с помощью комплекса энергетических пар тензоров напряжений-деформаций при конечных деформациях, численные конечно-разностные методы решения динамических задач механики сплошных сред.

Достоверность и обоснованность научных результатов гарантируется строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов, полученных с использованием различных методов и вычислительных экспериментов. Сформулированные в работе допущения обоснованы путем их содержательного анализа. Результаты диссертационной работы согласуются с известными результатами других авторов и экспериментальными данными по ударно-волновому воздействию на гибкие композиционные материалы и бронезащитные структуры.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

1. Разработана математическая модель ударно-волнового деформирования ортотропных гибких броневых композиционных материалов, основанная на обобщенном представлении определяющих соотношений при конечных деформациях с использованием энергетических пар тензоров напряжений-деформаций, и учитывающая нелинейно-упругие, вязкоупругие и пластические конечные деформации композиционных мате-

риалов.

2. Получено численно-аналитическое решение задачи о квазистатическом деформировании пластин из гибких броневого композиционных материалов с нелинейно-упругими, вязкоупругими и пластическими анизотропными конечными деформациями.

3. Разработан алгоритм численного решения осесимметричной задачи о нормальном ударе ударника по плоской преграде из гибкого броневого композиционного материала, в рамках разработанной математической модели деформирования материала.

4. Разработан программный комплекс для численного моделирования процессов деформирования и разрушения преград из гибких броневого композиционных материалов при нормальном ударе, с помощью которого получены новые результаты численного моделирования ударно-волновых процессов деформирования и разрушения гибких композиционных материалов на основе арамидных тканей, выполнено их сопоставление с имеющимися экспериментальными данными.

Практическая значимость диссертационной работы связана с ее прикладной ориентацией, полученные результаты могут быть использованы: для исследования процессов взаимодействия ударников с преградами на основе гибких композиционных материалов, для оптимизации перспективных защитных пакетов и структур, для разработки более легких и эргономичных средств индивидуальной броневого защиты.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы неоднократно докладывались на научных семинарах кафедр вычислительной математики и математической физики, прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана, Всероссийской научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии» (Реутов, 2002), Первой международной научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии», посвященной 90-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея (Москва, 2004), Международной научной конференции «Ракетно-космическая техника: фундаментальные и прикладные проблемы механики», посвященной 90-летию В.И. Феодосьева (Москва, 2006), Третьей Международной научной конференции «Ракетно-космическая техника: фундаментальные и прикладные проблемы механики» (Москва, 2007), Второй международной научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии», посвященной 95-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея (Москва, 2009), Международной научной конференции, посвященной 180-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, 2010).

Публикации. Основные научные результаты диссертации отражены в 9 научных работах, в том числе в 3-х статьях, включенных в Пере-

чень рецензируемых научных журналов и изданий.

Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю; заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, выводов и списка литературы. Работа изложена на 129 страницах, содержит 31 иллюстрацию и 3 таблицы. Библиография включает 130 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность, основные положения, выносимые на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

Первая глава посвящена разработке математической модели деформирования анизотропных вязко-упруго-пластических сред с конечными деформациями с использованием метода построения определяющих соотношений на основе комплекса энергетических пар тензоров напряжений и деформаций $(\mathbf{T}, \mathbf{C})^{(n)}$, предложенного Ю.И. Димитриенко (Нелинейная механика сплошной среды, 2011). На основе допущения об аддитивности тензоров деформаций $\mathbf{C}^{(n)} = \mathbf{C}^{\prime (n)} + \mathbf{C}^p$, где $\mathbf{C}^{\prime (n)}$ – тензор вязкоупругих деформаций; $\mathbf{C}^p$ – тензор пластических деформаций, предложены определяющие соотношения для вязкоупругих деформаций $\mathbf{C}^{\prime (n)} = -\partial \zeta' / \partial \mathbf{T}^{(n)}$, где ζ' – функционал энергии Гиббса:

$$\zeta' = \zeta_0 - \frac{\rho}{2} \sum_{r,s=1}^k \int_0^t \int_0^t r_{rs} (2t - \tau_1 - \tau_2) dI_r^{(n)}(\tau_1) dI_s^{(n)}(\tau_2) - \frac{\rho}{2} \sum_{r=k+1}^N \int_0^t \int_0^t r_{rr} (2t - \tau_1 - \tau_2) dI_r^{(n)}(\tau_1, \tau_2); \quad (1)$$

$r_{rs} (2t - \tau_1 - \tau_2)$ и $r_{rr} (2t - \tau_1 - \tau_2)$ – разностные ядра функционала; $I_r^{(n)}(\tau_1) = I_r^{(n)}(\bar{\mathbf{T}}(\tau_1))$ и $I_r^{(n)}(\tau_1, \tau_2)$ – линейные и квадратичные инварианты тензора $\mathbf{T} = \mathbf{T} / \rho$ относительно группы симметрии материала; k_i – число линейных инвариантов; $(k_s - k_i)$ – число квадратичных инвариантов.

С учетом представления (1) для ортотропных сред соотношения для вязкоупругих деформаций могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{T} = J^{-1} \bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{C}^e, \quad (2)$$

где $J = \rho / \rho^0$ – отношение плотностей в актуальной и отсчетной конфигурациях; ${}^4\bar{\mathbf{R}} = \sum_{r,\beta=1}^3 \bar{\mathbf{e}}_r^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_\beta^2 \bar{I}_{r\beta} + \sum_{r=1}^3 \mathbf{O}_r \otimes \mathbf{O}_r \bar{I}_{3+r,3+r}$ – линейный тензорный оператор; $\mathbf{O}_r$ – направляющие тензоры ортотропии; $\bar{\mathbf{e}}_r$ – базис ортотропии; $\bar{I}_{r\beta} \mathbf{C}^e = \int_0^t q_{r\beta}(t-\tau) d\mathbf{C}^e(\tau)$ – линейные скалярные функционалы; $q_{r\beta}(t-\tau)$ – ядра, связанные с $r_{r\beta}(t-\tau)$.

Далее рассматривается модель с экспоненциальными ядрами:

$$q_{r\beta}(t) = q_{r\beta}^\infty + \sum_{\alpha=1}^N B_{r\beta}^{(\alpha)} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{r\beta}^{(\alpha)}}\right), \quad (3)$$

где $q_{r\beta}^\infty$, $B_{r\beta}^{(\alpha)}$, $\tau_{r\beta}^{(\alpha)}$ – константы.

Показано, что для разработанной модели вязкоупругости определяющие соотношения (2) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{R}^0 \cdot \left({}^4\bar{\mathbf{X}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{v} - \frac{d\mathbf{C}^p}{dt} \right) - J \sum_{\alpha=1}^N \tilde{\mathbf{W}}^{(\alpha)} + J(\mathbf{F}^{-1T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{v}) \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{W}^{(\alpha)}; \\ \frac{d\mathbf{W}_{r\beta}^{(\alpha)}}{dt} + \frac{\mathbf{W}_{r\beta}^{(\alpha)}}{\tau_{r\beta}^{(\alpha)}} = \frac{\mathbf{C}^e}{\tau_{r\beta}^{(\alpha)}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где t – время; $\overset{\circ}{\nabla}$ – набла-оператор в отсчетной конфигурации; ${}^4\mathbf{R}^0$ – тензор модулей упругости; ${}^4\bar{\mathbf{X}} = {}^4\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{C}^e \otimes \mathbf{F}^{-1T}$, ${}^4\bar{\mathbf{X}}$ – тензоры, зависящие только от тензора градиента деформаций $\mathbf{F}$; $\mathbf{v}$ – вектор скорости; $\mathbf{W}^{(\alpha)} = \sum_{r,\beta=1}^3 B_{r\beta}^{(\alpha)} \bar{\mathbf{e}}_r^2 (\bar{\mathbf{e}}_\beta^2 \cdot \mathbf{W}_{r\beta}^{(\alpha)}) + \sum_{r=1}^3 B_{3+r,3+r}^{(\alpha)} \mathbf{O}_r (\mathbf{O}_r \cdot \mathbf{W}_{r\beta}^{(\alpha)})$ – тензоры вязких напряжений; $\tilde{\mathbf{W}}^{(\alpha)} = \sum_{r,\beta=1}^3 \frac{B_{r\beta}^{(\alpha)}}{\tau_{r\beta}^{(\alpha)}} \bar{\mathbf{e}}_r^2 \left(\bar{\mathbf{e}}_\beta^2 \cdot \left(\dot{\mathbf{C}}^e - \mathbf{W}_{r\beta}^{(\alpha)} \right) \right) + \sum_{r=1}^3 \frac{B_{3+r,3+r}^{(\alpha)}}{\tau_{3+r,3+r}^{(\alpha)}} \mathbf{O}_r \left(\mathbf{O}_r \cdot \left(\dot{\mathbf{C}}^e - \mathbf{W}_{r\beta}^{(\alpha)} \right) \right)$ – тензоры скоростей вязких напряжений; $\mathbf{W}_{r\beta}^{(\alpha)}$ – спектр тензоров вязких деформаций.

Для скоростей пластических деформаций построена обобщенная модель градиентальности:

$$d\mathbf{C}^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^2 \psi_{\alpha} J_{\alpha}^{(n)p} dt; \quad \psi_{\alpha} = h \sum_{\beta=1}^k \lambda_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial J_{\alpha}^{(n)p}}; \quad J_{\alpha}^{(n)p} = \partial J_{\alpha}^{(n)} / \partial \mathbf{T}, \quad (5)$$

где $f_{\beta} = f_{\beta}(J_{\gamma}^{(n)p}, w_{\alpha}^p)$ – потенциалы анизотропной пластичности; λ_{β} – параметры нагружения; h – функция Хевисайда; $J_{\gamma}^{(n)p} = J_{\gamma}^{(n)}(\mathbf{T}_{\gamma})$ – инварианты совместных тензоров $\mathbf{T}_{\gamma} = \mathbf{T} - H_{\gamma} \mathbf{C}^{(n)}$; $H_{\gamma} = H_{\gamma}^0 (J_{\gamma}^{(n)}(\mathbf{C}^{(n)}))^{-\alpha_{\gamma}}$ – функции упрочнения.

Для ортотропных гибких броневого композитов на тканевой основе предложена модель, содержащая 3 независимые поверхности пластичности: поверхность пластичности при продольном сжатии по основе и утку ГБКМ, потенциал которой выбран в виде:

$$2f_1 = \left(I_1^{(n)}(\mathbf{T}_1) / \sigma_{1s} \right)^2 + \left(I_2^{(n)}(\mathbf{T}_2) / \sigma_{2s} \right)^2 - 1; \quad (6)$$

поверхность пластичности при поперечном сжатии ГБКМ, потенциал которой выбран в виде:

$$2f_2 = \left(I_3^{(n)}(\mathbf{T}_3) / \sigma_{3s} \right)^2 - 1; \quad (7)$$

а также поверхность пластичности при межслойных сдвигах ГБКМ, потенциал которой предложен в виде:

$$f_3 = I_4^{(n)}(\mathbf{T}_4) / \sigma_{4s}^2 + I_5^{(n)}(\mathbf{T}_5) / \sigma_{5s}^2 - 1. \quad (8)$$

Здесь $\sigma_{\gamma s}$ – пределы начальной текучести по различным направлениям; $I_{\gamma}^{(n)}(\mathbf{T}_{\gamma}) = (|I_{\gamma}^{(n)}(\mathbf{T}_{\gamma})| - I_{\gamma}^{(n)}(\mathbf{T}_{\gamma})) / 2$, $\gamma = 1, 2, 3$; а $I_{\gamma}^{(n)}(\mathbf{T}_{\gamma})$ – линейные инварианты относительно группы ортотропии; $\gamma = 1, \dots, 6$.

Для разработанной модели (называемой моделью A_n при различных значениях $n=1, 2, 4, 5$) сформулирована постановка динамической и квазистатической задач вязко-упруго-пластического деформирования ортотропных ГБКМ. Система законов сохранения механики сплошной среды в лагранжевом описании (уравнения движения, уравнения совместности деформации), дополненная кинематическими соотношениями, определяющими соотношениями для вязкоупругих деформаций, соотношениями для вязкопластических деформаций, записывается следующим образом:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \text{Div} \cdot \mathbf{P} + \rho \mathbf{f}; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}; \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \otimes \mathbf{v}^T; \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \overset{(n)}{\mathbf{T}} &= J^{-4} \overset{(n)}{\mathbf{R}}^0 \cdot \left({}^4 \overset{(n)}{\mathbf{X}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{v} - \frac{d \overset{(n)}{\mathbf{C}}^p}{dt} \right) - J \sum_{\alpha=1}^N \tilde{\mathbf{W}}^{(\alpha)} + J (\mathbf{F}^{-1T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{v}) \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{W}^{(\alpha)} ; \\ \frac{d \mathbf{W}_{\beta}^{(\alpha)}}{dt} + \frac{\mathbf{W}_{\beta}^{(\alpha)}}{\tau_{\beta}^{(\alpha)}} &= \frac{1}{\tau_{\beta}^{(\alpha)}} \left(\overset{(n)}{\mathbf{C}} - \overset{(n)}{\mathbf{C}}^p \right) ; \\ \frac{d}{dt} \overset{(n)}{\mathbf{C}}^p &= \sum_{\alpha=1}^3 \left(\psi_{\alpha} \bar{\mathbf{e}}_{\alpha}^2 + \frac{\psi_{3+\alpha}}{2} (\mathbf{O}_{\alpha} \otimes \mathbf{O}_{\alpha}) \cdot \left(\overset{(n)}{\mathbf{T}} - H_{3+\alpha} \overset{(n)}{\mathbf{C}}^p \right) \right).\end{aligned}$$

Соотношения для тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа, уравнение неразрывности, соотношения для энергетических тензоров деформации, соотношения для параметров нагружения и для тензоров вязких деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{F}^{-1} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{E}}_A^{-1} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}} / J ; \quad \rho = \overset{\circ}{\rho} \det \mathbf{F}^{-1} ; \quad \overset{(n)}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n-3} ((\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{\frac{n-3}{2}} - \mathbf{E}) ; \\ \psi_1 &= \frac{h \dot{\lambda}_1 I_{1-}^{(O)}(\mathbf{T}_1)}{\sigma_{1S}^2(w_1^p)} ; \quad \psi_2 = \frac{h \dot{\lambda}_1 I_{2-}^{(O)}(\mathbf{T}_2)}{\sigma_{2S}^2(w_2^p)} ; \quad \psi_3 = \frac{h \dot{\lambda}_2 I_{3-}^{(O)}(\mathbf{T}_3)}{\sigma_{3S}^2(w_3^p)} ; \\ \psi_4 &= \frac{h \dot{\lambda}_3}{\sigma_{4S}^2(w_4^p)} ; \quad \psi_5 = \frac{h \dot{\lambda}_3}{\sigma_{5S}^2(w_5^p)} ; \quad \psi_6 = 0 ; \\ \mathbf{W}^{(\alpha)} &= \sum_{\gamma, \beta=1}^3 B_{\beta}^{(\alpha)} \bar{\mathbf{e}}_{\beta}^2 \cdot \mathbf{W}_{\beta}^{(\alpha)} + \sum_{\gamma=1}^3 B_{3+\gamma, 3+\gamma}^{(\alpha)} \mathbf{O}_{\gamma} (\mathbf{O}_{\gamma} \cdot \mathbf{W}_{\beta}^{(\alpha)}) ; \\ \tilde{\mathbf{W}}^{(\alpha)} &= \sum_{\gamma, \beta=1}^3 \frac{B_{\beta}^{(\alpha)}}{\tau_{\beta}^{(\alpha)}} \bar{\mathbf{e}}_{\beta}^2 \left(\bar{\mathbf{e}}_{\beta}^2 \cdot \left(\overset{(n)}{\mathbf{C}}^e - \mathbf{W}_{\beta}^{(\alpha)} \right) \right) + \sum_{\gamma=1}^3 \frac{B_{3+\gamma, 3+\gamma}^{(\alpha)}}{\tau_{3+\gamma, 3+\gamma}^{(\alpha)}} \mathbf{O}_{\gamma} \left(\mathbf{O}_{\gamma} \cdot \left(\overset{(n)}{\mathbf{C}}^e - \mathbf{W}_{\beta}^{(\alpha)} \right) \right),\end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений; $\mathbf{P}$ – тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа; $\overset{(n)}{\mathbf{E}}_A$ – тензор энергетической эквивалентности; $\mathbf{E}$ – единичный тензор. Неизвестными являются следующие функции: $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{F}$, $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$, $\mathbf{W}_{\beta}^{(\alpha)}$, $\overset{(n)}{\mathbf{C}}^p$.

Для системы соотношений (9) зададим граничные условия идеального контакта $\overset{\circ}{\Sigma}_1$ и условия на свободной поверхности $\overset{\circ}{\Sigma}_2$:

$$\overset{\circ}{\Sigma}_1: \quad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P}] = 0 ; \quad [\mathbf{v}] = 0 ; \quad \overset{\circ}{\Sigma}_2: \quad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} = 0 . \quad (11)$$

Начальные условия для системы уравнений (9) запишем в виде:

$$t = 0: \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 ; \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} ; \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} ; \quad \overset{(n)}{\mathbf{C}}^p = \mathbf{0} ; \quad \overset{(n)}{\mathbf{T}} = \mathbf{0} ; \quad \mathbf{W}_{\beta}^{(\alpha)} = \mathbf{0} ; \quad \dot{\lambda}_{\beta} = 0 . \quad (12)$$

Постановка квазистатической задачи включает в себя систему уравнений:

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{P} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} = 0 ; \quad \overset{(n)}{\mathbf{T}} = J \left({}^4 \overset{(n)}{\mathbf{R}}^0 \cdot \overset{(n)}{\mathbf{C}}^e - \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{W}^{(\alpha)} \right) ; \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{u}^T ; \quad (13)$$

$$\frac{d \mathbf{W}_{\beta}^{(\alpha)}}{dt} + \frac{\mathbf{W}_{\beta}^{(\alpha)}}{\tau_{\beta}^{(\alpha)}} = \frac{1}{\tau_{\beta}^{(\alpha)}} \left(\mathbf{C}^{(\alpha)} - \mathbf{C}^{\beta} \right);$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}^{\beta} = \sum_{\alpha=1}^3 \left(\psi_{\alpha} \bar{\epsilon}_{\alpha}^2 + \frac{\psi_{3+\alpha}}{2} (\mathbf{O}_{\alpha} \otimes \mathbf{O}_{\alpha}) \cdot \left(\mathbf{T} - H_{3+\alpha} \mathbf{C}^{\beta} \right) \right),$$

которая рассматривается относительно неизвестных $\mathbf{u}$, $\mathbf{W}_{\beta}^{(\alpha)}$, $\mathbf{C}^{\beta}$, а также граничные условия идеального контакта $\hat{\Sigma}_1$, условия на свободной поверхности $\hat{\Sigma}_2$ и начальные условия:

$$\hat{\Sigma}_1: \quad \mathbf{n} \cdot [\mathbf{P}] = 0; \quad [\mathbf{u}] = 0; \quad \hat{\Sigma}_2: \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = 0;$$

$$t = 0: \quad \mathbf{C}^{\beta} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{W}_{\beta}^{(\alpha)} = \mathbf{0}; \quad \dot{\lambda}_{\beta} = 0.$$
(14)

Вторая глава посвящена исследованию разработанной модели ортотропных композиционных материалов с конечными вязко-упруго-пластическими деформациями. Проведено численно-аналитическое решение задачи о квазистатическом растяжении/сжатии ортотропной пластины при конечных деформациях. Получены основные разрешающие соотношения задачи, связывающие компоненты тензора напряжений Коши T_{11} и кратность удлинения k_1 :

$$\frac{k_1^{n-3} - 1}{n-3} = \frac{1}{E_1} \left(\frac{k_1^{3-n} T_{11}}{J} + \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\alpha=1}^N \bar{B}_{1\beta}^{(\alpha)} W_{\beta}^{(\alpha)} \right) + \mathbf{C}_{11}^{(\alpha)};$$

$$J = \frac{1}{k_1} \left(1 - \nu_2 (k_1^{n-3} - 1) + (n-3) \left(\nu_2 \mathbf{C}_{11}^{(\alpha)} + C_2^{\nu} \right) \right)^{-\frac{1}{n-3}};$$

$$\cdot \left(1 - \nu_3 (k_1^{n-3} - 1) + (n-3) \left(\nu_3 \mathbf{C}_{11}^{(\alpha)} + C_3^{\nu} \right) \right)^{-\frac{1}{n-3}};$$

$$\frac{d W_{11}^{(\alpha)}}{dt} = \frac{1}{\tau_{11}^{(\alpha)}} \left(\frac{k_1^{n-3} - 1}{n-3} - \mathbf{C}_{11}^{(\alpha)} - W_{11}^{(\alpha)} \right);$$

$$\frac{d W_{\alpha\alpha}^{(\alpha)}}{dt} = \frac{1}{\tau_{\alpha\alpha}^{(\alpha)}} \left(-\nu_{\alpha} \left(\frac{k_1^{n-3} - 1}{n-3} - \mathbf{C}_{11}^{(\alpha)} \right) - W_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} + \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^N \bar{B}_{\alpha\beta}^{(\gamma)} W_{\beta}^{(\gamma)} \right).$$

Здесь $\mathbf{C}_{11}^{(\alpha)} = -\left((k_1^{3-n} |T_{11}| - \sigma_{15}^0) / H_1^0 \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ при $k_1^{3-n} T_{11} < -\sigma_{15}$; $\mathbf{C}_{11}^{(\alpha)} = \mathbf{C}_{11}^{\beta}$ при $k_1^{3-n} T_{11} > -\sigma_{15}$; $\mathbf{C}_{11}^{\beta}$ – пластическая деформация, достигнутая к моменту разгрузки.

С помощью численного решения этой системы на основе пошагового метода в сочетании с методом последовательных приближений,

проведены расчеты диаграмм деформирования ГБКМ на основе ткани Русар при поперечном сжатии (Рис.1) и продольном растяжении (Рис. 2). Аппроксимируя экспериментальные диаграммы деформирования реальных гибких композиционных материалов (Е.Ф. Харченко, А.Ф. Ермоленко, Композитные, текстильные и комбинированные броне-материалы, 2013), определяем константы H_{γ}^0 , n_{γ} пластичности для различных моделей A_n материалов, где $\delta_{\gamma} = k_{\gamma} - 1$.

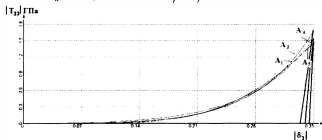


Рис. 1.

Расчетные и экспериментальная (э) диаграммы деформирования ГБКМ на основе ткани Русар при поперечном сжатии, полученные для различных моделей A_n при нагрузке и разгрузке

Константы вязкоупругости E_{γ} , $\bar{B}_{\gamma}^{(\sigma)}$ и $\tau_{\gamma}^{(\sigma)}$ для каждого значения n определялись из условия наилучшей аппроксимации экспериментальных кривых $T_{\gamma}^{(\sigma)}(\delta_{\gamma})$ циклического деформирования ГБКМ при растяжении.

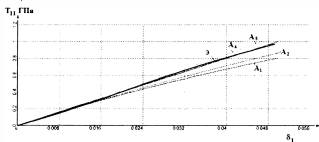


Рис. 2.

Расчетные и экспериментальная (э) диаграммы деформирования ГБКМ на основе ткани Русар при продольном растяжении, полученные для различных моделей A_n

В третьей главе дана постановка осесимметричной динамической задачи о нормальном ударе ударника по плоской преграде из ГБКМ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_r}{\partial t} &= v_r; \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = v_z; \\
\rho \frac{\partial r v_r}{\partial t} &= \frac{\partial r P_r}{\partial r} + \frac{\partial r P_z}{\partial z} - P_{\varphi\varphi}; \quad \rho \frac{\partial r v_z}{\partial t} = \frac{\partial r P_r}{\partial r} + \frac{\partial r P_z}{\partial z}; \\
\frac{\partial F_r}{\partial t} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \frac{\partial F_{\varphi\varphi}}{\partial t} = \frac{v_r}{r}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad \frac{\partial F_r}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial z}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial r}; \\
\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} T_r \\ T_{\varphi\varphi} \\ T_z \\ T_{rz} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r \\ e_{\varphi\varphi} \\ e_z \\ e_{rz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & 0 \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} & 0 \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\
\dot{\varepsilon}_r^p &= B_{1i} e_i - D_{1i} W_i; \quad \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^p = B_{2i} e_i - D_{2i} W_i; \\
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{W_{\varphi, r}^{(\alpha)}}{W_{\varphi, \varphi\varphi}^{(\alpha)}} \right) + \frac{1}{\tau_{\varphi}^{(\alpha)}} \left(\frac{W_{\varphi, r}^{(\alpha)}}{W_{\varphi, \varphi\varphi}^{(\alpha)}} \right) &= \frac{1}{\tau_{\varphi}^{(\alpha)}} \left(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p \right) \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^p \right),
\end{aligned} \tag{16}$$

где u_r, u_z – компоненты вектора перемещений; v_r, v_z – вектора скорости; $P_r, P_{\varphi\varphi}, P_z, P_n, P_x$ – тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа; $T_r, T_{\varphi\varphi}, T_z, T_n$ – тензора напряжений Коши; $F_r, F_{\varphi\varphi}, F_z, F_n, F_x$ – градиента деформаций; $\varepsilon_r, \varepsilon_{\varphi\varphi}$ – тензора деформаций Коши-Грина; $e_r, e_{\varphi\varphi}, e_z, e_{rz}$ – тензора скоростей деформаций Коши-Грина; $\varepsilon_r^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p$ – тензора пластических деформаций; $W_{\varphi, r}^{(\alpha)}, W_{\varphi, \varphi\varphi}^{(\alpha)}$ – тензора вязких напряжений. Все перечисленные компоненты тензоров и векторов зависят от 2-х координат r, z .

Система уравнений (16) является замкнутой относительно $15+4N$ функций ($\alpha = 1 \dots N$) $U = (u_r, u_z, v_r, v_z, F_r, F_{\varphi\varphi}, F_z, F_n, F_x, T_r, T_{\varphi\varphi}, T_z, T_n, \varepsilon_r^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p, W_{11, r}^{(\alpha)}, W_{21, r}^{(\alpha)}, W_{12, \varphi\varphi}^{(\alpha)}, W_{22, \varphi\varphi}^{(\alpha)})^T$, зависящих от r, z и t .

Вводя координатные столбцы, элементами которых являются величины, стоящие под знаками производных в системе (16), запишем ее в следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \bar{K} \frac{\partial Y(U)}{\partial r} + \bar{S} \frac{\partial G(U)}{\partial r} + \bar{L} \frac{\partial W(U)}{\partial z} + \bar{N} \frac{\partial V(U)}{\partial z} = P(U). \tag{17}$$

Для численного решения системы (17) предложена разностная схема типа предиктор-корректор:

Шаг 1: предиктор

$$U_i^{n+1/2} = U_i^n - \Delta t K_i^n \left(\frac{Y(U_i^n) - Y(U_i^*)}{S_{\delta_i} - S_j} Q_{21j} + \frac{Y(U_{V_i}^*) - Y(U_j^*)}{T_{V_i} - T_j} Q_{22j} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta t S_j^* \left(\frac{G(U_s^*) - G(U_j^*)}{S_s - S_j} Q_{21j} + \frac{G(U_v^*) - G(U_j^*)}{T_v - T_j} Q_{22j} \right) - \\
& -\Delta t L_j^* \left(\frac{W(U_s^*) - W(U_j^*)}{S_s - S_j} Q_{11j} + \frac{W(U_v^*) - W(U_j^*)}{T_v - T_j} Q_{12j} \right) - \\
& -\Delta t N_j^* \left(\frac{V(U_s^*) - V(U_j^*)}{S_s - S_j} Q_{11j} + \frac{V(U_v^*) - V(U_j^*)}{T_v - T_j} Q_{12j} \right).
\end{aligned}$$

Шаг 2: Корректор

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_j^{n+1} = & \frac{1}{2} (U_j^{n+1/2} + U_j^*) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} K_j^{n+1/2} \left(\frac{Y(U_j^{n+1/2}) - Y(U_{L_j}^{n+1/2})}{S_j - S_{L_j}} Q_{21j} + \frac{Y(U_j^{n+1/2}) - Y(U_{R_j}^{n+1/2})}{T_j - T_{R_j}} Q_{22j} \right) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} S_j^{n+1/2} \left(\frac{G(U_j^{n+1/2}) - G(U_{L_j}^{n+1/2})}{S_j - S_{L_j}} Q_{21j} + \frac{G(U_j^{n+1/2}) - G(U_{R_j}^{n+1/2})}{T_j - T_{R_j}} Q_{22j} \right) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} L_j^{n+1/2} \left(\frac{W(U_j^{n+1/2}) - W(U_{L_j}^{n+1/2})}{S_j - S_{L_j}} Q_{11j} + \frac{W(U_j^{n+1/2}) - W(U_{R_j}^{n+1/2})}{T_j - T_{R_j}} Q_{12j} \right) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} N_j^{n+1/2} \left(\frac{V(U_j^{n+1/2}) - V(U_{L_j}^{n+1/2})}{S_j - S_{L_j}} Q_{11j} + \frac{V(U_j^{n+1/2}) - V(U_{R_j}^{n+1/2})}{T_j - T_{R_j}} Q_{12j} \right) + \\
& + \Delta t P(U_j^*),
\end{aligned}$$

где U_j^* – значения функций в узлах сетки при одноиндексной (ленточной) нумерации узлов сетки; L_j, R_j, U_j, B_j – номера узлов слева, справа, сверху и снизу от j ; $S_j - S_{L_j}$ и $T_j - T_{R_j}$ – сеточные шаги по r и z ; $Q_{kl,j}$ – матрицы преобразования из криволинейной системы координат в адаптивную.

Был разработан программный комплекс, позволяющий выполнять численные расчеты процесса ударно-волнового деформирования ГБКМ при ударных воздействиях в рамках осесимметричного нагружения, представлять полученные результаты в табличной форме и сопровождать их графическими иллюстрациями. Программный комплекс состоит из 3 основных модулей: препроцессора, решения и постпроцессора. Разработка велась на языке C++ с помощью Microsoft Visual Studio-2008.

Рассматривались 2 типа стального ударника: цилиндрический и заостренный. Масса ударника варьировалась от 4 г до 10,5 г, толщина h преграды – от $2.5 \cdot 10^{-3}$ м до $8 \cdot 10^{-3}$ м, начальная скорость ударника V_0 – от 300 м/с до 700 м/с. Некоторые результаты моделирования представлены на Рис. 3 и Рис. 4. Ударно-волновые процессы рассматривались как в ударнике, так и в композитной пластине, при этом допускался отскок ударника от композита и вторичное возможное их взаимодействие.

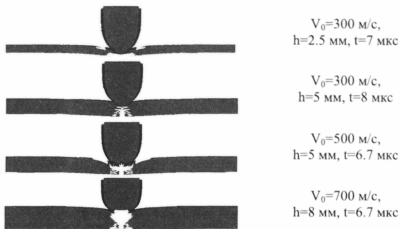


Рис. 3.

Картини деформирования и разрушения преграды из ГБКМ при различных толщинах и скоростях удара

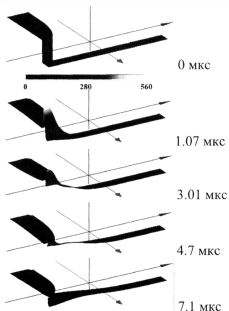


Рис. 4.

Распределение компоненты скорости V_z м/с в ударнике и преграде из ГБКМ, начальная скорость удара 300 м/с, толщина преграды 2.5 мм

Энергопоглощающая способность преград определяется параметром баллистической эффективности:

$$\beta_E = \frac{\Delta E_k}{S_M \rho h},$$

где ΔE_k – поглощенная кинетическая энергия ударника; S_M – площадь мишени ударника; h – начальная толщина преграды. Расчетные значения параметра β_E для скоростей 500 и 700 м/с попадают в область разброса экспериментальных значений (Рис.5).

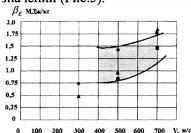


Рис. 5.

Расчетные значения параметра β_E баллистической эффективности преграды из ГБКМ в зависимости от начальной скорости ударника V_0 : (●) – преграда толщиной 2.5 мм, (■) – 5 мм, (▲) – 8 мм (заштрихованная область соответствует области разброса экспериментальных значений для ГБКМ на основе ткани типа Русар)

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Разработана новая математическая модель процесса ударно-волнового деформирования ортотропных гибких броневых композиционных материалов, основанная на обобщенном представлении определяющих соотношений при конечных деформациях с использованием энергетических пар тензоров напряжений-деформаций, и учитывающая нелинейно-упругие, вязкоупругие и пластические конечные деформации композиционных материалов.

2. Получено численно-аналитическое решение задачи о квазистатическом деформировании пластин из гибких броневых композиционных материалов с нелинейно-упругими, вязкоупругими и пластическими анизотропными конечными деформациями.

3. Проведено сопоставление результатов численного моделирования в рамках разработанной модели с экспериментальными данными о де-

формировании пластин из гибких броневых композиционных материалов на основе арамидных тканей типа Русар и Армос, которое показало хорошую точность расчетных и экспериментальных диаграмм деформирования.

4. Разработан новый алгоритм численного решения осесимметричной задачи о нормальном ударе ударника по плоской преграде из гибкого броневых композиционного материала, в рамках разработанной математической модели деформирования материала. Предложен алгоритм численного моделирования динамического разрушения композиционного материала.

5. Разработан программный комплекс для численного моделирования процессов деформирования и разрушения преград из гибких броневых композиционных материалов при нормальном ударе.

6. Проведено практическое исследование применимости разработанной математической модели, численного алгоритма и программного комплекса для решения задач об ударе и пробивании преград из гибких броневых композиционных материалов. Исследованы особенности деформирования и разрушения гибких броневых композиционных материалов при различных скоростях удара, различных толщинах материала и для многослойных преград из различных гибких броневых композиционных материалов. Показано, что разработанная модель учитывает экспериментально наблюдаемые эффекты больших пластических деформаций поперечного сжатия, вытягивания нитей при поперечном ударе, эффект раздвигания нитей при образовании в ГБКМ отверстия, эффект различия деформационных свойств при растяжении и сжатии в продольном и поперечном направлениях.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНЫ В РАБОТАХ

1. Димитриенко Ю.И., Беленовская Ю.В. Численное моделирование процессов пробивания перспективных материалов // *Аэрокосмические технологии: Труды Всероссийской научно-технической конференции*. М., 2002. С. 78-84 (0,375 п.л./0.187 п.л.).

2. Высокопроизводительное численное моделирование динамических процессов взаимодействия ударников и композитных мишеней / Ю.В. Беленовская [и др.] // *Аэрокосмические технологии: Научные материалы Первой международной научно-технической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея*. М., 2004. С. 114-116 (0,125 п.л./0.031 п.л.).

3. Разработка метода ленточных адаптивных сеток для решения задач динамики больших упруго-пластических деформаций / Ю.В. Беленовская [и др.] // Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы: Сб. трудов. М., 2005. С. 459-468 (0,625 п.л./0.156 п.л.).

4. Димитриенко Ю.И., Дзаганя А.Ю., Беленовская Ю.В. Моделирование ударно-волновых процессов в композитных броневого материалах // Ракетно-космическая техника: фундаментальные и прикладные проблемы механики: Материалы Международной научной конференции. М., 2006. С. 47-48 (0,063 п.л./0.031 п.л.).

5. Численное моделирование проникания ударников в анизотропные упругопластические преграды / Ю.В. Беленовская [и др.] // Вестник Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2008. №4. С. 100-116 (1 п.л./0.25 п.л.).

6. Численное моделирование проникания ударников в грунты / Ю.В. Беленовская [и др.] // Аэрокосмические технологии: Научные материалы Второй международной научно-технической конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея. М., 2009. С. 133-134 (0,125 п.л./0.031 п.л.).

7. Моделирование динамических процессов взаимодействия ударников с упруго-пластическими преградами / Ю.В. Беленовская [и др.] // Актуальные направления развития прикладной математики в энергетике, энергоэффективности и информационно-коммуникационных технологиях: Сб. трудов международной научной конференции, посвященной 180-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана. М., 2010. С. 143-147 (0,25 п.л./0.062 п.л.).

8. Димитриенко Ю.И., Беленовская Ю.В., Анискович А.В. Численное моделирование ударно-волнового деформирования гибких броневого композитных материалов // Наука и образование. Электрон. журнал. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 12. DOI: 10.7463/1213.0665297. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/665297.html> (0,625 п.л./0.208 п.л.).

9. Моделирование микроструктурного разрушения и прочности керамических композитов на основе реакционно-связанного SiC / Ю.В. Беленовская [и др.] // Наука и образование. Электрон. журнал. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 11. DOI: 10.7463/1113.0659438. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/659438.html> (0,625 п.л./0.125 п.л.).