На правах рукописи

Канатников Анатолий Николаевич

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С УПРАВЛЕНИЕМ

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (информатика, машиностроение)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Григоренко Н.Л.

доктор физико-математических наук, профессор Магницкий Н.А.

доктор физико-математических наук Рапопорт Л.Б.

Ведущая организация: Вычислительный центр имени А.А. Дородницына РАН

Защита диссертации состоится «21» февраля 2012 г. в 11 часов 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н. Э. Баумана по адресу: Москва, Рубцовская наб., 2/18, ауд. 1006л.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью организации, просим высылать по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, МГТУ им. Н. Э. Баумана, ученому секретарю совета Д 212.141.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан «6» декабря 2011 г

НТБ МГТУ им.Н.Э.Баумана
1988047
Канатников А.Н.Локализация

Ученый секретарь диссертационного совета, к.т.н., доцент Аттетков А.В.

-048

25.80

ОНТ УЛК

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В теории управления сформировалось направление, в котором исследуются динамические системы с управлением и/или возмущением, имеющие ограничения на переменные состояния и управления. В таких системах ставится задача анализа решений, не выходящих за пределы заданного множества в фазовом пространстве системы. Указанные исследования привели к построению теории, базирующейся на понятии инвариантного множества, которая в системах разного типа вводится по-разному, но отражает главный принцип: траектория системы не должна покидать заданное множество в фазовом пространстве. В понятии инвариантного множества учитываются различные особенности динамической системы: наличие управления, неопределенностей, выхода и т.п. Одним из основных приложений указанной теории является синтез управлений на основе прогноза на конечный или бесконечный горизонт.

Исследования в этом направлении выполнены в ряде работ последних 10–15 лет (F. Blanchini; I. Kolmanovsky, E.G. Gilbert; S.V. Raković и др.; E.C. Kerrigan и др.).

Задача невыхода траектории управляемой системы за пределы заданного множества Q сводится к понятию максимального положительно инвариантного множества в Q. Возникают задачи качественного анализа такого множества, методов его построения или оценки положения. Наибольшие достижения в этом направлении были достигнуты для линейных систем, в которых ограничения на фазовое состояние заданы линейными неравенствами. Аналогичные задачи в нелинейном случае заметно более сложные.

Особую роль в динамических системах играют ограниченные траектории. Такие траектории тесно связаны с периодическими движениями, стабилизирующими свойствами системы, важными переходными режимами в системе. Исследование таких траекторий может идти в рамках понятия инвариантного компактного множества.

Важнейшей целью настоящей работы является построение оценок положения (положительно, отрицательно) инвариантных компактных множеств дискретных систем с управлением и/или возмущением. Это задача качественного анализа динамической системы

М Г Т У
им. Н.Э. Баумана
Библиотека

и, следовательно, тесно связана с качественной теорией динамических систем.

Качественная теория динамических систем — активно развивающаяся область современной математики. Необходимость в исследованиях динамических систем разного типа, не связанных с получением аналитического решения, диктуется многими причинами. Во-первых, существование аналитического решения системы дифференциальных или разностных уравнений — не частое явление. Во-вторых, качественные методы позволяют выявить те свойства динамической системы, которые никак не проявляются при численном анализе системы. Наконец, ряд свойств вообще не могут быть установлены численным анализом системы (асимптотические свойства динамических систем, в частности, явления хаоса).

Качественная теория динамических систем важную роль играет в теории управления. Эта теория позволяет провести исследование динамической системы, замкнутой выбранной обратной связью. Также важны качественные исследования систем с управлением, позволяющие выявить возможности выбора управления при наличии ограничений.

Настоящая работа посвящена одному из направлений в качественной теории динамических систем — выявлению и локализации траекторий специального вида, а именно, компактных траекторий. Родоначальником этого направления можно считать А. Пуанкаре, предложившего классические методы качественного исследования предельных циклов системы дифференциальных уравнений.

Новый импульс такого рода исследованиям придало открытие динамических систем с хаотическим поведением, например известных систем Лоренца, Рёсслера, Ланфорда и др. Это открытие стимулировало исследования в различных направлениях (Н.А. Магницкий, С.В. Сидоров). В частности, с исследованием аттрактора системы Лоренца связаны первые публикации по локализации (E.N. Lorenz; C. Sparrow). Эти исследования продолжались в течение ряда лет. К задачам локализации можно отнести построение положительно инвариантных множеств, содержащих некоторые сепаратрисы системы Лоренца (Г.А. Леонов); анализ асимптотического поведения решений системы Лоренца и нахождение множеств, содержащих глобальный аттрактор системы Лоренца (C.R. Doering и J.D. Gibbon; H. Giacomini и S. Neukirch; Г.А. Леонов; D. Li, J. Lu,

X. Wu и G. Chen; A.Yu. Pogromsky, G. Santoboni и H. Nijmeijer; P. Swinnerton-Dyer); нахождение множеств, содержащих все периодические траектории, сепаратрисы и другие траектории (А.П. Крищенко, С.С. Шальнева, К.Е. Старков). Особо отметим подход в задачах локализации, который тесно связан с компьютерным моделированием и применением идей символического анализа (Г.С. Осипенко и М.Б. Ампилова; Д.Ю. Матиясевич).

Множества, содержащие определенные траектории динамической системы, естественно называть локализирующими. Конечно, интерес представляют те методы и результаты, которые позволяют находить как можно более точные локализирующие множества для каждой из структур фазового пространства.

Особый интерес в качественном портрете динамической системы вызывают такие образования, как положения равновесия, предельные циклы, сепаратрисы, аттракторы. Эти структуры можно объединить в рамках понятия компактного инвариантного множества.

Задача построения локализирующих множеств для инвариантных компактов непрерывной динамической системы сформировалась в работах А.П. Крищенко. В этих же работах были очерчены контуры метода построения локализирующих множеств, впоследствии названного функциональным. В серии работ с помощью функционального метода были исследован ряд непрерывных автономных систем со сложным поведением: систем Лоренца, Ланфорда (А.П. Крищенко, К.Е. Старков), системы Пиковского — Рабиновича — Трахтенгерца (А.Н. Канатников) и др.

Целью работы является исследование свойств инвариантных компактных множеств в непрерывных и дискретных динамических системах.

Задачами исследования являются:

– разработка функционального метода локализации применительно к дискретным автономным системам;

– разработка функционального метода локализации применительно к дискретным системам с управлением и/или неопределенностью;

– анализ известных динамических систем функциональным методом, как непрерывных, так и дискретных.

Методы исследования. В диссертации применяются методы математической теории управления, теории дифференциальных уравнений, математического анализа.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты, которые выносятся на защиту:

1) функциональный метод локализации для дискретных автономных систем;

2) функциональный метод локализации для дискретных систем с управлением и/или возмущением;

3) локализация инвариантных компактов в непрерывных системах (ПРТ-система и система Валлиса);

4) локализация положительно инвариантных, отрицательно инвариантных и инвариантных компактов в дискретных автономных системах (логистическая, система Хенона, система Катала);

5) условия существования и метод построения максимального инвариантного компакта для дискретных динамических систем.

Результаты диссертации носят теоретический характер и являются развитием качественной теории динамических систем и математической теории управления.

Достоверность результатов подтверждена строгими доказательствами и результатами численных расчетов.

Практическая ценность полученных результатов состоит в том, что теоретические результаты устанавливают важные свойства динамических систем и формируют конструктивные методы качественного исследования динамических систем.

Развитие функционального метода локализации позволяет проводить исследования широкого круга динамических систем, как непрерывных, так и дискретных, в том числе дискретных систем, включающих управление и/или возмущенние.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на XIV Международной конференции Workshop on Dynamics and Control (Звенигород, 2007), X Международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" им. Е.С. Пятницкого (Москва, 2008), Международной конференции "Дифференциальные уравнения и топология", посвященной 100-летию Л.С. Понтрягина (Москва, 2008), заседании Всероссийского научного семинара под рук. акад. С.В. Емельянова и

С.К. Коровина (Москва, 2009), XVII конференции "Математика. Компьютер. Образование" (Москва, 2010), Международной конференции по математической теории управления и механике МТУМ-2011 (Суздаль, 2011), XVIII Международном конгрессе IFAC (Милан, 2011).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 05-01-00840, 07-07-00223, 08-01-00203, 09-07-00327, 11-01-00733; программы Минобрнауки "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект РНП 2.1.1.2381); программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-4144.2010.1).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 22 научных работах [1–22], в том числе в 14 статьях [1, 3, 6, 9–11, 13–17, 20–22], опубликованных в журналах из Перечня ведущих научных журналов и изданий ВАК, в научной монографии [12], а также 7 тезисах докладов [2, 4, 5, 7, 8, 18, 19].

Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, выводов и списка литературы. Работа изложена на 206 страницах, содержит 37 иллюстрации. Библиография включает 117 наименований.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность д.ф.-м.н, профессору Александру Петровичу Крищенко за научные консультации и поддержку.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертации.

В **первой главе** рассматриваются постановки задач локализации для динамических систем, излагается метод локализации инвариантных компактных множеств для непрерывных автономных и неавтономных систем. Этим методом исследуется система Пиковского — Рабиновича — Трахтенгерца (ПРТ-система), имеющая хаотическое поведение.

В разд. 1.1 излагаются те задачи в теории управления, которые приводят к необходимости оценки положения инвариантных компактных множеств динамической системы. Одним из подходов к построению подобных оценок является построение множеств в фазовом пространстве системы, содержащих все инвариантные компакты этой системы. Такие множества называют локализирующими.

В разд. 1.2 рассматриваются основные положения функционального метода локализации инвариантных компактов применительно к непрерывным автономным системам, а также свойства локализирующих множеств.

Пусть задана автономная система

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется инвариантным для системы (1), если для любой точки $x \in M$ траектория системы, проходящая через точку x, целиком содержится в M. Любое инвариантное множество представляет собой объединение некоторого семейства траекторий рассматриваемой системы. Среди инвариантных множеств выделяются те, которые обладают дополнительным свойством компактности (положения равновесия, предельные циклы, сепаратрисы в сочетании с концевыми положениями равновесия, инвариантные торы и т.п.). Эти множества во многом определяют качественные свойства динамической системы.

Для произвольной гладкой функции $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ рассмотрим множество

$$S_\varphi = \{x \in \mathbb{R}\colon \dot{\varphi}(x) = 0\},$$

где $\dot{\varphi}$ — производная функции φ в силу системы (1) (производная Ли функции φ вдоль векторного поля, соответствующего системе (1)). Множество S_φ называют универсальным сечением, порожденным функцией φ.

Для произвольного множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$\varphi_{\sup}(Q) = \sup_{x \in S_\varphi \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi_{\inf}(Q) = \inf_{x \in S_\varphi \cap Q} \varphi(x).$$

Известно, что любое инвариантное компактное множество системы (1), содержащееся в множестве Q, содержится в множестве

$$\Omega_\varphi(Q) = \{x \in Q \colon \varphi_{\inf}(Q) \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}(Q)\},$$

которое, таким образом, является локализирующим для инвариантных компактов рассматриваемой системы, содержащихся в множестве Q.

Изложенный факт стал основой метода локализации инвариантных компактов, впоследствии названного функциональным. Отметим, что пересечение любого семейства локализирующих множеств является локализирующим. Поэтому для получения хороших оценок положения инвариантных компактов системы естественно построение семейств локализирующих множеств, и один из эффективных приемов здесь — использование параметрических семейств локализирующих функций.

В разд. 1.3 функциональный метод локализации использован для исследования системы ПРТ-системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -\nu_1 x + \beta y - yz, \\ \dot{y} = \beta x - \nu_2 y + xz, \\ \dot{z} = -\nu_3 z + xy, \end{cases}$$

предложенной в качестве модели некоторых волновых процессов, протекающих в плазме. Здесь ν_1, ν_2, ν_3, β — положительные параметры системы.

ПРТ-система при некоторых значениях параметров обладает хаотическим поведением. Использование функционального метода позволило построить локализацию инвариантных компактных множеств ПРТ-системы при любом сочетании параметров системы. В качестве локализирующих использовались квадратичные функции, для которых производная в силу системы также является квадратичной функцией. С помощью этого класса функций аналитическими методами получено несколько параметрических семейств локализирующих множеств и найдено пересечение всех таких семейств.

Например, в случае $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $\nu_3 = 1$, $\beta = 6$ (в этом случае система имеет хаотическую динамику) найденное локализирующее множество описывается неравенствами

$$x^2 + (z-6)^2 \le 36, \quad y^2 \le 14\sqrt{3\Big(x^2 + (z-6)^2 + \frac{3}{4}\Big)} - x^2 + 24z - 147.$$

Оно представлено на рис. 1.

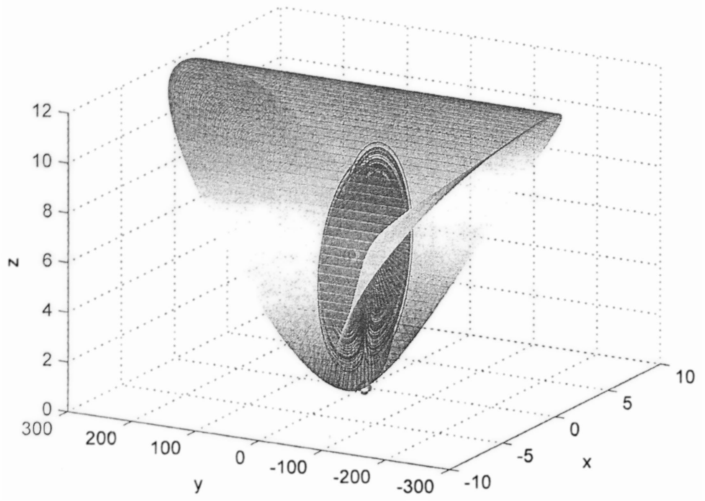

Рис. 1

Во **второй главе** рассмотрена задача локализации инвариантных компактов для непрерывных неавтономных систем.

В разд. 2.1–2.2 вводится понятие инвариантного множества неавтономной системы и устанавливаются основные положения функционального метода для неавтономных систем.

Рассмотрим неавтономную систему

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется инвариантным для системы (2), если для любой точки $x_0 \in M$ существует такое значение $t_0 \in \mathbb{R}$, что

траектория $x(t, t_0, x_0)$ системы, определяемая начальным условием $x(t_0) = x_0$, целиком содержится в M.

Как и в автономном случае, для построения локализирующего множества в диссертации выбирается произвольная гладкая функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и строится множество

$$S_\varphi = \{(x,\, t) \in \mathbb{R}^n\colon \dot{\varphi}(x,t) = 0\}\,,$$

которое является подмножеством расширенного фазового пространства. Пусть s_φ — проекция множества S_φ на фазовое пространство системы, т. е. $s_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \exists t : (x,\, t) \in S_\varphi\}$.

Для произвольного множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ вводятся величины

$$\varphi_{\sup}(Q) = \sup_{x \in s_\varphi \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi_{\inf}(Q) = \inf_{x \in s_\varphi \cap Q} \varphi(x).$$

В диссертации доказано (теорема 2.2), что каждое инвариантное компактное множество неавтономной системы (2), содержащееся в множестве Q, содержится в множестве

$$\Omega_\varphi(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \varphi_{\inf}(Q) \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}(Q)\}\,.$$

Иначе говоря, множество $\Omega_\varphi(Q)$ является локализирующим для инвариантных компактов системы, содержащихся в Q.

В диссертации предложено, как и в автономном случае, локализацию инвариантных компактов строить с помощью семейств локализирующих множеств, рассматривая параметрические семейства локализирующих функций.

В разд. 2.3 функциональный метод используется для исследования неавтономной системы Валлиса

$$\begin{cases} \dot{x} = by - ax + au(t), \\ \dot{y} = xz - y, \\ \dot{z} = 1 - xy - z, \end{cases}$$

которая предложена как модель динамики атмосферы в тропиках над Тихим океаном. При $u(t) \equiv 0$ эта система при некоторых значениях параметров (например при $a = 3$, $b = 102$) имеет хаотическое поведение.

В случае ограниченной функции $u(t)$ получены локализирующие множества для инвариантных компактов системы Валлиса. Локализация построена на использовании семейства квадратичных локализирующих функций с положительно определенной квадратичной формой. Семейство локализирующих множеств получено при любых значениях параметров системы и зависит от верхней грани значений функции $|u(t)|$.

В диссертации найдено пересечение этого семейства локализирующих множеств в виде

$$\begin{cases} y^2 + z^2 \le k, \\ x^2 \le kau_m^2 + 2kb - 2bz + 2b\sqrt{(k-1)\left[k - (y^2+z^2)\right]}, \end{cases}$$

где $u_m = max|u(t)|$, $k = \max\{1/a,\ 1\}$. Траектория системы Валлиса при $a = 3$, $b = 102$, $u(t) = 1 + 10\sin t$ и локализирующее множество Ω_{ev} изображены на рис. 2.

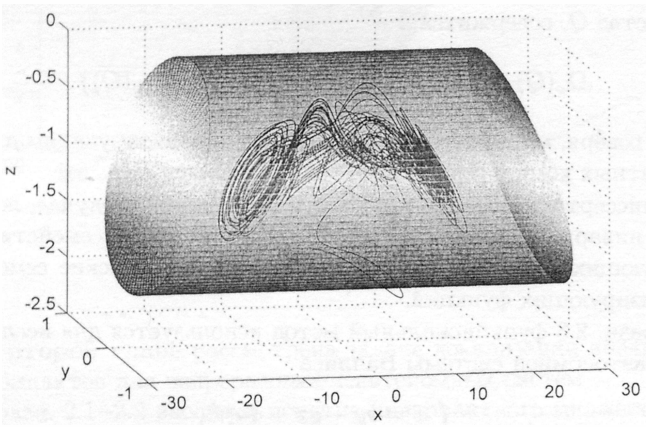

Рис. 2

В **третьей главе** рассматривается задача локализации инвариантных компактных множеств для дискретных автономных систем. На такие системы распространен функциональный метод локализации, установлены свойства локализирующих множеств. Проведен

сравнительный анализ задачи локализации для дискретных и непрерывных систем.

В разд. 3.1–3.2 вводятся понятия инвариантных множеств для дискретных систем, устанавливаются основные результаты, обосновывающие функциональный метод.

Под дискретной динамической системой понимается система вида

$$x_{n+1} = F(x_n), \tag{3}$$

где $F\colon X \to X$, $X \subset \mathbb{R}^n$, — непрерывное отображение.

Множество $M \subset X$ называют положительно инвариантным для системы (3), если для любой точки $x_0 \in M$ положительная полутраектория $\{x_n\}$, $n \geq 0$, системы, определяемая соотношениями $x_{n+1} = F(x_n)$, $n \geq 0$, целиком содержится в M. Критерием положительной инвариантности множества M является условие $F(M) \subset M$.

Множество $M \subset X$ называется отрицательно инвариантным для системы (3), если для любой точки $x_0 \in M$ любая отрицательная полутраектория $\{x_n\}$, $n \leq 0$, системы, определяемая соотношениями $x_n = F(x_{n-1})$, $n \leq 0$, целиком содержится в M. Критерием отрицательной инвариантности множества M является условие $F^{-1}(M) \subset M$, где $F^{-1}(M)$ — полный прообраз множества M.

Множество $M \subset X$ называется инвариантным для системы (3), если оно одновременно положительно инвариантно и отрицательно инвариантно.

Особенностью дискретных систем является то, что, например, положение равновесия может быть положительно инвариантным, но не инвариантным. Это связано с отсутствием в общем случае детерминированности прошлого, т.е. настоящее состояние системы может отражать разные процессы в прошлом.

Для произвольной непрерывной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ введены множества

$$\Sigma_\varphi^+ = \{x \in X\colon \varphi(F(x)) - \varphi(x) \geq 0\},$$
$$\Sigma_\varphi^- = \{x \in X\colon \varphi(F(x)) - \varphi(x) \leq 0\}.$$

и величины

$$\varphi_{\inf}^r = \inf_{x \in \Sigma_\varphi^+} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}^r = \sup_{x \in \Sigma_\varphi^-} \varphi(x).$$

Доказано (теорема 3.2), что любое положительно инвариантное компактное множество системы (3) содержится в множестве

$$\Omega_\varphi^r = \left\{x \in X\colon \varphi_{\inf}^r \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}^r\right\}.$$

В диссертации введены величины

$$\varphi_{\inf}^l = \inf_{x\in\hat{F}(\Sigma_\varphi^-)} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}^l = \sup_{x\in\hat{F}(\Sigma_\varphi^+)} \varphi(x),$$

где $\hat{F}(A) = \left\{x \in X\colon F^{-1}(x) \subset A\right\}$. Доказано (теорема 3.3), что любое отрицательно инвариантное компактное множество системы (3) содержится в множестве

$$\Omega_\varphi^l = \left\{x \in X\colon \varphi_{\inf}^l \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}^l\right\}.$$

Введены величины

$$\varphi_{\inf} = \inf_{x\in\Sigma_\varphi^+\cap\hat{F}(\Sigma_\varphi^-)} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup} = \sup_{x\in\Sigma_\varphi^-\cap\hat{F}(\Sigma_\varphi^+)} \varphi(x).$$

Доказано (теорема 3.4), что любое инвариантное компактное множество системы (3) содержится в множестве

$$\Omega_\varphi = \left\{x \in M\colon \varphi_{\inf} \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}\right\}.$$

Функциональный метод для дискретных систем, развиваемый в диссертации, базируется на использовании множеств Ω_φ^r, Ω_φ^l, Ω_φ. Отметим, что в некоторых случаях вместо Ω_φ для локализации инвариантных компактов удобнее использовать более широкое множество $\Omega_\varphi^r \cap \Omega_\varphi^l$.

В разд. 3.3 доказан ряд свойств для локализирующих множеств (свойства 3.1–3.4):

– пересечение любого семейства локализирующих множеств для (положительно, отрицательно) инвариантных компактных множеств является локализирующим для (положительно, отрицательно) инвариантных компактных множеств;

– любое положительно инвариантное (отрицательно инвариантное, инвариантное) множество, содержащееся в множестве $Q \subset X$, содержится в множестве $\Omega_\varphi^r(Q)$ $(\Omega_\varphi^l(Q)$, $\Omega_\varphi(Q))$, где множество

$\Omega^r_\varphi(Q)$ ($\Omega^l_\varphi(Q)$, $\Omega_\varphi(Q)$) определено с помощью верхних и нижних граней функции φ, вычисляемых только по точкам множества Q;

– если функция $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго монотонна и $\psi(x) = h(\varphi(x))$, то

$$\Omega^r_\psi(Q) = \Omega^r_\varphi(Q), \quad \Omega^l_\psi(Q) = \Omega^l_\varphi(Q), \quad \Omega_\psi(Q) = \Omega_\varphi(Q);$$

– если функция $\varphi \in C(X)$ на множестве X достигает точной верхней грани $\overline{\varphi}$ в некоторой точке $x^* \in Q$ ($x_* \in Q$), то $\varphi^r_{\sup}(Q) = \varphi^l_{\sup}(Q) = \varphi_{\sup}(Q) = \overline{\varphi}$; если функция φ достигает точной нижней грани $\underline{\varphi}$ в точке $x_* \in Q$, то $\varphi^r_{\inf}(Q) = \varphi^l_{\inf}(Q) = \varphi_{\inf}(Q) = \underline{\varphi}$.

В разд. 3.4 доказаны дополнительные свойства локализирующих множеств, на которых построены новые конструктивные методы локализации инвариантных компактов. Эти свойства связаны со сдвигами локализирующих множеств вдоль траекторий системы (свойства 3.5–3.9):

– любое положительно инвариантное множество дискретной системы $x_{n+1} = F(x_n)$, содержащееся в множестве G, содержится и в множестве $F^{-1}(G)$;

– если множество $G \subset X$ содержит все положительно инвариантные компакты дискретной системы, то и множество $\hat{F}(G)$ содержит все положительно инвариантные компакты. В частности, если F сюръективно, то образ любого локализирующего множества для положительно инвариантных компактов есть локализирующее множество;

– любое отрицательно инвариантное множество системы $x_{n+1} = F(x_n)$, содержащееся в G, содержится и в множестве $\hat{F}(G)$;

– пусть дискретная система $x_{n+1} = F(x_n)$ определяется инъективным отображением F. Тогда если множество G содержит все отрицательно инвариантные компакты рассматриваемой системы, то и множество $F^{-1}(G)$ содержит все отрицательно инвариантные компакты;

– любое инвариантное множество дискретной системы $x_{n+1} = F(x_n)$, содержащееся в G, содержится и в множествах $\hat{F}(G)$ и $F^{-1}(G)$.

В разд. 3.5 рассмотрена задача существования у дискретной системы максимального (положительно, отрицательно) инвариантного компактного множества, т.е. (положительно, отрицательно) инвариантного компакта, который содержит в себе все другие (положительно, отрицательно) инвариантные компакты. В диссертации

сформулированы и доказаны условия, при которых такой компакт существует. Эти условия базируются на развитых в диссертации методах локализации инвариантных компактов.

Для произвольного множества $G \subset X$ введены множества

$$R_0 = G; \quad R_i = R_{i-1} \cap F^{-1}(R_{i-1}), \quad i \in \mathbb{N}, \quad R_\infty = \bigcap_{i \geq 0} R_i. \qquad (4)$$

Доказано (теорема 3.5), что множество R_∞ является положительно инвариантным для системы (3), причем максимальным в множестве G. Также доказано (теорема 3.6), что если исходное множество G компактно и является локализирующим для положительно инвариантных компактов рассматриваемой системы, то множество R_∞ — максимальный положительно инвариантный компакт системы.

Для произвольного множества $G \subset X$ введены множества

$$L_0 = G; \quad L_i = L_{i-1} \cap \hat{F}(L_{i-1}), \ i \in \mathbb{N}, \quad L_\infty = \bigcap_{i \geq 0} L_i.$$

Доказано (теорема 3.7), что множество L_∞ отрицательно инвариантно, причем это максимально отрицательно инвариантное множество в G. Также доказано (теорема 3.8), что если отображение F открыто, а множество G компактно и является локализирующим для отрицательно инвариантных компактов дискретной системы, то множество L_∞ — максимальный отрицательно инвариантный компакт этой системы.

Для произвольного множества $G \subset X$ введены множества

$$B_0 = G;$$
$$B_i = B_{i-1} \cap F^{-1}(B_{i-}) \cap \hat{F}(B_{i-1}), \ i \in \mathbb{N};$$
$$B_\infty = \bigcap_{i \geq 0} B_i.$$

Доказано (теорема 3.9), что множество B_∞ является инвариантным для рассматриваемой дискретной системы, причем это максимальное инвариантное множество в G. Также доказано (теорема 3.10), что если отображение F открыто, множество G компактно и является локализирующим для инвариантных компактов дискретной системы, то множество G_∞ — максимальный инвариантный компакт этой системы.

В диссертации установлено (следствия 3.5–3.7), что условием, необходимым и достаточным для существования максимального (положительно, отрицательно) инвариантного компакта у дискретной системы, заданной открытым отображением, является существование компактного локализирующего множества.

В разд. 3.6 исследована связь локализации непрерывной автономной системы $\dot{x} = f(x)$ и соответствующей ей дискретной системы $x_{n+1} = F(x_n)$, заданной отображением $F(x) = x + \tau f(x)$. Такая система получается при интегрировании непрерывной системы методом Эйлера. Исследование ограничивается положительно инвариантными компактными множествами. Установлено (теорема 3.11), что в случае линейной локализирующей функции локализирующие множества непрерывной системы и соответствующей дискретной системы совпадают.

Более слабая связь между локализирующими множествами установлена в случае квадратичной локализирующей функции с положительно определенной квадратичной формой. Доказано, что в этом случае локализирующее множество для положительно инвариантных компактов дискретной системы включается в локализирующее множество для положительно инвариантных компактов непрерывной системы, т.е. локализирующее множество непрерывной системы является локализирующим и для дискретной системы.

Возникает вопрос, будет ли локализирующее множество дискретной системы в пределе давать локализирующее множество непрерывной системы. В диссертации показано (пример 3.5), что ответ на этот вопрос отрицательный.

В **четвертой главе** функциональный метод локализации, разработанный для дискретных систем, применяется к исследованию ряда известных дискретных систем.

В разд. 4.1 исследуется логистическая система $x_{n+1} = k(1 - x_n^2)$, играющая важную роль в системах гибели-размножения. Хотя эта одномерная система и является довольно простой, она активно изучается до сих пор. Причина в том, что на этой системе можно наблюдать хаотическое поведение и связанные с ним эффекты (например, перемешивание). Известно, что при $0 < k \leq 4$ система имеет максимальный положительно инвариантный компакт. При $0 < k < 1$ это отрезок $[(k-1)/k,\ 1/k]$, а при $1 \leq k \leq 4$ это отрезок $[0,\ 1]$. Эти же результаты получены с помощью функционального

метода. В случае $k > 4$ функциональный метод позволяет получить компактную локализацию — отрезок $[0, 1]$. Однако этот отрезок не является положительно инвариантным множеством. В разд. 3.5 установлено, что в этом случае максимальный положительно инвариантный компакт логистической системы представляет собой канторово множество. Функциональный метод локализации в этом случае дает наилучший результат из возможных в том смысле, что отрезок $[0, 1]$ — наименьший отрезок, содержащий максимальный положительно инвариантный компакт.

Исследование отрицательно инвариантных компактов логистической системы функциональным методом, проведенное в диссертации, дало тривиальный результат. Дальнейший детальный анализ системы, проведенный в диссертации, показал, что множество отрицательно инвариантных компактов логистической системы покрывает всю числовую ось, так что нетривиальной их локализации для этой системы не существует.

В разд. 4.2 исследуется система Хенона

$$\begin{cases} x_{n+1} = a + by_n - x_n^2, \\ y_{n+1} = x_n, \end{cases} \tag{5}$$

предложенная в 1976 г. как дискретная альтернатива хаотической системе Лоренца. Хенон не только предложил свою систему, но и установил, что у нее при некоторых значениях параметров есть аттрактор. Впоследствии было также установлено, что этот аттрактор является хаотическим. Исследование системы Хенона в диссертации проведено с помощью квадратичных локализирующих функций. Для положительно инвариантных множеств построено несколько семейств локализирующих множеств и найдены пересечения этих семейств. В результате найдено локализирующее множество, ограниченное кривой, близкой к кривой 4-го порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - a}{b} + \max\limits_{0<\lambda<b}\left(\dfrac{\lambda}{2b} - \dfrac{1}{b}\sqrt{c(\lambda) + bx}\right) \le y \le \\ \qquad\qquad \le \dfrac{x^2 - a}{b} + \min\limits_{0<\lambda<b}\left(\dfrac{\lambda}{2b} + \dfrac{1}{b}\sqrt{c(\lambda) + bx}\right), \\ x \ge -\min\limits_{0<\lambda<2} \dfrac{c(\lambda)}{b}, \end{cases}$$

где

$$c(\lambda) = \frac{\lambda^2}{4} + \frac{4ab\lambda + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b - \lambda)}.$$

Указанное представление удобно для компьютерной визуализации, поскольку максимум и минимум, хотя и не могут быть вычислены аналитически, легко находятся численными методами. Это локализирующее множество при значениях параметров $a = 1{,}4$, $b = 0{,}3$ представлено на рис. 3. Найденная локализация не является компактной. В диссертации показано, что в системе (5) по крайней мере при указанных значениях параметров (при этих значениях система имеет хаотический аттрактор) компактной локализации положительно инвариантных компактов не существует.

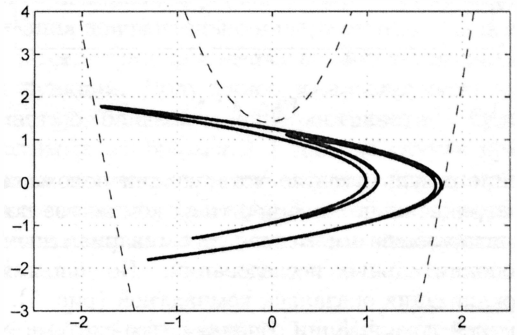

Рис. 3

Отметим, что локализирующее множество для положительно инвариантных компактов системы Хенона представляет собой оценку сверху области притяжения аттрактора. Из представленных результатов видно, что граница области притяжения аттрактора очень близко подходит к аттрактору.

Локализация отрицательно инвариантных компактов системы Хенона сведена к локализации положительно инвариантных компактов обратной системы. Выясняется, что обратная система заменой переменных сводится к той же системе Хенона, но с другими параметрами. Это позволило построить локализирующие множества для отрицательно инвариантных компактов системы Хенона

М Г Т У 17
им. Э. Баумана

без дополнительных исследований (рис. 4). Полученные результаты дают хорошую оценку аттрактору системы Хенона. Локализация отрицательно инвариантных множеств системы Хенона также не является компактной.

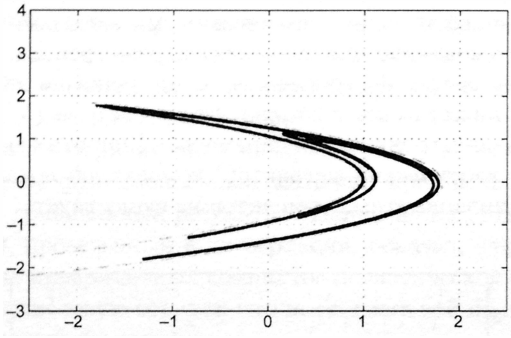

Рис. 4

Объединение результатов по локализации положительно инвариантных и отрицательно инвариантных компактов позволило получить локализирующее множество для инвариантных компактов также без дополнительных исследований. Но для инвариантных компактов локализация оказалась компактной (рис. 5). Существование компактной локализации означает, что система Хенона име-

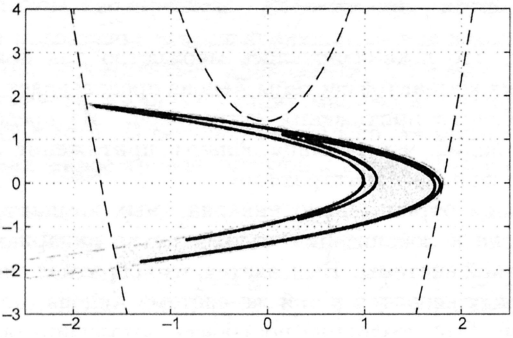

Рис. 5

ет максимальный инвариантный компакт. Согласно построенной в диссертации серии сдвигов компактного локализирующего множества при значениях параметров системы $a = 1{,}4$, $b = 0{,}3$, максимальным инвариантным компактом системы Хенона является ее аттрактор.

В разд. 4.3 решается задача локализации для (положительно, отрицательно) инвариантных компактов системы Катала (Cathala):

$$\begin{cases} x_{n+1} = p_1 x_n + y_n, \\ y_{n+1} = p_2 + x_n^2. \end{cases}$$

Эта система, как и система Хенона, при некоторых значениях параметров имеет хаотическое поведение. Однако в отличие от системы Хенона система Катала не является обратимой. Это привносит особенности в ее поведение и решение задач локализации.

Локализация положительно инвариантных компактов указанной системы в диссертации проведена с помощью квадратичных локализирующих функций. Полученное локализирующее множество оказалось областью, близкой к полупространству. Однако особенности необратимых отображений в данном случае привели к тому, что несколько последовательных сдвигов исходного локализирующего множества вдоль траекторий системы позволили построить компактную локализацию положительно инвариантных компактов системы Катала:

$$(p_1 x + y)^2 + Ax^2 + Ap_1(p_1 x + y) + (1 + A)p_2 - \frac{A^2(A - p_1)^2 - 4p_2}{4(A - 1)} \le 0,$$

где p_1, p_2 — параметры системы, $A > 1$ — параметр семейства множеств. Каждое множество указанного семейства представляет собой внутренность эллипса (рис. 6). Существование компактной локализации означает, что у системы Катала существует максимальный положительно инвариантный компакт. Этот компакт представляет собой область притяжения аттрактора системы Катала.

Локализация отрицательно инвариантных компактов системы Катала, проведенная в диссертации, дала лишь тривиальные результаты. В диссертации доказано (теорема 4.3), что объединение всех отрицательно инвариантных компактов системы Катала совпадает с плоскостью, т.е. нетривиальной локализации для отрицательно инвариантных компактов не существует.

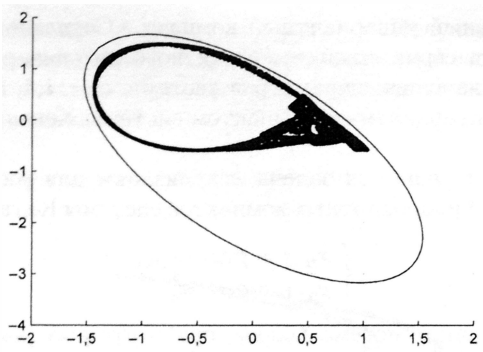

Рис. 6

В **пятой главе** рассматриваются задачи локализации (положительно, отрицательно) инвариантных компактов для дискретных систем с возмущением и/или управлением.

В разд. 5.1 рассматриваются дискретные системы с возмущением. Для таких систем вводятся понятия (положительно, отрицательно) робастно инвариантного множества, и разрабатывается функциональный метод локализации (положительно, отрицательно) робастно инвариантных компактов. Изучаются свойства локализирующих множеств, формулируются и доказываются условия существования максимального (положительно, отрицательно) робастно инвариантного компакта.

Для системы

$$x_{n+1} = F(x_n, w_n), \tag{6}$$

где F: $X \times W \to X$ — непрерывное отображение, $X \subset \mathbb{R}^n$ — фазовое пространство системы, $W \subset \mathbb{R}^q$ — область изменения возмущения, множество $M \subset X$ называется положительно робастно инвариантным, если для любой точки $x_0 \in M$ при любом выборе возмущений $w_n \in W$, $n = 1, 2, \ldots$, положительная полутраектория системы, определяемая соотношениями $x_{n+1} = F(x_n, w_n)$, $n \geq 0$, целиком содержится в M. Это определение можно переформулировать в теоретико-множественных терминах: множество M положительно робастно инвариантно тогда и только тогда, когда $F(M \times W) \subset M$ (теорема 5.1).

Для произвольной непрерывной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ введены множества

$$\Sigma_\varphi^+ = \left\{x \in X\colon \inf_{w\in W} \varphi(F(x,w)) - \varphi(x) \geq 0\right\},$$
$$\Sigma_\varphi^- = \left\{x \in X\colon \sup_{w\in W} \varphi(F(x,w)) - \varphi(x) \leq 0\right\}.$$

Каждому множеству $Q \subset X$ соответствуют значения

$$\varphi^r_{\inf}(Q) = \inf_{x\in\Sigma_\varphi^+\cap Q} \varphi(x), \qquad \varphi^r_{\sup}(Q) = \sup_{x\in\Sigma_\varphi^-\cap Q} \varphi(x).$$

Доказано (теорема 5.2), что любой положительно робастно инвариантный компакт системы (6), содержащийся в множестве $Q \subset X$, содержится в множестве

$$\Omega^r_\varphi(Q) = \left\{x \in Q\colon \varphi^r_{\inf}(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi^r_{\sup}(Q)\right\}.$$

В частности, если Q — локализирующее множество для положительно робастно инвариантных компактов системы, то и $\Omega^r_\varphi(Q)$ является локализирующим множеством для этих компактов.

В диссертации для систем с возмущением введено понятие отрицательно робастно инвариантного множества. Множество $M \subset X$ для системы (6) названо отрицательно робастно инвариантным, если для любой точки $x_0 \in M$ при любом выборе возмущений $w_n \in W$, $n < 0$, отрицательная полутраектория системы, заканчивающаяся в точке x_0, целиком содержится в M. Положим

$$F^{-1}_\cup(G) = \bigcup_{w\in W} F^{-1}_w(G),$$

где $G \subset X$, $F^{-1}_w(G)$ — полный прообраз множества G при фиксированном w. Критерием отрицательной робастной инвариантности множества M является выполнение условия $F^{-1}_\cup(M) \subset M$ (теорема 5.3).

Понятия положительной робастной инвариантности и отрицательной робастной инвариантности связаны между собой. Множество $M \subset X$ является положительно робастно инвариантным для системы $x_{n+1} = F(x_n, w_n)$ в том и только в том случае, когда множество $X \setminus M$ отрицательно робастно инвариантно для этой системы (теорема 5.5).

Для произвольной непрерывной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ введены множества

$$\check{\Sigma}^{+}_{\varphi} = \Big\{x \in X\colon \sup_{z \in F_U^{-1}(x)} \varphi(z) - \varphi(x) \le 0\Big\},$$

$$\check{\Sigma}^{-}_{\varphi} = \Big\{x \in X\colon \inf_{z \in F_U^{-1}(x)} \varphi(z) - \varphi(x) \ge 0\Big\}.$$

Каждое множество $Q \subset X$ порождает значения

$$\varphi^{l}_{\inf}(Q) = \inf_{x \in \check{\Sigma}^{-}_{\varphi} \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi^{l}_{\sup}(Q) = \sup_{x \in \check{\Sigma}^{+}_{\varphi} \cap Q} \varphi(x).$$

Доказано (теорема 5.4), что любой отрицательно робастно инвариантный компакт системы (6), содержащийся в множестве $Q \subset X$, содержится в множестве

$$\Omega^{l}_{\varphi}(Q) = \left\{x \in Q\colon \varphi^{l}_{\inf}(Q) \le \varphi(x) \le \varphi^{l}_{\sup}(Q)\right\}.$$

В частности, если Q — локализирующее множество для отрицательно робастно инвариантных компактов системы, то и $\Omega^{l}_{\varphi}(Q)$ является локализирующим множеством для этих компактов.

Для произвольной непрерывной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ и произвольного множества $Q \subset X$ введены значения

$$\varphi_{\inf}(Q) = \inf_{x \in \check{\Sigma}^{-}_{\varphi} \cap \Sigma^{+}_{\varphi} \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}(Q) = \sup_{x \in \check{\Sigma}^{+}_{\varphi} \cap \Sigma^{-}_{\varphi} \cap Q} \varphi(x).$$

Доказано (теорема 5.6), что любой робастно инвариантный компакт системы (6), содержащийся в множестве $Q \subset X$, содержится в множестве

$$\Omega_{\varphi}(Q) = \left\{x \in X\colon \varphi_{\inf}(Q) \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}(Q)\right\}.$$

В частности, если Q — локализирующее множество для робастно инвариантных компактов системы, то и $\Omega^{l}_{\varphi}(Q)$ является локализирующим множеством для этих компактов.

Установлены свойства локализирующих множеств для (положительно, отрицательно) робастно инвариантных компактов, аналогичные свойствам локализирующих множеств для непрерывных и дискретных систем без возмущений. Однако свойства, связанные со сдвигами локализирующих множеств, требуют дополнительных понятий.

Каждому множеству $G \subset X$ соответствует множество

$$F_{\cap}^{-1}(G) = \bigcap_{w \in W} F_w^{-1}(G).$$

Доказано (свойство 5.4), что любое положительно робастно инвариантное множество, содержащееся в множестве $G \subset X$, содержится и в множестве $F_{\cap}^{-1}(G)$.

Каждому множеству $G \subset X$ соответствует множество

$$\hat{F}(G) = \{y \in X \colon F_{\cup}^{-1}(y) \subset G\} = X \setminus F((X \setminus G) \times W).$$

Доказано (свойство 5.5), что любое отрицательно робастно инвариантное множество, содержащееся в множестве $G \subset X$, содержится и в множестве $\hat{F}(G)$. Также доказано (свойство 5.6), что любой робастно инвариантный компакт, содержащийся в множестве $G \subset X$, содержится и в множествах $F_{\cap}^{-1}(G)$ и $\hat{F}(G)$.

Для любого множества $G \subset X$ в фазовом пространстве X системы (6) введена последовательность множеств

$$R_0 = G, \quad R_k = R_{k-1} \cap F_{\cap}^{-1}(R_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

и их пересечение

$$R_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} R_k.$$

Доказано (теоремы 5.7 и 5.8), что для любого множества $G \subset X$ соответствующее множество R_∞ является максимальным в G положительно робастно инвариантным, а если множество G компактно то R_∞ — максимальный положительно робастно инвариантный компакт системы, содержащийся в G.

Для любого множества $G \subset X$ в фазовом пространстве X системы (6) введена последовательность множеств

$$L_0 = G, \quad L_k = L_{k-1} \cap \hat{F}(L_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

и их пересечение

$$L_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} L_k.$$

Доказано (теоремы 5.9 и 5.10), для любого множества $G \subset X$ соответствующее множество L_∞ является максимальным в G отрицательно робастно инвариантным, а если отображение F при

любом фиксированном $w \in W$ является открытым и множество G компактно, то соответствующее множество L_∞ — максимальный отрицательно робастно инвариантный компакт системы среди содержащихся в G.

Для любого множества $G \subset X$ в фазовом пространстве X системы (6) введена последовательность множеств

$$B_0 = G, \quad B_k = B_{k-1} \cap F_\cap^{-1}(B_{k-1}) \cap \hat{F}(B_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (9)$$

и их пересечение

$$B_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} B_k.$$

Доказано (теоремы 5.11 и 5.12), что для любого множества $G \subset X$ соответствующее множество B_∞ является максимальным в G робастно инвариантным, а если отображение F при любом фиксированном $w \in W$ открыто и множество G компактно, то множество B_∞ — максимальный робастно инвариантный компакт системы среди содержащихся в G.

С помощью разработанного функционального метода решена задача локализации для системы Хенона с возмущением:

$$\begin{cases} x_{n+1} = w + by_n - x_n^2, \\ y_{n+1} = x_n, \end{cases} \qquad (10)$$

где $w \in [a_*,\ a^*]$ — возмущение, $b > 0$, $0 < a_* < a^*$.

Анализ показал, что локализирующее множество для положительно робастно инвариантных компактов системы Хенона с возмущением совпадает с локализирующим множеством системы без возмущений, в которой параметр w имеет экстремальное значение a_*. Такова же ситуация в случае локализации отрицательно робастно инвариантных компактов.

В разд. 5.2 рассматриваются дискретные системы с управлением вида

$$x_{n+1} = F(x_n, u_n), \qquad (11)$$

где F: $X \times U \to X$ — отображение, непрерывное на X при любом $w \in W$; $X \subset R^n$ — фазовое пространство системы; $U \subset R^p$ — фазовое пространство системы. Для таких систем вводятся понятия

(положительно, отрицательно) управляемо инвариантного множества и разрабатывается функциональный метод локализации таких множеств с дополнительным условием компактности. Изучаются свойства локализирующих множеств, формулируются и доказываются условия существования максимальных (положительно, отрицательно) управляемо инвариантных компактов.

Множество $M \subset X$ для системы (11) названо положительно управляемо инвариантным, если существует такая обратная связь $h\colon X \to U$, что для любой точки $x_0 \in M$ положительная полутраектория замкнутой системы $x_{n+1} = F(x_n, h(x_n))$, начинающаяся в точке x_0, целиком содержится в M. Это определение можно переформулировать следующим образом: множество $M \subset X$ положительно управляемо инвариантно тогда и только тогда, когда $M \subset F_{\cup}^{-1}(M)$, где

$$F_{\cup}^{-1}(M) = \bigcup_{u \in U} F_u^{-1}(M), \quad F_u^{-1}(M) = \{x \in X\colon F(x,u) \in M\}.$$

Для произвольной непрерывной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ введены множества

$$\Sigma_\varphi^+ = \Big\{x \in X\colon \sup_{u \in U} \varphi(F(x,u)) - \varphi(x) \geq 0\Big\},$$

$$\Sigma_\varphi^- = \Big\{x \in X\colon \inf_{u \in U} \varphi(F(x,u)) - \varphi(x) \leq 0\Big\}.$$

Для множества $Q \subset X$ положим

$$\varphi_{\inf}^r(Q) = \inf_{x \in \Sigma_\varphi^+ \cap Q} \varphi(x), \qquad \varphi_{\sup}^r(Q) = \sup_{x \in \Sigma_\varphi^- \cap Q} \varphi(x).$$

Доказано (теорема 5.13), что любой положительно управляемо инвариантный компакт системы (11), содержащийся в $Q \subset X$, содержится в множестве

$$\Omega_\varphi^r(Q) = \left\{x \in Q\colon \varphi_{\inf}^r(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}^r(Q)\right\}.$$

Понятие отрицательно управляемо инвариантного множества в системах с управлением не так очевидно, как понятие положительно управляемо инвариантного множества. В диссертации проанализировано несколько возможных вариантов определения этого понятия. Одним из критериев отбора лучшего варианта (с точки зрения теории управления) было взято условие, что для обратимой системы

отрицательно управляемо инвариантного множество должно быть положительно управляемо инвариантным для обратной системы. В результате проведенного в диссертации анализа было выбрано следующее определение: множество $M \subset X$ отрицательно управляемо инвариантное для системы (11), если любой точке $x_0 \in M$ можно поставить в соответствие такое управление $u \in U$, что множество $F_u^{-1}(x_0)$ целиком содержится в M. Доказано (лемма 5.4), что критерием отрицательной управляемой инвариантности множества M является условие $M \subset \hat{F}_{\cup}(M)$, где

$$\hat{F}_{\cup}(M) = \bigcup_{u \in U} \hat{F}_u(M), \quad \hat{F}_u(M) = \left\{x \in X\colon F_u^{-1}(x) \subset M\right\}.$$

Для произвольной непрерывной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ введены в рассмотрение множества

$$\check{\Sigma}_{\varphi}^{+} = \left\{x \in X\colon \inf_{u \in U} \sup_{z \in F_u^{-1}(x)} \varphi(z) - \varphi(x) \le 0\right\},$$

$$\check{\Sigma}_{\varphi}^{-} = \left\{x \in X\colon \sup_{u \in U} \inf_{z \in F_u^{-1}(x)} \varphi(z) - \varphi(x) \ge 0\right\}.$$

Каждому множеству $Q \subset X$ соответствуют множества

$$\varphi_{\inf}^{l}(Q) = \inf_{x \in \check{\Sigma}_{\varphi}^{-} \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}^{l}(Q) = \sup_{x \in \check{\Sigma}_{\varphi}^{+} \cap Q} \varphi(x).$$

Доказано (теорема 5.14), что любой отрицательно управляемо инвариантный компакт системы (11), содержащийся в множестве $Q \subset X$, содержится в множестве

$$\Omega_{\varphi}^{l}(Q) = \left\{x \in Q\colon \varphi_{\inf}^{l}(Q) \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}^{l}(Q)\right\}.$$

Для непрерывной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ и множества $Q \subset X$ введены множества

$$\varphi_{\inf}(Q) = \inf_{x \in \check{\Sigma}_{\varphi}^{-} \cap \Sigma_{\varphi}^{+} \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}(Q) = \sup_{x \in \check{\Sigma}_{\varphi}^{+} \cap \Sigma_{\varphi}^{-} \cap Q} \varphi(x).$$

Доказано (теорема 5.15), что любой управляемо инвариантный компакт системы (11), содержащийся в множестве $Q \subset X$, содержится в множестве

$$\Omega_{\varphi}(Q) = \left\{x \in Q\colon \varphi_{\inf}(Q) \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}(Q)\right\}.$$

Установлены свойства локализирующих множеств для (положительно, отрицательно) управляемо инвариантных компактов, аналогичные свойствам локализирующих множеств для непрерывных и дискретных систем без возмущений (свойства 5.7–5.14). Отметим свойства, связанные со сдвигами локализирующих множеств:

1) любое положительно управляемо инвариантное множество, содержащееся в множестве $G \subset X$, содержится и в множестве $F_{\cup}^{-1}(G)$;

2) если множество $G \subset X$ содержит все положительно управляемо инвариантные компакты системы (11), то и множество $\hat{F}_{\cap}(G) = \bigcap\limits_{u \in U} \hat{F}_u(G)$ содержит все положительно управляемо инвариантные компакты этой системы;

3) любое отрицательно управляемо инвариантное множество системы (11), содержащееся в множестве $G \subset X$, содержится и в множестве $\hat{F}_{\cup}(G)$;

4) если дискретная система (11) определяется отображением F, инъективным при любом фиксированном значении $u \in U$, множество G содержит все отрицательно управляемо инвариантные компакты рассматриваемой системы, то и множество

$$F_{\cap}^{-1}(G) = \bigcap_{u \in U} F_u^{-1}(G)$$

содержит все отрицательно управляемо инвариантные компакты.

5) любое управляемо инвариантное множество, содержащееся в множестве $G \subset X$, содержится и в множествах $F_{\cup}^{-1}(G)$ и $\hat{F}_{\cup}(G)$.

В каждом множестве $G \subset X$ существует максимальное положительно управляемо инвариантное множество G_{mp} — объединение всех положительно управляемо инвариантных множеств, содержащихся в G. Объединение G_{mpc} всех положительно управляемо инвариантных компактов, содержащихся в G, есть наименьшее положительно управляемо инвариантное множество, содержащее все положительно управляемо инвариантные компактные подмножества G. Существование максимального положительно управляемо инвариантного компакта в G равносильно компактности множества G_{mpc}.

Доказано (теорема 5.16), что при дополнительных условиях компактности множества U и непрерывности отображения $F\colon X \times U \to$ $\to X$ необходимым и достаточным условием существования у системы (11) максимального положительно управляемо инвариантного компакта в множестве G является существование компактного

локализирующего множества $\Omega \subset G$ для положительно управляемо инвариантных компактов, целиком содержащихся в G.

Для произвольного множества $G \subset X$ введены множества

$$R_0 = G, \quad R_k = R_{k-1} \cap F_{\cup}^{-1}(R_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad R_\infty = \bigcap_{k \geq 0} R_k.$$

Доказано (теорема 5.17), что имеет место включение $G_{\text{mpc}} \subset G_{\text{mp}} \subset R_\infty$. При этом, если U компактно, отображение $F\colon X \times U \to X$ непрерывно, а множество G компактно, то R_∞ — положительно управляемо инвариантный компакт и $G_{\text{mpc}} = G_{\text{mp}} = R_\infty$.

Аналогичные утверждения доказаны для отрицательно управляемо инвариантных компактов (теоремы 5.18 и 5.19) и для управляемо инвариантных компактов (теоремы 5.20 и 5.21). Однако и в том, и в другом случае необходимо дополнительное условие локальной равномерной открытости отображения F, которое введено в диссертации. Условие локальной равномерной открытости оказалось эквивалентным внешней полунепрерывности многозначного отображения $u \to \hat{F}_u(G)$ для каждого замкнутого множества G.

С помощью разработанного функционального метода решена задача локализации для системы Хенона с аддитивным управлением:

$$\begin{cases} x_{n+1} = u + by_n - x_n^2, \\ y_{n+1} = x_n, \end{cases} \tag{12}$$

где $u \in [a_*,\ a^*]$ — управление, $b > 0$, $0 < a_* < a^*$.

Анализ показал, что локализирующее множество для положительно управляемо инвариантных компактов системы (12) совпадает с локализирующим множеством системы без управления (при фиксированном $u = a$), в которой параметр u имеет экстремальное значение a^*. Такова же ситуация в случае локализации отрицательно управляемо инвариантных компактов.

В разд. 5.3 рассмотрены системы еще более широкого класса: системы с управлением и возмущением вида

$$x_{n+1} = F(x_n, u_n, w_n), \tag{13}$$

где $F\colon X \times U \times W \to X$ — отображение, непрерывное на X при любых фиксированных $u \in U$ и $w \in W$; $X \subset \mathbb{R}^n$ — фазовое пространство системы; $U \subset \mathbb{R}^m$ — множество возможных управлений;

$W \subset \mathbb{R}^p$ — множество значений возмущений. Для таких систем вводятся понятия (положительно, отрицательно) робастно управляемо инвариантного множества и разрабатывается функциональный метод локализации таких множеств с дополнительным условием компактности. Изучаются свойства локализирующих множеств, формулируются и доказываются условия существования максимальных (положительно, отрицательно) робастно управляемо инвариантных компактов.

Множество M в фазовом пространстве X системы (13) называется положительно робастно управляемо инвариантным, если существует такая обратная связь $h\colon X \to U$, при которой для любого $x_0 \in M$ и для любых $w_n \in W$ положительная полутраектория системы, определяемая соотношениями $x_{n+1} = F(x_n, h(x_n), w_n)$, $n \geq 0$, целиком содержится в M. Критерием положительной робастной управляемой инвариантности множества M является условие $M \subset F^{-1}_{\cup\cap}(M)$, где

$$F^{-1}_{\cup\cap}(M) = \bigcup_{u\in U} \bigcap_{w\in W} F^{-1}_{u,w}(M), \quad F^{-1}_{u,w}(M) = \{x \in X\colon F(x,u,w) \in M\}.$$

Для произвольной непрерывной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ введены множества

$$\Sigma^+_\varphi = \Big\{x \in X\colon \sup_{u\in U} \inf_{w\in W} \varphi(F(x,u,w)) - \varphi(x) \geq 0\Big\},$$
$$\Sigma^-_\varphi = \Big\{x \in X\colon \inf_{u\in U} \sup_{w\in W} \varphi(F(x,u,w)) - \varphi(x) \leq 0\Big\}.$$

Каждому множеству $Q \subset X$ соответствуют значения

$$\varphi^r_{\inf}(Q) = \inf_{x\in\Sigma^+_\varphi\cap Q} \varphi(x), \qquad \varphi^r_{\sup}(Q) = \sup_{x\in\Sigma^-_\varphi\cap Q} \varphi(x).$$

Доказано (теорема 5.22), что любой положительно робастно управляемо инвариантный компакт системы (13), содержащийся в множестве $Q \subset X$, содержится в множестве

$$\Omega^r_\varphi(Q) = \left\{x \in Q\colon \varphi^r_{\inf}(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi^r_{\sup}(Q)\right\}.$$

Для системы (13) введено понятие отрицательно робастно управляемо инвариантного множества: множество $M \subset X$ называется

отрицательно робастно управляемо инвариантным, если для любой точки $x \in M$ существует такое управление $u \in U$, что при любом возмущении $w \in W$ выполняется включение $F_{u,w}^{-1}(x) \subset M$. Показано, что критерием отрицательной робастной управляемой инвариантности является выполнение включения $M \subset \hat{F}_{\cup\cap}(M)$, где

$$\hat{F}_{\cup\cap}(M) = \bigcup_{u\in U} \bigcap_{w\in W} \hat{F}_{u,w}(M).$$

Для произвольной непрерывной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ введены множества

$$\check{\Sigma}_{\varphi}^{+} = \Big\{x \in X\colon \inf_{u\in U} \sup_{w\in W} \sup_{z\in F_{u,w}^{-1}(x)} \varphi(z) - \varphi(x) \le 0\Big\},$$

$$\check{\Sigma}_{\varphi}^{-} = \Big\{x \in X\colon \sup_{u\in U} \inf_{w\in W} \inf_{z\in F_{u,w}^{-1}(x)} \varphi(z) - \varphi(x) \ge 0\Big\}.$$

Каждому множеству $Q \subset X$ соответствуют значения

$$\varphi_{\inf}^{l}(Q) = \inf_{x\in\check{\Sigma}_{\varphi}^{-}\cap Q} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}^{l}(Q) = \sup_{x\in\check{\Sigma}_{\varphi}^{+}\cap Q} \varphi(x).$$

Доказано (теорема 5.23), что любой отрицательно робастно управляемо инвариантный компакт системы (13), содержащийся в множестве $Q \subset X$, содержится в множестве

$$\Omega_{\varphi}^{l}(Q) = \left\{x \in Q\colon \varphi_{\inf}^{l}(Q) \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}^{l}(Q)\right\}.$$

Для системы (13) введено понятие робастно управляемо инвариантного множества, как множества, которое одновременно и положительно робастно управляемо инвариантно, и отрицательно робастно управляемо инвариантно.

Каждой непрерывной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ и множеству $Q \subset X$ соответствуют значения

$$\varphi_{\inf}(Q) = \inf_{x\in\check{\Sigma}_{\varphi}^{-}\cap\Sigma_{\varphi}^{+}\cap Q} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}(Q) = \sup_{x\in\check{\Sigma}_{\varphi}^{+}\cap\Sigma_{\varphi}^{-}\cap Q} \varphi(x).$$

Доказано (теорема 5.24), что любой робастно управляемо инвариантный компакт системы (5.41), содержащийся в множестве $Q \subset X$, содержится в множестве

$$\Omega_{\varphi}(Q) = \left\{x \in Q\colon \varphi_{\inf}(Q) \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}(Q)\right\}.$$

Установлены свойства локализирующих множеств для (положительно, отрицательно) робастно управляемо инвариантных компактов, аналогичные свойствам локализирующих множеств непрерывных дискретных систем без управления и возмущений (о пересечении локализирующих множеств, о композиции локализирующей функции со строго монотонной функцией, о достижении локализирующей функцией точной верхней/нижней грани). Кроме того, доказаны свойства, связанные со сдвигами вдоль траекторий системы (свойства 5.18–5.20). Приведем формулировки этих свойств.

1) любое положительно робастно управляемо инвариантное множество системы (5.41), содержащееся в множестве $G \subset X$, содержится и в множестве $F^{-1}_{\cup\cap}(G)$ (свойство 5.18);

2) любое отрицательно робастно управляемо инвариантное множество системы $(5.41)_\lambda$ содержащееся в множестве $G \subset X$, содержится и в множестве $\hat{F}_{\cup\cap}(G)$ (свойство 5.19);

3) любое робастно управляемо инвариантное множество системы (5.41), содержащееся в множестве $G \subset X$, содержится и в множествах $F^{-1}_{\cup\cap}(G)$, $\hat{F}_{\cup\cap}(G)$ и $F^{-1}_{\cup\cap}(G) \cap \hat{F}_{\cup\cap}(G)$. (свойство 5.20).

В каждом множестве $G \subset X$ существует максимальное положительно робастно управляемо инвариантное множество G_{mp} — объединение всех положительно робастно управляемо инвариантных множеств, содержащихся в G. Объединение G_{mpc} всех положительно робастно управляемо инвариантных компактов, содержащихся в G, есть наименьшее положительно робастно управляемо инвариантное множество, содержащее все положительно робастно управляемо инвариантные компактные подмножества G. Существование максимального положительно робастно управляемо инвариантного компакта в G равносильно компактности множества G_{mpc}.

Доказано (теорема 5.25), что при дополнительных условиях компактности множества U и непрерывности отображения $F\colon X \times U \times W \to X$ на $X \times U$ при любом $w \in W$ необходимым и достаточным условием существования у системы (11) максимального положительно робастно управляемо инвариантного компакта в множестве G является существование компактного локализирующего множества $\Omega \subset G$ для положительно робастно управляемо инвариантных компактов, целиком содержащихся в G.

Для произвольного множества $G \subset X$ введены множества

$$R_0 = G, \quad R_k = R_{k-1} \cap F^{-1}_{\cup\cap}(R_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad R_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} R_k.$$

Доказано (теорема 5.26), что имеет место включение $G_{\text{mpc}} \subset G_{\text{mp}} \subset R_\infty$. При этом, если U компактно, отображение $F\colon X \times U \times W \to X$ непрерывно на $X \times U$ при любом $w \in W$, а множество G компактно, то R_∞ — положительно робастно управляемо инвариантный компакт и $G_{\text{mpc}} = G_{\text{mp}} = R_\infty$.

Аналогичные утверждения доказаны для отрицательно робастно управляемо инвариантных компактов (теоремы 5.27 и 5.28) и для управляемо инвариантных компактов (теоремы 5.29 и 5.30). Однако и в том, и в другом случае необходимо дополнительное условие локальной равномерной открытости отображения F на множестве $X \times U$ при любом фиксированном $w \in W$, которое введено в диссертации.

Основные результаты и выводы работы

В диссертации получены следующие результаты:

1. Разработан функциональный метод локализации для дискретных автономных систем.

2. Разработан функциональный метод локализации для дискретных систем с управлением и/или возмущением.

3. Построена локализация инвариантных компактов в непрерывных системах (ПРТ-система и система Валлиса).

4. Построена локализация (положительно, отрицательно) инвариантных компактов в дискретных автономных системах (логистическая, система Хенона, система Катала).

5. Получены условия существования и метод построения максимального (положительно, отрицательно) инвариантного компакта для дискретных динамических систем, включая системы с управлением и/или возмущением.

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Функциональный метод локализации позволяет проводить качественный анализ широкого класса динамических систем, включая непрерывные автономные и неавтономные системы, а также дискретные системы, в том числе системы, включающие управление и/или возмущение.

2. Функциональный метод локализации для динамических систем разных классов построен на единых принципах, что упрощает его применение.

3. Анализ ряда конкретных систем, проведенный функциональным методом, показывает его эффективность.

4. Функциональный метод позволяет выяснять существование у динамической системы максимального инвариантного компакта, а также предлагает метод его построения, аналогичный методу последовательных приближений.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. **Канатников А.Н. Локализация инвариантных компактов ПРТ-системы // Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки. 2007. № 1. С. 3–18.**
2. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. Estimation of compact invariant sets of nonlinear dynamical systems // 14-th Int. Workshop on Dynamics & Control: abstracts. Moscow-Zvenigorod, 2007. P. 42.
3. **Канатников А.Н. Использование компьютерной алгебры в задаче локализации инвариантных компактов динамической системы // Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки. 2008. № 4. С. 3–15.**
4. Канатников А.Н. Локализация инвариантных компактов неавтономной системы // Дифференциальные уравнения и топология: тез. докл. Международной конференции, посвященной 100-летию Л.С. Понтрягина. М., 2008. С. 136–137.
5. Канатников А.Н., Шельцина М.Н. Локализация инвариантных компактных множеств динамических систем методами компьютерной алгебры // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: тез. докл. X Межд. сем. им. Е.С. Пятницкого. М., 2008. С. 129–131.
6. **Канатников А.Н., Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 1. С. 47–53.**
7. Канатников А.Н., Крищенко А.П. О функциональном методе локализации инвариантных компактов непрерывных динамических систем // Математика. Компьютер. Образование: тез. докл. XVII Межд. конф. Дубна, 2010. С. 26.
8. Канатников А.Н. Локализация инвариантных компактов дискретных динамических систем // Математика. Компьютер. Образование: тез. докл. XVII Межд. конф. Дубна, 2010. С. 25.
9. **Канатников А.Н. Функциональный метод локализации инвариантных компактов для дискретных динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 2. С. 301–302.**
10. **Канатников А.Н. Функциональный метод локализации инвариантных компактов в дискретных системах // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 11. С. 1601–1611.**

11. Канатников А.Н., Коровин С.К., Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов дискретных систем // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 3. С. 323–325.
12. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Инвариантные компакты динамических систем. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 231 с.
13. Канатников А.Н., Коровин С.К., Крищенко А.П. Максимальные инвариантные компакты динамических систем // Докл. РАН. 2011. Т. 437, № 5. С. 609–612.
14. Канатников А.Н., Коровин С.К., Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов дискретных систем с возмущением // Докл. РАН. 2011. Т. 438, № 6. С. 743–746.
15. Канатников А.Н. Локализация инвариантных компактов в дискретных системах // Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки. 2011, № 1. С. 3–17.
16. Канатников А.Н. Локализация робастно инвариантных компактов в дискретных системах с возмущениями // Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки. 2011. № 3. С. 3–19.
17. Канатников А.Н. Локализация инвариантных компактов в неопределенных дискретных системах // Дифференциальные уравнения. 2011, Т. 47, № 7. С. 987–992.
18. Канатников А.Н. Оценки инвариантных компактов в дискретных системах функциональным методом // Межд. конф. по математической теории управления и механике МТУМ-2011: тез. докл. Суздаль, 2011. С. 86–87.
19. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Оценка положения инвариантных компактов в неавтономных непрерывных динамических системах // Межд. конф. по математической теории управления и механике МТУМ-2011: тез. докл. Суздаль, 2011. С. 88–90.
20. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. Localization of compact invariant sets of discrete-time nonlinear systems // Int. J. of Bifurcation and Chaos, 2011. V. 21, No 7. P. 2057–2065.
21. Krishchenko A.P., Kanatnikov A.N. Maximal compact positively invariant sets of discrete-time nonlinear systems // IFAC 18th World Congress: proceedings. Milan, 2011, P. 12521–12525.

22. Канатников А.Н., Коровин С.К., Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов дискретных систем с управлением // Докл. РАН. 2011. Т. 441, № 4. С. 460–463.