На правах рукописи

ИВАНОВ Михаил Юрьевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПОРИСТЫХ СИСТЕМАХ С ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук



Москва - 2014

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Димитриенко Юрий Иванович**

Официальные оппоненты: **Горбачев Владимир Иванович,** доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор кафедры механики композитов механико-математического факультета

Котеров Владимир Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук (ВЦ РАН)

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана
2066709
Иванов М.Ю. Математическое

Ведущая организация: открытое акционерное общество «Композит»

Защита диссертации состоится «09» декабря 2014 г., в 11 час. 00 мин., на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: Москва, Рубцовская наб., 2/18, ауд. 1006л.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте (www.bmstu.ru) Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана

Автореферат разослан «15» октября 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат технических наук, доцент А.В. Аттетков

2

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время, благодаря всестороннему развитию микро- и нанотехнологий, физические процессы движения жидкостей, газов или их смесей в деформируемых пористых системах (ПС) с размером пор от 100 нм и более, сопровождающиеся изменением геометрии порового пространства и химического состава движущейся среды, приобретают важное практическое значение при проектировании новых конструкционных, теплозащитных и фильтрационных материалов, при разработке высокоэффективных гетерогенных демпфирующих устройств, при изучении капиллярных процессов в тканях живых организмов и при разработке биосовместимых пористых проницаемых материалов, при создании компонентов микро- и наноэлектромеханических систем и т.д. Существующие математические модели для описания процессов в таких ПС являются приближенными, поскольку строятся на основе экспериментальных данных, не учитывают важных особенностей как внутренней нелинейной динамики жидких или газовых сред в ПС, так и микропроцессов, происходящих на границе раздела фаз при фазовом превращении - межфазного обмена импульсом и энергией, а также возможных высоких скоростей текущей среды в порах и наличия областей со сложной геометрией, на которых требуется получить решение.

Диссертационная работа посвящена разработке математической модели нестационарных нелинейных процессов тепломассопереноса газа в деформируемой ПС, сопровождающихся фазовым превращением «твердое тело → газ», при заданном импульсном силовом или тепловом динамическом воздействии на систему. ПС представляет собой двухфазную систему, состоящую из пористого твердого тела и газа в его порах. Математическое моделирование выполняется с привлечением теории гетерогенных систем с фазовыми превращениями (Х.А. Рахматулин, Д.А. Губайдулин, Р.И. Нигматулин, Г. Уоллис, Ю.И. Димитриенко, Г.Г. Цыпкин, О.В. Иванова), основу которой составляет метод асимптотического осреднения, применяемый для описания физических процессов в многофазных периодических структурах. Метод предложен академиком Н.С. Бахваловым в 70-х годах прошлого века и позже развит многими отечественными и зарубежными учеными: Б.Е. Победрей, Г.П. Панасенко, В.И. Горбачевым, В.Л. Бердичевским, О.А. Олейником, Г.А. Иосифьяном, А.С. Шамаевым, Ю.И. Димитриенко, Д.И. Бардзокасом, И.И. Аргатовым, В.И. Большаковым, Д. Лионсом, Э. Санчес-Паленсией, М. Хэйда, А. Бенсусаном, А.Ю. Беляевым, В.Л. Саваторовой и другими. Предполагается, что ПС обладает свойством периодичности, т.е. в ней можно выделить некоторый повторяющийся элемент – ячейку периодичности (ЯП). Кроме того, для ПС можно ввести малый параметр $\kappa = l_0/x_0 \ll 1$, являющийся отношением двух ее характерных размеров -

МГТУ
им. Н.Э. Баумана
Библиотека

линейного размера ЯП (l_0) и линейного размера всей гетерогенной системы (x_0). Метод асимптотического осреднения приводит к изучению двух масштабов физических явлений в ПС периодической структуры – микро- и макропроцессов. Для этого формулируются специальные нелинейные взаимосвязанные интегро-дифференциальные задачи: локальные задачи нулевого и первого уровней, заданные на ЯП, и глобальная (осредненная) задача. Более того, удается получить аналитические формулы определяющих соотношений для каждой фазы ПС с точностью до малой величины порядка κ, которые можно использовать при решении различных практических задач вместо существующих на сегодняшний день приближенных эмпирических зависимостей. Однако необходимо дополнительно найти решение локальных задач на ЯП. В настоящее время такие задачи достаточно подробно исследованы в области механики твердых сред. Локальные задачи газовой динамики нулевого и первого уровней на ЯП представляют собой серьезную математическую проблему и решены только для случая простой (цилиндрической) формы границы раздела твердой и газовой фаз. В диссертационной работе предложены специальные новые численно-аналитические методы решения данных локальных задач газовой динамики. Эти методы учитывают особенности внутренней структуры каркаса ПС (рассматривается криволинейная граница раздела твердой и газовой фаз), периодичность газодинамических микропараметров нулевого и первого приближения на границах ЯП, интегральные условия осреднения микропараметров и позволяют получать решение независимо от глобальной задачи, заданной относительно осредненных газодинамических параметров (макропараметров). Разработанная математическая модель и численно-аналитические методы являются вычислительным ядром созданного специализированного программного комплекса (ПК).

Объектом исследования являются газодинамические (плотность, вектор скорости, температура, давление и тензоры напряжений газовой фазы) и механические (тензоры деформаций и напряжений, векторы скорости и перемещения, температура твердой фазы) микро- и макропараметры ПС (функции нулевого, первого приближений и осредненные функции соответственно), имеющего одноканальную осесимметричную пористость и криволинейную границу раздела твердой и газовой фаз (Рис. 1; на котором обозначены твердая (s) и газовая (g) фазы). Рассматривалась ЯП с подвижной криволинейной межфазной поверхностью. Исследовались макропараметры ПС в виде пористой пластины, находящейся под воздействием импульсных силовых и тепловых нагрузок.

Цель диссертационной работы состоит в построении математической модели динамических процессов в деформируемых пористых средах с фазовыми превращениями, основанной на асимптотическом анализе фундаментальных законов механики сплошных сред.

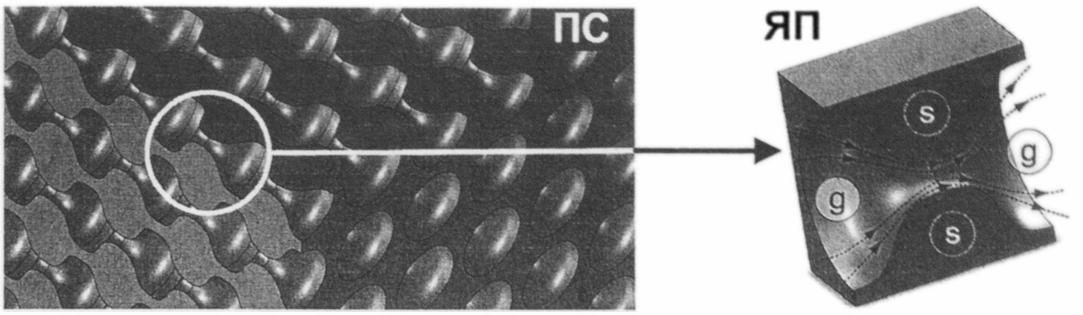


Рис. 1.
Расчетная модель микроструктуры ПС с одноканальной осесимметричной пористостью (выполнен разрез ЯП плоскостью симметрии)

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач**:

1. Разработка математической модели нестационарных физических процессов в деформируемой ПС с фазовыми превращениями.

2. Разработка метода асимптотического осреднения для нахождения микропараметров нулевого и первого приближений и макропараметров деформируемой ПС с фазовыми превращениями.

3. Разработка численно-аналитических методов решения локальных задач тепломассопереноса газа нулевого и первого уровней на ЯП.

4. Разработка ПК, позволяющего вычислять газодинамические и механические микро- и макропараметры деформируемой ПС с фазовыми превращениями.

Методы исследования. В диссертационной работе для решения сформулированных задач использованы следующие методы исследования: методы математического моделирования, метод асимптотического осреднения, численные конечно-разностные методы решения стационарных и динамических задач механики газовых и твердых сред.

Достоверность и обоснованность научных результатов и выводов гарантируется применением теоретически обоснованного математического аппарата и подтверждена сравнением результатов численного моделирования с известными экспериментальными данными, полученными ранее другими исследователями.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

1. Математическая модель нестационарных физических процессов в деформируемой газонаполненной периодической ПС, возникающих под действием внешних импульсных силовых или тепловых нагрузок, на основе метода асимптотического осреднения для случая одноканальной осесимметричной геометрии межфазной поверхности и при наличии фазовых превращений.

2. Численно-аналитические методы решения интегро-дифференциальных локальных задач тепломассопереноса газовой фазы нулевого и первого уровней на ЯП, позволяющие вычислять газодинамические микропараметры нулевого и пер-

вого приближений в зависимости от геометрии внутренней структуры деформируемой ПС.

3. ПК HDynSystems 1.0, позволяющий вычислять газодинамические и механические микро- и макропараметры деформируемой гетерогенной среды с фазовыми превращениями при различных внешних динамических силовых или тепловых воздействиях.

Практическая значимость диссертационной работы:

• дальнейшее развитие теоретических положений метода асимптотического осреднения применительно к нелинейным физическим задачам механики жидкости и газа в периодических деформируемых ПС с фазовыми превращениями;

• внедрение разработанных численно-аналитических методов расчета локальных газовых потоков нулевого и первого приближений в ЯП гетерогенной структуры в общую теорию динамики многофазных сред с фазовыми превращениями;

• возможность расширения разработанного ПК HDynSystems 1.0 до системы автоматизированного проектирования ПС различного назначения на базе программной модели CUDA и гетерогенных вычислительных систем;

• возможность применения разработанной математической модели для решения прикладных задач нелинейной фильтрации жидкости или газа в пористых системах, таких как грунты, различные фильтры и т.п.; для расчета физико-химических процессов разложения монотоплива в каталитическом микрореакторе двигателя, основанного на микроэлектромеханических технологиях; для моделирования капиллярных процессов в биологических тканях живых организмов и т.д.

Внедрение результатов работы осуществляется в рамках научно-исследовательских работ, проводимых в ОАО «ВПК «НПО машиностроения», а также в рамках перспективного научно-технического сотрудничества ОАО «ВПК «НПО машиностроения», МГТУ им. Н.Э. Баумана, ИФХЭ им. А.Н. Фрумкина РАН и Химического института Пуатье: материалы и природные ресурсы (IC2MP) при Университете Пуатье в области микро- и нанотехнологий.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на научных семинарах кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана (Москва, 2004-2014); 2-й Российской научно-практической конференции, посвященной 110-летию со дня рождения А.Я. Хинчина, «Математика в современном мире» (Калуга, 2004); научно-методической конференции, посвященной 40-летию научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана «Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы» (Москва, 2004); общеуниверситетской научно-технической конференции «Студенческая научная весна – 2005» Московского государственного технического университета имени

Н.Э. Баумана (Москва, 2005); Всероссийских и Международной научно-технических конференциях «Аэрокосмические технологии» (Реутов-Москва, 2004-2010); 2-й научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей «Актуальные проблемы фундаментальных наук» (Москва, 2008); 1-ой совместной конференции Международной академии астронавтики и Российской академии космонавтики им. К.Э. Циолковского «Космос для человечества» (Королев, 2008); 3-й научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей «Актуальные проблемы фундаментальных наук» (Москва, 2009); второй и третьей рабочих встречах по международному научно-техническому проекту PRECISE (www.mcps-precise.com), проходивших в Институте нанотехнологий MESA+ при Университете Твенте (Энсхеде, Нидерланды, 2013) и в Химическом институте Пуатье: материалы и природные ресурсы (IC2MP) при Университете Пуатье (Пуатье, Франция, 2013); XXXVIII Академических чтениях по космонавтике (Москва, 2014); третьей Международной научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии», посвященной 100-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея (Реутов-Москва, 2014).

Диссертация является составной частью фундаментальных исследований, проведенных в рамках гранта РФФИ (проект № 06-08-01448а).

Публикации. Основные научные результаты диссертации отражены в 15 научных работах, в том числе в 5 статьях из Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, и 2 тезисах докладов.

Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю; заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы, приводится перечень основных сокращений и обозначений. Диссертационная работа изложена на 157 страницах, содержит 43 иллюстрации и 2 таблицы. Библиография включает 139 наименований.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность к.т.н, доценту кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана, академику МОО «Российская академия космонавтики имени К.Э. Циолковского», первому заместителю начальника отделения энергосиловых установок ОАО «ВПК «НПО машиностроения» Георгию Фридриховичу Решу и д.х.н., профессору, заведующему лабораторией физико-химических основ хроматографии и хромато-масс-спектрометрии ИФХЭ им. А.Н. Фрумкина РАН Алексею Константиновичу Буряку за научное консультирование работы по вопросам практического применения разработанной математической модели, а также за проведение плодотворных научных бесед, посвященных актуальным проблемам пористых материалов.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность, основные положения, выносимые на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

Первая глава посвящена построению математической модели нестационарных физических процессов в деформируемой ПС с фазовыми превращениями.

Записана система законов сохранения механики сплошной среды в консервативной форме (уравнения неразрывности, движения, энергии газовой фазы и уравнения движения и теплопроводности твердой фазы), заданная на трехмерной области V, которую занимает ПС в пространстве, и определяющие соотношения каждой фазы (совершенный линейно-вязкий газ с малой вязкостью и постоянными теплоемкостями и линейно-термоупругая твердая фаза) относительно функций ρ_g, $\mathbf{v}_g$, θ_g, $\mathbf{u}_s$ и θ_s:

$$
\begin{aligned}
&\left(\rho_g\right)_t+\nabla_x\cdot\left(\rho_g\mathbf{v}_g\right)=0,\ \ \left(\rho_g\mathbf{v}_g\right)_t+\nabla_x\cdot\left(\rho_g\mathbf{v}_g\otimes\mathbf{v}_g\right)=\nabla_x\cdot\boldsymbol{\sigma}_g;\\
&\left(\rho_g\left(e_g+v_g^2/2\right)\right)_t+\nabla_x\cdot\left(\rho_g\mathbf{v}_g\left(e_g+v_g^2/2\right)\right)=\nabla_x\cdot\left(\boldsymbol{\sigma}_g\cdot\mathbf{v}_g\right);\\
&e_g=e_{g0}+c_V\left(\theta_g-\theta_{g0}\right),\ \ p_g=R\rho_g\theta_g,\ \ \boldsymbol{\sigma}_g=-p_g\mathbf{E}+\kappa^2\boldsymbol{\tau}_g;\\
&\boldsymbol{\tau}_g=\lambda_g\mathbf{E}\nabla_x\cdot\mathbf{v}_g+k_g\left(\nabla_x\otimes\mathbf{v}_g+\left(\nabla_x\otimes\mathbf{v}_g\right)^T\right),\ \ \mathbf{x}\in V_g;\\
&\rho_s\left(\mathbf{u}_s\right)_{tt}=\nabla_x\cdot\boldsymbol{\sigma}_s,\ \ \rho_s c_{sV}\left(\theta_s\right)_t=\nabla_x\cdot\left(\boldsymbol{\lambda}_s\cdot\nabla_x\theta_s\right)-\boldsymbol{\alpha}_s\theta_s\cdot\cdot\,\partial\boldsymbol{\sigma}_s/\partial t;\\
&\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\alpha}_s\left(\theta_s-\theta_{s0}\right)+\boldsymbol{\Pi}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\sigma}_s,\ \ 2\boldsymbol{\varepsilon}=\nabla_x\otimes\mathbf{u}_s+\left(\nabla_x\otimes\mathbf{u}_s\right)^T,\ \ \mathbf{x}\in V_s,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где ρ_g – плотность, $\mathbf{v}_g, v_g$ – вектор скорости, модуль вектора скорости, $\boldsymbol{\sigma}_g$ – тензор напряжений, e_g – внутренняя энергия, c_V – теплоемкость при постоянном объеме, p_g – давление, R – газовая постоянная, θ_g – температура, e_{g0}, θ_{g0} – внутренняя энергия и температура в начальном состоянии, $\boldsymbol{\tau}_g$ – тензор вязких напряжений, λ_g, k_g – параметры Ламе газовой фазы в области V_g; ρ_s – плотность, $\boldsymbol{\sigma}_s$ – тензор напряжений, $\mathbf{u}_s$ – вектор перемещений, c_{sV} – теплоемкость при постоянном объеме, θ_s, θ_{s0} – текущая температура и температура в начальном состоянии, $\boldsymbol{\lambda}_s$ – тензор теплопроводности, $\boldsymbol{\alpha}_s$ – тензор теплового расширения, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций, $\boldsymbol{\Pi}$ – тензор упругих податливостей твердой фазы в области V_s; $\mathbf{E}$ – метрический тензор; $(\cdot)_t=\partial(\cdot)/\partial t$, $(\cdot)_{tt}=\partial^2(\cdot)/\partial t^2$; ∇_x – оператор Гамильтона по декартовым координатам x^j; $V=V_g\cup V_s$. Сформулированы граничные (на внешней Σ и межфазной Σ_{sg} поверхностях ПС) и начальные условия. Граница раздела фаз Σ_{sg} является подвижной в силу наличия фазовых превращений, и на ней заданы соотношения: $[\rho]D+\rho_g\mathbf{v}_g\cdot\mathbf{n}=0$, $-\rho_s\mathbf{v}_g D+[\boldsymbol{\sigma}]\cdot\mathbf{n}=\mathbf{0}$, $\rho_s D\left[e+v^2/2\right]-\mathbf{n}\cdot[\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}]+\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\lambda}_s\cdot\nabla_x\theta_s=0$, $[\theta]=0$, где $[\,\cdot\,]$ – оператор скачка функции при переходе через поверхность Σ_{sg}, для которого $[\Omega]=\Omega_s^\Sigma-\Omega_g^\Sigma$, Ω_s^Σ, Ω_g^Σ – значения функции Ω со стороны твердой и газовой фаз вблизи Σ_{sg}, D – модуль вектора нормальной скорости движения Σ_{sg}, $\mathbf{n}$ – вектор нормали к Σ_{sg}, направленный во внешность области V_g.

Показаны особенности расчетной модели ПС (периодичность, геометрия микроструктуры с одноканальной осесимметричной пористостью, наличие явления фазового превращения), описана процедура получения безразмерных уравнений и определяющих соотношений, входящих в исходную систему уравнений. Приведены основные теоретические положения метода асимптотического осреднения, в рамках которого проводится математическое моделирование нестационарных физических процессов в ПС, отмечены преимущества метода, выполнен анализ точности. Вводятся два типа координат: глобальные (медленные) координаты $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/x_0$, определенные на всей области, которую занимает ПС, и локальные (быстрые) координаты, изменяющиеся только в пределах ЯП $\xi = \bar{\mathbf{x}}/\kappa$ (Рис. 2). Формулируются локальные и глобальная задачи для вычисления микро- и макропараметров ПС соответственно.

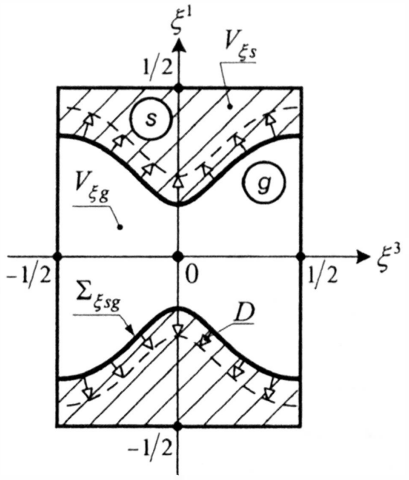


Рис. 2.
Разрез ЯП ПС
плоскостью симметрии

Тогда в силу свойства периодичности расчетной модели ПС поиск решения системы (1) выполняется в классе квазипериодических функций, т.е. $\Omega = \Omega(\bar{\mathbf{x}}, \xi, t)$, $\Omega = \{\rho_g, \theta_g, \mathbf{v}_g, \mathbf{u}_s, \theta_s, \ldots\}$ и Ω являются 1-периодическими функциями по локальным координатам ξ^j. Согласно методу асимптотического осреднения газодинамические и механические функции Ω, входящие в указанную систему уравнений, представляются асимптотическими разложениями по малому параметру κ:

$$\Omega(\bar{\mathbf{x}}, \xi, t) = \Omega^{(0)}(\bar{\mathbf{x}}, \xi, t) + \kappa\Omega^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}, \xi, t) + \\ + \kappa^2\Omega^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}, \xi, t) + O(\kappa^3). \qquad (2)$$

С помощью асимптотических разложений (2) и правила дифференцирования сложной функции по локальным ξ и глобальным $\bar{\mathbf{x}}$ координатам из системы (1) получаем локальные задачи нулевого и первого уровней на ЯП. Локальная задача газовой динамики нулевого уровня в области $V_{\xi g}$ (часть области, которую занимает газовая фаза, приходящаяся на ЯП, Рис. 2) относительно газодинамических микропараметров нулевого приближения $\rho_g^{(0)}$, $\mathbf{v}_g^{(0)}$ и $\theta_g^{(0)}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} &\nabla_\xi \cdot \mathbf{T}_g^{(0)} = \mathbf{0}, \quad p_g^{(0)} = R\rho_g^{(0)}\theta_g^{(0)}, \quad \xi \in V_{\xi g}; \\ &\mathbf{v}_g^{(0)} \cdot \mathbf{n}^{(0)} = 0, \quad \xi \in \Sigma_{\xi sg}; \quad \left[\!\left[\rho_g^{(0)}\right]\!\right] = 0, \quad \left[\!\left[\mathbf{v}_g^{(0)}\right]\!\right] = \mathbf{0}, \quad \left[\!\left[\theta_g^{(0)}\right]\!\right] = 0; \\ &\left\langle \rho_g^{(0)} \right\rangle_g = \bar{\rho}_g, \quad \left\langle \rho_g^{(0)}\mathbf{v}_g^{(0)} \right\rangle_g = \bar{\rho}_g\bar{\mathbf{v}}_g, \quad \left\langle \theta_g^{(0)} \right\rangle_g = \bar{\theta}_g, \end{aligned} \qquad (3)$$

где ∇_ξ – оператор Гамильтона по локальным координатам ξ; $\mathbf{T}_g^{(0)}$ – обобщенный вектор, компоненты которого являются векторными или тензорными функциями: $\mathbf{T}_{g1}^{(0)} = \rho_g^{(0)}\mathbf{v}_g^{(0)}$, $\mathbf{T}_{g2}^{(0)} = \mathbf{T}_{g1}^{(0)} \otimes \mathbf{v}_g^{(0)} + p_g^{(0)}\mathbf{E}$, $\mathbf{T}_{g3}^{(0)} = E_g^{(0)}\mathbf{T}_{g1}^{(0)} + p_g^{(0)}\mathbf{v}_g^{(0)}$, $2E_g^{(0)} = 2e_g^{(0)} + \left(v_g^{(0)}\right)^2$, $e_g^{(0)} = c_g\theta_g^{(0)}$; c_g – безразмерная теплоемкость газовой фазы при постоянном объеме; $\Sigma_{\xi sg}$ – часть поверхности Σ_{sg} в ЯП; $[\![\Omega]\!] = 0$ – условие 1-периодичности функции Ω по локаль-

ной координате ξ^3 на границах ЯП; $\langle\cdot\rangle_i$ – интегральный оператор осреднения по i-ой фазе от функции Ω, для которого $\bar{\Omega}=\langle\Omega\rangle_i=\left(1/|V_{\xi i}|\right)\int_{V_{\xi i}}\Omega d\tilde{V}_{\xi i}$, $|V_{\xi i}|$ – объем i-ой фазы в ЯП, $i=s,g$, $V_{\xi i}$ – часть области, которую занимает твердая фаза, приходящаяся на ЯП, $\bar{\Omega}$ – макроскопическая функция, зависящая от глобальных координат $\bar{\mathbf{x}}$ и времени t; $\mathbf{n}^{(0)}$ – вектор нормали нулевого приближения к $\Sigma_{\xi sg}$.

Локальная задача газовой динамики первого уровня на $V_{\xi g}$ относительно газодинамических микропараметров первого приближения $\rho_g^{(1)}$, $\mathbf{v}_g^{(1)}$ и $\theta_g^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
&\nabla_\xi\cdot\mathbf{T}_g^{(1)}=\left(\mathbf{A}_g^{(0)}\right)_t+\nabla_{\bar{x}}\cdot\mathbf{B}_g^{(0)}+\nabla_\xi\cdot\mathbf{C}_g^{(0)};\\
&p_g^{(0)}=R\rho_g^{(0)}\theta_g^{(0)},\ p_g^{(1)}=R\left(\rho_g^{(0)}\theta_g^{(1)}+\rho_g^{(1)}\theta_g^{(0)}\right);\\
&\boldsymbol{\tau}_g^{(0)}=\lambda_g\mathbf{E}\nabla_\xi\cdot\mathbf{v}_g^{(0)}+k_g\left(\nabla_\xi\otimes\mathbf{v}_g^{(0)}+\left(\nabla_\xi\otimes\mathbf{v}_g^{(0)}\right)^T\right),\ \xi\in V_{\xi g};\\
&\left(\rho_s-\rho_g^{(0)}\right)D^{(0)}+\rho_g^{(0)}\mathbf{v}_g^{(1)}\cdot\mathbf{n}^{(0)}+\mathbf{T}_{g1}^{(0)}\cdot\mathbf{n}^{(1)}=0,\ \xi\in\Sigma_{\xi sg};\\
&\left[\!\left[\rho_g^{(1)}\right]\!\right]=0,\ \left[\!\left[\mathbf{v}_g^{(1)}\right]\!\right]=\mathbf{0},\ \left[\!\left[\theta_g^{(1)}\right]\!\right]=0;\\
&\left\langle\rho_g^{(1)}\right\rangle_g=0,\ \left\langle\rho_g^{(0)}\mathbf{v}_g^{(1)}+\rho_g^{(1)}\mathbf{v}_g^{(0)}\right\rangle_g=\mathbf{0},\ \left\langle\theta_g^{(1)}\right\rangle_g=0,
\end{aligned}\tag{4}$$

где $\mathbf{T}_g^{(1)}$, $\mathbf{A}_g^{(0)}$, $\mathbf{B}_g^{(0)}$, $\mathbf{C}_g^{(0)}$ – обобщенные векторы, компоненты которых имеют следующий вид: $\mathbf{T}_{g1}^{(1)}=\rho_g^{(0)}\mathbf{v}_g^{(1)}+\rho_g^{(1)}\mathbf{v}_g^{(0)}$, $\mathbf{T}_{g2}^{(1)}=\rho_g^{(1)}\mathbf{v}_g^{(0)}\otimes\mathbf{v}_g^{(0)}+\mathbf{T}_{g1}^{(0)}\otimes\mathbf{v}_g^{(1)}+\mathbf{v}_g^{(1)}\otimes\mathbf{T}_{g1}^{(0)}+p_g^{(1)}\mathbf{E}$, $\mathbf{T}_{g3}^{(1)}=\mathbf{T}_{g1}^{(0)}\left(e_g^{(1)}+\mathbf{v}_g^{(0)}\cdot\mathbf{v}_g^{(1)}\right)+\mathbf{T}_{g1}^{(1)}E_g^{(0)}+p_g^{(1)}\mathbf{v}_g^{(0)}+p_g^{(0)}\mathbf{v}_g^{(1)}-\boldsymbol{\tau}_g^{(0)}\cdot\mathbf{v}_g^{(0)}$, $A_{g1}^{(0)}=-\rho_g^{(0)}$, $\mathbf{A}_{g2}^{(0)}=\mathbf{B}_{g1}^{(0)}=-\mathbf{T}_{g1}^{(0)}$, $A_{g3}^{(0)}=-\rho_g^{(0)}E_g^{(0)}$, $\mathbf{B}_{g2}^{(0)}=-\mathbf{T}_{g2}^{(0)}$, $\mathbf{C}_{g1}^{(0)}=\mathbf{C}_{g3}^{(0)}=\mathbf{0}$, $\mathbf{C}_{g2}^{(0)}=\boldsymbol{\tau}_g^{(0)}$, $\mathbf{B}_{g3}^{(0)}=-E_g^{(0)}\mathbf{T}_{g1}^{(0)}-p_g^{(0)}\mathbf{v}_g^{(0)}$, $e_g^{(1)}=c_g\theta_g^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(1)}$ – вектор нормали первого приближения к $\Sigma_{\xi sg}$, $D^{(0)}$ – модуль вектора нормальной скорости движения межфазной поверхности нулевого приближения.

Кроме того, можно получить локальные задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) нулевого уровня относительно вектора перемещений $\mathbf{u}_s^{(1)}$ и теплопроводности первого уровня относительно температуры $\theta_s^{(1)}$ в области $V_{\xi s}$. Используя правила дифференцирования интеграла от векторной или тензорной функций по подвижным объемам $V_{\xi g}$ и $V_{\xi s}$, из локальных задач (3), (4), задачи МДТТ нулевого уровня и задачи теплопроводности первого уровня получаем глобальную (осредненную или макроскопическую) задачу для нахождения газодинамических макропараметров $\bar{\rho}_g$, $\bar{\mathbf{v}}_g$ и $\bar{\theta}_g$ и пористости φ_g, а также макроскопического вектора перемещений $\bar{\mathbf{u}}_s$ и температуры $\bar{\theta}_s$ твердой фазы ПС:

$$\begin{aligned}
&\left(\varphi_g\right)_t=J/\rho_s,\ \left(\varphi_g\bar{\rho}_g\right)_t+\nabla_{\bar{x}}\cdot\varphi_g\bar{\rho}_g\bar{\mathbf{v}}_g=J,\ \rho_s\varphi_s\left(\mathbf{u}_s\right)_{tt}=\nabla_{\bar{x}}\cdot\varphi_s\bar{\boldsymbol{\sigma}}_s-\mathbf{P};\\
&\left(\varphi_g\bar{\rho}_g\bar{\mathbf{v}}_g\right)_t+\nabla_{\bar{x}}\cdot\varphi_g\bar{\rho}_g\bar{\mathbf{v}}_g\otimes\bar{\mathbf{v}}_g=\nabla_{\bar{x}}\cdot\varphi_g\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_g+\mathbf{P};\\
&\left(\varphi_g\bar{\rho}_g\bar{e}_g\right)_t+\nabla_{\bar{x}}\cdot\varphi_g\bar{\rho}_g\bar{\mathbf{v}}_g\bar{e}_g=\nabla_{\bar{x}}\cdot\varphi_g\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_g\cdot\bar{\mathbf{v}}_g+\mathbf{E}_g\right)+E_g;\\
&\varphi_s\rho_sc_{sV}\left(\bar{\theta}_s\right)_t=\nabla_{\bar{x}}\cdot\left(\varphi_s\boldsymbol{\lambda}_s\cdot\nabla_{\bar{x}}\bar{\theta}_s\right)-\boldsymbol{\alpha}_s\bar{\theta}_s\cdot\cdot\left(\varphi_s\bar{\boldsymbol{\sigma}}_s\right)_t-E_g;\\
&\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_g=-\bar{p}_g\mathbf{E}-\hat{\boldsymbol{\sigma}}_g,\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_g=\left\langle\rho_g^{(0)}\Delta\mathbf{v}_g^{(0)}\otimes\Delta\mathbf{v}_g^{(0)}\right\rangle_g,\ \bar{p}_g=R\left\langle\rho_g^{(0)}\theta_g^{(0)}\right\rangle_g;\\
&\bar{e}_g=c_g\bar{\theta}_g+\bar{v}_g^2/2+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_g\cdot\cdot\mathbf{E}/\left(2\bar{\rho}_g\right)+c_g\left\langle\rho_g^{(0)}\Delta\theta_g^{(0)}\right\rangle_g/\bar{\rho}_g,\ \varphi_s=1-\varphi_g;\\
&2\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=2\boldsymbol{\alpha}_s\left(\bar{\theta}_s-\theta_{s0}\right)+2\boldsymbol{\Pi}\cdot\cdot\bar{\boldsymbol{\sigma}}_s-\left\langle\nabla_\xi\otimes\mathbf{u}_s^{(1)}+\left(\nabla_\xi\otimes\mathbf{u}_s^{(1)}\right)^T\right\rangle_s;\\
&2\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=\nabla_{\bar{x}}\otimes\bar{\mathbf{u}}_s+\left(\nabla_{\bar{x}}\otimes\bar{\mathbf{u}}_s\right)^T,\ \boldsymbol{\lambda}_s\cdot\nabla_{\bar{x}}\bar{\theta}_s=\left\langle\boldsymbol{\lambda}_s\cdot\left(\nabla_\xi\theta_s^{(1)}+\nabla_{\bar{x}}\bar{\theta}_s\right)\right\rangle_s,
\end{aligned}\tag{5}$$

где φ_s, φ_g – объемные доли твердой и газовой фаз; макропараметры газовой фазы: $\bar{\rho}_g$ – плотность, $\bar{\mathbf{v}}_g$, $\bar{v}_g$ – вектор скорости и модуль вектора скорости, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_g$ – тензор

полных напряжений, $\bar{e}_g$ – внутренняя энергия, $\bar{p}_g$ – давление, $\bar{\theta}_g$ – температура, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_g$ – тензор пульсаций напряжений; макропараметры твердой фазы: $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензор деформаций, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_s$ – тензор напряжений, $\bar{\mathbf{u}}_s$ – вектор перемещений, $\bar{\theta}_s$ – температура; $\Delta\mathbf{v}_g^{(0)}$, $\Delta\theta_g^{(0)}$ – вектор пульсации скорости и пульсация температуры нулевого приближения относительно соответствующих макропараметров $\bar{\mathbf{v}}_g$ и $\bar{\theta}_g$ газовой фазы, $\Delta\mathbf{v}_g^{(0)} = \mathbf{v}_g^{(0)} - \bar{\mathbf{v}}_g$, $\Delta\theta_g^{(0)} = \theta_g^{(0)} - \bar{\theta}_g$; J – интенсивность объемного фазового превращения; $\mathbf{P}$ – вектор количества движения межфазного обмена, который представляется в виде суммы сил Х.А. Рахматулина, присоединенных масс, трения, возникающих вследствие вязкости газовой фазы; $\mathbf{E}_g$, E_g – вектор энергии относительного движения и интенсивность фазового энергетического обмена газовой фазы. Функции J, $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}_g$, E_g и $\bar{e}_g$ связаны интегральными соотношениями с микропараметрами нулевого и первого приближений, а также с макропараметрами газовой и твердой фаз ПС. Дифференциальные уравнения, входящие в математическую постановку локальных задач (3) и (4), являются стационарными уравнениями сохранения массы, импульса и энергии газовой фазы ПС. Кроме того, эти задачи содержат локальные определяющие соотношения, граничные условия на межфазной поверхности $\Sigma_{\xi g}$, условия периодичности и интегральные соотношения относительно функций нулевого, первого приближений и макропараметров, которые необходимы для существования единственного решения локальных задач (3), (4) и установления связи между локальными и глобальной задачами. Отмеченные особенности ограничивают использование существующих численных методов для решения указанных локальных интегро-дифференциальных задач (3) и (4). Поэтому в диссертационной работе разработаны специальные численно-аналитические методы их решения.

Во **второй главе** представлены численно-аналитические методы решения локальных задач (3), (4) и конечно-разностная схема типа «предиктор-корректор», с помощью которой интегрируется система уравнений глобальной задачи (5).

Система уравнений Эйлера задачи (3) допускает два первых интеграла (адиабату Пуассона и интеграл Бернулли) вдоль любой линии тока в ЯП, т.е. процесс переноса газовой фазы в нулевом приближении является адиабатическим. Поэтому для решения локальной задачи газовой динамики нулевого уровня предложен метод, позволяющий преобразовать уравнения задачи (3) в нелинейную систему, состоящую из трех интегральных уравнений относительно модуля вектора скорости $\hat{v}_g^{(0)}$ и двух констант $\hat{\theta}_{g*}^{(0)}$ и $\hat{v}_{g*}^{(0)}$:

$$\hat{v}_g^{(0)} S = \bar{M} \left| V_{\xi g} \right| F \left\langle \tilde{F} \right\rangle_g, \quad \hat{v}_{g*}^{(0)} S_* = \bar{M} \left| V_{\xi g} \right| \left\langle \tilde{F} \right\rangle_g, \quad \hat{\theta}_{g*}^{(0)} \left\langle G \right\rangle_g = 1. \tag{6}$$

В рамках данного метода предполагается, что геометрическая форма линий тока задана, плотность $\hat{\rho}_g^{(0)}$, модуль вектора скорости $\hat{v}_g^{(0)}$ и температура $\hat{\theta}_g^{(0)}$ нулевого приближения зависят только от осевой координаты $z = \xi^3$ локальной цилиндрической системы координат в ЯП для любой линии тока, причем $\hat{\rho}_g^{(0)} = \rho_g^{(0)} / \bar{\rho}_g(\bar{\mathbf{x}}, t)$,

$\hat{v}_g^{(0)} = v_g^{(0)}/\bar{a}_g(\bar{\mathbf{x}},t)$, $\hat{\theta}_g^{(0)} = \theta_g^{(0)}/\bar{\theta}_g(\bar{\mathbf{x}},t)$, $\bar{a}_g$ – макроскопическая скорость звука в газовой фазе, для которой $\bar{a}_g = \sqrt{R\bar{\theta}_g}$. В системе (6) обозначены:

$$F = F\left(\hat{v}_g^{(0)}, \hat{\theta}_{g*}^{(0)}, \hat{v}_{g*}^{(0)}\right) = \left[2\gamma_1\hat{\theta}_{g*}^{(0)} \Big/ \left(2\gamma_1\hat{\theta}_{g*}^{(0)} + \left(\hat{v}_{g*}^{(0)}\right)^2 - \left(\hat{v}_g^{(0)}\right)^2\right)\right]^{\gamma_1 - 1};$$

$\hat{\theta}_{g*}^{(0)}$, $\hat{v}_{g*}^{(0)}$ – значения температуры $\hat{\theta}_g^{(0)}$ и модуля вектора скорости $\hat{v}_g^{(0)}$ на границе области $V_{\xi g}$ при $z = -1/2$; S, S_* – площади сечений области $V_{\xi g}$, ортогональными к ее оси симметрии плоскостями при произвольном значении $z \in (-1/2; 1/2]$ и $z = -1/2$; $\tilde{F} = 1/F$, $G = F^{1/(1-\gamma_1)}$, $\gamma_1 = \gamma/(\gamma - 1)$, γ – коэффициент Пуассона; $\bar{M} = \bar{M}(\bar{\mathbf{x}},t)$ – макроскопическое число Маха, для которого $\bar{M} = \bar{v}_{gz}/\bar{a}_g$, $\bar{v}_{gz}$ – осевая компонента вектора $\bar{\mathbf{v}}_g(\bar{\mathbf{x}},t)$ в глобальной цилиндрической системе координат. Макроскопическое число Маха $\bar{M}$ функционально связано с макроскопическим вектором скорости $\bar{\mathbf{v}}_g$ и температурой $\bar{\theta}_g$, а также со свойствами газовой фазы, поэтому $\bar{M}$ и константа γ_1 являются внешними данными для системы (6), причем $\bar{M}$ определяется из решения глобальной задачи (5). Система уравнений (6) решается численно модифицированным методом Ньютона. Плотность $\hat{\rho}_g^{(0)}$, температура $\hat{\theta}_g^{(0)}$ и давление $\hat{p}_g^{(0)}$ вычисляются по формулам: $\hat{\rho}_g^{(0)} = \hat{\rho}_{g*}^{(0)}\tilde{F}$, $\hat{\theta}_g^{(0)} = \hat{\theta}_{g*}^{(0)}G$, $\hat{p}_g^{(0)} = \hat{p}_{g*}^{(0)}H$, в которых константы $\hat{\rho}_{g*}^{(0)}$ и $\hat{p}_{g*}^{(0)}$ на границе ЯП при $z = -1/2$ суть $\hat{\rho}_{g*}^{(0)} = 1/\left\langle\tilde{F}\right\rangle_g$, $\hat{p}_{g*}^{(0)} = \hat{\rho}_{g*}^{(0)}\hat{\theta}_{g*}^{(0)}$, $H = F^{\gamma_1/(1-\gamma_1)}$. При заданной константе γ_1 существование 1-периодических по локальной координате $z = \xi^3$ функций $\hat{\rho}_g^{(0)}$, $\hat{v}_g^{(0)}$ и $\hat{\theta}_g^{(0)}$ обеспечивается характером функции S, определяющей форму области течения газовой фазы, и значением макроскопического числа Маха $\bar{M}$. Предложенный метод позволяет решать задачи (3) и (5) независимо друг от друга путем создания газодинамической базы данных (БД) микропараметров нулевого приближения в зависимости от числа $\bar{M}$, константы γ_1 и двух геометрических параметров, определяющих форму поровой области каркаса ПС. Значения указанных переменных выбираются из предварительно заданных диапазонов изменения соответствующих величин.

В рамках предложенного метода для решения локальной задачи газовой динамики первого уровня система (4) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
&\bar{Q}_g^1 + 2\pi\left(f_\Sigma(z)/A_0\right)^2 \int_0^{A_0} \left(\rho_g^{(0)}v_{gz}^{(1)} + \rho_g^{(1)}v_{gz}^{(0)}\right) r^0 dr^0 = \tilde{M}_0(z);\\
&d\left(\mathbf{v}_g^{(0)} \cdot \mathbf{v}_g^{(1)}\right) = d\mathbf{x}_g^{(0)} \cdot \mathbf{v}_g^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}_g^{(0)} + \frac{1}{\rho_g^{(0)}}\left[\frac{\rho_g^{(1)}dp_g^{(0)}}{\rho_g^{(0)}} - dp_g^{(1)} + d\mathbf{x}_g^{(0)} \cdot \mathbf{R}_2 - R_1\left(v_g^{(0)}\right)^2 d\tau\right];\\
&d\eta_g^{(1)}/d\tau = \left(R_3 - \eta_g^{(0)}R_1\right)/\rho_g^{(0)} - \mathbf{v}_g^{(1)} \cdot \nabla_\xi \eta_g^{(0)};\\
&\rho_g^{(1)} = p_g^{(1)}/\left(\gamma R\theta_g^{(0)}\right) - \eta_g^{(1)}\rho_g^{(0)}/\left(\gamma c_g\right),\ p_g^{(1)} = R\left(\rho_g^{(0)}\theta_g^{(1)} + \rho_g^{(1)}\theta_g^{(0)}\right);\\
&\left[\!\left[\rho_g^{(1)}\right]\!\right] = 0,\ \left[\!\left[\mathbf{v}_g^{(1)}\right]\!\right] = \mathbf{0},\ \left[\!\left[\theta_g^{(1)}\right]\!\right] = 0,\ \left[\!\left[\eta_g^{(1)}\right]\!\right] = 0;\\
&\left\langle\rho_g^{(1)}\right\rangle_g = 0,\ \left\langle\rho_g^{(0)}v_{gr}^{(1)} + \rho_g^{(1)}v_{gr}^{(0)}\right\rangle_g = 0,\ \left\langle\rho_g^{(0)}v_{gz}^{(1)} + \rho_g^{(1)}v_{gz}^{(0)}\right\rangle_g = 0,\ \left\langle\theta_g^{(1)}\right\rangle_g = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

в которой содержатся локальное уравнение неразрывности первого приближения в интегральной форме (первая строка), аналоги интеграла Бернулли (вторая строка) и интеграла Пуассона (третья строка) первого приближения в дифференциальной форме вдоль предварительно заданной линии тока в ЯП, определяющие соот-

ношения первого приближения (четвертая строка), условия периодичности и осреднения (пятая и шестая строки); r^0 – радиальная локальная координата в ЯП, $r^0 = A_0 r / f_\Sigma(z)$, $r \in [0; f_\Sigma(z)]$, f_Σ – функция формы поверхности $\Sigma_{\xi^3 g}$, A_0 – параметр функции f_Σ, $A_0 \in \mathbb{R}$; $\bar{Q}_g^1$ – неизвестная константа, равная значению массового расхода газовой фазы первого приближения при $z = -1/2$; $\tilde{M}_0$ – заданная 1-периодическая функция координаты z, $d\mathbf{x}_g^{(0)} = \mathbf{v}_g^{(0)} d\tau$, τ – криволинейная координата вдоль линии тока, $\boldsymbol{\omega}_g^{(0)} = \nabla_\xi \times \mathbf{v}_g^{(0)}$; R_1, R_3, $\mathbf{R}_2$ – известные скалярные и векторная функции, определяемые значениями микропараметров газовой фазы нулевого приближения; $\eta_g^{(0)}$, $\eta_g^{(1)}$ – энтропия газовой фазы нулевого и первого приближений. Следуя разработанному численно-аналитическому методу решения локальной задачи газовой динамики нулевого уровня, модуль вектора скорости первого приближения $v_g^{(1)}$ зависит только от координаты $z(\tau)$, а $\rho_g^{(1)}$ и $\theta_g^{(1)}$ представляются в виде произведений $\rho_g^{(1)} = \rho^1(\tau)\Gamma(r^0)$ и $\theta_g^{(1)} = \theta^1(\tau)\Gamma(r^0)$, где функция Γ переменной r^0 задана, а функции $v_g^{(1)}$, ρ^1 и θ^1 переменной τ подлежат определению. Задача (7) сводится к совместному численному решению методом последовательных приближений двух интегральных уравнений относительно $v_g^{(1)}$ и $\bar{Q}_g^1$:

$$\begin{aligned} &v_g^{(1)}(\tau) = \left[C_1(\bar{Q}_g^1) + Y_2(\bar{Q}_g^1, \tau)\right] y_1(\tau) + \left[C_2(\bar{Q}_g^1) - Y_1(\bar{Q}_g^1, \tau)\right] y_2(\tau); \\ &\left\langle \Phi_0 v_g^{(1)} \right\rangle_g = \Phi_1 \bar{Q}_g^1 - \Phi_2, \end{aligned} \tag{8}$$

в которой константы C_1 и C_2 определяются граничными условиями 1-периодичности $\left[\!\left[v_g^{(1)} \right]\!\right] = 0$ и $\left[\!\left[\eta_g^{(1)} \right]\!\right] = 0$ при фиксированном значении константы $\bar{Q}_g^1$; Y_1 и Y_2 – криволинейные интегралы первого рода с переменным верхним пределом вдоль линии тока в ЯП, зависящие от параметра $\bar{Q}_g^1$:

$$Y_1(\bar{Q}_g^1, \tau) = \int_0^\tau \frac{y_1(\zeta) P_3(\bar{Q}_g^1, \zeta)}{W[y_1, y_2]} d\zeta; \quad Y_2(\bar{Q}_g^1, \tau) = \int_0^\tau \frac{y_2(\zeta) P_3(\bar{Q}_g^1, \zeta)}{W[y_1, y_2]} d\zeta,$$

где W – определитель Вронского системы функций $\{y_1, y_2\}$, которые определяются численно из решения краевых задач для линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} (y_1)_{\tau\tau} + P_1 (y_1)_\tau + P_2 y_1 = 0, \\ y_1(0) = 1, \quad y_1(\tau_{\max}) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (y_2)_{\tau\tau} + P_1 (y_2)_\tau + P_2 y_2 = 0, \\ y_2(0) = 0, \quad y_2(\tau_{\max}) = 1, \end{cases}$$

$(\cdot)_{\tau\tau} = d^2(\cdot)/d\tau^2$, $(\cdot)_\tau = d(\cdot)/d\tau$; P_1, P_2, P_3, Φ_0 – известные функции локальных, глобальных координат и времени; Φ_1, Φ_2 – известные функции глобальных координат и времени; $\tau = 0$ при $z = -1/2$ и $\tau = \tau_{\max}$ при $z = 1/2$; причем условия осреднения $\left\langle \rho_g^{(1)} \right\rangle_g = 0$, $\left\langle \theta_g^{(1)} \right\rangle_g = 0$ и $\left\langle \rho_g^{(0)} v_{gr}^{(1)} + \rho_g^{(1)} v_{gr}^{(0)} \right\rangle_g = 0$ выполняются в силу выбора функции Γ и четности микропараметров $v_g^{(0)}$, $v_g^{(1)}$, $\rho_g^{(0)}$ и $\rho_g^{(1)}$, условие 1-периодичности $\left[\!\left[\rho_g^{(1)} \right]\!\right] = 0$ следует из 1-периодичности функций $v_g^{(1)}$ и $\tilde{M}_0$ на границах ЯП, а условие $\left[\!\left[\theta_g^{(1)} \right]\!\right] = 0$ вытекает из 1-периодичности микропараметров нулевого $\rho_g^{(0)}$, $\theta_g^{(0)}$, первого $\rho_g^{(1)}$, $\eta_g^{(1)}$ приближения и локального определяющего соотношения относительно указанных функций: $\theta_g^{(1)} / \theta_g^{(0)} = \eta_g^{(1)} / c_g + (\gamma - 1) \rho_g^{(1)} / \rho_g^{(0)}$.

В **третьей главе** приводится блок-схема алгоритма разработанного ПК HDynSystems 1.0, методика работы с ПК и дополнительными программными модулями для визуализации численных результатов на базе системы компьютерной математики MATLAB и табличного процессора MS Excel при проведении вычислительного эксперимента, структура газодинамической БД локальной задачи газовой динамики нулевого уровня на ЯП (3) и соответствующих аппроксимационных полиномов, а также решение тестовых задач для подтверждения работоспособности ПК. Использована система разработки программного обеспечения MS Visual C++ 2010.

В **четвертой главе** содержатся результаты численного моделирования физических процессов при силовом нагружении гетерогенной демпфирующей системы и при импульсном тепловом нагреве ПС с фазовыми превращениями. Приведены графические зависимости, иллюстрирующие распределение микропараметров в ЯП и макропараметров в «гомогенизированной» ПС, полученные в процессе вычислительного эксперимента с помощью разработанного ПК HDynSystems 1.0. Сформирована газодинамическая БД локальной задачи газовой динамики нулевого уровня на ЯП (3) для различных значений чисел $\bar{M}$, γ_1, а также геометрических параметров, определяющих форму ЯП, проанализировав которую установлено существование 1-периодических по локальным координатам ξ дозвуковых и сверхзвуковых газодинамических функций нулевого приближения (Рис. 3), где z – осевая координата локальной цилиндрической системы координат, заданной в ЯП. На графиках Рис. 3 отображены результаты расчетов для дозвукового (0,09) и сверхзвукового (3,01) макроскопического числа Маха $\bar{M}$, константы $\gamma_1 = 6.0$ при четырех вариантах геометрии поровой области, функция формы f_Σ поверхности $\Sigma_{\xi sg}$ которой задавалась уравнением $f_\Sigma(z) = 0,5[(A_0 + B_0) - (A_0 - B_0)\cos(2\pi z)]$, $A_0, B_0 \in \mathbb{R}$, $0 < B_0 \le A_0 \le 1/2$. Получены коэффициенты полиномов, аппроксимирующие газодинамические функции нулевого приближения, а также так называемые дозвуковые и сверхзвуковые двумерные области существования 1-периодического по локальным координатам ξ решения локальной задачи газовой динамики нулевого уровня. Установлено, что непериодических течений газовой фазы в ЯП не существует. Численное решение системы глобальных уравнений (5) получено для плоской консольно-закрепленной ПС (газонаполненной пористой пластины), свободная поверхность которой находится под воздействием импульсной тепловой нагрузки (Рис. 4, 5; рассмотрен случай фазовых превращений «твердое тело → газ»), а также для плоской демпфирующей ПС, находящейся под воздействием импульсной силовой нагрузки (Рис. 6; фазовые превращения отсутствуют), для случая цилиндрической формы межфазной поверхности Σ_{sg}, т.е. $f_\Sigma(z) = const \quad \forall z \in [-1/2; 1/2]$ в ЯП. Результаты решения локальной задачи (3)

соответствуют существующим аналитическим решениям для случая цилиндрической формы поверхности Σ_{sg}. Полученные решения локальной задачи газовой динамики нулевого уровня на ЯП позволяют сделать вывод о существовании таких режимов течения газовой фазы в каркасе ПС при определенной геометрической форме поверхности раздела твердой и газовой фаз, которые приводят к запиранию гетерогенной системы. Полученные при решении глобальной задачи графики макропараметров твердой и газовой фаз в ПС с фазовыми превращениями соответствуют ранее опубликованным результатам других авторов.

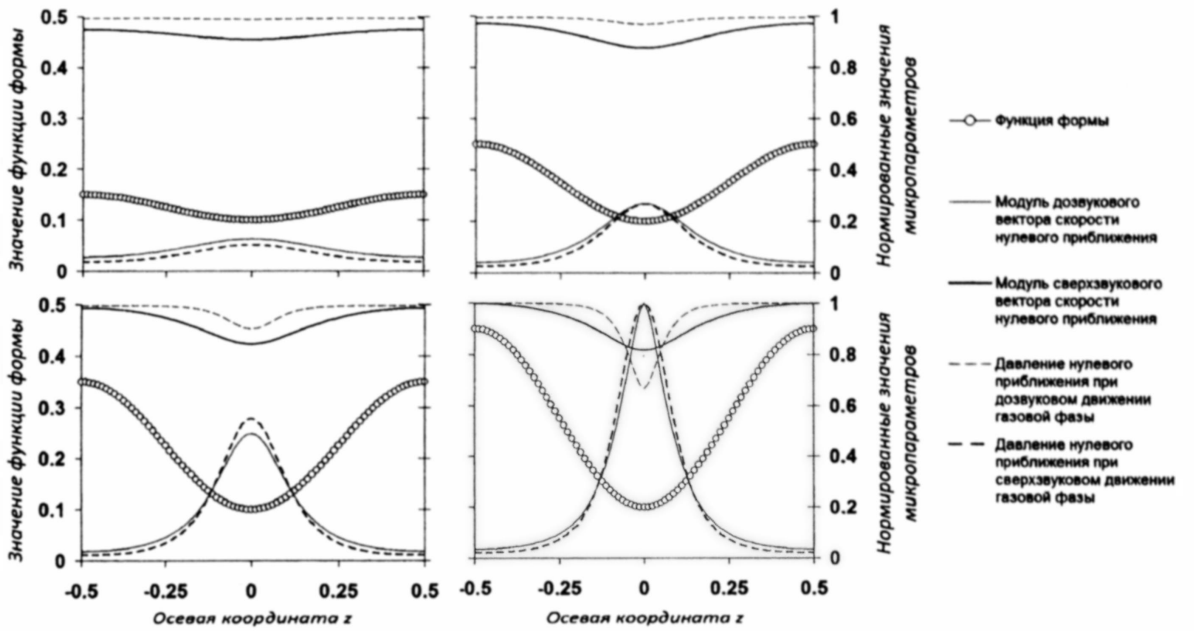


Рис. 3.

Периодические дозвуковые и сверхзвуковые безразмерные значения модуля вектора скорости $\hat{v}_g^{(0)}$ и давления $\hat{p}_g^{(0)}$ газовой фазы нулевого приближения при различной геометрической форме межфазной поверхности $\Sigma_{\xi sg}$

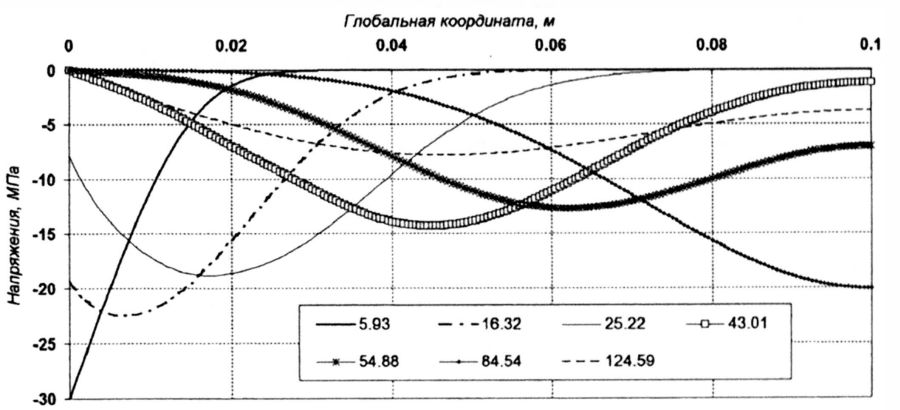


Рис. 4.

Графики макроскопических напряжений $\bar{\sigma}_{s33}$ в каркасе плоской ПС для различных значений времени t в микросекундах

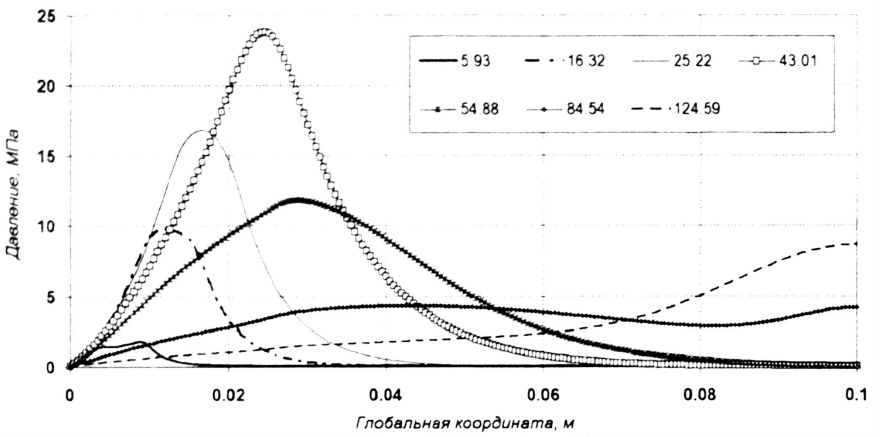


Рис. 5.

Графики макроскопического давления $\overline{p}_g$ газовой фазы в порах плоской ПС для различных значений времени t в микросекундах



Рис. 6.

Давление газовой фазы и напряжения твердой фазы на левой ($\overline{x}^3 = 0$) и правой ($\overline{x}^3 = \overline{x}^3_{\max} = 0{,}1$ м) внешних границах демпфирующей ПС

Основные результаты диссертационной работы

1. Разработана математическая модель нестационарных физических процессов, возникающих в пористых системах под действием внешних возмущающих факторов, позволяющая описывать деформирование гетерогенной газонаполненной системы с учетом внутренней структуры каркаса и при наличии фазовых превращений.

2. Разработан метод асимптотического осреднения для нахождения микро- (функций нулевого и первого приближений) и макропараметров деформируемой пористой системы с фазовыми превращениями.

3. Разработаны новые численно-аналитические методы решения локальных задач тепломассопереноса нулевого и первого уровней на ячейке периодичности. В локальной задаче газовой динамики нулевого уровня установлено существование 1-периодических по локальным координатам дозвуковых и сверхзвуковых режимов течения газовой фазы при заданных свойствах газа, макроскопического числа Маха и геометрических параметров, определяющих форму границы раздела твердой и газовой фаз гетерогенной системы.

4. Разработан программный комплекс HDynSystems 1.0 для вычисления газодинамических и механических микро- и макропараметров деформируемой пористой системы, с помощью которого решены практические задачи тепломассопереноса газа в гетерогенном демпфирующем устройстве и пористой пластине с фазовыми превращениями, находящихся под воздействием импульсного силового и теплового источника соответственно.

Основные результаты диссертации отражены в работах:

1. Димитриенко Ю.И., Иванов М.Ю. Разработка метода асимптотического осреднения для решения нелинейных задач фильтрации в периодических пористых средах // Математика в современном мире: Материалы II Российской научно-практической конференции, посвященной 110-летию со дня рождения А.Я. Хинчина. Калуга, 2004. С. 155-163 (0,53 п.л./0,27 п.л.).

2. Димитриенко Ю.И., Иванов М.Ю. Разработка численного метода решения локальной задачи нелинейной фильтрации в периодических пористых средах // Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы: Сборник трудов научно-методической конференции, посвященной 40-летию НУК ФН. М., 2005. С. 469-477 (0,56 п.л./0,28 п.л.).

3. Моделирование нестационарных процессов в демпфирующих системах с фазовыми превращениями / М.Ю. Иванов [и др.] // Аэрокосмические технологии: Труды Всероссийских и Международной научно-технических конференций 2004-2007 г.г. М., 2008. С. 383-386 (0,25 п.л./0,06 п.л.).

4. Димитриенко Ю.И., Иванов М.Ю. Моделирование нелинейных динамических процессов переноса в гетерогенных системах // Аэрокосмические технологии: Труды Всероссийских и Международной научно-технических конференций 2004-2007 г.г. М., 2008. С. 110-116 (0,44 п.л./0,22 п.л.).

5. Иванов М.Ю. Моделирование нелинейных высокоскоростных процессов переноса в гетерогенных системах // Актуальные проблемы фундаментальных наук: Сборник трудов. М., 2008. С. 96-100 (0,31 п.л./0,31 п.л.).

6. Димитриенко Ю.И., Иванов М.Ю. Моделирование нелинейных динамических процессов переноса в пористых средах // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2008. № 1. С. 24-38 (0,94 п.л./0,47 п.л.).

7. Power sources for micro flight vehicles on the basis of nano technologies / M.Y. Ivanov [et al.] // The Collection of the Theses of 1st IAA-RACTs Conference Space For Humanity. Korolev, 2008. P. 191.

8. Иванов М.Ю. Моделирование физических процессов в гетерогенных амортизационных системах, работающих в условиях импульсных динамических нагрузок // Актуальные проблемы фундаментальных наук: Сборник трудов. М., 2009. С. 22-25 (0,25 п.л./0,25 п.л.).

9. Димитриенко Ю.И., Иванов М.Ю. Моделирование высокоскоростных процессов в демпфирующих системах с фазовыми превращениями // Наука и образование. Электрон. журнал МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. № 11. С. 431-444. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/493560.html (дата обращения: 01.10.2014) (0,81 п.л./0,41 п.л.).

10. PRECISE - development of a MEMS-based monopropellant micro Chemical Propulsion System / M. Ivanov [et al.] // Joint Propulsion Conference & Exhibit. Atlanta, Georgia, 2012. P. 1-9. DOI: 10.2514/6.2012-4072 (0,51 п.л./0,06 п.л.).

11. Использование гидрокапиллярных лиофобных систем в демпфирующих устройствах и аккумуляторах механической энергии / М.Ю. Иванов [и др.] // Аэрокосмические технологии: Труды II Международной научно-технической конференции, посвященной 95-летию академика В.Н. Челомея. М., 2012. Т. 1. С. 150-156 (0,44 п.л./0,11 п.л.).

12. First results of PRECISE - Development of a MEMS-based monopropellant micro chemical propulsion system / M. Ivanov [et al.] // Acta Astronautica. 2014. V. 93. P. 77-83. DOI: 10.1016/j.actaastro.2013.06.010 (0,44 п.л./0,06 п.л.).

13. Экспериментальное исследование гетерогенных энергетических систем на базе лиофобных жидкостей и пористых тел / М.Ю. Иванов [и др.] // Наука и образование. Электрон. журнал МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. № 5. С. 254-263. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/711242.html (дата обращения: 01.10.2014) (0,63 п.л./0,08 п.л.).

14. Разработка двигательной установки на базе МЭМС-технологий в рамках международного научно-технического проекта PRECISE / М.Ю. Иванов [и др.] // Ракетные комплексы и ракетно-космические системы – проектирование, экспериментальная отработка, летные испытания, эксплуатация: Труды секции 22 имени академика В.Н. Челомея XXXVIII Академических чтений по космонавтике. Реутов, 2014. С. 121-132 (0,69 п.л./0,1 п.л.).

15. Предварительные результаты и перспективы развития международного научно-технического проекта PRECISE / М.Ю. Иванов [и др.] // Аэрокосмические технологии: Научные материалы III Международной научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея. М., 2014. С. 34-35.