



На правах рукописи

Горяинов Владимир Борисович

Робастное и непараметрическое оценивание параметров авторегрессионного поля

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка
информации (информатика и машиностроение)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана»

Официальные оппоненты:

Семенихин Константин Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Синицин Владимир Игоревич, доктор физико-математических наук, заведующий отделом информационных технологий управления федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт проблем информатики Российской академии наук (ИПИ РАН)»

Тимонин Владимир Иванович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт системного анализа РАН»

Защита состоится _____ 2013 г. в ____ ч. ____ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана» по адресу: Москва, Рубцовская наб., 2/18, ауд. 1006 л.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана».

Автореферат разослан _____ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат технических наук, доцент



Аттетков А.В.



Общая характеристика работы

Актуальность темы. Первые упоминания об авторегрессионных случайных полях или, как их ещё называют, процессах пространственной авторегрессии, появились в конце 50-х годов прошлого века (P. Whittle), а через четверть века началось их систематическое исследование (J. Besag; D. Tjostheim; X. Guyon; G. Kallianpur и V. Mandrekar; R.L. Kashyap), активность которого растёт до сих пор. Одной из причин растущего интереса к авторегрессионным полям стало их широкое использование в теории анализа и обработки изображений и теории распознавания образов (К.К. Васильев, В.Б. Кашкин и А.И. Сухинин), причём не только в технике (О.В. Попов, А. Olivier и С. Olivier; Y. Ohtsuka, T. Oga и K. Kakamu), но и в естественных науках (D. Zhu и A.A. Beex; J.P. Chiles и P. Delfiner; K.R. Mecke и D. Stoyan) и в медицине (F. Miwakeichi и др.; F. Mast и L. Jancke; D.U. Pfeiffer, T.P. Robinson и M. Stevenson; P. Moraga и A.V. Lawson). Другим важным направлением применения авторегрессионных полей стала экономика, в которой они используются и в составе более сложных моделей описания пространственно-временных экономических явлений (R. Dubin, R.K. Pace и T.G. Tibodeau; B.A. Blonigen, R.B. Davies, G.R. Waddel и др.; J.P. LeSage и R.K. Pace).

Одним из важных этапов изучения авторегрессионных полей является их идентификация, сводящаяся к оцениванию параметров (коэффициентов) авторегрессионной модели и проверке различных гипотез о них. Первоначально для этого использовался аналог метода Юла—Уолкера оценивания параметров одномерного авторегрессионного уравнения и эквивалентный ему метод наименьших квадратов. Однако первые же попытки описания процессом пространственной авторегрессии реальных данных привели к пониманию важности разработки таких методов идентификации, которые были бы малочувствительны к нарушениям предположений, лежащих в основе метода наименьших квадратов, и прежде всего к предположениям о нормальном (гауссовском) распределении наблюдений (R. Kashyap и K. Eom).

Аналогичные проблемы возникли и в других направлениях математической статистики, что привело к созданию П.Дж. Хьюбером и Ф. Хампелем в 60-х годах двадцатого века нового подхода к анализу данных, названного робастным. Робастные методы лишь незначительно уступают в эффективности методам максимального правдоподобия при анализе наблюдений с известным вероятностным распределением, практически не теряют эффективность при небольшом отклонении распределения наблюдений от предполагаемого и не приводят к катастрофическим ошибкам при значительных нарушениях

в предположении о распределении наблюдений. Основу робастного подхода к оцениванию параметров моделей составляет теория построения М-оценок, которые являются обобщением оценок максимального правдоподобия. Первоначально свойства М-оценок были изучены в наиболее простых случаях одно- и двухвыборочной задачи (П.Дж. Хьюбер, Ф. Хампель). Использование М-оценок в этих моделях оказалось лучше применения метода наименьших квадратов с предварительным отбрасыванием резко выделяющихся наблюдений. В линейных регрессионных моделях М-оценки строили П.Дж. Хьюбер, Ф. Хампель, J. Jureckova, C.A. Field и D.P. Wiens, П.С. Кнопов, L. Zhao, M.V. Fasano, R.A. Maronna, M. Sued и V.J. Yohai, W.B. Wu, в многомерных регрессионных моделях — B.Q. Miao, Y. Wu, Z. Bai, X. Chen, Y. Wu, в нелинейных регрессионных моделях — А.В. Иванов, И.В. Орловский, Н.Н. Леоненко.

Параллельно теория М-оценивания развивалась для процессов авторегрессии (R.D. Martin, K. Campbell, C.-H. Lee, C.J. Geyer, F. El Bantli, M. Hallin) и процессов авторегрессии-скользящего среднего (J. Liu, C.-H. Lee, R.A. Davis, R.D. Martin, K. Knight).

Обобщением М-оценок в регрессионных моделях занимались O. Bustos, V. Yohai, R.A. Maronna, C.L. Cheng, J.W. Van Ness, Z.D. Bai, Y. Wu, M.S. Song, J.H. Kim, D.G. Simpson, S. Sinha, D.P. Wiens, а в авторегрессионных — Z.W. Zhu, O.H. Bustos, H.L. Koul.

М-оценки в пространственной регрессии изучались J. Chen, L.-X. Zhang, S.N. Lahiri, K. Mukherjee, а в пространственной авторегрессии — M. Zarepour, S.M. Roknossadat.

Одновременно развивались непараметрические методы анализа данных (В.А. Васильев, А.В. Добровидов, Г.М. Кошкин), в частности, основанные на знаках и рангах (J.L. Jr. Hodges и E.L. Lehmann; J. Jureckova; Я. Гаек и З. Шидак), которые не предполагают знание закона распределения наблюдений. За прежними методами, базирующимися на предположении о гауссовости наблюдений и развитыми в конце девятнадцатого и начале двадцатого веков в основном Р. Фишером, К. Пирсоном и У. Госсетом (Стьюдентом), закрепился термин «классические». Сначала знаковые и ранговые методы были разработаны и исследованы для сравнительно простых моделей одно- и двухвыборочных задач сдвига и масштаба. Затем, в последнее десятилетие прошлого века эти методы были распространены на линейную регрессию (J. Jureckova) и одномерную авторегрессию (P. Bloomfield и W.L. Steiger; M. Hallin, J.-F. Ingenbleek и M.L. Puri; C.-H. Lee и R.D. Martin; M. Hallin и M.L. Puri; X.R. Chen, Z.D. Bai, L.C. Zao и Y.H. Wu; R.A. Davis, K. Knight и

J. Liu; H.L. Koul и A.K.Saleh; M.B. Болдин, Г.И. Симонова и Ю.Н. Тюрин; Z.D. Bai и Y. Wu; K. Knight; J. Hajek и Z. Shidak), их статистические свойства в перечисленных моделях продолжают изучаться и в настоящее время (J. Allal, A. Kaаouachi и D. Paindaveine; F. El Bantli и M. Hallin; L. Zhao; B. Andrews; R. Wu и R.A. Davis).

Применение робастных методов к анализу авторегрессионных полей в теории обработки изображений также дало положительные результаты, но их изучение, в частности, сравнительный анализ с методом наименьших квадратов, велось исключительно методом компьютерного моделирования вплоть до самого последнего времени (S.M. Ojeda, R.O. Vallejos, O. Bustos). Первые теоретические работы на эту тему появились совсем недавно (S.M. Ojeda, R.O. Vallejos и M.M. Lucini; M.G. Genton и H.L.Koul; S.M. Roknossadati и M. Zarepour). К сожалению, подавляющее большинство работ, особенно в экономико-математических журналах, по-прежнему базируется на классическом подходе (S. Basu и G.C. Reinsel; E. Ha и H.J. Newton; R.A. Davis; L.F. Lee; D.A. Griffith; Q. Yao и P.J. Brockwell; Y. Davydov и V. Paulauskas; M. Arnold и D. Wied; C. Gaetan и L. Greco; C. Gaetan и X. Guyon; L. Su). Таким образом, исследование статистических свойств робастных методов анализа пространственной авторегрессионной модели является актуальной задачей.

Целью работы является разработка и исследование свойств методов робастного и непараметрического оценивания параметров авторегрессионных полей с неизвестным вероятностным распределением.

Задачами исследования являются:

- построение оптимальных знаковых и ранговых критериев проверки гипотез о параметрах авторегрессионных полей;
- построение и исследование статистических свойств знаковых и ранговых оценок параметров авторегрессионных полей;
- исследование статистических свойств М-оценок, обобщённых М-оценок, оценок наименьших модулей параметров авторегрессионных полей.

Методы исследования. В диссертации применяются методы теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, математического анализа, функционального анализа.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты, которые выносятся на защиту:

- 1) метод построения локально наиболее мощных знаковых и ранговых критериев проверки гипотез о параметрах авторегрессионных полей;
- 2) знаковые и ранговые оценки параметров авторегрессионных полей,

основанные на локально наиболее мощных знаковых и ранговых критериях;

3) доказательство состоятельности и асимптотической нормальности М-оценок, обобщённых М-оценок, оценки наименьших модулей, знаковой оценки и ранговых оценок параметров авторегрессионных полей;

4) аналитический вид асимптотической относительной эффективности М-оценок, оценки наименьших модулей, знаковой оценки и ранговых оценок по отношению к оценке наименьших квадратов;

5) исследование поведения функционала влияния обобщённых М-оценок, М-оценок, оценки наименьших модулей и знаковой оценки на различных классах вероятностных распределений ошибок наблюдений авторегрессионного поля.

Результаты диссертации носят теоретический характер и являются развитием робастной теории идентификации стохастических систем.

Достоверность результатов подтверждена строгими доказательствами и результатами численных расчётов.

Практическая ценность. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для идентификации авторегрессионных полей, в особенности, имеющих негауссовскую природу, и авторегрессионных полей, наблюдающихся с грубыми ошибками.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на международной научно-технической конференции «Информационные технологии и информационная безопасность в науке, технике и образовании «ИНФОТЕХ - 2011»» (Севастополь, 2011), XVI-й Международной конференции «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2011), IX Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления», SICPRO'12 (Москва, 2012), XVII-й Международной конференции «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2012), VII Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике» (Москва, 2013), XXXI Международном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей ISSPSM'2013 (Москва, 2013), II Международной научно-технической конференции ComInt-2013 (Черкассы, 2013).

Работа выполнена при поддержке программы Минобрнауки «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2013 годы)», проект № 2.1.1/227.

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 24 научных работах, в том числе в 16 статьях, опубликованных в журналах из Перечня ведущих научных журналов и изданий и 7 тезисах докладов.

Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых

изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, выводов и списка литературы. Работа изложена на 243 страницах, содержит 19 иллюстраций, 6 таблиц. Библиография включает 164 наименования.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертации.

В **первой главе** изучаются асимптотические и робастные свойства М-оценок (оценок, обобщающих оценки максимального правдоподобия, наименьших квадратов и наименьших модулей) коэффициентов уравнения авторегрессионного поля, доказывается асимптотическая нормальность М-оценок. Исследуется асимптотическая относительная эффективность (АОЭ) М-оценок по отношению к оценке наименьших квадратов при нарушении предположения о нормальности обновляющего (инновационного) поля и при засорении наблюдений аномальными ошибками.

В разделе 1.1 приведены наиболее распространенные типы авторегрессионных полей и описываются основные методы их исследования.

В разделе 1.2 изложены основные этапы развития робастного подхода в анализе линейных моделей, указаны его преимущества и недостатки по сравнению с традиционными методами максимального правдоподобия и наименьших квадратов.

В разделе 1.3 дано определение М-оценки. Рассматривается модель пространственной авторегрессии (B.D. Ripley; C. Gaetan и X. Guyon; A. Gelfand и др.; R. Haining) — стационарное поле X_{ij} , описываемое уравнением

$$X_{ij} = a_{10}X_{i-1,j} + a_{01}X_{i,j-1} + a_{11}X_{i-1,j-1} + \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1)$$

где $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})^T$ — авторегрессионные коэффициенты, а ε_{ij} — независимые одинаково распределённые случайные величины с плотностью $f(x)$ и

нулевым математическим ожиданием $E\varepsilon_{ij} = 0$. Достаточным условием стационарности X_{ij} является (см., например, D. Tjøstheim) условие

$$1 - a_{10}^0 z_1 - a_{01}^0 z_2 - a_{11}^0 z_1 z_2 \neq 0, \quad |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1. \quad (2)$$

М-оценку a_{mn}^* параметра a по наблюдениям X_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ поля (1) определим как точку минимума функции

$$\mathcal{L}_{mn}(a) = \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^n \rho(X_{ij} - a_{10}X_{i-1,j} - a_{01}X_{i,j-1} - a_{11}X_{i-1,j-1}), \quad (3)$$

где $\rho(x)$ — некоторым образом выбранная функция.

Если функция $\rho(x)$ является выпуклой и дифференцируемой, то минимизация (3) равносильна решению системы уравнений

$$\sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^n \psi(X_{ij} - a_{10}X_{i-1,j} - a_{01}X_{i,j-1} - a_{11}X_{i-1,j-1}) \tilde{X}_{ij} = 0, \quad (4)$$

где $\tilde{X}_{ij} = (X_{i-1,j}, X_{i,j-1}, X_{i-1,j-1})^T$. Оценка максимального правдоподобия является частным случаем М-оценки с ρ -функцией $\rho(x) = -\ln f(x)$ или ψ -функцией $\psi(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$.

В разделе 1.4 в теореме 1.1 доказана асимптотическая нормальность М-оценок a_{mn}^* . Обозначим через K ковариационную матрицу вектора $\tilde{X}_{11}$, а через a^0 — истинное значение параметра a .

Теорема 1.1. Пусть $\rho(x)$ выпуклая функция, $\rho''(x)$ непрерывна почти всюду и ограничена, a_{mn}^* — точка минимума функции (3), плотность $f(x)$ независимых одинаково распределённых случайных величин ε_{ij} в (1) такова, что $E\rho'(\varepsilon_{11}) = 0$, $E(\rho'(\varepsilon_{11}))^2 > 0$, $\sigma^2 = D\varepsilon_{11} < \infty$, $E\rho''(\varepsilon_{11}) > 0$.

Тогда при $m, n \rightarrow \infty$ случайный вектор $\sqrt{mn}(a_{mn}^* - a^0)$ является асимптотически нормальным с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $K^{-1} \frac{E[\rho'(\varepsilon_{11})^2]}{(E[\rho''(\varepsilon_{11})])^2}$.

В разделе 1.5 предложен итерационный метод вычисления М-оценок и доказана его сходимость. Каждая итерация сводится к решению системы линейных уравнений.

В разделе 1.6 найдена АОЭ $e(f)$ М-оценок a_{mn}^* по отношению к оценке наименьших квадратов, равная $\frac{\sigma^2(E[\rho''(\varepsilon_{11})])^2}{E[\rho'(\varepsilon_{11})^2]}$. Если $e(f) > 1$, то М-оценки

предпочтительнее оценки наименьших квадратов, а если $e(f) < 1$, то наоборот оценка наименьших квадратов предпочтительнее М-оценок. Для достижения одинаковой точности оценивания М-оценкам требуется в $e(f)$ раз больше наблюдений, чем оценке наименьших квадратов.

Сначала исследовалось поведение $e(f)$ при отклонении плотности $f(x)$ распределения ε_{ij} от нормального. Идея моделирования приближённо нормального распределения состоит в том, что основная доля $1 - \delta$, $\delta \in (0, 1)$, случайных величин ε_{ij} моделируется стандартным нормальным распределением, а оставшая небольшая доля δ имеет нормальное распределение с нулевым средним, но с большей дисперсией τ^2 . В этом случае распределение ε_{ij} описывается распределением Тьюки, которое имеет плотность

$$f(x) = (1 - \delta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{-\frac{x^2}{2\tau^2}}, \quad 0 \leq \delta \leq 1. \quad (5)$$

В качестве $\rho(x)$ рассматривалось семейство функций Хьюбера

$$\rho_H(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \leq k, \\ 2k|x| - k^2, & \text{если } |x| > k. \end{cases} \quad (6)$$

где k — неотрицательный параметр. Эти функции являются квадратичными в окрестности $(-k, k)$ начала координат и растут линейно на бесконечности. Интуитивно ясно, что М-оценки с такой функцией должны наследовать лучшие свойства оценок наименьших квадратов и наименьших модулей. В работе показано, что $e(f) = \frac{A}{B}$, где

$$A = 4(1 + \tau^2\delta - \delta) \left((1 - \delta)\Phi_0(k) + \delta\Phi_0\left(\frac{k}{\tau}\right) \right)^2,$$

$$B = k^2 + 2(1 - \delta)(1 - k^2)\Phi_0(k) + 2\delta(\tau^2 - k^2)\Phi_0\left(\frac{k}{\tau}\right) + \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left((\delta - 1)e^{-\frac{k^2}{2}} - \tau\delta e^{-\frac{k^2}{2\tau^2}} \right),$$

а $\Phi_0(x)$ — функция Лапласа. Видно, что с ростом τ значение $e(f)$ неограниченно возрастает при любых $k > 0$ и $\delta \in (0, 1)$. Таким образом, АОЭ М-оценок по отношению к оценке наименьших квадратов при $\tau \rightarrow \infty$ может быть сколь угодно велика.

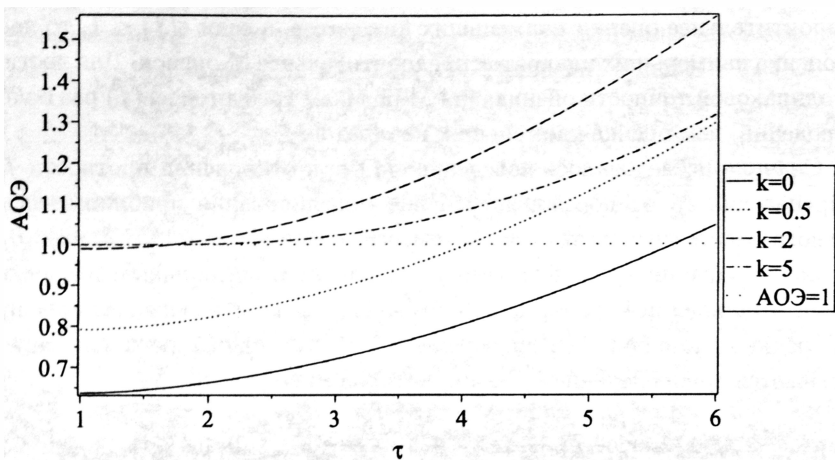


Рис. 1.

На рис. 1 показана зависимость $e(f)$ от τ для различных k при фиксированной доле выбросов в 2% ($\delta = 0.02$). С ростом τ $AOЭ\ e(f)$ монотонно возрастает с увеличивающейся скоростью. При изменении k от нуля до приблизительно двух $e(f)$ также монотонно растет, причём равномерно для сравнительно небольших $\tau \in (0, 5)$. Далее с ростом k , т.е., когда М-оценки становятся похожими на оценку наименьших квадратов, $AOЭ$ М-оценки падает.

На рис. 2 построены графики зависимости $e(f)$ от k при $\delta = 0.02$ и различных τ . Видно, что значения k , при которых $e(f)$ максимальна, почти не зависят от τ и приблизительно равны 2. Тоже самое наблюдалось при других значениях δ .

На рис. 3 построены графики зависимости $e(f)$ от δ при различных τ для близкого к оптимальному значению $k = 2$. Видно, что даже при отсутствии загрязнений (случай $\delta = 0$), когда ситуация наиболее благоприятна для оценок наименьших квадратов, $e(f) \approx 1$, т.е. М-оценки им практически не уступают в эффективности. С ростом доли δ от нуля до приблизительно 0.3 эффективность М-оценок начинает расти тем стремительнее, чем больше τ .

Затем в разделе 1.6 при помощи компьютерного моделирования сравнивалось качество М-оценок и оценки наименьших квадратов при загрязнении наблюдений X_{ij} грубыми измерительными ошибками, когда вместо X_{ij} на-

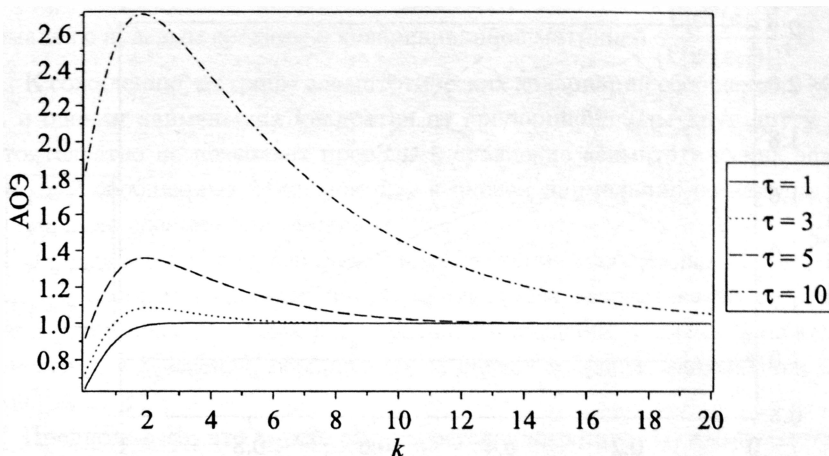


Рис. 2.

блюдаются

$$Y_{ij} = (1 - \nu_{ij})X_{ij} + \nu_{ij}\zeta_{ij}, \quad (7)$$

где X_{ij} описываются уравнением (1) с гауссовским обновляющим полем ϵ_{ij} , ν_{ij} — независимые случайные величины, принимающие значения 1 и 0 с вероятностями δ и $1 - \delta$ соответственно, а ζ_{ij} — загрязняющее поле, состоящее из независимых нормальных случайных величин. Эта модель, например, описывает процесс измерения поля X_{ij} , когда с вероятностью δ происходит сбой измерительной аппаратуры, и во время сбоя вместо X_{ij} наблюдается ζ_{ij} . Случайные величины X_{ij} , ν_{ij} и ζ_{ij} в (7) предполагались независимыми.

Результаты экспериментов показали, что если достаточно умеренным искажениям (а именно, среднеквадратичное отклонение ζ_{ij} в три раза больше среднеквадратичного отклонения X_{ij}) подвергается только каждое тысячное наблюдение, то М-оценки становятся эффективнее оценок наименьших квадратов.

Во второй главе рассмотрены оценки, которые обобщают М-оценки и которые лучше приспособлены к загрязнениям вида (7). Доказана состоятельность и асимптотическая нормальность обобщённых М-оценок. При помощи компьютерного моделирования проведено сравнение обобщённых М-оценок с обычными М-оценками и оценками наименьших квадратов.

Результаты главы 1 показывают, что М-оценки теряют эффективность

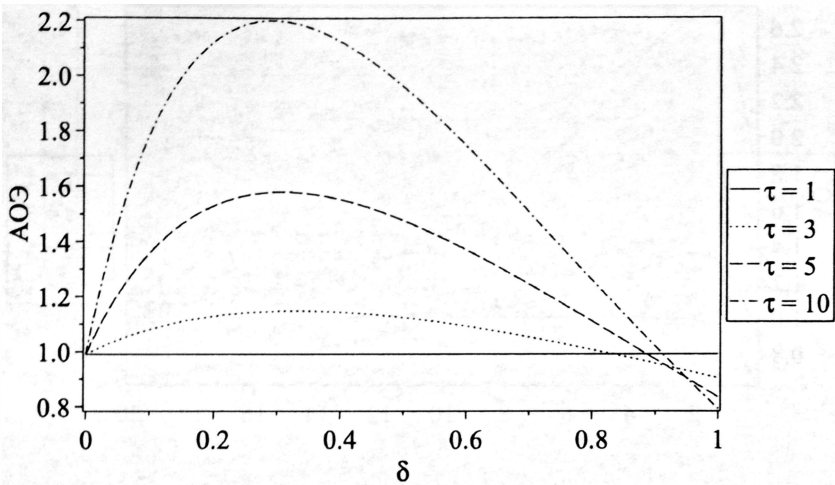


Рис. 3.

в случае, когда X_{ij} наблюдаются с ошибкой, т.е. когда вместо X_{ij} наблюдаются Y_{ij} вида (7). Потеря эффективности М-оценок при загрязнении вида (7) связана с неограниченным множителем $\tilde{X}_{ij}$ в системе уравнений (4), влияние которого на решение этой системы может быть сколь угодно велико при достаточно больших значениях ζ_{ij} в (7).

Определим обобщённые М-оценки $\hat{a}_{mn}$ параметра a как решение системы

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi(X_{ij} - a_{10}X_{i-1,j} - a_{01}X_{i,j-1} - a_{11}X_{i-1,j-1})g_{ij}(X) = 0, \quad (8)$$

где $g_{ij}(X) = (g(X_{i-1,j}), g(X_{i,j-1}), g(X_{i-1,j-1}))^T$, а $g(x)$ — некоторая функция. Выбрав в качестве g ограниченную функцию, можно ограничить влияние экстремальных значений ζ_{ij} на решение системы уравнений (4). Например, в качестве g можно взять производную ρ -функции Хьюбера (6).

В разделе 2.2 доказана асимптотическая нормальность обобщённых М-оценок. Обозначим через G ковариационную матрицу вектора $g_{11}(X)$, а через B взаимную ковариационную матрицу векторов $g_{11}(X)$ и $\tilde{X}_{11}$.

Теорема 2.1. Пусть $E[\psi(\varepsilon_{11})] = 0$, $E[\psi^2(\varepsilon_{11})] < \infty$, $E\varepsilon_{11}^2 < \infty$, $E[\psi'(\varepsilon_{11})] > 0$, а $g(x)$ и $\psi''(x)$ ограничены на $\mathbb{R}$.

Тогда при $m, n \rightarrow \infty$ случайный вектор $\sqrt{mn}(\hat{a}_{mn} - a^0)$ асимптотически

нормален с нулевым средним и ковариационной матрицей $\frac{E[\psi^2(\varepsilon_{11})]}{(E[\psi'(\varepsilon_{11})])^2} B^{-2} G$.

К сожалению, матрицы асимптотических ковариаций обобщённых М-оценок и оценки наименьших квадратов не пропорциональны друг другу. Это обстоятельство не позволяет проводить сравнение асимптотических эффективностей обобщённых М-оценок $\hat{a}_{mn}$ и оценок наименьших квадратов так, как это было сделано для М-оценок.

В разделе 2.3 определен функционал влияния обобщённых М-оценок параметров авторегрессионных полей, являющийся теоретической характеристикой устойчивости оценок к засорению наблюдений грубыми ошибками и вычислен для М-оценок, обобщённых М-оценок и оценок наименьших квадратов.

Предположим, что вместо авторегрессионного поля X_{ij} наблюдается поле Y_{ij} вида (7). В этом случае обобщённые М-оценки вектора параметров a согласно их определению будут решением $\hat{a}_{mn}(\delta)$ относительно a системы

$$L_{mn}(\delta, a) = 0, \quad (9)$$

где

$$L_{mn}(\delta, a) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi(Y_{ij} - a_{10}Y_{i-1,j} - a_{01}Y_{i,j-1} - a_{11}Y_{i-1,j-1}) g_{ij}(Y),$$

а $g_{ij}(Y) = (g(Y_{i-1,j}), g(Y_{i,j-1}), g(Y_{i-1,j-1}))^T$.

При $\delta > 0$ обобщённые М-оценки $\hat{a}_{mn}(\delta)$ параметра a не обязаны быть состоятельными, т.е. предел $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \hat{a}_{mn}(\delta) = a(\delta)$, если он существует, не обязан совпадать с a^0 .

Оценим величину $a(\delta) - a^0$. Для этого определим функционал влияния $IF(a(\delta), F_\zeta)$ оценки $\hat{a}_{mn}$ по формуле

$$IF(a(\delta), F_\zeta) = \left. \frac{d}{d\delta} a(\delta) \right|_{\delta=0}.$$

Функционал влияния характеризует величину линейного члена в разложении асимптотического смещения

$$a(\delta) - a^0 = IF(a(\delta), F_\zeta)\delta + o(\delta), \quad \delta \rightarrow 0$$

и зависит от $a(\delta)$ и от функции распределения F_ζ случайных величин ζ_{ij} .

Лучше других противостоять засорениям вида (7) наблюдений X_{ij} будут оценки с ограниченным $IF(a(\delta), F_\zeta)$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество, которому может принадлежать функция распределения случайных величин ζ_{ij} . Назовем величину

$$GES(\mathfrak{F}, a(\delta)) = \sup_{F_\zeta \in \mathfrak{F}} |IF(a(\delta), F_\zeta)| \quad (10)$$

чувствительностью оценки $\hat{a}_{mn}$ к большой ошибке. Оценку $\hat{a}_{mn}$ назовем робастной на семействе распределений $\mathfrak{F}$, если $GES(\mathfrak{F}, a(\delta)) < \infty$.

Обозначим

$$L(\delta, a) = E[\psi(Y_{11} - \tilde{Y}_{11}^T a) g_{11}(Y)].$$

Теорема 2.2. Пусть $\hat{a}_{mn}$ — решение уравнения $L_{mn}(a) = 0$ и для любых достаточно малых δ существует предел $\hat{a}_{mn} \rightarrow a(\delta)$, причем $L(\delta, a(\delta)) = 0$, существуют и непрерывны производные $\frac{\partial L(\delta, a)}{\partial \delta}$, $\frac{\partial L(\delta, a)}{\partial a}$ в некоторой окрестности точки $(0, a^0)$, $E[\psi'(\varepsilon_{11})] \neq 0$, $E|\psi(Y_{11} - \tilde{Y}_{11}^T a) g_{11}(Y)|^2 < \infty$.

Тогда

$$\begin{aligned} IF(a(\delta), F_\zeta) = & \frac{1}{E[\psi'(\varepsilon_{11})]} B^{-1} \left(E[\psi(\varepsilon_{11} + \zeta_{11})] E[(g(X_{01}), g(X_{10}), g(X_{00}))^T] + \right. \\ & + E[\psi(\varepsilon_{11} - a_{01}^0 \zeta_{01}) (g(X_{01} + \zeta_{01}), g(X_{10}), g(X_{00}))^T] + \\ & + E[\psi(\varepsilon_{11} - a_{10}^0 \zeta_{10}) (g(X_{01}), g(X_{10} + \zeta_{10}), g(X_{00}))^T] + \\ & + E[\psi(\varepsilon_{11} - a_{00}^0 \zeta_{00}) (g(X_{01}), g(X_{10}), g(X_{00} + \zeta_{00}))^T] - \\ & \left. - 4E[\psi(\varepsilon_{11}) (g(X_{01}), g(X_{10}), g(X_{00}))^T] \right). \quad (11) \end{aligned}$$

Из теоремы следует, что если функции ψ и g ограничены, то функционал влияния обобщённых М-оценок ограничен и чувствительность к большой ошибке будет конечной, т.е. обобщенные М-оценки будут робастными.

Для М-оценок $g(x) = x$ и ограниченность функции ψ уже не является достаточной для конечности $GES(\mathfrak{F}, a(\delta))$. Например, если класс распределений $\mathfrak{F}$ содержит δ -функции, то чувствительность к большой ошибке для М-оценок на этом классе будет неограниченной, и М-оценки в этом случае будут неробастными, вообще говоря, даже для ограниченной функции $\psi(x)$.

Из (11) видно, что если $\mathfrak{F}$ содержит функции распределения случайных величин с бесконечной дисперсией, то оценка наименьших квадратов, для которой $g(x) = x$ и $\psi(x) = x$ не является робастной.

В разделе 2.4 при помощи компьютерного моделирования сравнивается качество оценки наименьших квадратов, М-оценок и обобщённых М-оценок, построенных по загрязнённым наблюдениям Y_{ij} вида (7).

В разделе 2.5 методы оценивания коэффициентов авторегрессионного поля применяются для решения задачи фильтрации изображений от импульсного шума. Идея заключается в разбиении изображения на фрагменты размера 8×8 пикселей, каждый из которых описывается уравнением авторегрессионного поля. Работа алгоритма проверялась на фильтрации реальных изображений. Массив интенсивностей X при помощи датчиков псевдослучайных чисел загрязнялся импульсным шумом ζ_{ij} с долей загрязнения δ , а фильтрации подвергался массив Y вида (7). Доля загрязнённых пикселей δ колебалась от 0.01 до 0.3. Результаты имитационного моделирования подтвердили преимущество робастных методов оценивания авторегрессионных коэффициентов над методом наименьших квадратов при загрязнении авторегрессионного поля случайным шумом.

В третьей главе доказана состоятельность и асимптотическая нормальность оценки наименьших модулей коэффициентов уравнения (1), найден ее функционал влияния и вычислена АОЭ по отношению к М-оценке. Кроме того, методами компьютерного моделирования исследована устойчивость оценки наименьших модулей к выбросам в наблюдениях.

Оценка наименьших модулей a_{mn}^{**} является частным случаем М-оценок и определяется как точка минимума функции (3), в которой $\rho(x) = |x|$. Теоремы главы 1 не переносятся автоматически на оценку наименьших модулей, т.к. доказаны в предположении дифференцируемости $\rho(x)$.

В разделе 3.2 доказаны состоятельность и асимптотическая нормальность оценки наименьших модулей.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия $F(0) = \frac{1}{2}$, $f(0) > 0$, функция $f(x)$ непрерывна в нуле, $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty$, $E\epsilon_{ij}^2 < \infty$.

Тогда при $m, n \rightarrow \infty$ случайный вектор $\sqrt{mn}(a_{mn}^{**} - a^0)$ асимптотически нормален с нулевым средним и ковариационной матрицей $\frac{1}{4f^2(0)} K^{-1}$.

Существуют достаточно быстрые алгоритмы вычисления оценок наименьших модулей (см. P. Bloomfield и W.L. Steiger; I. Barrodale и F.D.K. Roberts; S. Portnoy и R. Koenker; П.А. Акимов и А.И. Матасов и библиографию к ним).

В разделе 3.3 вычислена АОЭ оценки наименьших модулей по отноше-

нию к М-оценке, равная $e(f) = \frac{4f^2(0)E[\rho'(\varepsilon_{11})^2]}{(E[\rho''(\varepsilon_{11})])^2}$. В частности АОЭ оценки наименьших модулей по отношению к оценке наименьших квадратов есть $e(f) = 4f^2(0)\sigma^2$.

Например, если ε_{ij} имеет двустороннее показательное распределение, то $e(f) = 2$, т. е. оценка наименьших модулей в 2 раза эффективнее оценки наименьших квадратов.

Если же распределение ε_{ij} нормальное, то $e(f) = \frac{2}{\pi}$, и, значит, оценка наименьших квадратов приблизительно в 1.5 раза эффективнее оценки наименьших модулей.

Если ε_{ij} имеют распределение Тьюки с плотностью (5), то

$$e(f) = \frac{2}{\pi}(1 - \delta + \delta/\tau)(1 - \delta + \delta\tau^2).$$

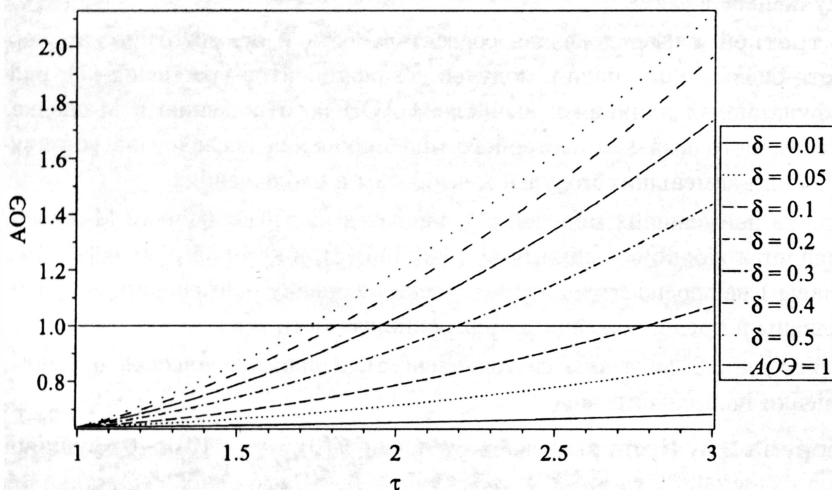


Рис. 4.

Зависимость $e(f)$ от τ для различных значений δ представлена на рис. 4. Если грубым ошибкам подвергается лишь каждое сотое наблюдение ($\delta = 0.01$), то оценка наименьших модулей становится эффективнее оценки наименьших квадратов только при дисперсии грубой ошибки, превышающей $7.6^2 = 57.76$ ($\tau = 7.6$). Однако, если грубым ошибкам подвергается каждое десятое наблюдение ($\delta = 0.1$), то оценка наименьших модулей становится эффективнее

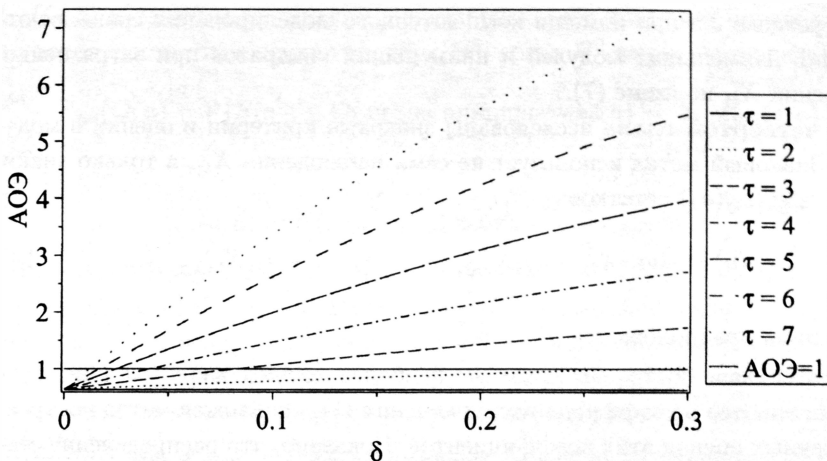


Рис. 5.

оценки наименьших квадратов уже при дисперсии грубой ошибки, превышающей $2.79^2 = 7.79$ ($\tau = 2.79$).

Зависимость $e(f)$ от δ для различных значений τ представлена на рис. 5. С ростом τ значение $e(f)$ неограниченно возрастает. Таким образом, АОЭ оценки наименьших модулей по отношению к оценке наименьших квадратов может быть сколь угодно велика.

В разделе 3.4 найден функционал влияния оценки наименьших модулей.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия $F(0) = \frac{1}{2}$, $f(0) > 0$, $E|\zeta_{ij}| < \infty$.

Тогда функционал влияния оценки наименьших модулей имеет вид

$$\text{IF}(a(\delta), F_\zeta) = \left. \frac{da}{d\delta} \right|_{\delta=0} = \frac{1}{2f(0)} K^{-1} \begin{pmatrix} E[\zeta_{01}] - 2E[\zeta_{01}F(-a_{10}^{(0)}\zeta_{01})] \\ E[\zeta_{10}] - 2E[\zeta_{10}F(-a_{01}^{(0)}\zeta_{10})] \\ E[\zeta_{00}] - 2E[\zeta_{00}F(-a_{11}^{(0)}\zeta_{00})] \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Из (12) видно, что оценка наименьших модулей предпочтительнее оценки наименьших квадратов, поскольку робастна даже при бесконечной дисперсии ζ_{ij} . Однако на множестве $\mathfrak{F}$ распределений случайных величин с бесконечным математическим ожиданием чувствительность оценки наименьших модулей к большой ошибке бесконечна, т.е. оценка наименьших модулей на этом множестве не является робастной.

В разделе 3.5 при помощи компьютерного моделирования сравниваются оценки наименьших модулей и наименьших квадратов при загрязнении наблюдений X_{ij} по схеме (7).

В четвертой главе исследованы знаковые критерии и оценки в модели (1). Знаковый метод использует не сами наблюдения X_{ij} , а только знаки $S_{ij}(a) = \text{sign}(\varepsilon_{ij}(a))$ остатков

$$\varepsilon_{ij}(a) = \text{sign}(X_{ij} - a_{10}X_{i-1,j} - a_{01}X_{i,j-1} - a_{11}X_{i-1,j-1}), \quad (13)$$

и основан на предположении $F(0) = \frac{1}{2}$.

В этой главе построены локально наиболее мощные знаковые критерии проверки гипотез о коэффициентах уравнения (1), предложен метод построения точечных оценок этих коэффициентов. Показано, что распределение статистик построенных знаковых критериев не зависит от распределения ошибок ε_{ij} и асимптотически нормально даже при бесконечной дисперсии ε_{ij} . Распределение статистик не изменится и в том случае, когда ε_{ij} не будут одинаково распределёнными — нужно лишь выполнение условия $F_{ij}(0) = \frac{1}{2}$.

В разделах 4.1–4.2 сформулированы статистические гипотезы о коэффициентах уравнения (1) и построены локально наиболее мощные знаковые критерии их проверки.

Пусть $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})$ — неизвестный вектор параметров уравнения (1), а $a^0 = (a_{10}^0, a_{01}^0, a_{11}^0)$ — некоторый известный вектор. Рассмотрим задачу проверки гипотезы

$$H^0 : a = a^0 \quad (14)$$

против односторонних альтернатив H_{pq}^+ и H_{pq}^- , $(p, q) \in \mathcal{I} = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$, вида

$$H_{pq}^+ : a_{pq} > a_{pq}^0, \quad a_{kl} = a_{kl}^0 \text{ для любых } (k, l) \neq (p, q), \quad (15)$$

$$H_{pq}^- : a_{pq} < a_{pq}^0, \quad a_{kl} = a_{kl}^0 \text{ для любых } (k, l) \neq (p, q), \quad (16)$$

и двусторонних альтернатив

$$H_{pq} : a_{pq} \neq a_{pq}^0, \quad a_{kl} = a_{kl}^0 \text{ для любых } (k, l) \neq (p, q). \quad (17)$$

по наблюдениям X_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Обозначим через Q критическую область знакового критерия, т.е. такое подмножество матриц s размера $m \times n$ с элементами из -1 и 1 , что если матрица $S(a^0) = \{S_{ij}(a^0)\}$ принадлежит Q , то гипотеза H^0 отклоняется. Через

$P_{mn}(Q, a)$ обозначим функцию мощности знакового критерия, определяемую как вероятность отклонения гипотезы H^0 , когда H^0 верна альтернатива:

$$P_{mn}(Q, a) = P\{S(a^0) \in Q \mid \text{верна альтернатива } a\} = \sum_{s \in Q} P_{mn}(s, a),$$

где

$$P_{mn}(s, a) = P\{S(a^0) = s \mid \text{верна альтернатива } a\}.$$

Определим локально наиболее мощный знаковый критерий для проверки H^0 против H_{pq}^+ , $(p, q) \in \mathcal{I}$, как критерий, имеющий функцию мощности $P_{mn}(Q, a)$, наиболее круто возрастающую по переменной a_{pq} в правосторонней окрестности точки a_{pq}^0 . Это означает, что критическая область Q локально наиболее мощного знакового критерия должна быть выбрана так, чтобы величина $\frac{\partial P_{mn}(Q, a)}{\partial a_{pq}}$ при $a = a^0$ была максимальна. Аналогично определим локально

наиболее мощный знаковый критерий для проверки H^0 против H_{pq}^- , $(p, q) \in \mathcal{I}$, как критерий, имеющий минимальное значение $\frac{\partial P_{mn}(Q, a)}{\partial a_{pq}}$ при $a = a^0$.

В разделе 4.3 найден вид локально наиболее мощных знаковых критериев проверки гипотезы (14) против альтернатив (15)–(17).

Для построения локально наиболее мощного знакового критерия нужно знать поведение функции мощности, а значит, и $P_{mn}(s, a)$ в окрестности a^0 , которое устанавливается в теореме 4.1.

Определим множество $\{\delta_{ij}(a)\}$ рекуррентным соотношением

$$\delta_{ij}(a) = a_{10}\delta_{i-1,j}(a) + a_{01}\delta_{i,j-1}(a) + a_{11}\delta_{i-1,j-1}(a), \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (18)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \delta_{00}(a) = 1, \quad \delta_{k0}(a) = (a_{10})^k, \quad k > 0, \quad \delta_{0l}(a) = (a_{01})^l, \quad l > 0, \\ \delta_{ij}(a) = 0, \quad i < 0 \text{ или } j < 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Обозначим

$$Z_{ij}(a) = \sum_{k=i+1}^m \sum_{l=j+1}^n S_{kl}(a) S_{k-i, l-j}(a), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

$$W_{pq}(a) = \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{n-1-q} \delta_{ij}(a) Z_{i+p, j+q}(a), \quad (p, q) \in \mathcal{I},$$

$$W(a) = (W_{10}(a), W_{01}(a), W_{11}(a)).$$

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия (2),

$$F(0) = \frac{1}{2}, \quad (20)$$

$$f(0) > 0, \quad (21)$$

$$E[|f(\theta u X_{11}) - f(0)| |X_{11}|] \rightarrow 0 \text{ при } u \rightarrow 0 \text{ для любого } \theta \in (0, 1). \quad (22)$$

Тогда локально наиболее мощный знаковый критерий отклоняет H^0 в пользу H_{pq}^+ , если

$$W_{pq}(a^0) > C_{pq}^+, \quad (p, q) \in \mathcal{I}, \quad (23)$$

и принимает в противном случае. Постоянная C_{pq}^+ определяется уровнем значимости α критерия.

Теорема 4.3. В условиях теоремы 4.2 локально наиболее мощный знаковый критерий отклоняет H^0 в пользу H_{pq}^- , если

$$W_{pq}(a^0) < C_{pq}^-, \quad (p, q) \in \mathcal{I}, \quad (24)$$

и принимает в противном случае. Постоянная C_{pq}^- определяется уровнем значимости α критерия.

Отметим, что условие (22) выполнено, если существуют $r \in (0, 1]$ и $L > 0$, такие что $E|\varepsilon_{11}|^{1+r} < \infty$, $|f(t) - f(0)| \leq L|t|^r \forall t \in \mathbb{R}$. В частности, теоремы 4.2 и 4.3 могут быть справедливы для поля X_{ij} с бесконечной дисперсией.

Теоремы 4.2 и 4.3 позволяют естественным образом определить знаковый критерий для проверки H^0 против двусторонней альтернативы H_{pq} , $(p, q) \in \mathcal{I}$, на уровне значимости α как объединение двух односторонних критериев, проверяющих на уровне значимости $\alpha/2$ альтернативы $H_{pq}^+ : a_{pq} > a_{pq}^0$ и $H_{pq}^- : a_{pq} < a_{pq}^0$, $(p, q) \in \mathcal{I}$. Тогда при выполнении условий (20)–(22) гипотеза H^0 отклоняется в пользу H_{pq}^- , если

$$|W_{pq}(a^0)| > C_{pq}, \quad (p, q) \in \mathcal{I}, \quad (25)$$

и принимается в противном случае. Постоянная C_{pq} определяется уровнем значимости α критерия.

Для практического применения критериев (23)–(25) нужно знать распределение статистик $W_{pq}(a^0)$ при гипотезе H^0 .

В разделе 4.4 найдено распределение статистик локально наиболее мощных знаковых критериев при конечном объеме выборки. А именно, установлено, что при справедливости H_0 случайная величина $\frac{1}{2}Z_{ij}(a^0) + \frac{(m-i)(n-j)}{2}$

имеет биномиальное распределение с параметрами $\frac{(m-i)(n-j)}{2}$ и $\frac{1}{2}$. Распределение случайной величины $W_{pq}(a^0)$ зависит от a^0 , но его квантили можно оценить методом статистических испытаний. В частном случае, когда $a^0 = 0$, т.е. гипотеза H^0 означает независимость наблюдений X_{ij} , статистика $W_{pq}(a^0)$ совпадает с $Z_{pq}(a^0)$.

Другим важным свойством построенных знаковых критериев является то, что они не зависят от вида функции распределения $F(x)$ с нулевой медианой. В этом смысле критерии являются непараметрическими.

В разделе 4.5 доказана асимптотическая нормальность статистик локально наиболее мощных знаковых критериев.

Определим матрицу

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}(1, 0, 1, 0) & \mathcal{K}(1, 0, 0, 1) & \mathcal{K}(1, 0, 1, 1) \\ \mathcal{K}(1, 0, 0, 1) & \mathcal{K}(0, 1, 0, 1) & \mathcal{K}(0, 1, 1, 1) \\ \mathcal{K}(1, 0, 1, 1) & \mathcal{K}(0, 1, 1, 1) & \mathcal{K}(1, 1, 1, 1) \end{pmatrix} \quad (26)$$

с элементами

$$\mathcal{K}(p, q, \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{ij}(a^0) \delta_{i+|p-\alpha|, j+|q-\beta|}(a^0), \quad (p, q) \in \mathcal{I}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathcal{I}.$$

Теорема 4.4. Пусть выполнены условия (20)–(22).

Тогда при гипотезе H^0 случайный вектор $(mn)^{-1/2}W(a^0)$ асимптотически нормален с нулевым средним и ковариационной матрицей $\mathcal{K}$.

Таким образом, точные критерии (23)–(25) при больших m, n можно заменить асимптотически эквивалентными критериями. А именно, обозначим

$$\eta_{pq} = (mn\mathcal{K}(1, 0, 1, 0))^{-1/2}W_{pq}(a^0), \quad (p, q) \in \mathcal{I}.$$

Тогда гипотезу H^0 нужно отклонить на уровне значимости α в пользу:

- 1) H_{pq}^+ , если $\eta > u_{1-\alpha}$,
- 2) H_{pq}^- , если $\eta < u_{\alpha}$,
- 3) H_{pq} , если $|\eta| > u_{1-\alpha/2}$,

где $u_{1-\alpha}$, u_{α} и $u_{1-\alpha/2}$ — квантили стандартного нормального распределения уровня $1 - \alpha$, α и $1 - \alpha/2$ соответственно. В противном случае гипотезу H^0 нужно принять.

Теорема 4.4 позволяет строить критерии проверки гипотезы H^0 против многомерной альтернативы $H_A : a \neq a^0$. Из этой теоремы следует, что статистика $T = W^T(a^0)\mathcal{K}^{-1}W(a^0)$ имеет χ^2 -распределение с тремя степенями

свободы. Таким образом, гипотезу H^0 следует отклонить в пользу альтернативы H_A на уровне значимости α , если $T > \chi^2_{1-\alpha}(3)$, где $\chi^2_{1-\alpha}(3)$ — квантиль χ^2 -распределения уровня $1 - \alpha$ с тремя степенями свободы. Иначе гипотезу H^0 следует принять.

В разделе 4.6 построена знаковая оценка параметров авторегрессионного поля. Из теорем 4.2 и 4.3 следует, что небольшие значения $|W(a)|$ свидетельствуют в пользу H^0 , а большие — в пользу альтернатив. Поэтому в качестве оценки параметра a , следуя идее Ходжеса и Лемана, надо выбрать решение $\tilde{a}_{mn}$ системы уравнений

$$W(a) = 0. \quad (27)$$

К сожалению, функции $W_{pq}(a)$ разрывны и равенство (27) может выполняться лишь приближённо. Поэтому в качестве оценки естественно взять точку $\tilde{a}_{mn}$ минимума функции $|W(a)|$, который можно найти любым методом, не требующим дифференцируемости целевой функции, например методом деформируемого многогранника (Нелдера — Мида).

В разделе 4.7 доказана состоятельность знаковой оценки.

Теорема 4.6. Пусть выполнены условия (20)–(22) и

$$\sigma^2 = E[\varepsilon_{ij}^2] < \infty. \quad (28)$$

Тогда $\tilde{a}_{mn}$ является состоятельной оценкой параметра a .

В разделе 4.8 доказана асимптотическая нормальность знаковой оценки.

Теорема 4.8. Пусть выполнены условия (20)–(22), (28),

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) < \infty, \quad (29)$$

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad (30)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$, где $C > 0$ — некоторая постоянная.

Тогда случайный вектор $\sqrt{mn}(\tilde{a}_{mn} - a^0)$ является асимптотически нормальным с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $(4f(0)E(\varepsilon_{11}^-))^{-2} \mathcal{K}^{-1}$.

В разделе 4.9 вычислен функционал влияния знаковой оценки. Показано, что знаковая оценка является робастной на любом классе распределений обновляющего поля ε_{ij} .

Теорема 4.8 позволяет найти АОЭ знаковой оценки по отношению к оценке наименьших квадратов, которая равна $e(f) = 16f^2(0)(E[\varepsilon_{11}^-])^2$.

В частности, если $f(x)$ — плотность нормального распределения, то АОЭ $e(f) = \frac{4}{\pi^2} \approx 0.41$ невелика.

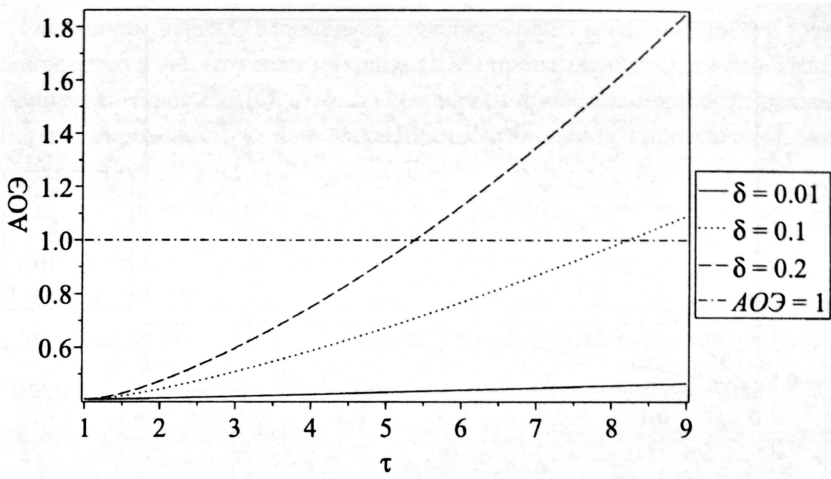


Рис. 6.

Если $f(x)$ — плотность двойного экспоненциального распределения, то $e(f) = 1$, т.е. знаковые оценки и оценка наименьших квадратов одинаково эффективны.

Если $f(x)$ — плотность распределения Тьюки, то

$$e(f) = \frac{4(\tau - \tau\delta + \delta)^2(1 - \delta + \tau\delta)^2}{\tau^2\pi^2}.$$

Графики зависимости $e(f)$ от τ для различных δ приведены на рис. 6. Видно, что если $\delta = 0.1$, то знаковая оценка превосходит оценку наименьших квадратов только при $\tau \approx 8.21$. Если же $\delta = 0.2$, то знаковая оценка становится эффективнее оценки наименьших квадратов уже при $\tau \approx 5.38$. При $\delta = 0.01$ это происходит лишь при $\tau > 59.65$.

Зависимость $e(f)$ от δ для различных τ изображена на рис. 7. Видно, что если $\tau < 4.04$, то знаковая оценка при любых δ проигрывает оценке наименьших квадратов. Если $\tau = 5$, то знаковая оценка становится предпочтительнее оценки наименьших квадратов при $\delta > 0.23$, а если $\tau = 10$, то при $\delta > 0.08$.

В пятой главе изучаются ранговые критерии и оценки. Ранговый подход состоит в замене наблюдений X_{ij} рангами остатков $\varepsilon_{ij}(a)$ и анализе этих рангов, а не самих исходных наблюдений. Сначала строятся оптимальные критерии, затем на их основе — ранговые оценки. Впервые такой способ действий был предложен Дж.Ходжесом и Э.Леманом для построения ранговой

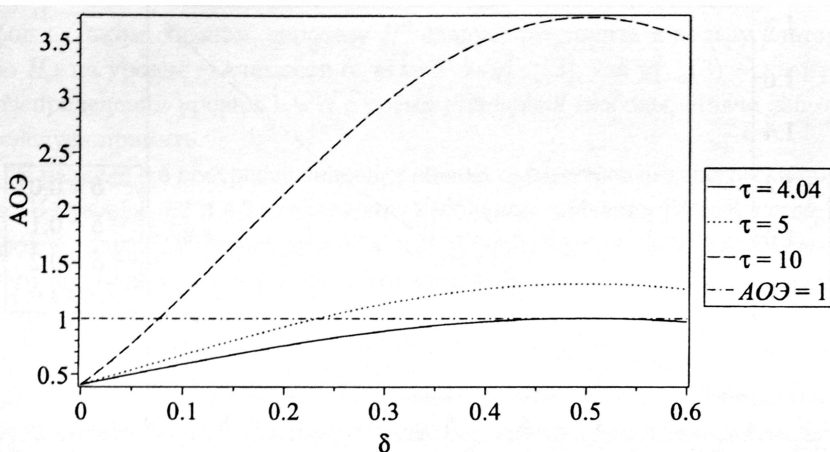


Рис. 7.

оценки параметра сдвига в задаче о двух выборках.

В разделе 5.1 определяются локально наиболее мощные ранговые критерии проверки гипотезы (14) о коэффициентах авторегрессионного поля против альтернатив (15)–(17).

Пусть $a^0 = (a_{10}^0, a_{01}^0, a_{11}^0)$ и $b = (b_{10}, b_{01}, b_{11})$ — известные векторы. Рассмотрим задачу проверки гипотезы $H_{a^0}^0 : a = a^0$ против односторонних альтернатив вида

$$H_{a^0b}^+ : a = a^0 + \Delta b, \Delta > 0,$$

$$H_{a^0b}^- : a = a^0 + \Delta b, \Delta < 0,$$

и двусторонней альтернативы

$$H_{a^0b} : a = a^0 + \Delta b, \Delta \neq 0.$$

Обозначим через $R_{ij}(a)$ ранг (порядковый номер) остатка (13) в упорядоченной по возрастанию последовательности

$$\varepsilon(a) = (\varepsilon_{11}(a), \dots, \varepsilon_{m1}(a), \dots, \varepsilon_{1n}(a), \dots, \varepsilon_{mn}(a)).$$

Отметим, что матрица $R(a) = \{R_{ij}(a)\}$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ принадлежит множеству $\mathcal{M}$ матриц размера $m \times n$, элементы которых являются перестановками множества $\{1, 2, \dots, mn\}$.

Обозначим через Q критическую область рангового критерия, т. е. такое подмножество в $\mathcal{M}$, что если матрица $R(a^0)$ принадлежит Q , то гипотеза $H_{a^0}^0$ отклоняется. Через $P_{mn}(Q, a^0, b, \Delta)$ обозначим функцию мощности рангового критерия, определяемую как вероятность отклонения гипотезы $H_{a^0}^0$, когда $H_{a^0}^0$ не верна:

$$P_{mn}(Q, a^0, b, \Delta) = P\{R(a^0) \in Q \mid \text{верна альтернатива } a = a^0 + \Delta b\}.$$

Локально наиболее мощный ранговый критерий для проверки $H_{a^0}^0$ против $H_{a^0b}^+$ определим как критерий, имеющий максимальную производную функции мощности $\frac{\partial P_{mn}(Q, a^0, b, \Delta)}{\partial \Delta}$ при $\Delta = 0$. Локально наиболее мощный ранговый критерий для проверки $H_{a^0}^0$ против $H_{a^0b}^-$ определяется как критерий, имеющий минимальное значение $\frac{\partial P_{mn}(Q, a^0, b, \Delta)}{\partial \Delta}$ при $\Delta = 0$.

В разделе 5.3 строятся локально наиболее мощные ранговые критерии для проверки гипотезы $H_{a^0}^0$ против альтернатив $H_{a^0b}^+$, $H_{a^0b}^-$, H_{a^0b} .

Для произвольной функции распределения вероятности $G(x)$ и соответствующей ей плотности распределения вероятности $g(x)$ определим функцию меток

$$\varphi_g(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)}, \quad (31)$$

и сами метки

$$a_{mn}^g(i, j) = E[\varphi_g(G^{-1}(U^{(i)}))G^{-1}(U^{(j)})], \quad i, j = 1, \dots, mn, \quad (32)$$

где $U^{(1)}, \dots, U^{(mn)}$ — элементы вариационного ряда из равномерного распределения на $[0, 1]$, $G^{-1}(u) = \inf\{x : G(x) \geq u\}$. Определим на множестве матриц $r \in \mathcal{M}$ статистики

$$Z_{ij}^g(r) = \sum_{k=i+1}^m \sum_{l=j+1}^n a_{mn}^g(r_{kl}, r_{k-i, l-j}), \quad i = p, \dots, m-1, \quad j = q, \dots, n-1, \quad (33)$$

$$W_{pq}^g(a, r) = \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{n-1-q} \delta_{ij}(a) Z_{i+p, j+q}^g(r), \quad (p, q) \in \mathcal{I}, \quad (34)$$

$$S^g(a, b, r) = b_{10}W_{10}^g(a, r) + b_{01}W_{01}^g(a, r) + b_{11}W_{11}^g(a, r), \quad (35)$$

где $\delta_{ij}(a)$ определены формулами (18)–(19).

Теорема 5.2. Пусть выполнены условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty; \quad (36)$$

$$|f(x) - f(y)| < C|x - y| \text{ для любых } x, y \text{ из } \mathbb{R}, \quad C > 0. \quad (37)$$

Тогда локально наиболее мощный ранговый критерий отклоняет $H_{a^0}^0$ в пользу $H_{a^0b}^+$, если

$$S^f(a^0, b, R(a^0)) > C^+, \quad (38)$$

и принимает в противном случае. Постоянная C^+ определяется уровнем значимости критерия.

Теорема 5.3. В условиях теоремы 5.2 локально наиболее мощный ранговый критерий отклоняет $H_{a^0}^0$ в пользу $H_{a^0b}^-$, если

$$S^f(a^0, b, R(a^0)) < C^-, \quad (39)$$

и принимает в противном случае. Постоянная C^- определяется уровнем значимости критерия.

Теоремы 5.2 и 5.3 позволяют определить ранговый критерий для проверки $H_{a^0}^0$ против двусторонней альтернативы H_{a^0b} на уровне значимости α как объединение двух односторонних критериев, проверяющих на уровне значимости $\alpha/2$ альтернативы $H_{a^0b}^+$ и $H_{a^0b}^-$. А именно, в условиях теоремы 5.1 гипотезу $H_{a^0}^0$ нужно отклонить в пользу H_{a^0b} , если

$$|S^f(a^0, b, R(a^0))| > C, \quad (40)$$

и принять в противном случае. Постоянная C определяется уровнем значимости критерия.

При $a^0 = 0$, т.е. при проверке гипотезы H_0^0 о независимости наблюдений в (1) статистика $S^f(0, b, r)$ совпадает с величиной $Z_{pq}^f(r)$, которая аналогична в ARMA-моделях ранговому сериальному коэффициенту корреляции (см. М. Hallin, J.F. Ingenbleek и М.Л. Puri; М. Hallin и М.Л. Puri).

Отметим, что при $H_{a^0}^0$ все $(mn)!$ различных значений $R(a^0)$ равновероятны. Поэтому распределение $S^g(a^0, b, R(a^0))$ при $H_{a^0}^0$ не изменится, если матрица рангов $R(a^0)$ будет вычисляться по наблюдениям X_{ij} поля (1) в предположении, что плотность $f(x)$ обновляющего поля ε_{ij} будет отличаться от плотности $g(x)$, порождающей метки (32) статистик (33)–(35). При этом мощность критериев (38)–(40) при замене $S^f(a^0, b, R(a^0))$ на $S^g(a^0, b, R(a^0))$,

вообще говоря, может уменьшиться. Свойство равной вероятности всех $(mn)!$ возможных значений $R(a^0)$ при $H_{a^0}^0$ следует использовать при вычислении квантилей C^+ , C^- и C методом статистических испытаний.

Для практического применения критериев (38)–(40) нужно знать распределение статистик $S^g(a, b, R(a))$ при гипотезе $H_{a^0}^0$. Для небольших m и n квантили статистики $S^g(a^0, b, R(a^0))$ можно оценить методом Монте-Карло. Если же m и n велики, то доказанная в разделе 5.4 асимптотическая нормальность статистик локально наиболее мощных ранговых критериев (теорема 5.4) позволяет для распределения $S^g(a^0, b, R(a^0))$ применить нормальную аппроксимацию.

Обозначим $W^g(a, r) = (W_{10}^g(a, r), W_{01}^g(a, r), W_{11}^g(a, r))$.

Теорема 5.4. Пусть выполнены условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} xg(x) dx = 0, \quad (41)$$

$$\sigma_g^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x) dx < \infty, \quad (42)$$

g имеет конечное количество информации Фишера

$$I(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{g'(x)}{g(x)} \right)^2 g(x) dx. \quad (43)$$

Тогда при справедливости H_a^0 вектор $\frac{1}{\sqrt{mn}} W^g(a^0, R(a^0))$ асимптотически нормален с нулевым средним и ковариационной матрицей $\sigma_g^2 I(g) \mathcal{K}$. В частности, статистика $\frac{1}{\sqrt{mn}} S^g(a^0, b, R(a^0))$ асимптотически нормальна с нулевым средним и дисперсией $I(g) \sigma_g^2 \sum_{(p,q) \in \mathcal{I}} b_{pq}^2 \sum_{i=p+1}^{\infty} \sum_{j=q+1}^{\infty} \delta_{ij}^2$.

В разделе 5.5 определяются приближённые ранговые метки.

Для использования статистик (33)–(35) необходимо знать массив меток (32). Между тем зависимость $a_{mn}^g(i, j)$ от i и j бывает достаточно сложной и не всегда может быть получена в явном виде.

Один из стандартных способов упрощения вычисления ранговых статистик (33)–(35) состоит в замене меток (32) их приближёнными аналогами

(см. J. Hajek, Z. Shidak, P.K. Sen). Известно, что

$$E[U^{(i)}] = \frac{i}{mn+1}, \quad D[U^{(i)}] = \frac{i(mn-i+1)}{(mn+1)^2(mn+2)}.$$

Так как с ростом m и n дисперсия $D[U^{(i)}]$ порядковой статистики $U^{(i)}$ стремится к нулю, то $U^{(i)}$ с увеличением m и n становится «всё менее и менее случайной», вырождаясь в постоянную $\frac{i}{mn+1}$. Отсюда следует, что для гладкой функции $\varphi_g(x)$ метка $a_{mn}^g(i, j)$ при больших m и n будет слабо отличаться от приближённой метки

$$\tilde{a}_{mn}^g(i, j) = \varphi_g(G^{-1}(EU^{(i)}))G^{-1}(EU^{(j)}) = \varphi_g\left(G^{-1}\left(\frac{i}{mn+1}\right)\right)G^{-1}\left(\frac{j}{mn+1}\right). \quad (44)$$

Достоинствами приближенной метки (44) являются простота зависимости от i и j и то, что (см. ниже теорему 5.5) статистики $\frac{1}{\sqrt{mn}}W^g(a, R(a))$ и $S^g(a, b, R(a))$ не меняют асимптотического распределения при замене меток $a_{mn}^g(i, j)$ вида (32) на приближённые метки $\tilde{a}_{mn}^g(i, j)$ вида (44).

Обозначим

$$w_{pq}^g(a, r) = \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{n-1-q} \delta_{ij}(a) z_{i+p, j+q}^g(r), \quad (p, q) \in \mathcal{I}, \quad (45)$$

где

$$z_{ij}^g(r) = \sum_{k=i+1}^m \sum_{l=j+1}^n J_1\left(\frac{r_{kl}}{mn+1}\right) J_2\left(\frac{r_{k-i, l-j}}{mn+1}\right), \quad (46)$$

а функции $J_1(u)$ и $J_2(u)$ определяются по формулам $J_1(u) = \varphi_g(G^{-1}(u))$, $J_2(v) = G^{-1}(v)$, в которых функция меток $\varphi_g(x)$ определена в (31).

Теорема 5.5. Пусть выполнены условия (41)–(43).

Тогда при справедливости гипотезы H_a^0 вектор

$$\frac{1}{\sqrt{mn}}w^g(a^0, R(a^0)) = \frac{1}{\sqrt{mn}}\left(w_{10}^g(a^0, R(a^0)), w_{01}^g(a^0, R(a^0)), w_{11}^g(a^0, R(a^0))\right)$$

асимптотически нормален с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\sigma_g^2 I(g) \mathcal{K}$.

В разделе 5.6 приводятся примеры точных и приближенных меток ранговых статистик для нормального, логистического и двойного экспоненциального распределений.

В разделе 5.7 определяются ранговые оценки параметра a авторегрессионного уравнения (1).

Из теорем 5.1–5.5 следует, что небольшие значения функции $w_{pq}^g(a, R(a))$ как функции от a свидетельствуют в пользу $H_{a^0}^0$, а большие — в пользу альтернатив. Поэтому в качестве оценки параметра a выберем значение, наилучшим образом согласованное с наблюдаемой матрицей рангов $R(a)$, то есть решение $\check{a}_{mn}$ системы уравнений

$$w_{pq}^g(a, R(a)) = 0, \quad (p, q) \in \mathcal{I}, \quad (47)$$

или точку минимума функции $|w^g(a, R(a))|$.

В разделе 5.8 доказана $\sqrt{mn}$ -состоятельность ранговых оценок.

Теорема 5.6. Пусть выполнены условия $E\varepsilon_{11}^3 < \infty$, $I(f) < \infty$, (36), (41)–(43), функция меток $\varphi_f(x)$ вида (31) почти всюду удовлетворяет условию Липшица, т.е. существует постоянная $C > 0$ такая, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$

$$|\varphi_f(x+y) - \varphi_f(x)| \leq C|y|, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (48)$$

Тогда $\check{a}_{mn}$ является $\sqrt{mn}$ -состоятельной оценкой параметра a^0 .

В разделе 5.9 доказана асимптотическая нормальность $\check{a}_{mn}$. Обозначим

$$I_1(F, G) = \int_0^1 \varphi_g(G^{-1}(u)) \varphi_f(F^{-1}(u)) du, \quad I_2(F, G) = \int_0^1 G^{-1}(u) F^{-1}(u) du.$$

Теорема 5.7. Пусть выполнены условия теоремы 5.6, функции $J_1(x)$ и $J_2(x)$ ограничены на $x \in [0, 1]$ и удовлетворяют условию Липшица

$$|J_i(x) - J_i(y)| \leq C|x - y|, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad i = 1, 2. \quad (49)$$

Тогда при $m, n \rightarrow \infty$ последовательность $\sqrt{mn}(\check{a}_{mn} - a^0)$ асимптотически нормальна с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\frac{\sigma_g^2 I(g)}{I_1^2(F, G) I_2^2(F, G)} \mathcal{K}^{-1}$.

В разделе 5.10 сравниваются ранговые оценки с оценкой наименьших квадратов.

Из теоремы 5.7 следует, что АОЭ ранговых оценок по отношению к оценке наименьших квадратов равна

$$e(f) = \frac{I_1^2(F, G) I_2^2(F, G)}{\sigma_g^2 I(g)}. \quad (50)$$

Из определения $I_1(F, G)$, $I_2(F, G)$ следует, что $e(f)$ будет наибольшей при $F(x) = G(x)$. Поэтому при построении ранговой оценки следовало бы строить ранговые метки (44) функций (45) по плотности $f(x)$ обновляющего поля ε_{ij} . Например, если $f(x)$ и $g(x)$ — плотности нормальных распределений, то $e(f) = 1$ при $F(x) = G(x)$. Таким образом, если ранговые метки вычислены по нормальной плотности, то ранговая оценка не уступает в эффективности оценке наименьших квадратов даже при нормальном распределении обновляющего поля ε_{ij} .

Таблица 1

Плотность ранговой метки	Плотность обновляющего поля		
	Нормальная	Логистическая	Лапласа
Нормальная	1	1.039	1.2269
Логистическая	0.94719	1.097	1.483
Лапласа	0.6131	0.8133	2

В работе найдена АОЭ ранговых оценок по отношению к оценке наименьших квадратов в предположении, что ранговые метки вычислены по плотности $g(x)$ нормального, логистического и двойного экспоненциального распределения (распределения Лапласа), и что истинная плотность $f(x)$ равна одному из этих трёх распределений. Все эти 9 случаев сведены в таблицу 1.

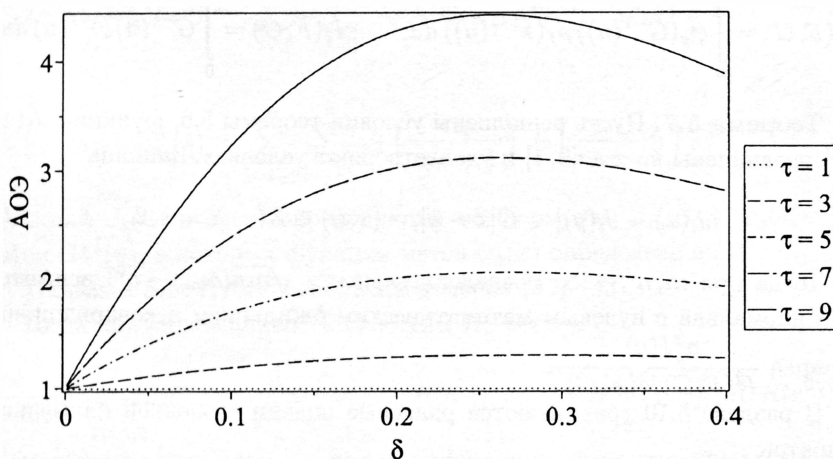


Рис. 8.

На рис. 8 показана зависимость АОЭ ранговой оценки от параметров δ

и τ распределения Тьюки. Метки ранговой статистики предполагались нормальными.

Основные результаты и выводы диссертационной работы

В диссертации получены следующие результаты:

1. Построены локально наиболее мощные знаковые и ранговые критерии проверки гипотез о параметрах авторегрессионных полей;
2. Доказаны состоятельность и асимптотическая нормальность М-оценок, обобщённых М-оценок, оценки наименьших модулей, знаковой оценки и ранговых оценок параметров авторегрессионных полей;
3. Найдена асимптотическая относительная эффективность М-оценок, оценки наименьших модулей, знаковой оценки и ранговых оценок по отношению к оценке наименьших квадратов;
4. Найден функционал влияния обобщённых М-оценок, М-оценок, оценки наименьших модулей и знаковой оценки.

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Разработанные критерии и оценки позволяют решать задачи идентификации модели авторегрессионного поля.
2. Эффективность робастных и непараметрических методов идентификации авторегрессионного поля зависит от вероятностного распределения обновляющего поля и от распределения ошибок наблюдения авторегрессионного поля.
3. При небольших нарушениях предположения о нормальности обновляющего поля для идентификации параметров авторегрессионного уравнения целесообразно использовать ранговые критерии и оценки или М-оценки.
4. При значительных нарушениях предположения о нормальности обновляющего поля для идентификации параметров авторегрессионного уравнения целесообразно использовать знаковые критерии и оценки или обобщённые М-оценки.

Основные результаты диссертации отражены в работах

1. Горяинова Е. Р., Горяинов В. Б. Знаковые критерии в модели скользящего среднего // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2008. № 1. С. 76–86.

2. Горяинов В. Б., Горяинова Е. Р. Знаковые критерии независимости наблюдений в модели пространственной авторегрессии порядка (1,1) // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2009. № 2. С. 115–123.
3. Горяинов В. Б., Горяинова Е. Р. Непараметрическая идентификация пространственной модели авторегрессии в условиях априорной стохастической неопределенности // Автоматика и телемеханика. 2010. № 2. С. 31–41.
4. Горяинов В. Б. Локально наиболее мощные ранговые критерии независимости наблюдений в модели пространственной авторегрессии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2010. № 4. С. 16–28.
5. Горяинов В. Б. Робастные свойства ранговых оценок коэффициентов двумерных авторегрессионных моделей // Информационные технологии и информационная безопасность в науке, технике и образовании: Тез. докл. Международной научно-технической конференции. Севастополь, 2011. С. 13.
6. Горяинов В. Б. Идентификация пространственной авторегрессии ранговыми методами // Автоматика и телемеханика. 2011. № 5. С. 82–95.
7. Горяинов В. Б. Асимптотическая нормальность оценок наименьших модулей коэффициентов пространственной авторегрессии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2011. № 1. С. 25–32.
8. Горяинов В. Б., Горяинова Е. Р. Робастные свойства оценок наименьших модулей коэффициентов пространственной авторегрессии // Системный анализ, управление и навигация: Тез. докл. 16-й Международной конференции. М., 2011. С. 142–143.
9. Горяинов В. Б. Оценки наименьших модулей коэффициентов пространственной авторегрессии // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 4. С. 58–65.
10. Горяинов В. Б., Горяинова Е. Р. М-оценки коэффициентов 2D-авторегрессии с необязательно выпуклой функцией потерь // Наука и образование: электронное научное издание. 2011. № 10 [электронный ресурс]. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/246206.html> (дата обращения: 01.11.2011).

11. Горяинов В. Б. М-оценки коэффициентов пространственной авторегрессии // Идентификация систем и задачи управления: Труды IX Международной конференции SICPRO'12. М., 2012. С. 713–719.
12. Горяинов В. Б. Функционалы влияния робастных оценок параметров авторегрессионных полей // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2012. № 4. С. 3–12.
13. Горяинов В. Б. М-оценки пространственной авторегрессии // Автоматика и телемеханика. 2012. № 8. С. 119–129.
14. Горяинов В. Б. Ранговые оценки коэффициентов пространственной авторегрессии // Системный анализ, управление и навигация: Тез. докл. 17-й Международной конференции. М., 2012. С. 155.
15. Горяинов В. Б. Непараметрическое оценивание коэффициентов пространственной авторегрессии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2012. № 7. С. 164–174.
16. Горяинов В. Б. Обобщенные М-оценки коэффициентов авторегрессионного поля // Автоматика и телемеханика. 2012. № 10. С. 42–51.
17. Горяинов В. Б. Асимптотические свойства обобщенных М-оценок коэффициентов двумерной авторегрессии // Необратимые процессы в природе и технике: Труды 7 Всероссийской конференции. М., 2013. Часть II. С. 4–6.
18. Горяинов В. Б. Ранговый анализ случайных полей // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 3. DOI: 10.7463/0313.0541592.
19. Goryainov V. B., Goryainova E. R. Asymptotic properties of sign estimation of the autoregressive field's coefficients // XXXI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models: abstracts. Moscow, 2013. P. 30–32.
20. Горяинов В. Б., Горяинова Е. Р. Робастность оценки коэффициентов уравнения пространственной авторегрессии, основанной на знаковых критериях // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 4. DOI: 10.7463/0413.0569036.

21. Горяинов В. Б. Асимптотические свойства знаковой оценки коэффициентов авторегрессионного поля // Вычислительный интеллект - 2013 (результаты, проблемы, перспективы): Тез. докл. Второй международной научно-технической конференции ComInt-2013. Черкассы, 2013. С. 351–352.
22. Горяинов В. Б. Идентификация случайных полей методами, основанными на знаках остатков наблюдений // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 6. DOI: 10.7463/0613.0571085.
23. Goryainov V. B. Robustness of the sign estimators in the 2D-autoregression // European Researcher. 2013. V. 48, № 5-1. P. 1083–1087.
24. Горяинов В. Б. Алгоритм вычисления М-оценок параметров авторегрессионного поля // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 7. DOI: 10.7463/0713.0571094.