



На правах рукописи

ШЕВЛЯКОВ Андрей Анатольевич

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АФФИННЫХ СИСТЕМ
К КВАЗИКАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ И ПОСТРОЕНИЕ
МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫХ СИСТЕМ**

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление
и обработка информации
(информатика, машиностроение)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент
Ткачев Сергей Борисович

Официальные оппоненты: Рапопорт Лев Борисович,
доктор физико-математических наук,
федеральное государственное бюджетное
учреждение науки «Институт проблем
управления РАН имени В.А. Трапезникова»,
заведующий лабораторией
динамики нелинейных процессов
управления имени Е.С. Пятницкого

Фомичев Василий Владимирович,
доктор физико-математических наук,
федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова», профессор

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки
«Вычислительный центр имени
А.А. Дородницына РАН»



Защита состоится «14» мая 2013 г. в 13 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: Москва, Рубцовская наб., 2/18, ауд. 1006 л.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан «__» _____ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
технических наук, доцент

Аттетков А.В.

185

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Один из подходов к решению задачи управления нелинейной динамической системой основывается на преобразовании системы к специальному виду, для которого метод решения соответствующей задачи управления известен. Примером являются системы канонического вида, которые с помощью линеаризации обратной связью можно преобразовать в линейную систему, записанную в канонической форме Бруновского.

Условия приводимости к каноническому виду хорошо известны, однако не всякую аффинную систему можно преобразовать к этому виду. Поэтому среди аффинных систем выделяют системы, которые преобразуются к квазиканоническому виду. Такие системы содержат подсистему, которая линеаризацией обратной связью преобразуется в каноническую форму Бруновского, и подсистему общего вида.

Условия существования преобразования аффинной системы к квазиканоническому виду в заданной области известны (А.П. Крищенко; 1981), однако представляет интерес получение различных локальных условий существования требуемых преобразований, а также условий, при выполнении которых квазиканонический вид имеет специальные свойства.

Если аффинная система преобразована к регулярному квазиканоническому виду в некоторой области, то функции, определяющие это преобразование, можно рассматривать как выходы системы, а квазиканонический вид — как нормальную форму системы (А. Isidori; 1980). Среди систем, записанных в нормальной форме, выделяют минимально-фазовые системы. Получение выходов, относительно которых система является минимально фазовой, является важной задачей, так как для минимально-фазовых систем способы решения задачи стабилизации положения равновесия известны.

Метод виртуальных выходов, предложенный А.П. Крищенко и С.Б. Ткачевым (2002), позволяет для класса неминимально-фазовых аффинных систем, записанных в нормальной форме, находить выходы, относительно которых эти системы являются минимально-фазовыми, и решать для таких систем задачу стабилизации. Его распространение на более широкий класс аффинных систем является важной теоретической проблемой.

Современные системы компьютерной алгебры позволяют в значительной степени автоматизировать процесс проверки условий существования преобразования к каноническому или квазиканоническому виду, выполнения самого преобразования и нахождения стабилизирующего управления. В связи этим представляет интерес формализованный алгоритм проверки необходимых и достаточных условий существования требуемого преобразования, а также нахождения соответствующей замены переменных и получения квазиканонического вида.

Целью работы является разработка теоретических основ и алгоритмов преобразования аффинных систем со скалярным и векторным управлением к квазиканоническим видам, а также распространение метода виртуальных выходов на аффинные системы с высоким индексом приводимости.

Задачами исследования являются:

- получение условий существования квазиканонического вида для аффинных систем;
- создание алгоритмов преобразования стационарных аффинных систем к квазиканоническим видам, ориентированных на использование систем компьютерной алгебры;
- получение условий существования виртуальных выходов, относительно которых система с высоким индексом приводимости является минимально-фазовой;
- исследование преобразуемости к квазиканоническому виду моделей технических систем.

Методы исследования. В диссертации применяются методы математической теории управления, теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и дифференциальной геометрии, компьютерной алгебры.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты, которые выносятся на защиту:

1. локальные условия существования квазиканонического вида для аффинных систем со скалярным управлением;
2. алгоритмы преобразования к регулярному квазиканоническому виду для аффинных систем со скалярным и векторным управлением;

3. распространение метода виртуальных выходов для аффинных систем со скалярным и векторным управлением, имеющих высокий индекс (мультииндекс) приводимости;

4. преобразование к регулярному квазиканоническому виду и стабилизация положения аффинной системы, описывающей пространственное движение вертолета.

Достоверность результатов подтверждена строгими доказательствами и результатами расчетов.

Практическая ценность полученных результатов состоит в том, что теоретические результаты доведены до конструктивных методов, позволяющих решать задачи преобразования к квазиканоническим видам, а также в сведении задачи стабилизации класса неминимально-фазовых аффинных систем к задаче, для которой способ решения известен (линеаризация обратной связью). Разработан и зарегистрирован программный комплекс quasiPack. Комплекс представляет собой набор процедур, реализованных в среде Maple, и предназначен для автоматизации решения задач, возникающих при преобразовании систем к квазиканоническому виду (свидетельство о государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ №2012617543 от 21 августа 2012 г.)

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на III Международной конференции "Системный анализ и информационные технологии" (Звенигород, 2009), I традиционной Всероссийской молодежной летней школе "Управление, информация и оптимизация" (Переславль-Залесский, 2009), XI Международной конференции имени Е.С. Пятницкого "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Москва, 2010), конференции "Управление в технических системах" (Санкт-Петербург, 2010), II Международной конференции "Моделирование нелинейных процессов и систем" (Москва, 2011), XII Международной конференции имени Е.С. Пятницкого "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Москва, 2012), III традиционной Всероссийской молодежной летней школе "Управление, информация и оптимизация" (Звенигород, 2012).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №09-07-00486, №11-07-00329, проекта 2.1.1/227 аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы"

(2009 – 2011 гг.), а также Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.В37.21.0370).

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 13 научных работах, в том числе 4 научных статьях из Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, и 8 тезисах докладов.

Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов, списка литературы и двух приложений. Работа изложена на 123 страницах, содержит шесть иллюстраций. Библиография включает 54 наименования.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность, основные положения, выносимые на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе введены основные используемые в работе математические понятия, в том числе $A\phi(x)$ — производная от функции $\phi(x)$ вдоль векторного поля A , коммутатор $[A, B]$ векторных полей A и B , последовательность коммутаторов векторных полей A и B :

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}_A^0 B &= B, \operatorname{ad}_A^1 B = [A, B], \\ \operatorname{ad}_A^{k+1} B &= [A, \operatorname{ad}_A^k B], \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассматривается аффинная система

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \quad (2)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^1$, $A(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))^T$, $B(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))^T$, $a_i(x)$, $b_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, $i = \overline{1, n}$, Ω — открытое множество, содержащее положение равновесия $x = 0$, причем $A(0) = 0$, $B(0) \neq 0$.

Изучаются условия, при которых она преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \dots, \dot{z}_{r-1} = z_r, \\ \dot{z}_r &= f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta) + p(z, \eta)u,\end{aligned}\tag{3}$$

где $z = (z_1 \dots z_r)^T, z \in \mathbb{R}^r, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-r})^T, \eta \in \mathbb{R}^{n-r}, q(z, \eta) = (q_1(z, \eta), \dots, q_{n-r}(z, \eta))^T, p(z, \eta) = (p_1(z, \eta), \dots, p_{n-r}(z, \eta))^T$.

Если $g(z, \eta) \neq 0$ в Ω , то (3) называется в Ω регулярным квазиканоническим видом.

С аффинной системой (2) связывают матрицу управляемости $U(x) = (U^0, \dots, U^{n-1})$, где U^k — столбец координат векторного поля $= (-1)^k \text{ad}_A^k B$. В связи с задачей преобразования (2) к виду (3) из матрицы $U(x)$ выделяют подматрицу $U_r(x)$, состоящую из первых r столбцов матрицы управляемости $U(x)$.

Доказаны локальные условия преобразуемости аффинной системы со скалярным управлением к регулярному квазиканоническому виду. Эти условия сформулированы в виде следующих теорем.

Теорема 1. Если при некотором $r, 2 \leq r < n$, для аффинной системы (2) существует такое решение $\phi(x) \in C^\infty(\Omega)$ системы линейных однородных уравнений в частных производных

$$\text{ad}_A^k B \phi(x) = 0, \quad k = \overline{0, r-2},\tag{4}$$

для которых соответствующая функция $\gamma(x) = BA^{r-1}\phi(x)$ в точке x^0 пространства состояний системы удовлетворяет условию

$$\gamma(x^0) \neq 0,\tag{5}$$

то в некоторой окрестности точки x^0 :

— подматрица U_r матрицы управляемости системы (2) имеет ранг r ;

— матрица Якоби $\Psi'(x)$ функций $\Psi = (\phi(x), A\phi(x) \dots, A^{r-1}\phi(x))$, имеет ранг r ;

— аффинная система (2) преобразуется к регулярному квазиканоническому виду (3).

Теорема обобщает известный результат (А.П. Крищенко; 2005) для преобразования систем к каноническому виду.

Теорема 2. Пусть в некоторой окрестности точки x^0 размерность инволютивного замыкания $\overline{F}_{r-1}$ распределения

$$F_{r-1} = \text{span}(B, \text{ad}_A B, \dots, \text{ad}_A^{r-2} B), r \geq 2,$$

постоянна и равна m , $r-1 \leq m < n$, и для векторного поля $\text{ad}_A^{r-1} B$ выполняется условие $\text{ad}_A^{r-1} B(x^0) \notin \overline{F}_{r-1}(x^0)$.

Тогда в некоторой окрестности точки x_0 аффинная система (2) преобразуется к регулярному квазиканоническому виду (3) с индексом приводимости r .

Разработан алгоритм преобразования системы к регулярному квазиканоническому виду, теоретическое обоснование которого составляют приведенные теоремы. Разработан алгоритм вычисления ранга функциональной матрицы, использующий методы компьютерной алгебры и являющийся частью алгоритма преобразования к квазиканоническому виду.

Рассмотрены примеры нахождения индекса приводимости, преобразования систем к квазиканоническому виду. В число рассмотренных систем входят модели технических систем (маятник на тележке, мобильный робот).

Во второй главе рассматриваются аффинные системы с векторным управлением

$$\dot{x} = A(x) + \sum_{i=1}^m B_i(x)u_i, \quad (6)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $A(0) = 0$,
 $A(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))^T$, $B(x) = (B_1(x), \dots, B_m(x))$,
 $B_j(x) = (b_j^1(x), \dots, b_j^n(x))^T$, $j = \overline{1, m}$,
 $i = \overline{1, n}$, $a_i(x)$, $b_i^j(x) \in C^\infty(\Omega)$, Ω — открытое множество, содержащее положение равновесия $x = 0$.

Квазиканонический вид в случае системы с векторным управле-

нием определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1^1 &= z_2^1, \dots, \dot{z}_{r_1-1}^1 = z_{r_1}^1, \\
\dot{z}_{r_1}^1 &= f_1(z, \eta) + g_{11}(z, \eta)u_1 + \dots + g_{1m}(z, \eta)u_m, \\
&\dots \\
\dot{z}_1^m &= z_2^m, \dots, \dot{z}_{r_m-1}^m = z_{r_m}^m, \\
&\dots \\
\dot{z}_{r_m}^m &= f_m(z, \eta) + g_{m1}(z, \eta)u_1 + \dots + g_{mm}(z, \eta)u_m, \\
\dot{\eta}_1 &= q_1(z, \eta) + p_{11}(z, \eta)u_1 + \dots + p_{1m}(z, \eta)u_m, \\
&\dots \\
\dot{\eta}_{n-r} &= q_{n-r}(z, \eta) + p_{n-r,1}(z, \eta)u_1 + \dots + p_{n-r,m}(z, \eta)u_m.
\end{aligned} \tag{7}$$

где $z = (z_1, \dots, z_r)^T$, $z \in R^r$, $r = r_1 + \dots + r_m$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-r})^T$, $\eta \in R^{n-r}$. Приведены результаты, обобщающие теоремы из главы 1 на случай систем с векторным управлением. На их основе разработаны алгоритмы преобразования системы с векторным управлением к квазиканоническому виду.

Рассмотрим систему (6). Предположим, распределение $\mathfrak{B} = \text{span}(B_1, \dots, B_m)$ имеет размерность m всюду на Ω . Пусть $\mathfrak{B}_A = \text{span}(B_1 + A, \dots, B_m + A)$. С системой (6) связан набор распределений

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}^0 &= \mathfrak{B}, \\
\mathfrak{B}^1 &= \text{span}(\mathfrak{B}, [\mathfrak{B}_A, \mathfrak{B}]), \\
&\dots \\
\mathfrak{B}^j &= \text{span}(\mathfrak{B}^{j-1}, [\mathfrak{B}_A, \mathfrak{B}^{j-1}]), \\
\mathfrak{M}^0 &= \mathfrak{B}, \\
\mathfrak{M}^1 &= \text{span}(\mathfrak{B}, \text{ad}_A \mathfrak{B}), \\
&\dots, \\
\mathfrak{M}^l &= \text{span}(\mathfrak{B}, \dots, \text{ad}_A^l \mathfrak{B}), \\
\mathfrak{L}^0 &= \mathfrak{B}, \\
\mathfrak{L}^1 &= \text{span}(\text{ad}_A \mathfrak{B}, \overline{\mathfrak{B}}), \\
&\dots \\
\mathfrak{L}^k &= \text{span}(\text{ad}_A^k \mathfrak{B}, \overline{\mathfrak{B}^{k-1}}).
\end{aligned} \tag{8}$$

Далее всюду будем предполагать, что распределения (8) имеют постоянную размерность в Ω .

Рассмотрим следующий набор чисел n_i :

$$\begin{aligned} n_0 &= \dim \mathfrak{B} = m, \\ n_1 &= \dim \mathfrak{L}^1 - \dim \overline{\mathfrak{B}}^0, \\ &\vdots \\ n_i &= \dim \mathfrak{L}^i - \dim \overline{\mathfrak{B}}^{i-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Данные числа показывают, насколько увеличивается размерность $\overline{\mathfrak{B}}^{i-1}$ при пополнении его векторными полями $ad_A^i \mathfrak{B}$.

Последовательность $n_0, \dots, n_i, \dots$ является невозрастающей. Ей можно поставить в соответствие набор чисел $\hat{r}_i = |n_j \geq i, j \geq 1|$. Здесь $\hat{r}_i$ равно количеству чисел из последовательности n_i , больше либо равных i .

Для построения алгоритма используется следующий результат (R. Marino, 1986).

Теорема 3. Пусть векторное поле A гладкое в некоторой окрестности точки x_0 , распределение $\text{span}(B_1, \dots, B_m)$ в этой окрестности является гладким и имеет размерность m . Тогда

— существует окрестность точки x_0 , в которой система (6) эквивалентна регулярной системе квазиканонического вида с индексами приводимости $\hat{r}_i$;

— если (6) приводится к регулярному квазиканоническому виду с индексами $r_1, \dots, r_\mu, \mu \leq m$, то для каждого $i, i = \overline{1, \mu}$ $r_i \leq \hat{r}_i$.

В случае, если какое-либо из распределений $\mathfrak{M}^i, \mathfrak{B}^i, \mathfrak{L}^i$ является сингулярным, теорема 3 неприменима, и построить квазиканонический вид с помощью данного алгоритма нельзя.

Пусть среди чисел r_i есть лишь q попарно различных. Обозначим их через $l_i, i = \overline{1, q}$, а через k_i — кратности соответствующих чисел. Тогда для нахождения индексов приводимости l_i и определения их кратности k_i удобно использовать таблицу 1.

Аналогом условия $ad_A^{r-1} B(x^0) \notin \overline{F}_{r-1}(x^0)$ в векторном случае является условие $n_i \neq 0$, так как $n_i = \dim \mathfrak{L}^i - \dim \overline{\mathfrak{B}}^{i-1}$ определяет, принадлежит ли $ad_A^i \mathfrak{B}$ распределению $\overline{\mathfrak{B}}^{i-1}$.

Для заполнения второго столбца вычисляются числа

$$n_{i-1} = \dim \mathfrak{L}^{i-1} - \dim \overline{\mathfrak{B}}^{i-2}.$$

Таблица 1

i	$n_{i-1} = \dim \mathcal{L}^{i-1} - \dim \overline{\mathcal{B}^{i-1}}$	$d_{i2} = n_{i-1} - k_1$	$d_{i3} = d_{i2} - k_2$
1	m	$m - k_1$	$m - k_1 - k_2$
...	*	*	$n_1 - k_1 - k_2$
...	*	k_2	*
...	*	0	0
...	*	0	0
s	k_1	0	0
$s + 1$	0	0	0

Вычисления производятся до тех пор, пока очередное число не будет равным нулю. Номер, соответствующий последнему ненулевому элементу второго столбца, равен значению l_1 , а его кратность k_1 равна последнему ненулевому значению n_i . Затем вычисляется третий столбец по формуле

$$d_{i2} = n_{i-1} - k_1.$$

Индекс последнего ненулевого значения во втором столбце равен l_2 , а само последнее ненулевое значение равно k_2 .

Аналогично заполняются остальные столбцы таблицы до тех пор, пока очередной столбец не окажется состоящим целиком из нулевых значений.

Согласно теореме 3, полученные индексы являются максимальными индексами приводимости к квазиканоническому виду.

Рассмотрены примеры нахождения мультииндекса приводимости, преобразования систем к квазиканоническому виду.

В третьей главе приведено краткое описание основных функций программного комплекса quasiPack. Комплекс представляет собой набор процедур, реализованных в среде Maple и предназначен для автоматизации решения задач, возникающих при преобразовании систем к квазиканоническому виду.

Рассмотрены примеры исследования возможностей преобразования к квазиканоническому двух систем — маятника на тележке и трехмерной модели вертолета. Трехмерное движение вертолета описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V, m\dot{V} = F, & \dot{T}^{mr} &= w_1, \dot{T}^{tr} = w_2, \\ \dot{\Omega} &= D\omega_b, J_b\dot{\omega}_b = M_b - \omega_b \times J\omega_b, & \dot{\alpha} &= w_3, \dot{\beta} = w_4. \end{aligned} \quad (10)$$

где $\bar{r} = (x, y, z)$, $V = (V_x, V_y, V_z)$ — радиус-вектор и скорость центра масс соответственно, $\Omega = (\psi, \vartheta, \gamma)$ — углы Крылова ориентации вертолета, ω_b — вектор угловой скорости, F, M_b — суммарные сила и момент, действующие на вертолет. Найден максимальный мультииндекс приводимости. Рассмотренная система имеет наибольшую размерность ($n = 16$) из всех, к которым был успешно применен алгоритм.

В четвертой главе приводятся результаты, обобщающие метод виртуальных выходов на случай систем с высоким индексом (мультииндексом) приводимости.

Наряду с теорией квазиканонического вида широкое распространение получила теория нормальной формы. Объектом ее изучения также является преобразование системы (6) в систему специального вида (7) с той разницей, что вместо нахождения функций $\phi(x)$, удовлетворяющих уравнениям (4), для системы (6) фиксируются некоторые функции $y = h(x)$, выбранные из каких-либо иных соображений. Таким образом, после того, как найдены $\phi(x)$, можно использовать как аппарат квазиканонического вида, так и аппарат нормальной формы. Полученные результаты изложены в терминах нормальной формы с целью сохранения преемственности с известными результатами метода виртуальных выходов.

Нормальной формой аффинной системы со скалярным управлением называют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \dots, \dot{z}_{r-1} = z_r, \\ \dot{z}_r &= f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{\eta} = q(z, \eta) + p(z, \eta)u, \quad (12)$$

$$y = z_1. \quad (13)$$

Частным случаем нормальной формы аффинной системы со скалярным управлением является следующий вид системы:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \dots, \dot{z}_{r-1} = z_r, \\ \dot{z}_r &= f(z, \eta) + g(z, \eta)u,\end{aligned}\tag{14}$$

$$\dot{\eta} = q(z, \eta),\tag{15}$$

$$y = z_1.\tag{16}$$

Такая форма системы (11),(12) может быть получена выбором переменных η из числа первых интегралов векторного поля B , однако их запись в аналитической форме может представлять значительные трудности. Также полученная замена переменных может быть неудобной по другим причинам: трудно найти обратную форму, или она не является диффеоморфизмом в интересующей нас области.

Под минимальной фазовостью системы (14),(15) здесь следует понимать локальную асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия системы

$$\dot{\eta} = q(0, \eta).\tag{17}$$

Пусть в положении равновесия $x^0 = 0$ система (2) является минимально фазовой. Для системы (2) можно выбрать управление в виде

$$u = \left(-A^r \phi(x) - \sum_{k=0}^{r-1} c_k A^k \phi(x) \right) / B A^{r-1} \phi(x),\tag{18}$$

где коэффициенты c_k , $k = 0, \dots, r-1$, выбраны так, что корни уравнения $\lambda^r + \sum_{k=0}^{r-1} c_k \lambda^k = 0$ имеют отрицательные действительные части, $B A^{r-1} \phi(x) \neq 0$ в силу определения относительной степени выхода.

В переменных z, η управление (18) имеет вид

$$u = \left(-f(z, \eta) - \sum_{k=0}^{r-1} c_k z_{k+1} \right) / g(z, \eta).\tag{19}$$

Для функции $y = h(x)$ также используют название “виртуальный выход”, чтобы подчеркнуть произвольный ее выбор.

Для систем вида (14),(15) доказана

Теорема 4. Пусть нормальная форма аффинной системы (2) с виртуальным выходом $y = h(x)$ в окрестности точки $x = 0$ имеет вид (14), (15), причем $q(z, \eta) \equiv p(y, \eta) \equiv p(z_1, \eta)$. Для того, чтобы аффинная система (2) имела виртуальный выход с относительной степенью $\rho = r$ в точке $x = 0$ и асимптотически устойчивую нулевую динамику, необходимо и достаточно, чтобы положение равновесия $\eta = 0$ нелинейной системы

$$\dot{\eta} = p(v, \eta) \quad (20)$$

с управлением v было стабилизируемо гладкой обратной связью $v = v(\eta)$. Каждой такой стабилизирующей обратной связи в системе (20) соответствует виртуальный выход $y = z_1 - v(\eta) = h(x) - v(\Psi(x))$ аффинной системы (2) относительной степени $\rho = r$ в точке $x = 0$ и асимптотически устойчивая нулевая динамика.

Доказанная теорема задает достаточные условия существования виртуального выхода, относительно которого система является асимптотически устойчивой. Необходимые условия задает следующая теорема.

Теорема 5. Пусть в системе (14), (15) $q(z, \eta) \equiv p(z_1, z_2, \eta)$, существует виртуальный выход $\phi(z_1, \eta)$, такой, что относительная степень аффинной системы с этим выходом в точке $x = 0$ будет равна r , нулевая динамика асимптотически устойчива, и $\frac{\partial \phi(z_1, \eta)}{\partial z_1}(0, 0) \neq 0$. Тогда найдутся функции $v_1 = v_1(\eta)$, $v_2 = v_2(\eta)$, такие, что $v_1(0) = 0$, $v_2(0) = 0$, стабилизирующие положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$\dot{\eta} = p(v_1, v_2, \eta) \quad (21)$$

и удовлетворяющие условию

$$\left. \frac{dv_1(\eta)}{dt} \right|_{\dot{\eta}=p(v_1(\eta), v_2(\eta), \eta)} = v_2(\eta). \quad (22)$$

Рассмотрим специальную нормальную форму системы (6):

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1^1 &= z_2^1, \dots, \dot{z}_{r_1-1}^1 = z_{r_1}^1, \\
 \dot{z}_{r_1}^1 &= f_1(z, \eta) + g_{11}(z, \eta)u_1 + \dots + g_{1m}(z, \eta)u_m, \\
 &\dots \\
 \dot{z}_1^m &= z_2^m, \dots, \dot{z}_{r_m-1}^m = z_{r_m}^m, \\
 \dot{z}_{r_m}^m &= f_m(z, \eta) + g_{m1}(z, \eta)u_1 + \dots + g_{mm}(z, \eta)u_m, \\
 \dot{\eta} &= q(z, \eta), \\
 y &= (z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^m)^\tau, \eta \in R^{n-r}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Доказаны следующие теоремы, позволяющие получать новые выходы, относительно которых система (6) является минимально-фазовой.

Теорема 6. Пусть нормальная форма аффинной системы (6) с виртуальным выходом $y = (h_1(x), \dots, h_m(x))$ в окрестности точки $x = 0$ имеет вид (23), причем $q(z, \eta) = p(z_1^1, \dots, z_1^m, \eta)$, относительная степень $\rho = (l, \dots, l)$. Для того, чтобы аффинная система (23) имела виртуальный выход с относительной степенью $\rho = (l, \dots, l)$ в точке $x = 0$ и асимптотически устойчивую нулевую динамику, необходимо и достаточно, чтобы положение равновесия $\eta = 0$ нелинейной системы

$$\dot{\eta} = p(v_1, \dots, v_m, \eta) \tag{24}$$

с управлениями $v_1, \dots, v_m$ было стабилизируемо гладкой обратной связью $v_1 = v_1(\eta), \dots, v_m = v_m(\eta)$. Каждой такой стабилизирующей обратной связи в системе (24) соответствует виртуальный выход $y = (z_1^1 - v_1(\eta), \dots, z_1^m - v_m(\eta)) = (h_1(x) - v_1(\Psi(x)), \dots, h_m(x) - v_m(\Psi(x)))$ аффинной системы (23) относительной степени $\rho = (l, \dots, l)$ в точке $x = 0$ и асимптотически устойчивая нулевая динамика.

Теорема 7. Если в динамической системе (23) $q(z, \eta) = p(z_1^1, \dots, z_1^m, z_2^1, \dots, z_2^m, \eta)$, относительная степень $\rho = (l, \dots, l)$, а управления $v_1^1 = v_1^1(\eta), \dots, v_1^m = v_1^m(\eta), v_2^1 = v_2^1(\eta), \dots, v_2^m = v_2^m(\eta), v_1^1(0) = 0, \dots, v_1^m(0) = 0, v_2^1(0) = 0, \dots, v_2^m(0) = 0$ стабилизируют положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$\dot{\eta} = p(v_1^1, \dots, v_1^m, v_2^1, \dots, v_2^m, \eta), \tag{25}$$

и удовлетворяют условиям

$$\left. \frac{dv_1^i(\eta)}{dt} \right|_{\dot{\eta}=p(v_1^1, \dots, v_1^m, v_2^1, \dots, v_2^m, \eta)} = v_2^i(\eta), \quad (26)$$

$$\det(E_{m \times m} - (v_1)'_{\eta} p'_{z_2^1, \dots, z_2^m}(0, 0, 0)) \neq 0, \quad (27)$$

то система (23) с виртуальным выходом $\phi(z, \eta) = (\phi_1(z, \eta), \dots, \phi_m(z, \eta))$, $\phi_i(z, \eta) = z_1^i - v_1^i(\eta)$ имеет относительную степень $\rho = (l, \dots, l)$ в точке $(z, \eta) = 0$, а нулевая динамика, соответствующая этому виртуальному выходу, асимптотически устойчива в точке $\eta = 0$.

В приложении 1 описывается разработанный программный комплекс quasiPack для среды Maple, позволяющий частично автоматизировать решение задач преобразования к квазиканоническому виду.

В приложении 2 приведено решение задачи стабилизации положения равновесия системы, описывающей движение вертолета, методом виртуальных выходов.

Основные результаты диссертационной работы

1. Получены новые локальные условия существования квазиканонического вида.

2. Разработаны алгоритмы преобразования к регулярному квазиканоническому виду для систем со скалярным и векторным управлением, ориентированные на применение методов компьютерной алгебры.

3. Метод виртуальных выходов распространен на класс аффинных систем с высоким индексом (мультииндексом) приводимости.

4. Разработан программный комплекс quasiPack, позволяющий автоматизировать типовые задачи, возникающие при преобразовании аффинных систем с управлением к квазиканоническому виду.

5. Для системы уравнений, описывающей движение вертолета, с помощью разработанного программного обеспечения произведен поиск максимальных индексов приводимости и преобразование к квазиканоническому виду и стабилизация положения равновесия.

Основные результаты диссертации отражены в работах

1. Ткачев С.Б., Шевляков А.А. Преобразование аффинных систем со скалярным управлением к квазиканоническому виду // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2013. №1. С. 3 – 16.
2. Ткачев С. Б., Шевляков А. А. Стабилизация аффинных систем с высоким индексом приводимости к квазиканоническому виду // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. №9. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/467824.html> (дата обращения: 02.02.13).
3. Шевляков А.А. Преобразование аффинных систем к квазиканоническому виду // Вестник МГТУ «Станкин». 2012. №1. С. 55 – 59.
4. Шевляков А.А. Вычисление ранга функциональной матрицы // Наука и образование [электронный ресурс]. 2011. № 10. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/243762.html> (дата обращения: 01.09.2012).
5. Свидетельство о государственной регистрации программы №2012617543 quasiPack / С.Б. Ткачев, А.А. Шевляков. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 21 августа 2012 г.
6. Шевляков А.А. Дифференциально-геометрические методы в теории управления // Актуальные проблемы фундаментальных наук: Труды научно-технической конференции с международным участием. М., 2010. С. 42 - 43.
7. Кондрашова А.Д., Шевляков А.А. Создание моделирующего комплекса, разработка алгоритмов управления нелинейными динамическими системами и их применение к задачам стабилизации заданного положения вертолета в пространстве в режиме висения // Управление, информация и оптимизация: Труды Всероссийской молодежной летней школы. Переславль-Залесский, 2009. С. 50.
8. Шевляков А.А. Приведение уравнений гидроцилиндра к обобщенной нормальной форме и стабилизация положения поршня

- // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов XI Международной конференции им. Е.С. Пятницкого. М., 2010. С. 434 - 436.
9. Ткачев С.Б., Шевляков А.А. Квазиканонический вид аффинной системы с векторным управлением и задача стабилизации вертолета // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов XI Международной конференции им. Е.С. Пятницкого. М., 2010. С. 392 – 393.
 10. Шевляков А.А. Стабилизация неминимально-фазовых аффинных систем // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов XII Международной конференции им. Е.С. Пятницкого. М., 2012. С. 343.
 11. Ткачев С.Б., Кондрашова А.Д., Шевляков А.А. Стабилизация беспилотного вертолета методом виртуальных выходов // Системный анализ и информационные технологии: Труды Международной научно-технической конференции. Звенигород, 2009. С. 17.
 12. Ткачев С.Б., Шевляков А.А. Оценка нулевой динамики неминимально-фазовых аффинных систем // Управление в технических системах: Труды конференции с международным участием. СПб., 2010. С. 48 – 51.
 13. Ткачев С.Б., Шевляков А.А. Алгоритм преобразования системы со скалярным управлением к квазиканоническому виду // Моделирование нелинейных процессов и систем: Труды Международной научной конференции. М., 2011 С. 307.