

Исследование начальной стадии процесса холодного спекания пористого образца в приближении локального равновесия

© О.А. Васильева, А.А. Хохонов

НИУ МГСУ, Москва, 129337, Российская Федерация

Рассмотрена математическая модель процесса холодного спекания на начальном этапе (процесс образования шейки). Данная математическая модель основана на концепции о том, что спекание можно представить как двухфазный неравновесный процесс, аналогичный двухкомпонентному неравновесному фазовому переходу, механизмом которого, по Кану — Хилларду, является диффузионное расслоение. Математическая модель приведена как начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных. Поскольку эта система нелинейная, для работы с моделью был использован численный метод конечных разностей. Показаны результаты численного исследования. Дополнительно выполнен анализ полученных данных, на основании которого сделаны выводы о возможных причинах образования резонанса и длительности существования начальной стадии процесса спекания. Также проведено сравнение с другими теоретическими результатами, приведенными в похожей работе. Изложены направления дальнейших исследований процесса холодного спекания.

Ключевые слова: спекание, усадка, пористый образец, дифференциальные уравнения, математическое моделирование, численные эксперименты

Введение. Исследование процесса спекания пористых образцов является актуальной задачей, которой посвящены, например, работы [1–11]. Исследование процесса спекания пористых образцов вызвано необходимостью оптимизировать эффективность производственных процессов. На выполнение численных исследований требуется значительно меньше времени и ресурсов, поэтому их стоимость ниже, чем затраты на постоянное проведение экспериментов при изменении каких-либо параметров.

Цель представленного исследования — выявить причины возникновения резонанса на начальной стадии процесса холодного спекания пористого образца в приближении локального равновесия.

Рассмотрен процесс холодного спекания пористого образца из керамики ZnO (рис. 1) во время образования шейки, т. е. в его начале, когда происходит усадка (деформация) этого образца. Для изучения начального этапа процесса холодного спекания одномерного пористого образца из материала ZnO была использована математическая модель, основанная на том, что спекание представляет собой двухфазный неравновесный процесс [2], схожий с двухкомпонентным неравновесным фазовым переходом. Следуя теории Кана — Хилларда, механизмом этого перехода является диффузионное расслоение.

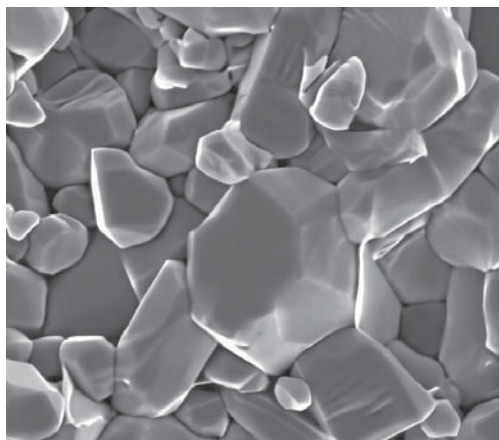


Рис. 1. Микроструктура керамики ZnO

Математическая модель приведена в виде начально-краевой задачи для системы дифференциальных нелинейных уравнений в частных производных второго порядка [2]. Поскольку система нелинейная, для исследования применялся конечно-разностный метод первого порядка. Были получены численные данные и выполнен их анализ с дальнейшим сравнением этих результатов с приведенными в работе [2]. На основании такой информации были сделаны выводы о причинах появления резонанса и его зависимости от времени существования шейки на начальном этапе.

В обзоре [11] отмечено, что в настоящее время отсутствуют научно обоснованные подходы к управлению процессом холодного спекания, которые могут обеспечить получение материалов и изделий с заданными и воспроизводимыми свойствами. Однако для этого необходимы достоверные непротиворечивые данные о закономерностях влияния режимов и условий холодного спекания на структуру и свойства получаемых материалов. К сожалению, экспериментальных данных пока недостаточно для оценки возможных областей практического применения материалов. Процесс холодного спекания находится на начальном этапе исследований, и большинство работ направлены на проверку самого факта наличия уплотнения и роста зерна различных керамических материалов. Влияние размера частиц исходных порошков на протекание процесса холодного спекания также недостаточно исследовано. Результаты выполненных работ существенно различаются, что вызвано влиянием многих параметров на условия спекания. Совместный анализ экспериментальных данных осложняется использованием всевозможных добавок в разной концентрации. В связи с этим в представленной работе исследование проводится сугубо численное, с целью попытаться выявить какие-либо закономерности.

Материалы и методы. Описание численной модели для начального этапа спекания под воздействием давления представлено для безразмерных переменных, чтобы отражать границы применимости предложенной модели [2]. Представим пористый образец из керамики ZnO единичной длины l в виде двухкомпонентной одномерной среды, разложенной по пространственным переменным. Спектаемый одномерный образец имеет подвижную пористую структуру, состоящую из двух фаз — жидкой и твердой. В таком случае ее параметры можно трактовать с помощью модифицированной модели Био [2, 3]:

$$\begin{aligned} u_t &= w^s, \quad v_t = w; \\ \rho(w^s)_t + \rho^l w_t &= \left[\Lambda(c, a^\pm) u_x - \alpha P \right]_x + \rho g; \\ \rho^l (w^s)_t + \rho_{add} w_t &= -Dw - P_x + \rho^l g + \varepsilon_m v_{xx}; \\ (\rho_s + \rho^l)_t + (\rho^l w)_x + \rho_s (w^s)_x &= 0; \\ \partial_t (T + kc) &= D_0 \partial_x^2 T; \\ \partial_t c + w \partial_x f &= \partial_x \left(\frac{D}{T} \partial_x c \right). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u — осредненное смещение твердой фазы; w^s — осредненная скорость смещения твердой фазы; v_t — осредненное смещение жидкой фазы относительно твердой; w_t — осредненная скорость конвекции фазы превращенного состояния; ρ_s — плотность твердой фазы; ρ — параметр плотности системы Био; $\Lambda(c, a^\pm)$ — нормальный модуль упругости; k — константа скорости реакции; z — усадка; c — мольная концентрация компоненты B (превращенного состояния) в системе; f — связующая функция переноса; ρ^l — плотность жидкой фазы; t — время; T — температура; ρ_{add} — плотность присоединенной массы из модели Био; P — давление; ε_m и α — постоянные из модели Био; D — коэффициент межфазного трения; D_0 — коэффициент теплопроводности; g — эффективная сила тяжести, действующая в пористой среде.

Усадка z определяется по формуле

$$z = \frac{(V - V_s - V_l)}{V},$$

где V — общий исходный объем системы; V_s и V_l — текущие объемы твердой фазы и фазы превращенного состояния соответственно.

Замыкающее уравнение для определения давления представлено следующим образом:

$$P = P_0 + \frac{Q(1-c)^2}{qRV} \partial_c \Lambda(c, T) V_s(c_0) = \left(\frac{V_s(c)}{V_s(c_0)} - \ln \left(\frac{V_s(c)}{V_s(c_0)} \right) - 1 \right), \quad (2)$$

где P_0 — начальное давление; Q — энергии активации; q — теплота реакции; R — универсальная газовая постоянная; c_0 — мольная концентрация компоненты превращенного состояния в начальный момент.

Начальные условия имеют вид

$$u(0, x) = v(0, x) = w_s(0, x) = w(0, x) = z(0, x) = 0,$$

$$T(0, x) = \text{const.}$$

Граничные условия представлены следующим образом:

$$\partial_x w(t, 0) = \partial_x w_s(t, 0) = \partial_x w(t, 1) = \partial_x w_s(t, 1) = \partial_x c(t, 1) = 0;$$

$$\partial_x z(t, 0) = \partial_x z(t, 1) = \partial_x T(t, 0) = \partial_x T(t, 1) = 0;$$

$$c|_{x=0} = c_b(t); \quad c_b(0) = c^0|_{x=0}; \quad P_b(t) = P_0 + \beta t,$$

где c^0 — мольная концентрация слева; c_b — справа; $P_b(t)$ — давление при уплотнении порошка в присутствии воды.

На исследуемый образец с левой стороны воздействует давление, функцию которого можно задать так:

$$P(t, 0) = P_0 + V_p t,$$

где V_p — скорость повышения давления на левый конец стержня, что позволяет задать граничное условие на левом конце, т. е. функцию $c(t, 0)$.

Для численного исследования описанной начально-краевой задачи применялся конечно-разностный метод первого порядка.

Результаты исследования. Приведенные примеры иллюстрируют полученные результаты для трех различных образцов, имеющих разную пористую структуру. У первого образца три поры, у второго — четыре поры, у третьего — одна пора. На рис. 2–5 приведены графики для случая, когда у образца есть три поры (первый образец). Зависимости распределения компоненты превращенного состояния $C_i(x)$ для сечений по времени t_i : 0, 0,001, 0,002, 0,003 и 0,0045

приведены на рис. 2. Зависимости распределения давления $P_i(x)$ представлены на рис. 3, зависимости распределения температуры $T_i(x)$ — на рис. 4, а зависимости распределения усадки $Z_i(x)$ для указанных выше временных сечений t_i — на рис. 5. На рис. 2 хорошо видно, что при $t = 0,0045$ (кривая мольной концентрации C_4) уже начинает проявляться резонанс (всплеск на графике), т. е. при $t = 0,0045$ завершается ламинарное течение процесса и происходит распад шейки. Этому соответствует приближение температуры к нулю при $t = 0,0045$ (кривая T_4 на рис. 4). Для дальнейшего корректного исследования модели холодного спекания на начальном этапе необходимо учитывать турбулентность (следует заметить, что исследование с турбулентностью будет представлено в будущих работах).

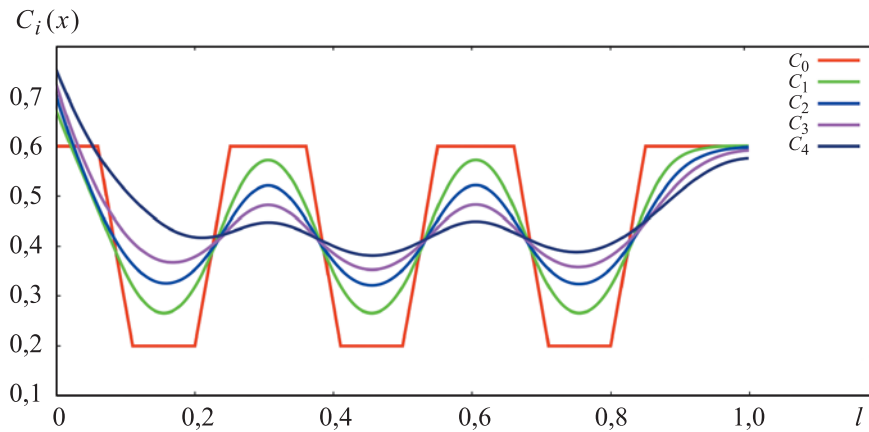


Рис. 2. Зависимость распределения компоненты превращенного состояния $C_i(x)$ для разных временных сечений t_i (первый образец)

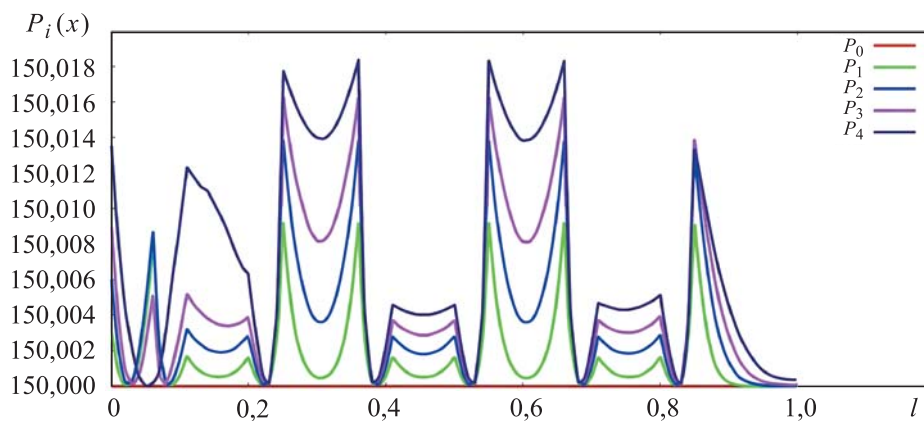


Рис. 3. Зависимость распределения давления $P_i(x)$ для разных временных сечений t_i (первый образец)

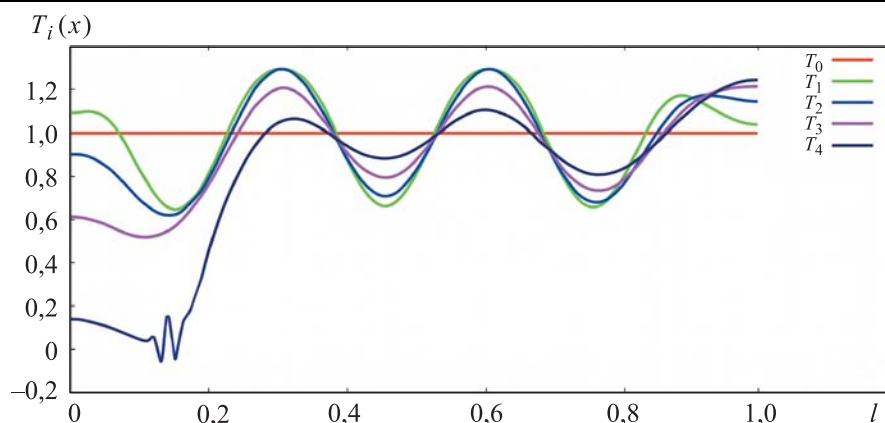


Рис. 4. Зависимость распределения температуры $T_i(x)$ для разных временных сечений t_i (первый образец)

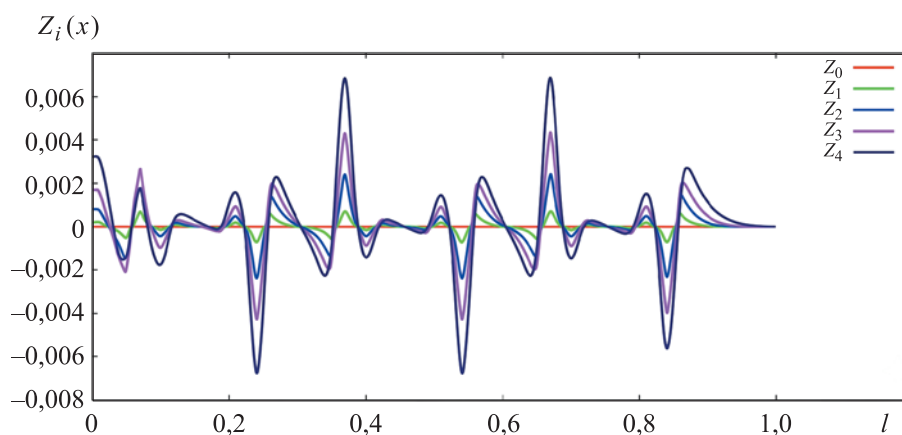


Рис. 5. Зависимости распределения усадки $Z_i(x)$ для разных временных сечений t_i (первый образец)

Зависимости $C_i(x)$, $P_i(x)$, $Z_i(x)$ для второго образца, имеющего четыре поры, для следующих временных сечений по времени t_i : 0; 0,0005; 0,001; 0,0015 и 0,0018 приведены на рис. 6–8. На этих рисунках можно увидеть, что явление резонанса проявляется раньше, чем в случае при $t = 0,0018$. В работе [2] представлено численное исследование для образцов с одной и двумя порами, проявление эффекта резонанса в первом случае происходит при $t > 0,015$, а во втором — для образца с двумя порами при $t > 0,012$. Причем во всех четырех случаях объемы фракций одинаковые. Это позволяет сделать вывод о том, что увеличение количества пор сказывается на более раннем

появлении резонанса и, следовательно, преждевременного разрушения шейки. Возможно, для того чтобы уменьшить количество пор в реальном материале, необходимо использовать более мелкие частицы фракций порошков керамики перед спеканием.

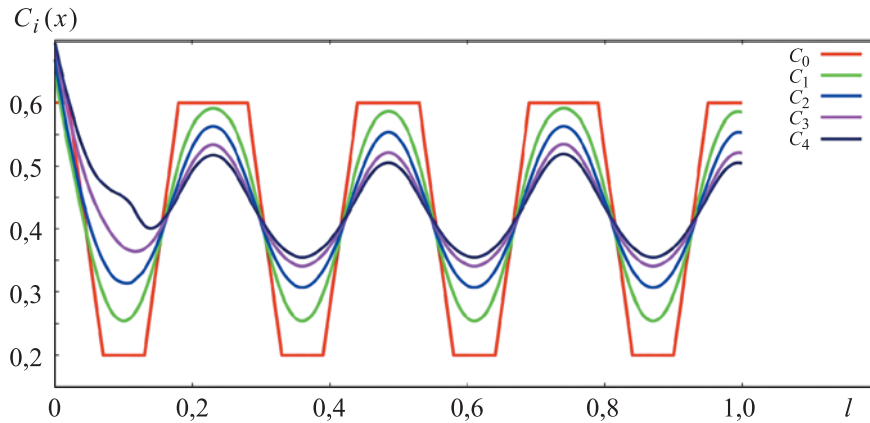


Рис. 6. График зависимости распределения компоненты превращенного состояния $C_i(x)$ для разных временных сечений t_i (второй образец)

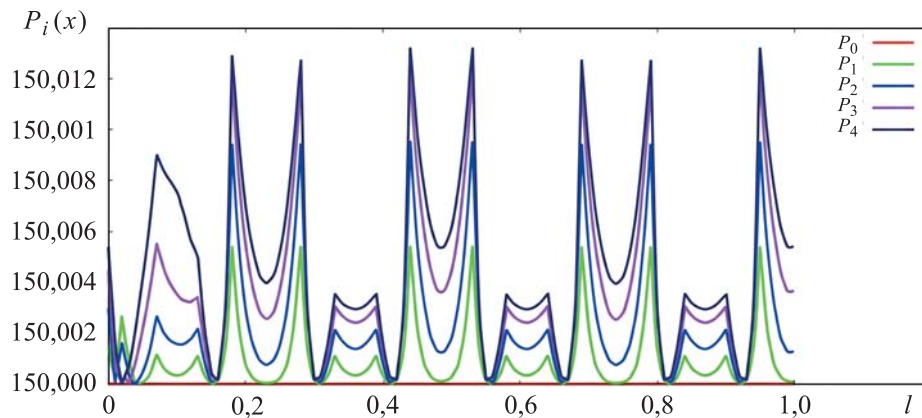


Рис. 7. Зависимости распределения давления $P_i(x)$ для разных временных сечений t_i (второй образец)

Однако не только диаметры частиц фракций, но и расположение пор влияют на время проявления резонанса. Результаты исследования образца с одной порой, которая, в отличие от случая, исследованного в работе [2], расположена ближе к левому концу образца, приведены на рис. 9–12. При сравнении текущих результатов $t > 0,01$ и данных, взятых из [2], $t > 0,015$ видно, что время проявления эффекта резонанса уменьшается.

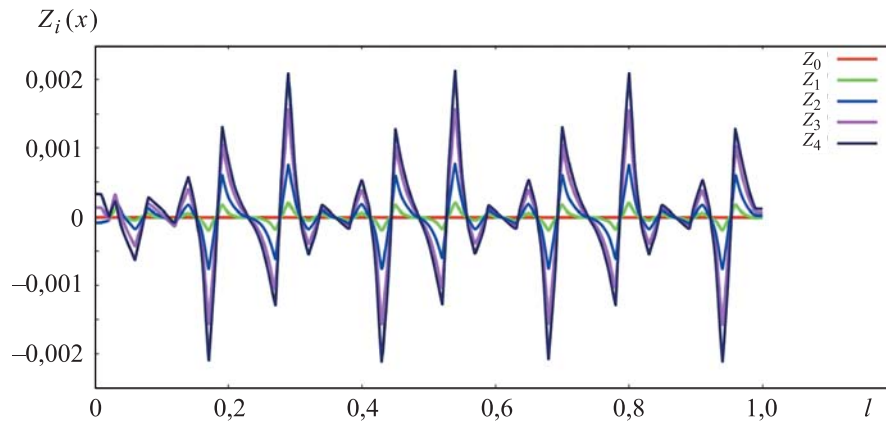


Рис. 8. Зависимости распределения усадки $Z_i(x)$ для разных временных сечений t_i (второй образец)

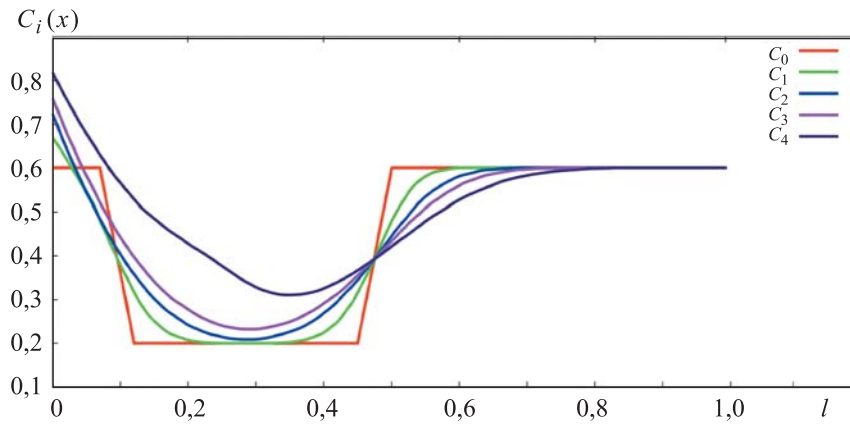


Рис. 9. График зависимости распределения компоненты превращенного состояния $C_i(x)$ для разных временных сечений t_i (третий образец)

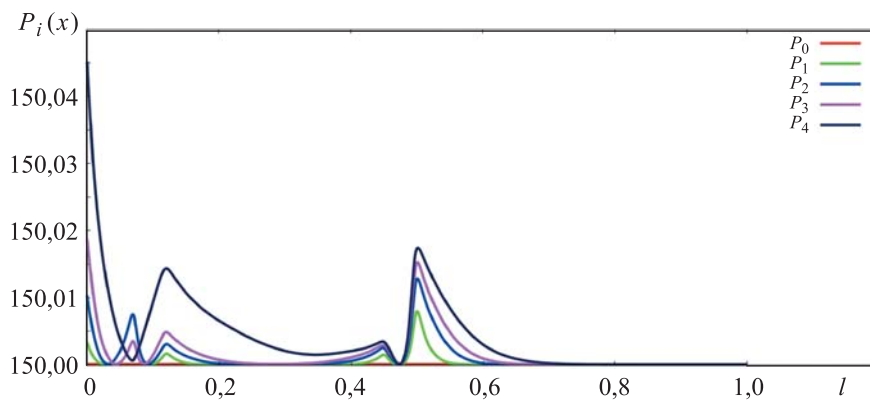


Рис. 10. Зависимости распределения давления $P_i(x)$ для разных временных сечений t_i (третий образец)

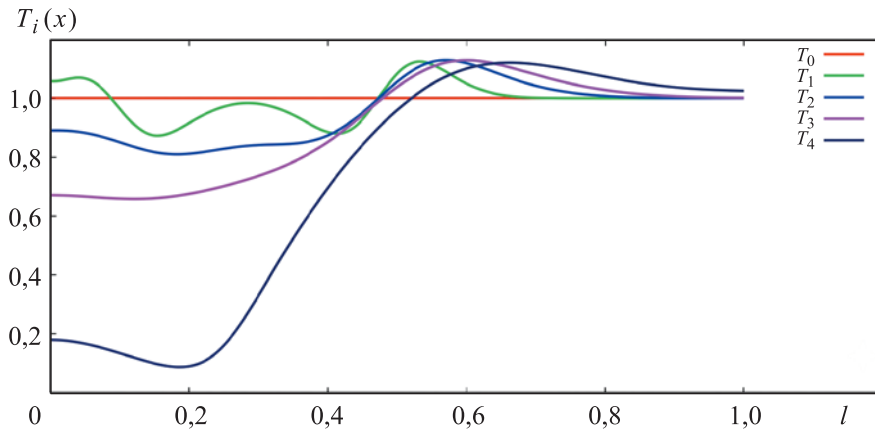


Рис. 11. Зависимости распределения температуры $T_i(x)$ для разных временных сечений t_i (третий образец)

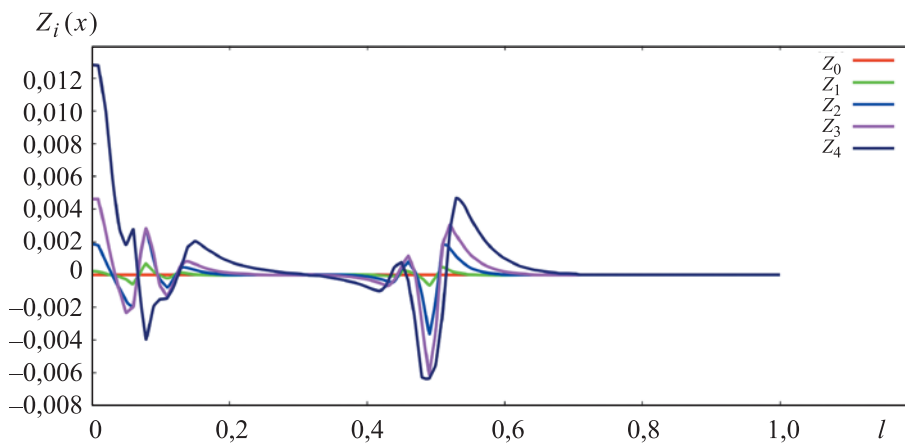


Рис. 12. Зависимости распределения усадки $Z_i(x)$ для различных временных сечений t_i (третий образец)

Данная особенность позволяет сделать вывод о том, что при смешивании нескольких порошков разных фракций, более крупные частицы необходимо располагать дальше от источника давления.

Заключение. Рассмотрена начальная стадия процесса холодного спекания пористого образца ZnO, т. е. процесса образования шейки. Представлена численная модель холодного спекания и дано ее описание. Модель опиралась на теорию, что начальный этап спекания можно представить как двухфазный неравновесный процесс. Приведены полученные данные численного исследования для трех разных пористых образцов, имеющих различную структуру, проведено сравнение полученных результатов с данными, изложенными в работе [2].

На основании выполненного анализа можно сделать следующие выводы: увеличение количества пор и их расположение в непосредственной близости к источнику давления способствуют более раннему появлению резонанса. В практике изготовления реальных материалов это означает, что необходимо использовать более мелких фракций, а если такая возможность отсутствует, следует крупные частицы располагать дальше от источника давления.

Благодарность. Отдельная благодарность выражается профессору МГУ имени М.В. Ломоносова Евгению Владимировичу Радкевичу за грамотную постановку задачи, а также профессиональные комментарии.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Радкевич Е.В., Лукашев Е.А., Яковлев Н.Н., Васильева О.А., Сидоров М.И. *Введение в обобщенную теорию неравновесных фазовых переходов и термодинамический анализ задач механики сплошной среды*. Москва, Изд-во Московского университета, 2019, 342 с.
- [2] Radkevich E.V., Ragutkin A.V., Stavrovskii M.E., Sidorov M.I., Vasil'eva O.A., Kravchenko I.N. Mathematical Simulation of Cols Sintering under Pressure. *Technical Physics*, 2025, vol. 70, no. 11, pp. 536–544.
- [3] M.A. Biot. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media II. *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 33 (4), pp. 1482–1498.
- [4] Радкевич Е.В., Васильева О.А., Яковлев Н.Н., Сидоров М.М., Ставровский М.Е. *Математическое моделирование детонационного горения*. Москва, «Эко-Пресс», 2024, 200 с.
- [5] Radkevich E.V., Ragutkin A.V., Vasil'eva O.A., Stavrovskii M.E., Sidorov M.I. Mathematical Modelling of the Thermal Sintering Process (Local Equilibrium Approximation). *Technical Physics*, 2024, vol. 70, no. 9, pp. 353–366.
- [6] Radkevich E.V., Ragutkin A.V., Vasil'eva O.A., Stavrovskii M.E., Sidorov M.I. Mathematical Modeling of Crystallization of Binary Alloys (Local Equilibrium Approximation). *Technical Physics*, 2025, vol. 70, no. 9, pp. 339–352.
- [7] Васильева О.А., Хохонов А.А. Исследование начальной стадии теплового спекания пористого образца в приближении локального равновесия. *Научно-технический вестник Поволжья*, 2025, № 12, с. 25–28.
- [8] Cahn J.W. Spinodal decomposition. *Trans. AIME*, 1968, vol. 242, no. 2, pp. 166–180.
- [9] Рыков Ю.Г., Зайцев Н.А. Численный анализ новой модели процессов кристаллизации металлов. Одномерный случай. *Математическое моделирование*, 2010, т. 22, № 12, с. 82–102.
- [10] Жуков В.Т., Зайцев Н.А., Лысов В.Г., Рыков Ю.Г., Феодоритова О.Б. Численный анализ новой модели процессов кристаллизации металлов. Двумерный случай. *Математическое моделирование*, 2012, т. 24, № 1, с. 109–128.
- [11] Смирнов А.В., Ивакин Ю.Д., Тарасовский В.П., Рыбальченко В.В., Васин А.А., Холодкова А.А. [и др.] Холодное спекание в присутствии водной среды: механизм и прикладные аспекты. Обзор. Ч. 2. *СТАНКОИНСТРУМЕНТ*, 2021, № 2, с. 58–71.

Статья поступила в редакцию 02.03.2026

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Васильева О.А., Хохонов А.А. Исследование начальной стадии процесса холодного спекания пористого образца в приближении локального равновесия. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2026, вып. 7. EDN KXXPME

Васильева Ольга Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшей математики» НИУ МГСУ. Область научных интересов: исследование процессов спекания и других критических явлений. e-mail: vasilievaoa@mgsu.ru

Хохонов Александр Алексеевич — аспирант 4-го года обучения кафедры «Высшей математики» НИУ МГСУ. Область научных интересов: исследование процессов спекания и других критических явлений. e-mail: blay26@rambler.ru

The Investigation of the Initial Stage of Cold Sintering of a Porous Sample in the Local Equilibrium Approximation

© O.A. Vasil'eva, A.A. Khokhonov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, 129337, Russian Federation

A mathematical model of the cold sintering process at the initial stage (the process of neck formation) is considered. The mathematical model is based on the representation of sintering as a two-phase non-equilibrium process and is a boundary-value problem for a system of partial differential equations. The two-phase process is analogous to a two-component non-equilibrium phase transition, the mechanism of which, according to Kan—Hillard, is diffusion stratification. Since the presented system of differential equations is nonlinear, a modified numerical method of finite differences is used to study the model. Examples of the obtained numerical results are given. Additionally, the data was analyzed, and conclusions were made about the duration of the initial stage of the process. A comparison was also made with other theoretical results presented in a similar work. The directions for further research on the cold sintering process are discussed.

Keywords: sintering, shrinkage, porous sample, differential equations, mathematical modeling, numerical experiments

REFERENCES

- [1] Radkevich E.V., Lukashev E.A., Yakovlev N.N., Vasil'eva O.A., Sidorov M.I. *Vvedenie v obobshchennuyu teoriyu neravnovesnykh fazovykh perekhodov i termodinamicheskiy analiz zadach mekhaniki sploshnoy sredy* [Introduction to the generalized theory of nonequilibrium phase transitions and thermodynamic analysis of problems of continuum mechanics]. Moscow, Moscow University Press, 2019, 342 p.
- [2] Radkevich E.V., Ragutkin A.V., Stavrovskii M.E., Sidorov M.I., Vasil'eva O.A., Kravchenko I.N. Mathematical Simulation of Cols Sintering under Pressure. *Technical Physics*, 2025, vol. 70, no. 11, pp. 536–544.
- [3] Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media II [Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media II]. *Journal of Applied Physics*, 1962, vol. 33, no. 4, pp. 1482–1498.
- [4] Radkevich E.V., Vasil'eva O.A., Yakovlev N.N., Sidorov M.M., Stavrovskii M.E. *Matematicheskoe modelirovanie detonatsionnogo goreniya* [Mathematical modeling of detonation combustion]. Moscow, Eco-Press Publ., 2024, 200 p.
- [5] Radkevich E.V., Ragutkin A.V., Vasil'eva O.A., Stavrovskiy M.E., Sidorov M.I. Mathematical modelling of the thermal sintering process (Local Equilibrium Approximation). *Technical Physics*, 2024, vol.70, no. 9, pp. 353–366
- [6] Radkevich E.V., Ragutkin A.V., Vasil'eva O.A., Stavrovskii M.E., Sidorov M.I. Mathematical Modeling of Crystallization of Binary Alloys (Local equilibrium approximation). *Technical Physics*, 2025, vol.70, no. 9, pp. 339–352.
- [7] Vasil'eva O.A., Khokhonov A.A. Issledovanie nachalnoy stadii teplovogo spekaniya poristogo obraztsa v priblizhenii lokalnogo ravnovesiya [Investigation of the initial stage of thermal sintering of a porous sample in the local equilibrium approximation]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya — Scientific and Technical Volga Region Bulletin*, 2025, no. 12, pp. 25–28.
- [8] Cahn J.W. Spinodal decomposition [Spinodal decomposition]. *Transactions of the AIME*, 1968, vol. 242, no. 2, pp. 166–180.

- [9] Rykov Yu.G., Zaytsev N.A. Chislennyy analiz novoy modeli protsessov kristallizatsii metallov. Odnomernyy sluchay [Numerical analysis of a new model of metal crystallization processes. One-dimensional case]. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2010, vol. 22, no. 12, pp. 82–102.
- [10] Zhukov V.T., Zaytsev N.A., Lysov V.G., Rykov Yu.G., Feodoritova O.B. Chislennyy analiz novoy modeli protsessov kristallizatsii metallov. Dvumernyy sluchay [Numerical analysis of a new model of metal crystallization processes. Two-dimensional case]. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2012, vol. 24, no. 1, pp. 109–128.
- [11] Smirnov A.V., Ivakin Yu.D., Tarasovskiy V.P., Rybal'chenko V.V., Vasin A.A., Kholodkova A.A. et al. Kholodnoe spekanie v prisutstvii vodnoy sredy: mekhanizm i prikladnye aspekty. Obzor. Ch. 2 [Cold sintering in the presence of aqueous medium: mechanism and applied aspects. Review. Part 2]. *STANKOINSTRUMENT*, 2021, no. 2, pp. 58–71.

Vasil'eva O.A., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, National Research University Moscow State University of Civil Engineering (MGSU). Research interests: investigation of sintering processes and other critical phenomena. e-mail: vasilievaoa@mgsu.ru

Khokhonov A.A., 4th-year Postgraduate student of the Department of Higher Mathematics, National Research University Moscow State University of Civil Engineering (MGSU). Research interests: investigation of sintering processes and other critical phenomena. e-mail: blay26@rambler.ru