

Н. И. Мерцаловъ.

Прикладная

БИБЛИОТЕКА
ИМПЕРАТОРСКАГО
МОСКОВСКАГО
ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА

Механика.

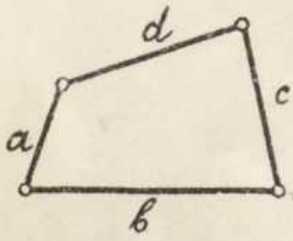
✓
136086
Провер. 1935

1845
Выпускъ III (временный).

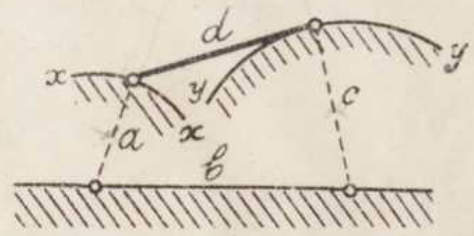
Атласъ чертежей.

МОСКВА,
Типо-Литографія И. Х. КАВЫКИНА. Ст. Басманная, д. № 16. Телеф. 68-89.
1911 г.

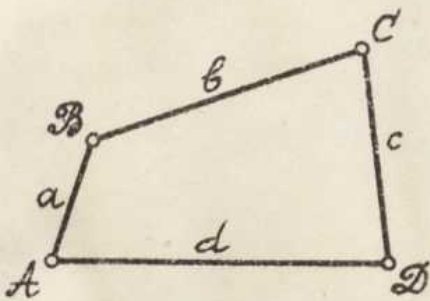
261



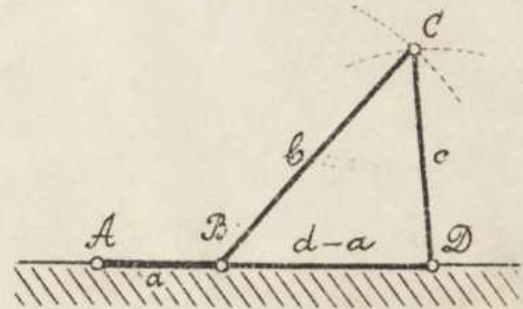
Фиг. 1.



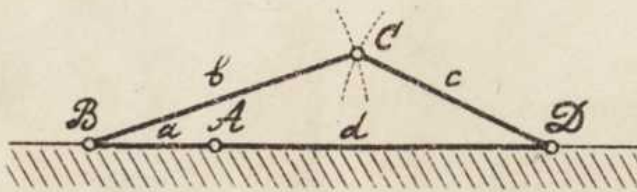
Фиг. 2.



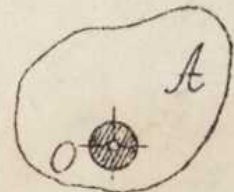
Фиг. 3.



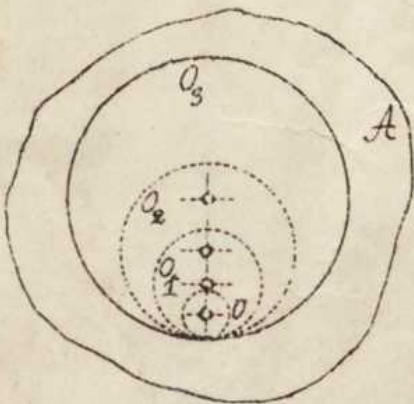
Фиг. 4.



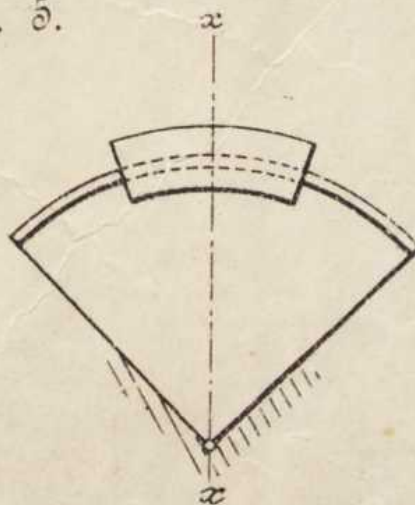
Фиг. 5.



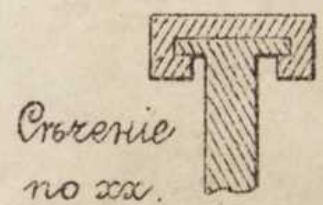
Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8



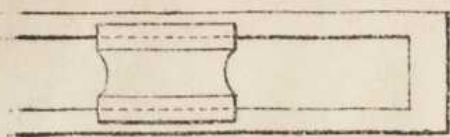


Fig. 9.

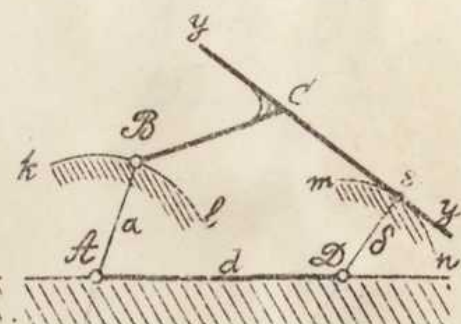
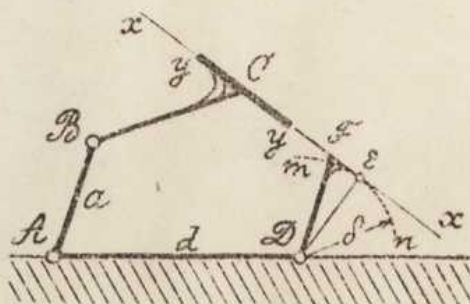
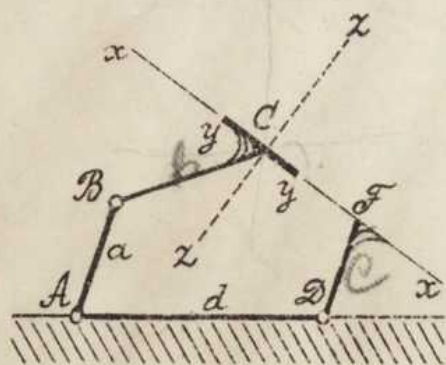


Fig. 10.

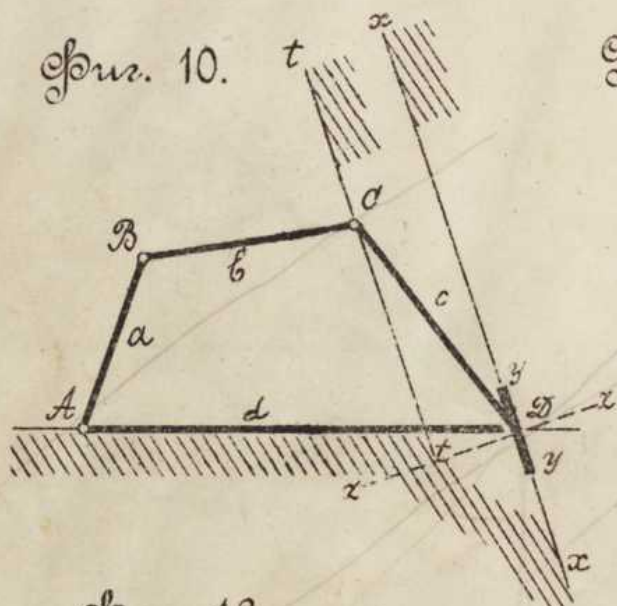


Fig. 11.

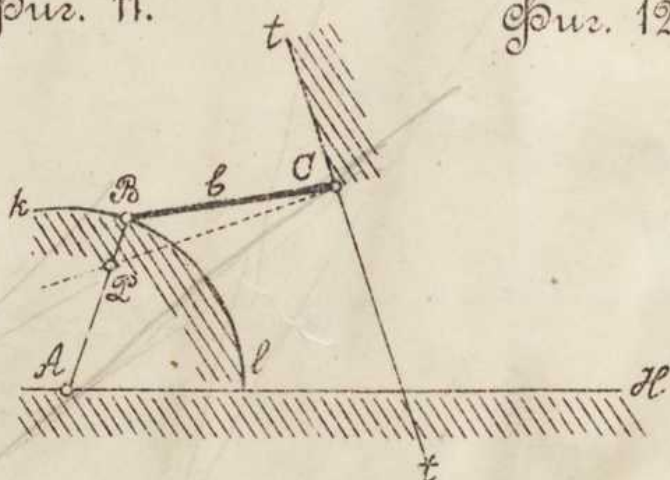


Fig. 12.

Fig. 13.

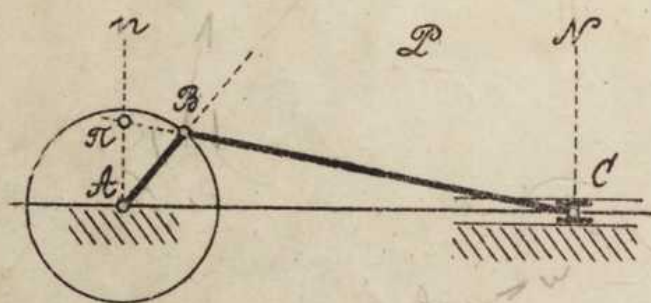


Fig. 14.

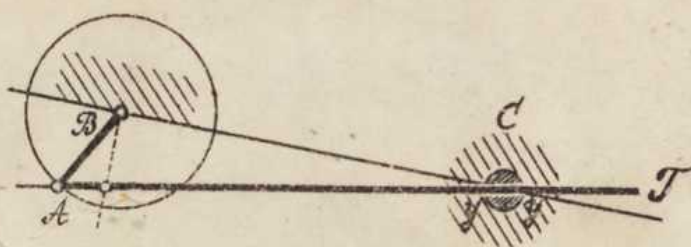


Fig. 15.

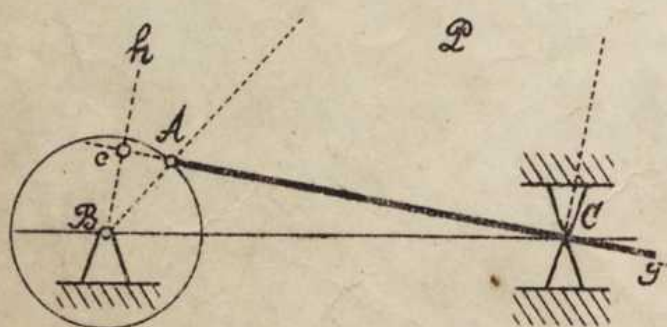


Fig. 16.

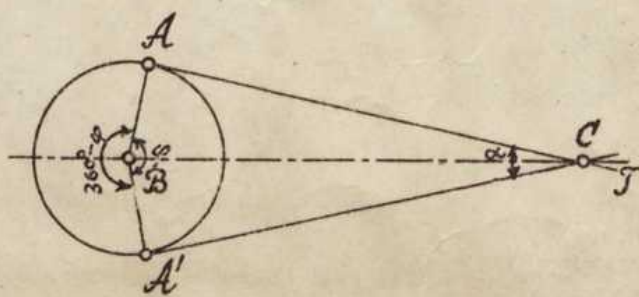
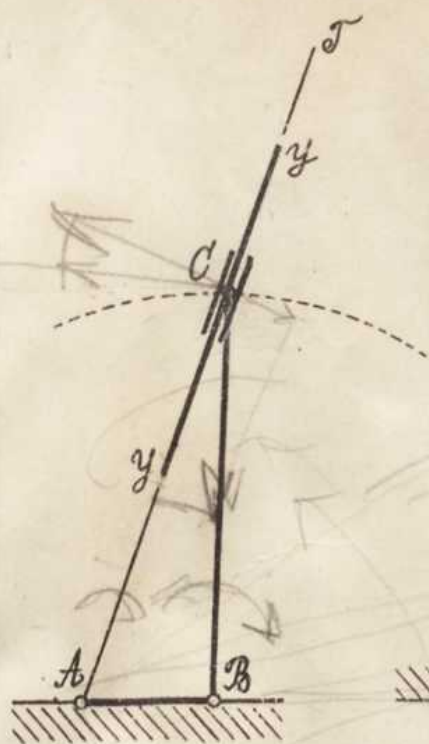
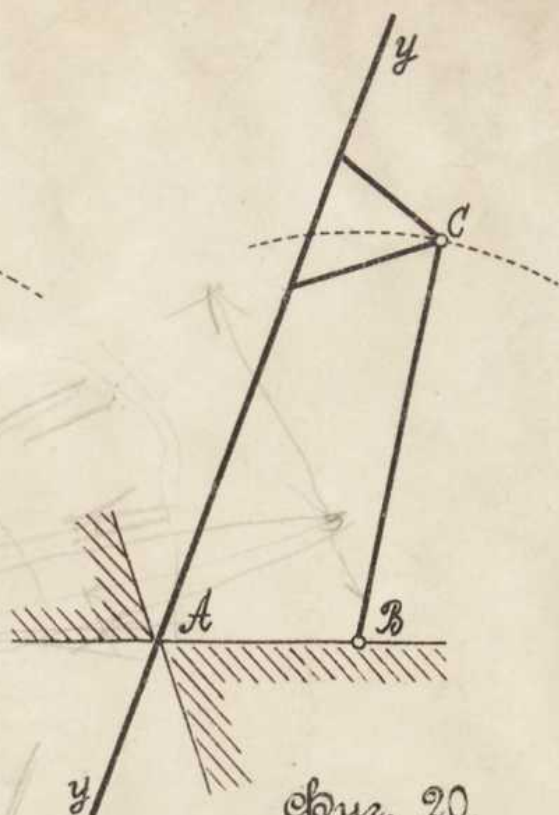


Fig. 17.

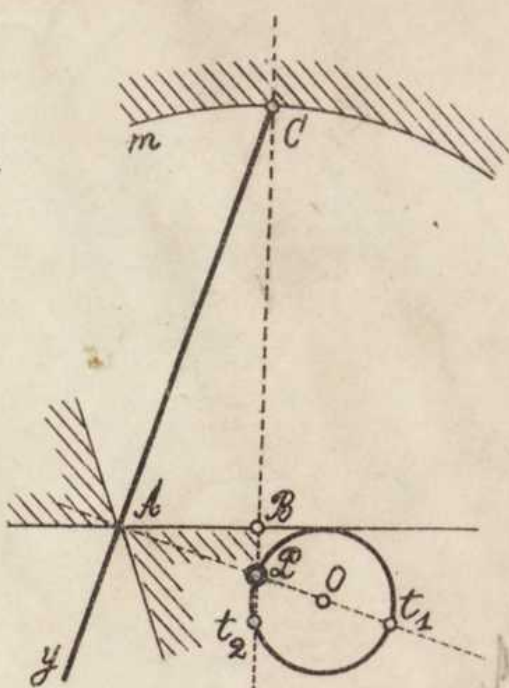
Fig. 18.



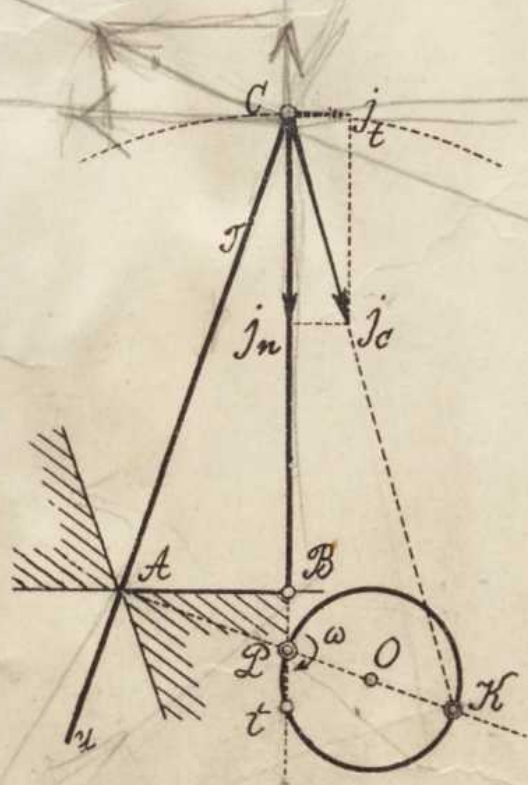
Four. 19.



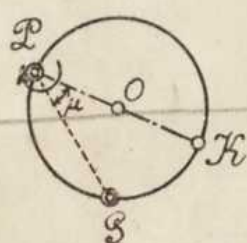
Apr. 20.



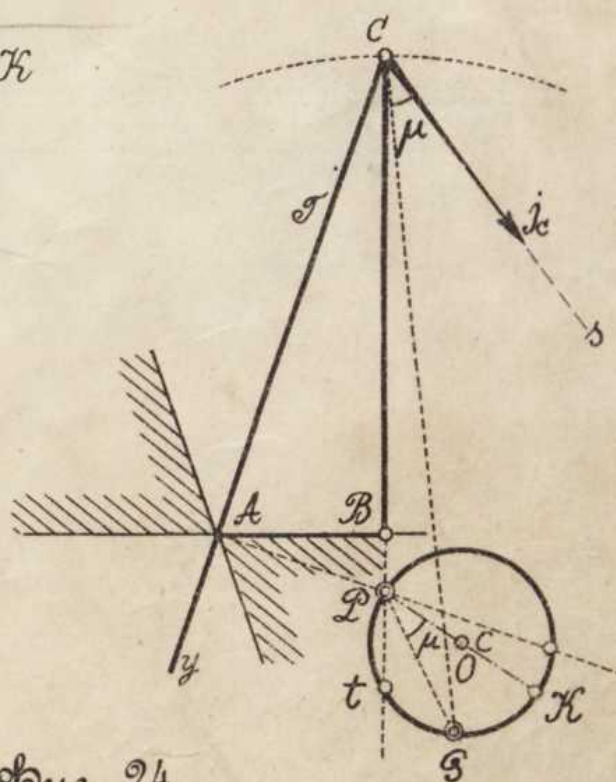
Four, 21.



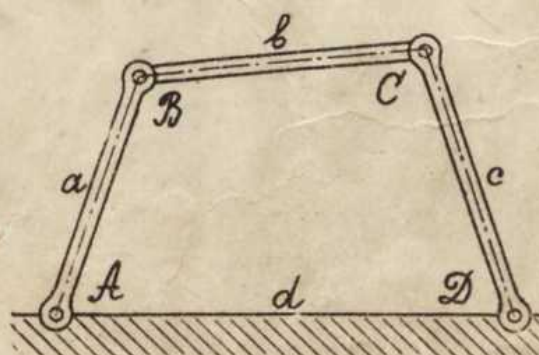
Aug. 22.



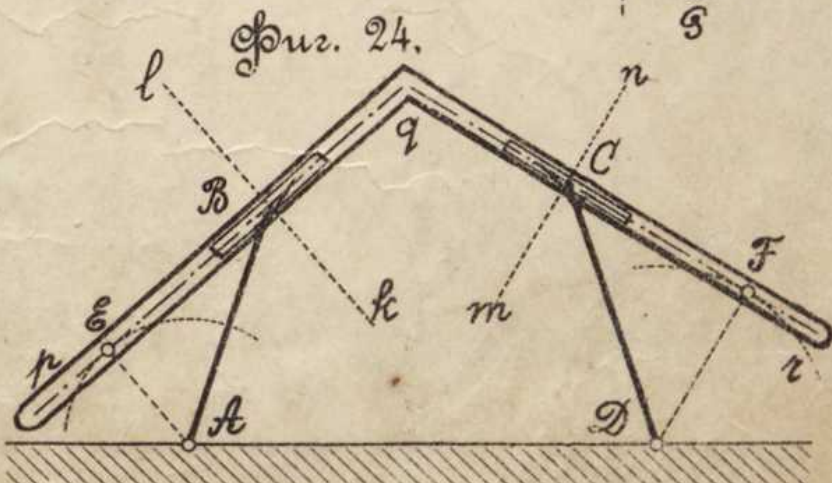
Jun. 23.



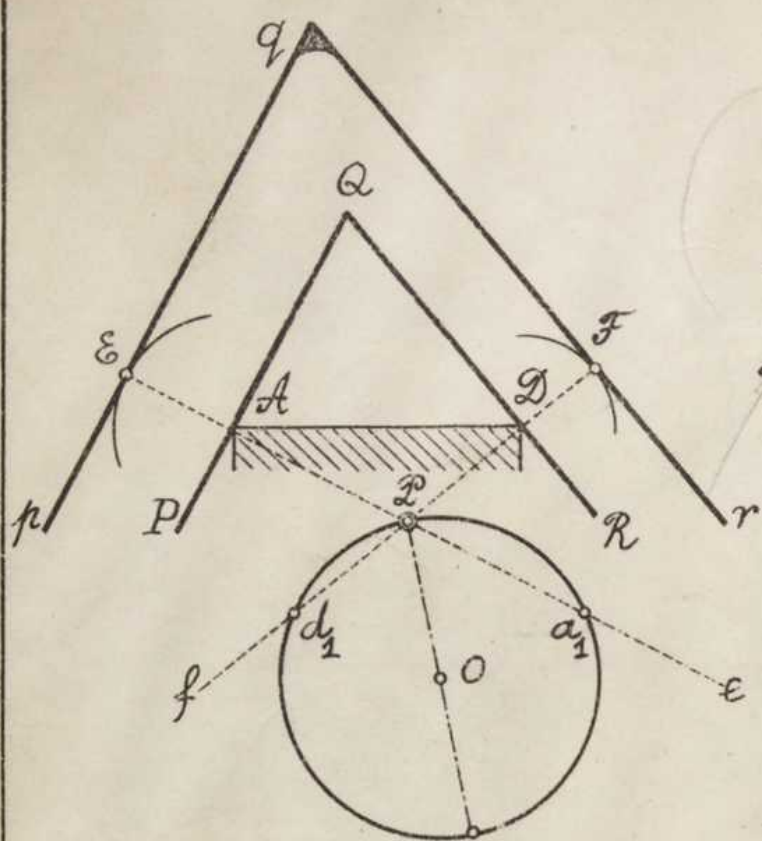
Физ. 24.



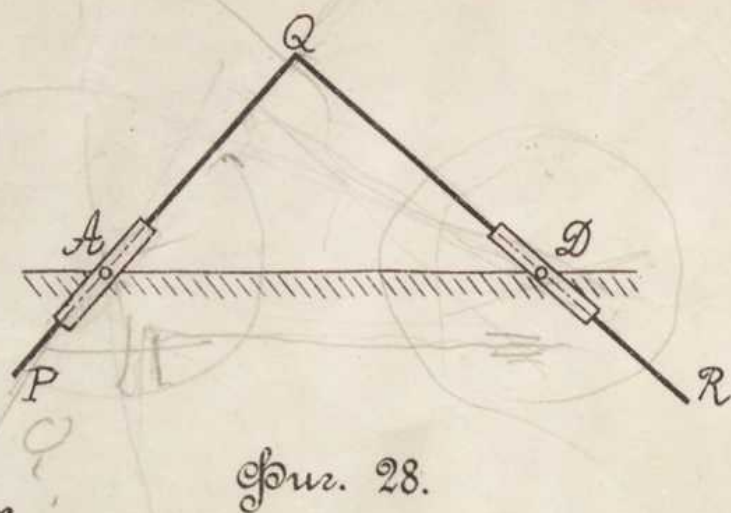
Sur. 25.



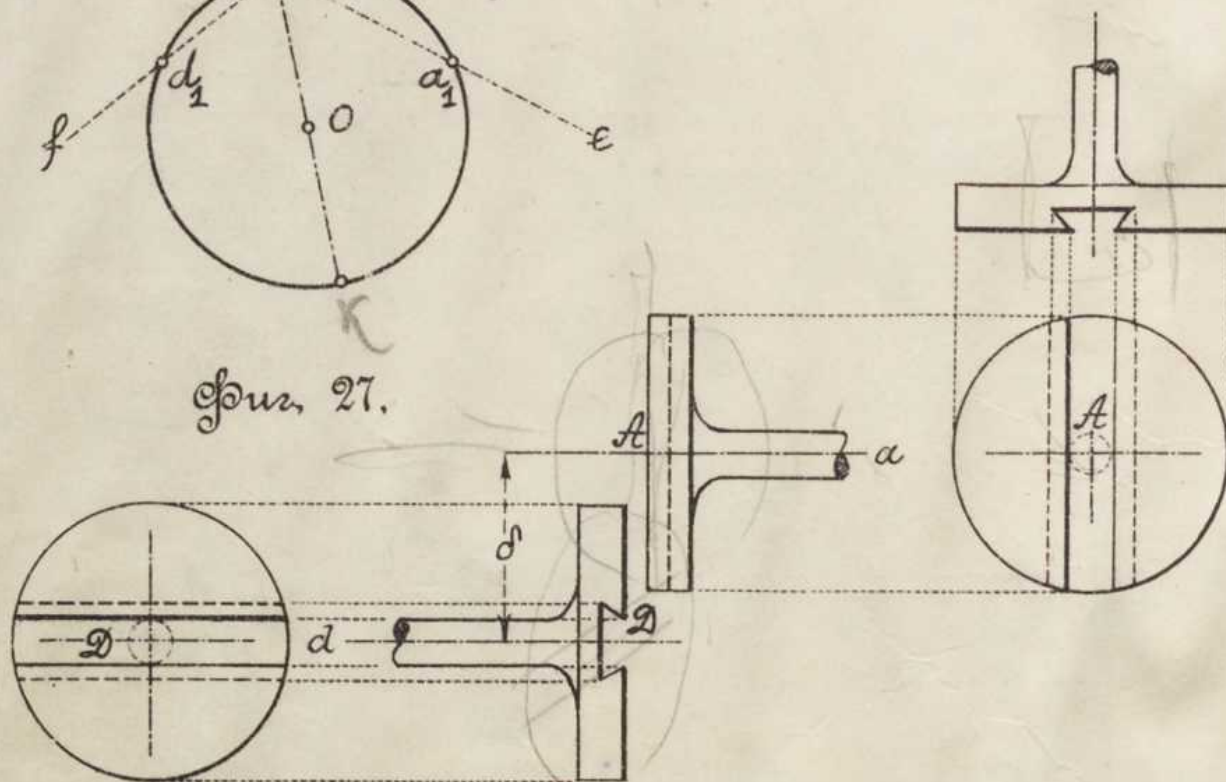
June. 26



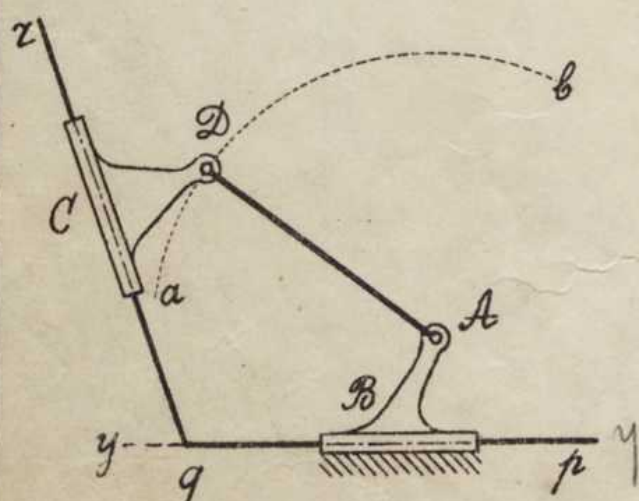
Фиг. 27.



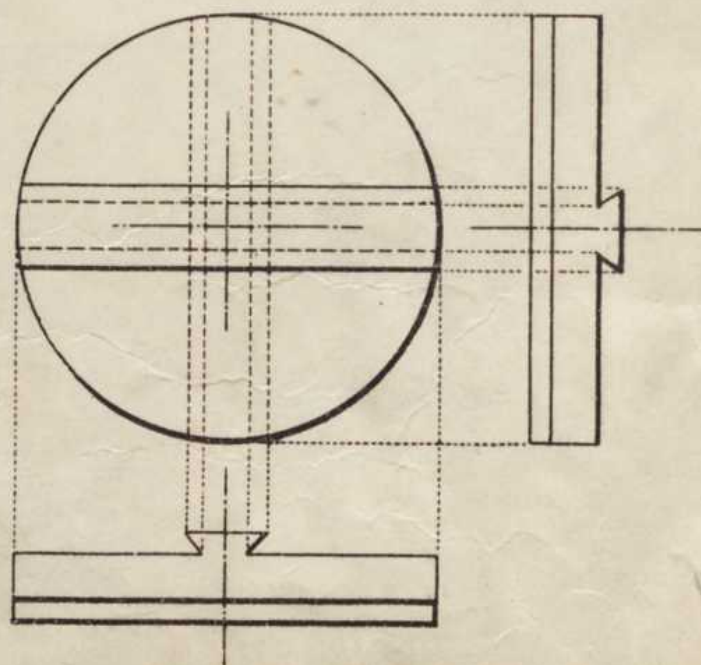
Фиг. 28.



Фиг. 29.

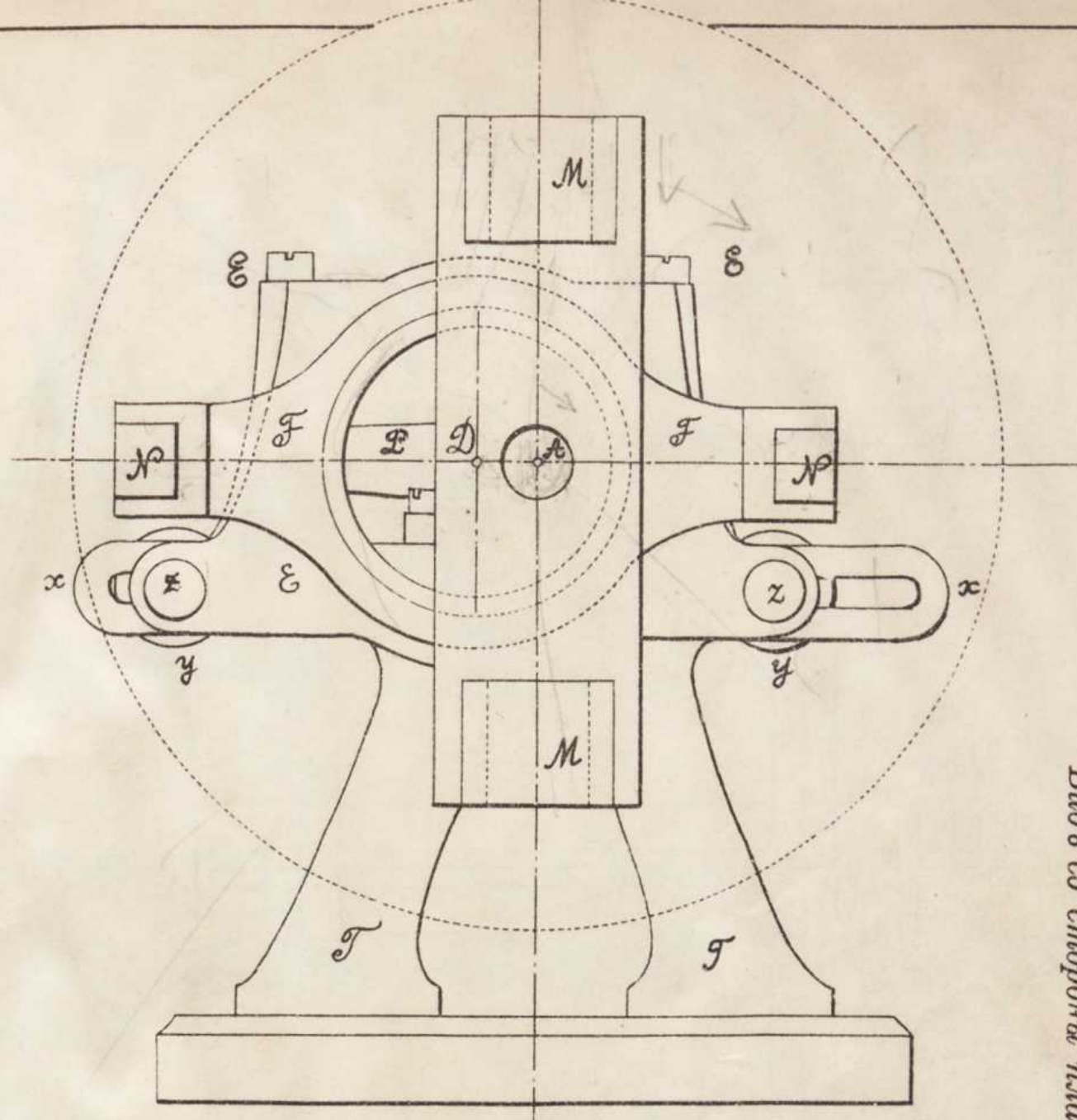


Фиг. 32.

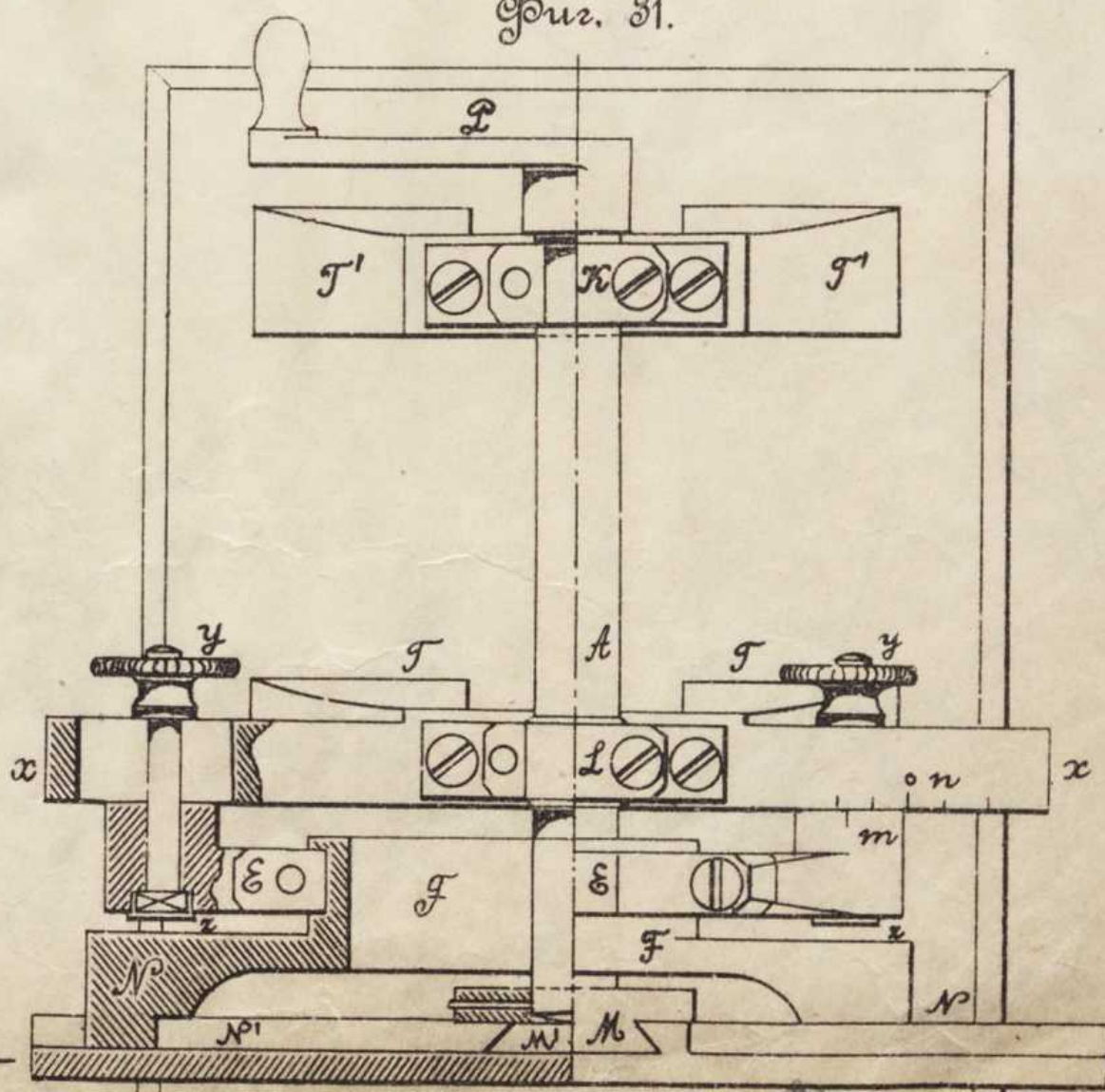


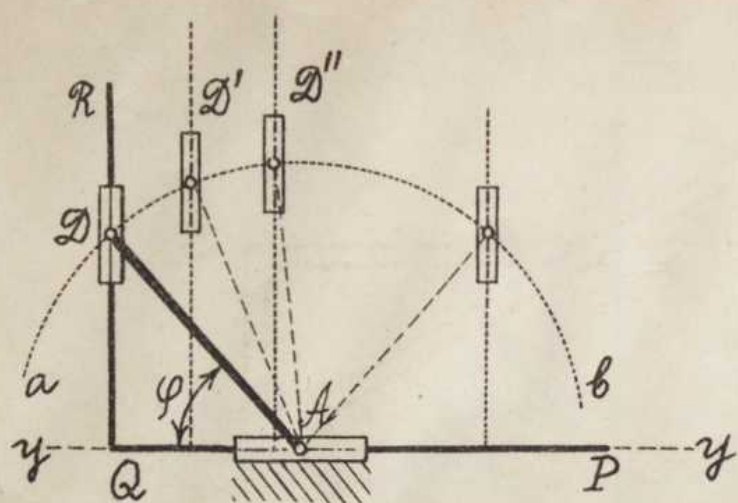
Фиг. 30.

Видъ со стороны планшайды, - сама планшайда снята.

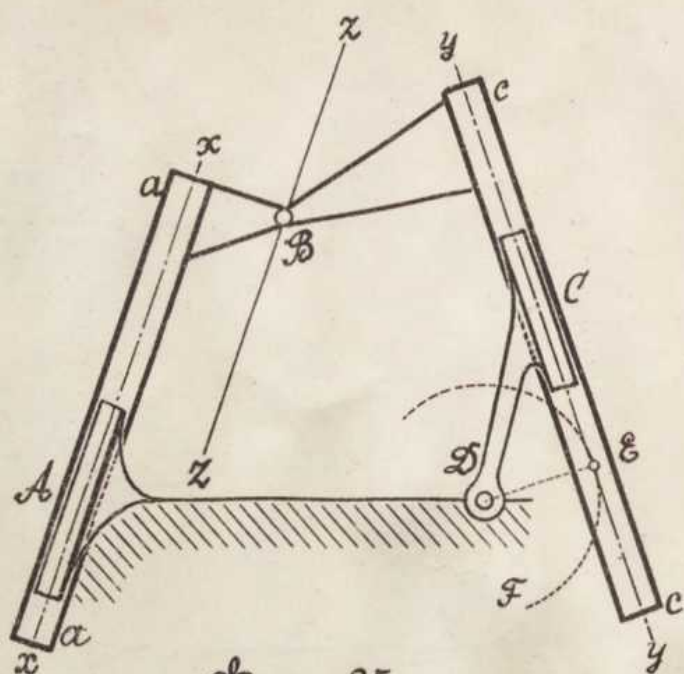


Фиг. 31.

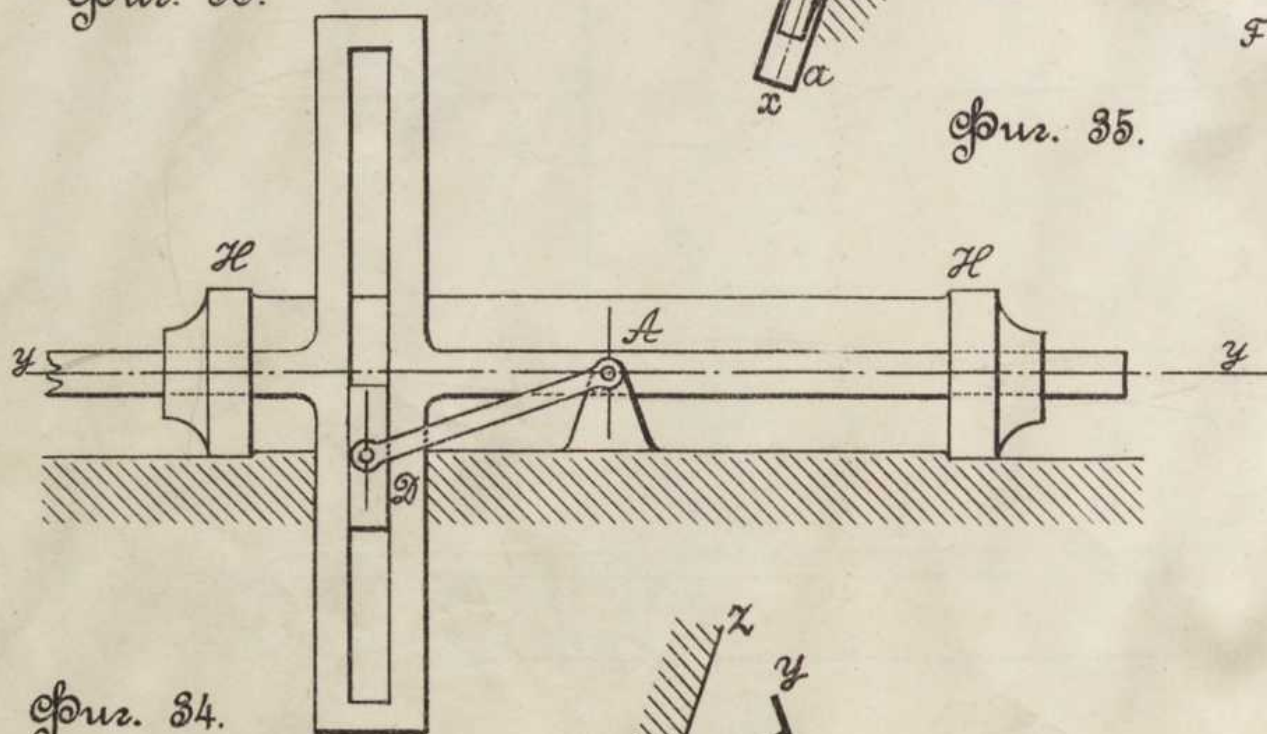




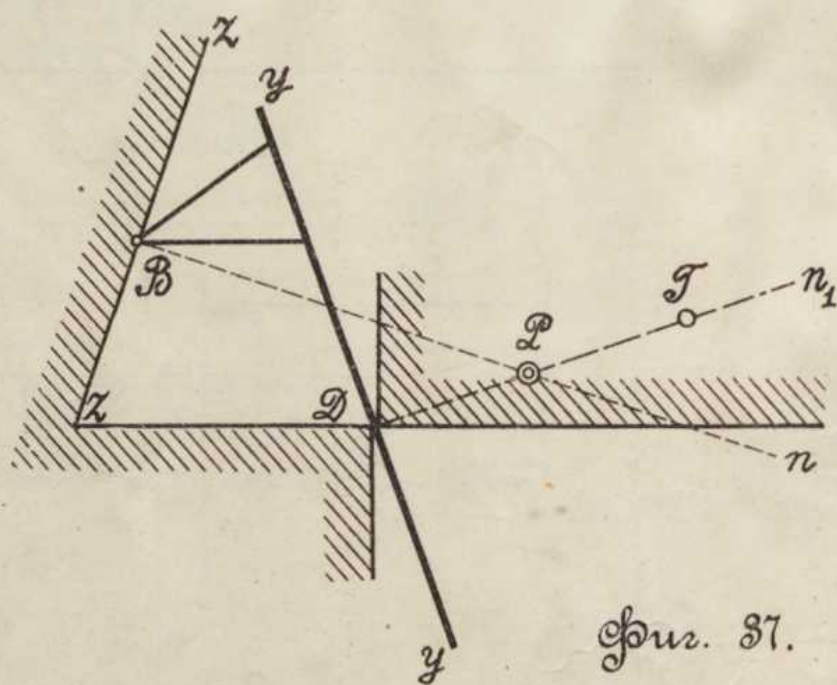
Фиг. 33.



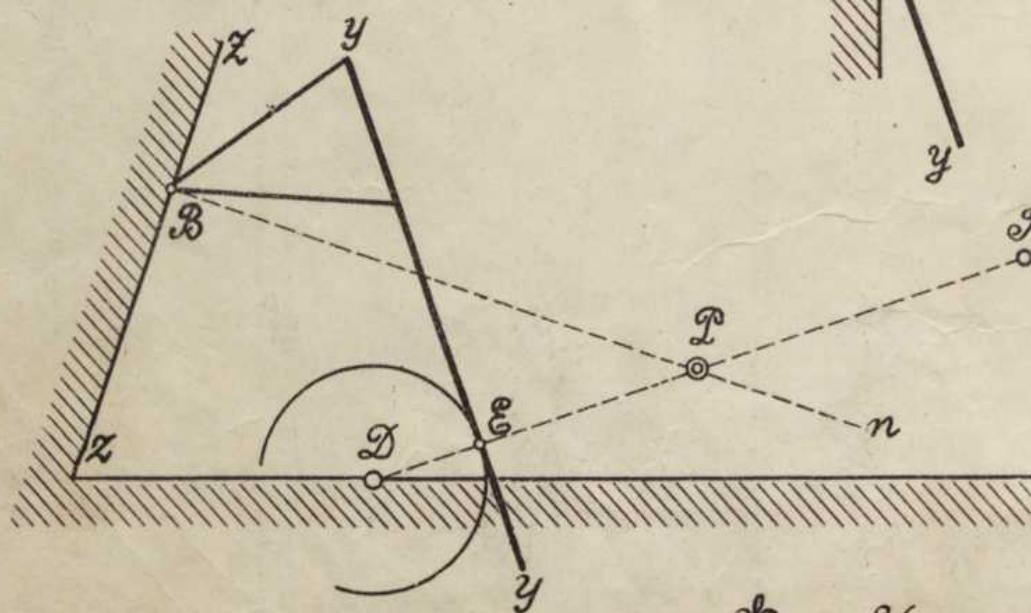
Фиг. 35.



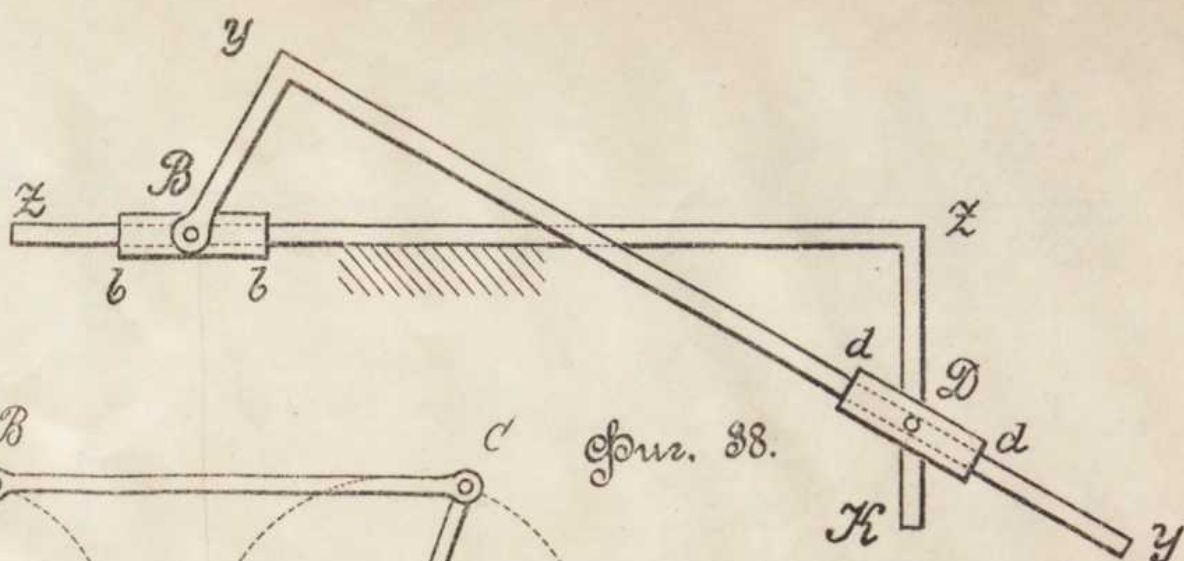
Фиг. 34.



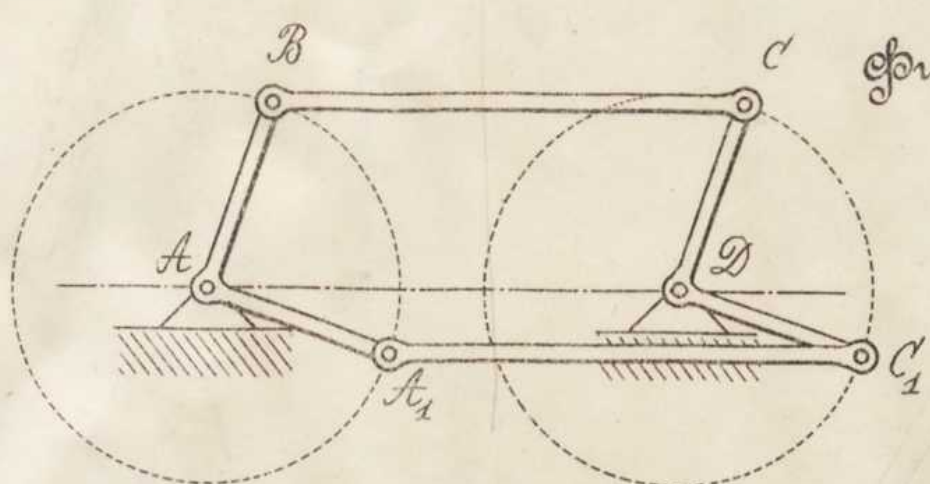
Фиг. 37.



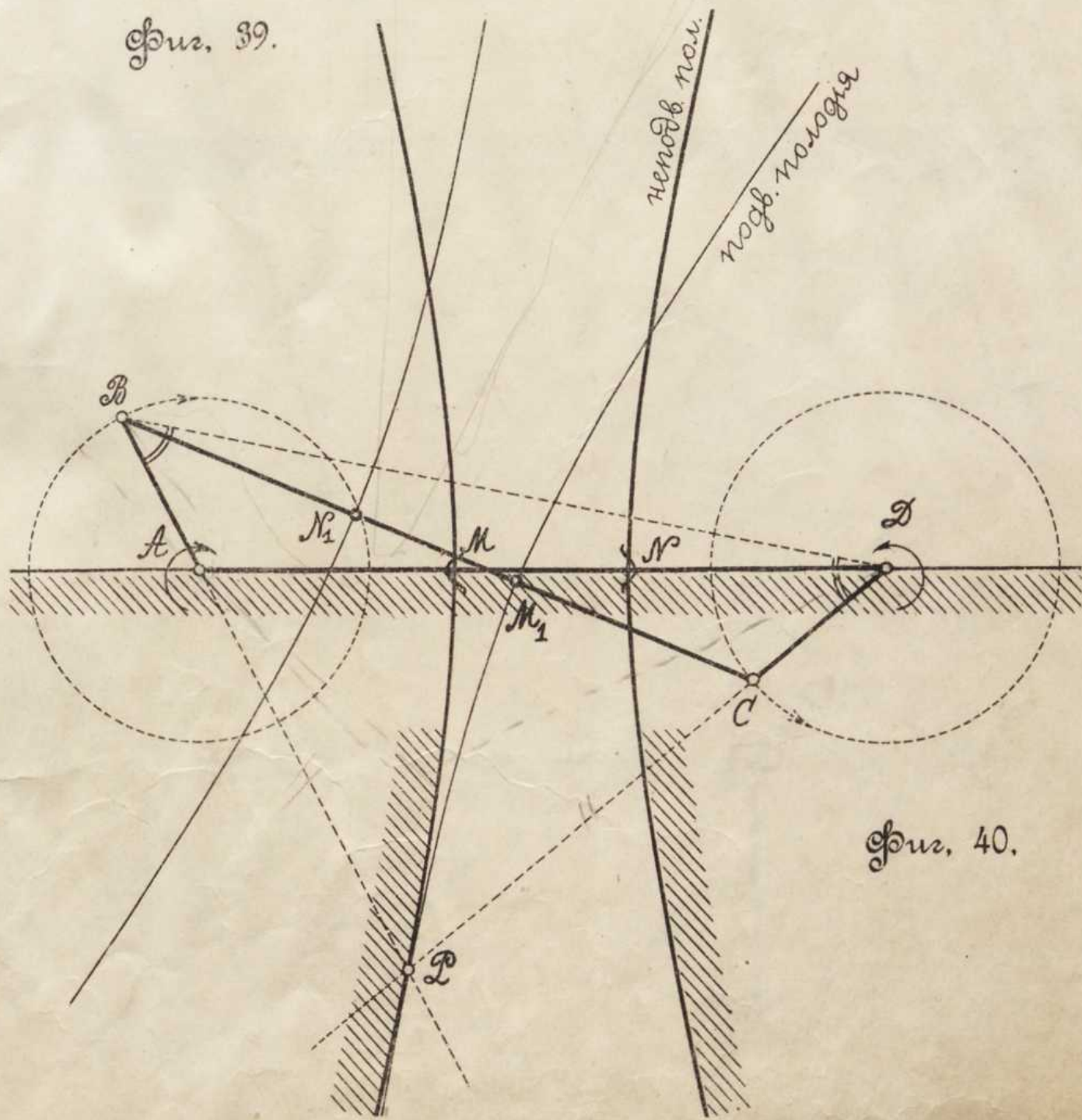
Фиг. 36.



Фиг. 38.



Фиг. 39.



Фиг. 40.

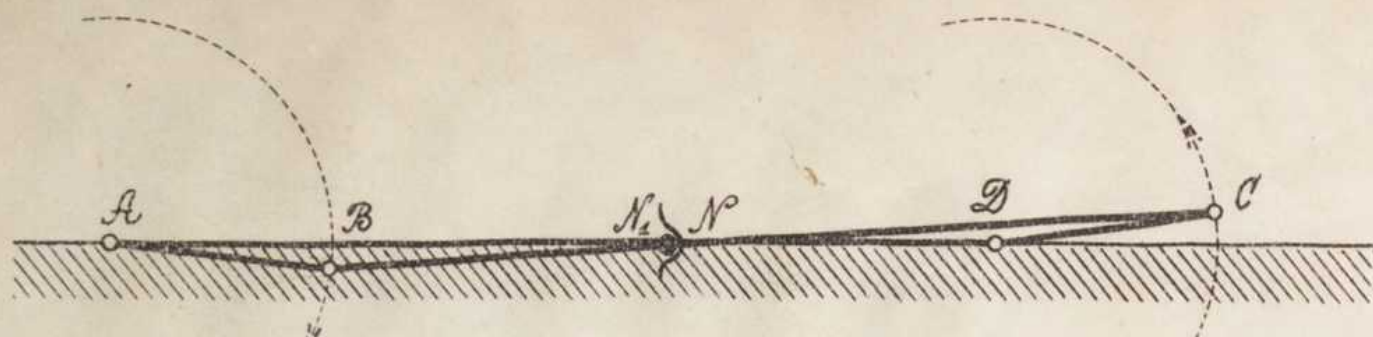


Fig. 41.

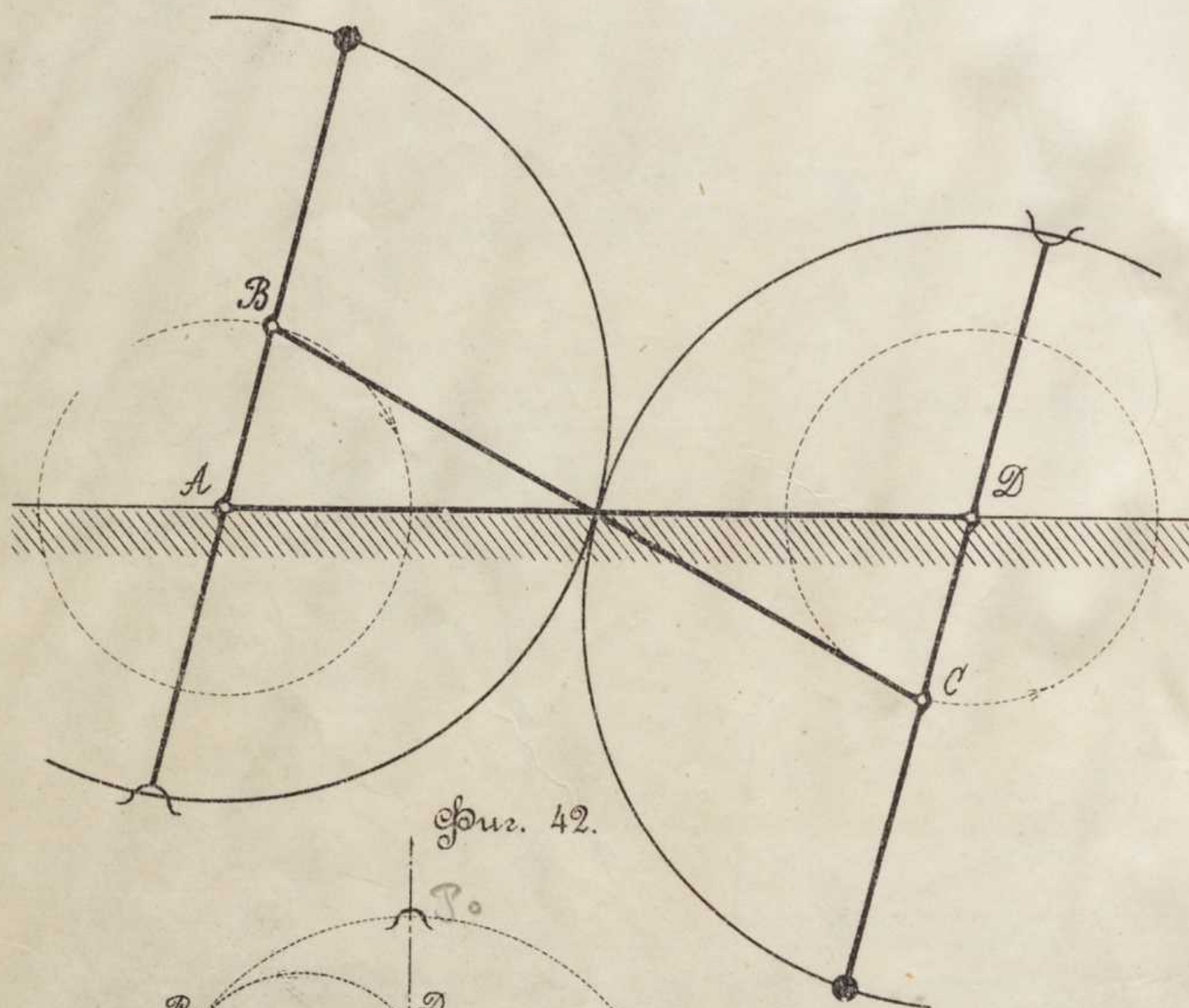


Fig. 42.

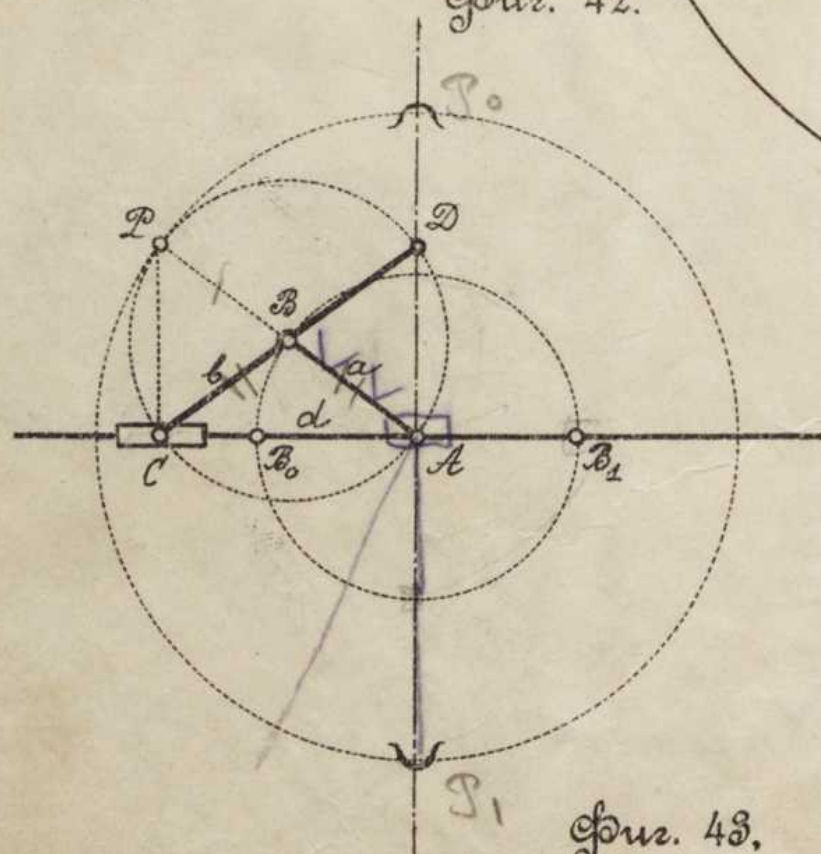
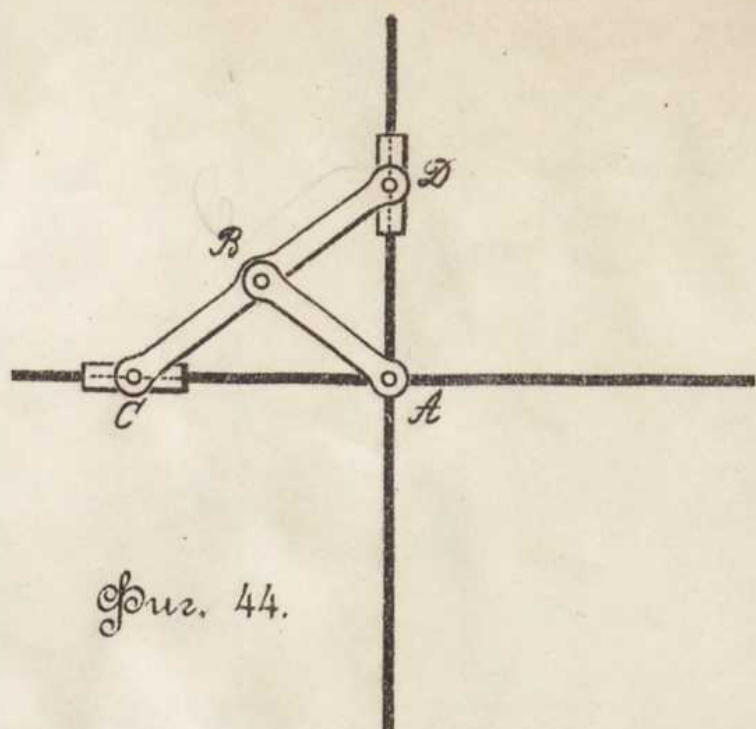
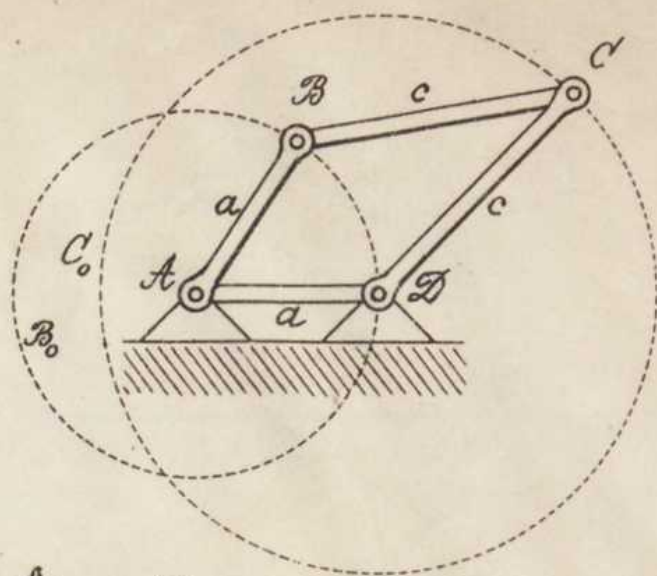


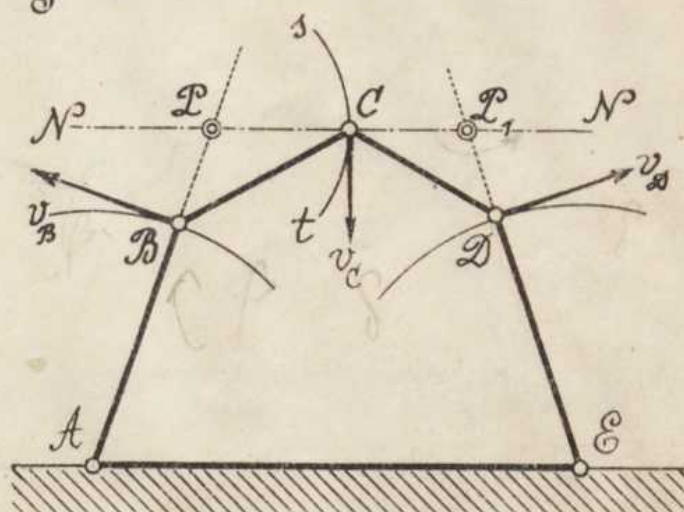
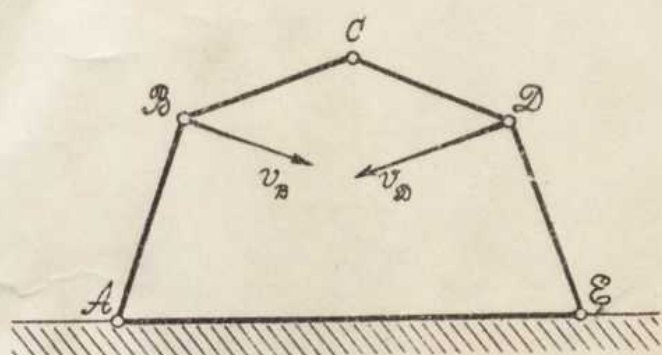
Fig. 43.



Фиг. 44.

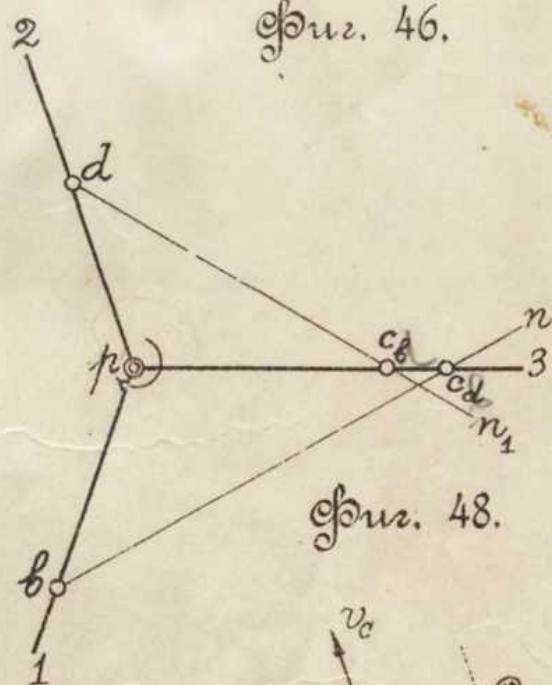


Фиг. 45.

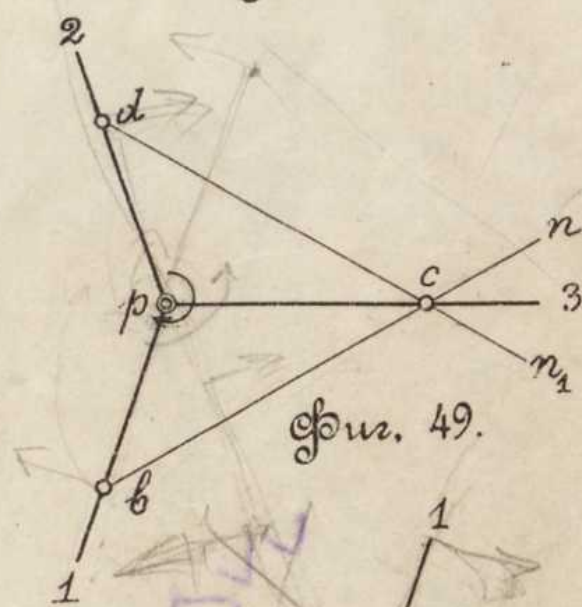


Фиг. 46.

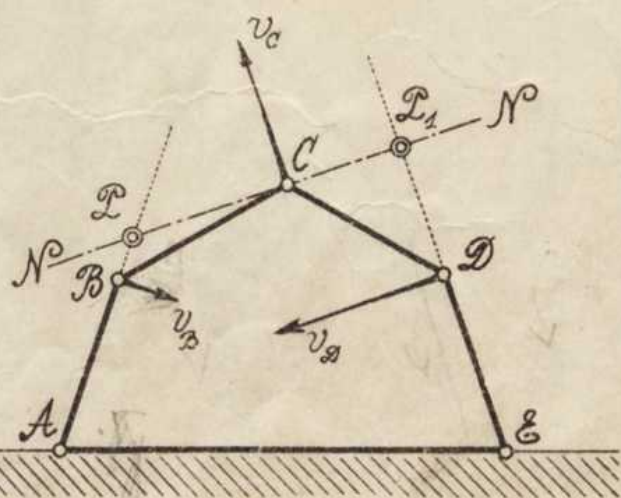
Фиг. 47.



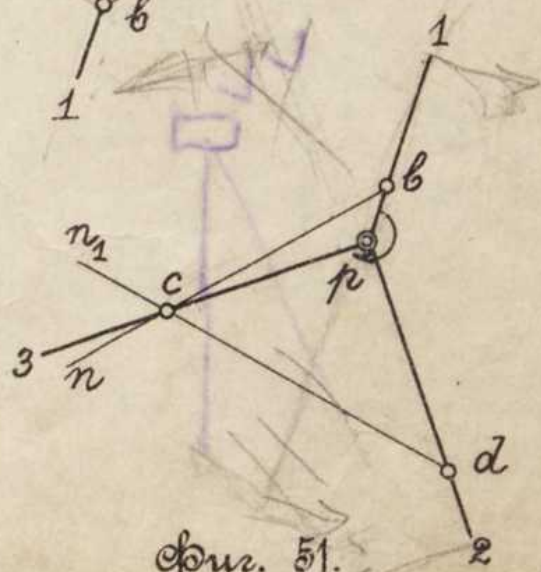
Фиг. 48.



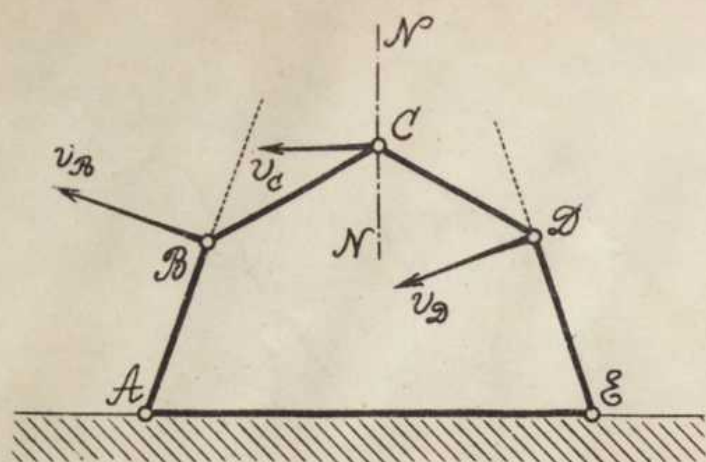
Фиг. 49.



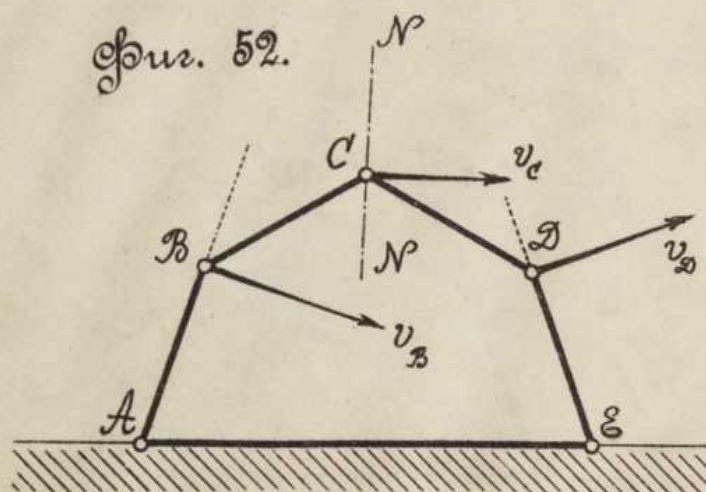
Фиг. 50.



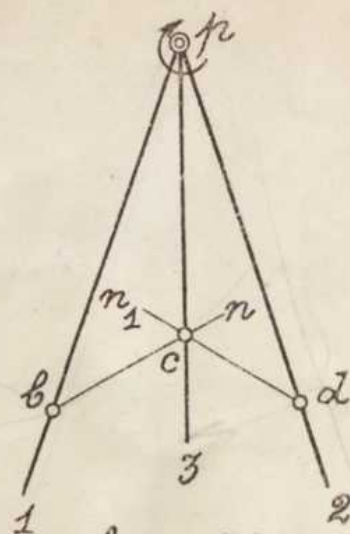
Фиг. 51.



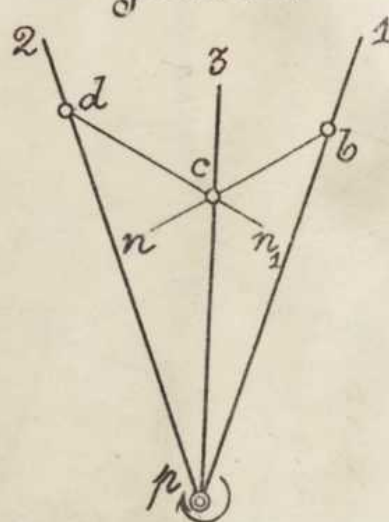
Зур. 52.



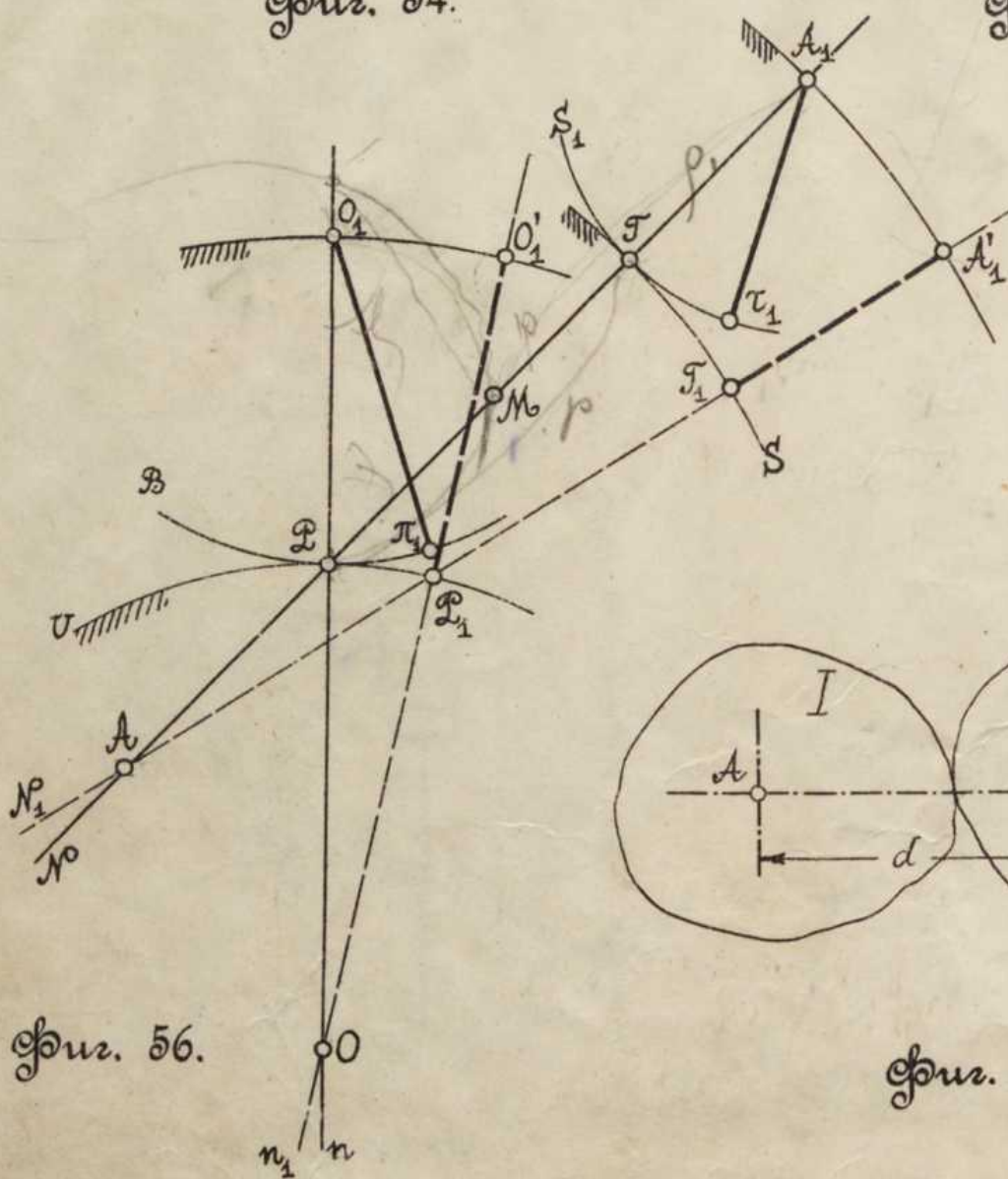
Зур. 54.



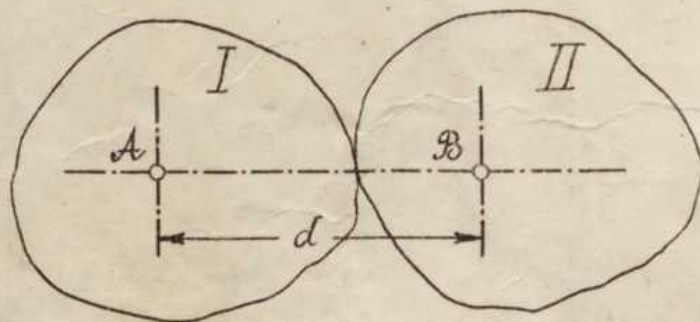
Зур. 53.



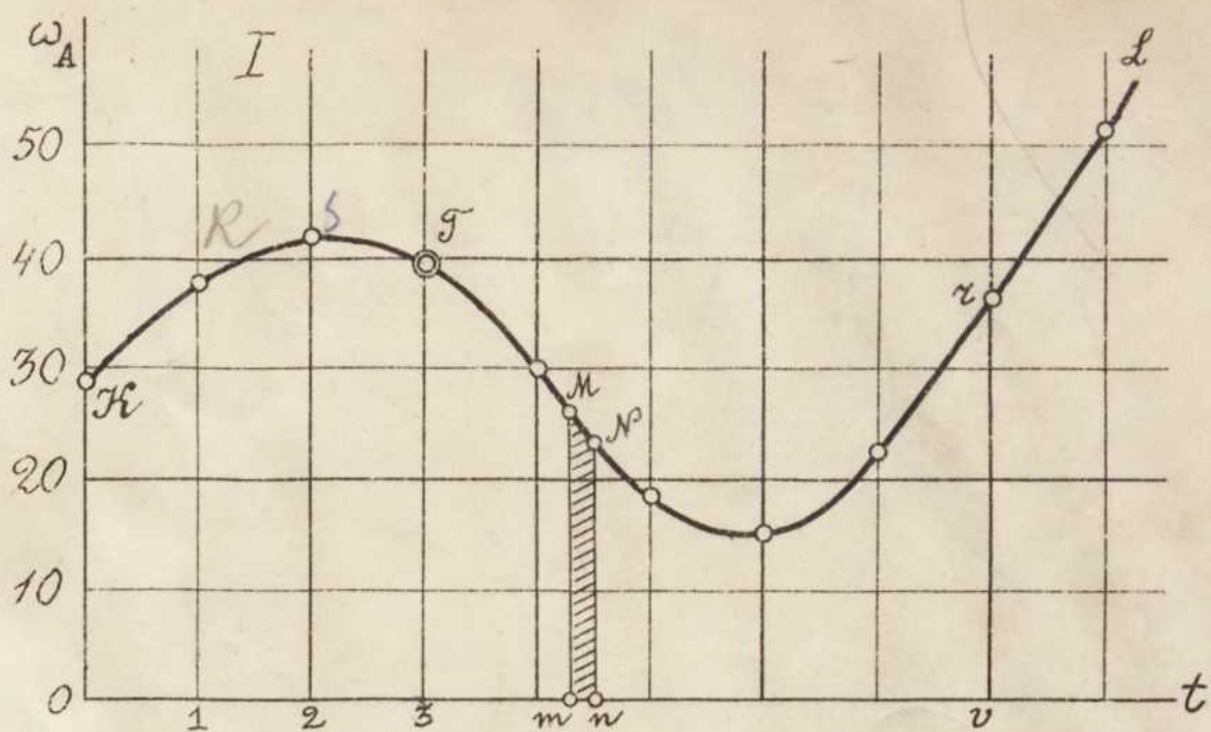
Зур. 55.



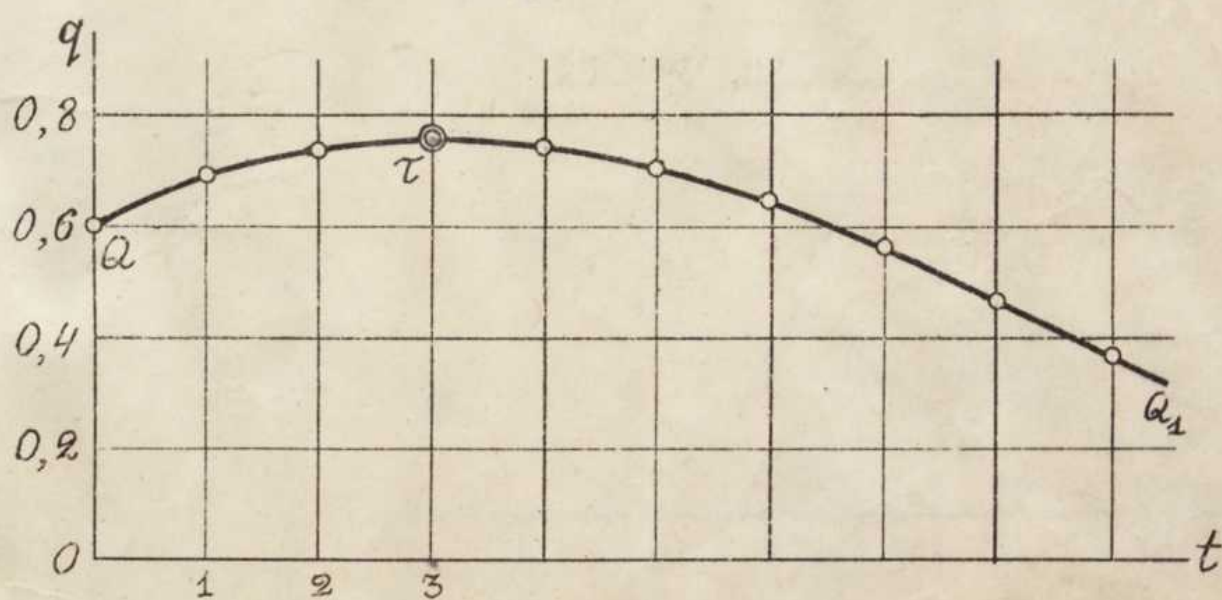
Зур. 56.



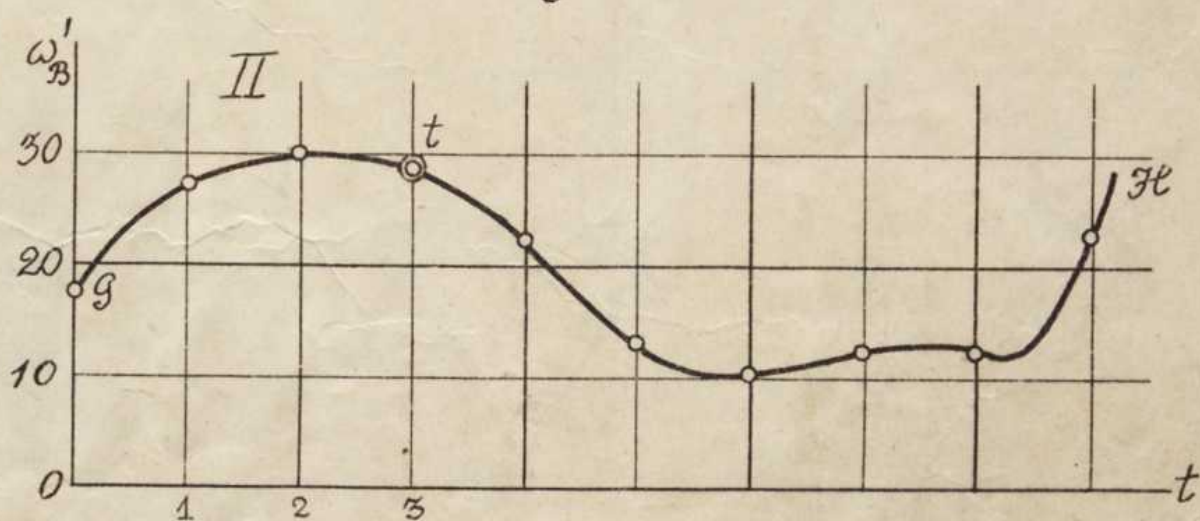
Зур. 57.



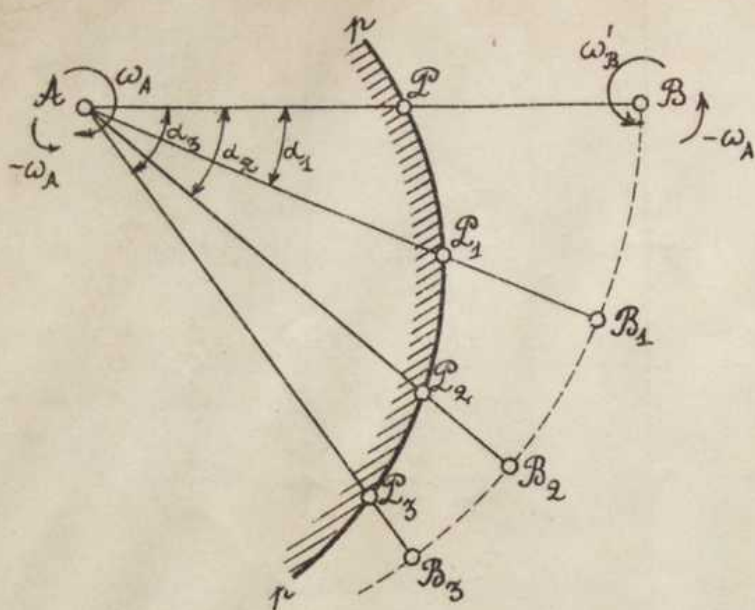
Физ. 58.



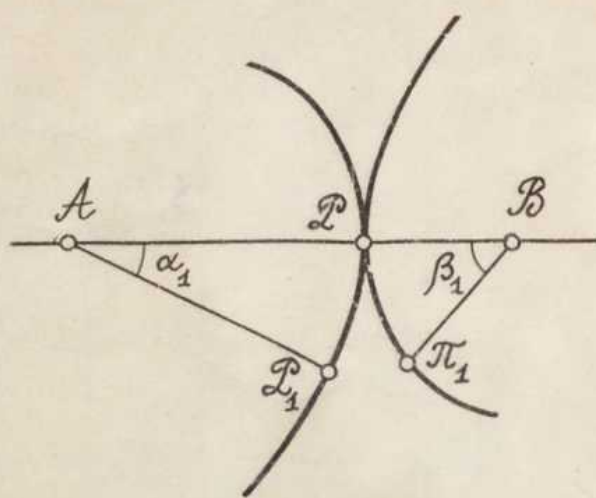
Физ. 58.



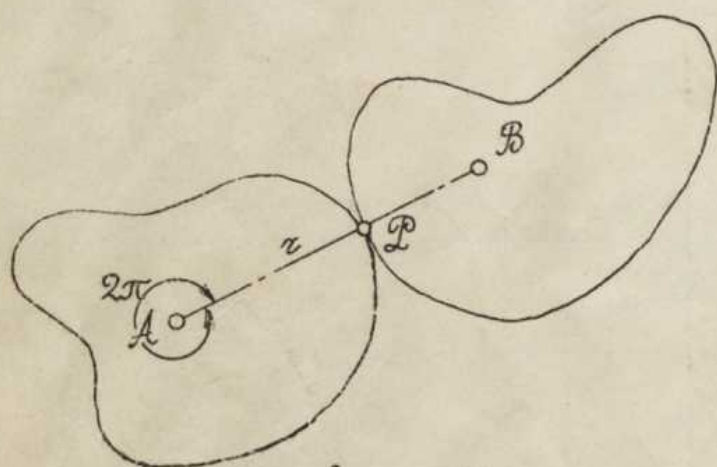
Физ. 59.



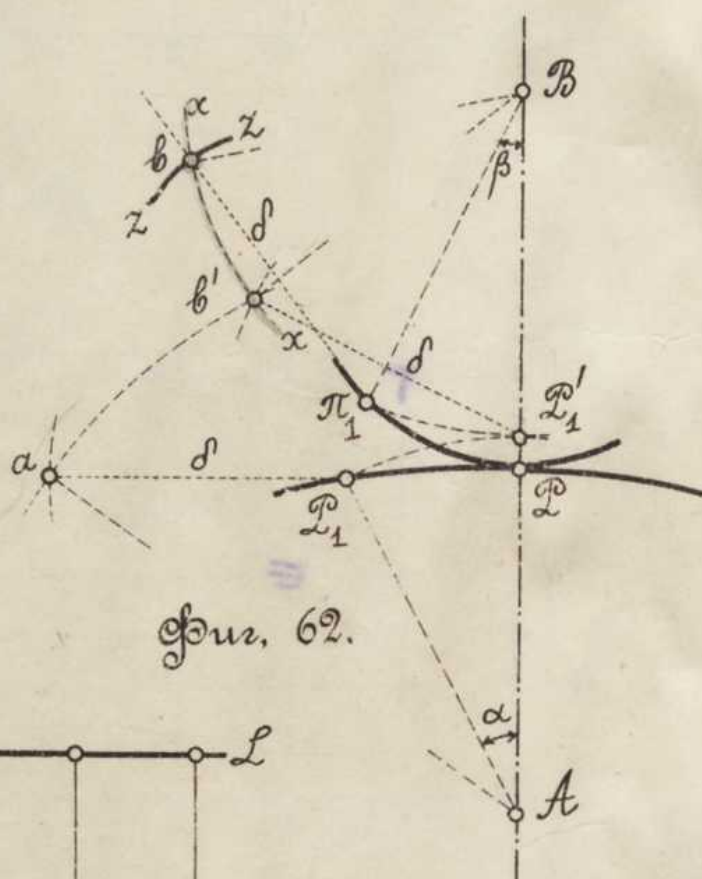
Фиг. 60.



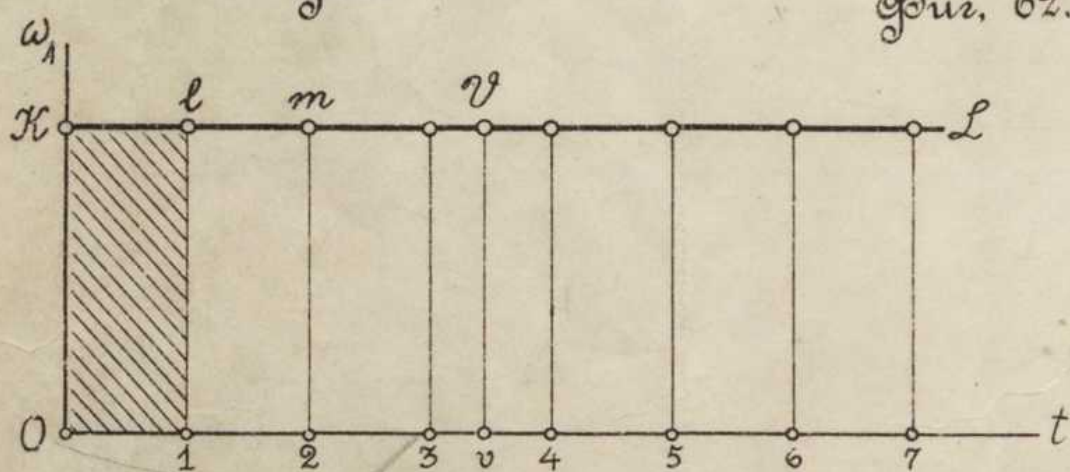
Фиг. 61.



Фиг. 63.



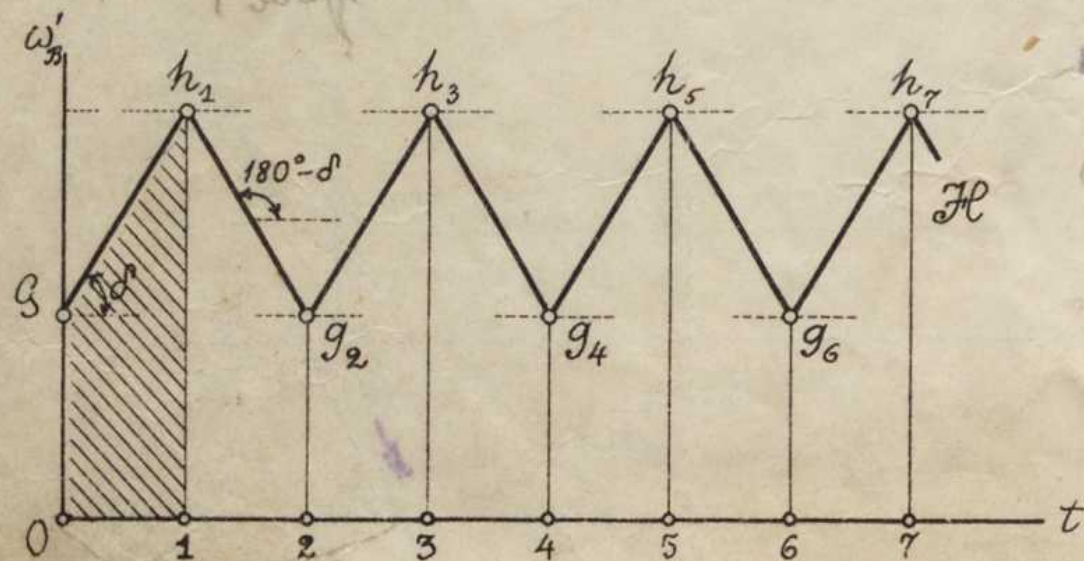
Фиг. 62.



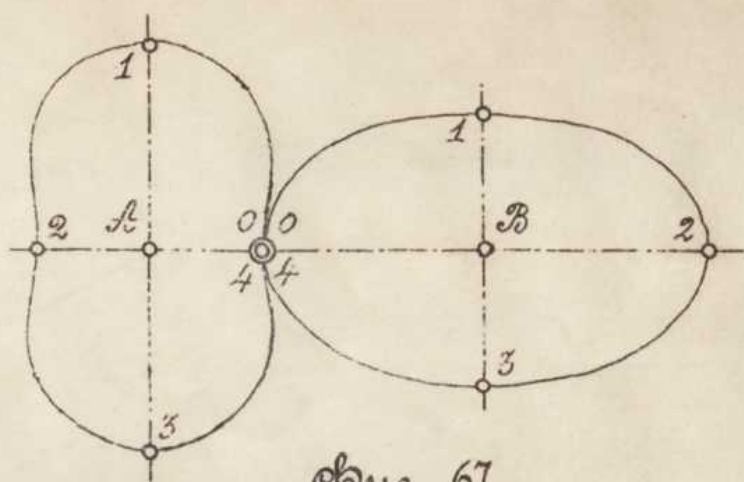
Фиг. 65.

Фиг. 64.

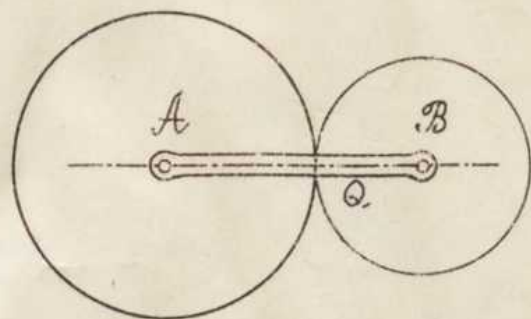
куда все она
уехала?



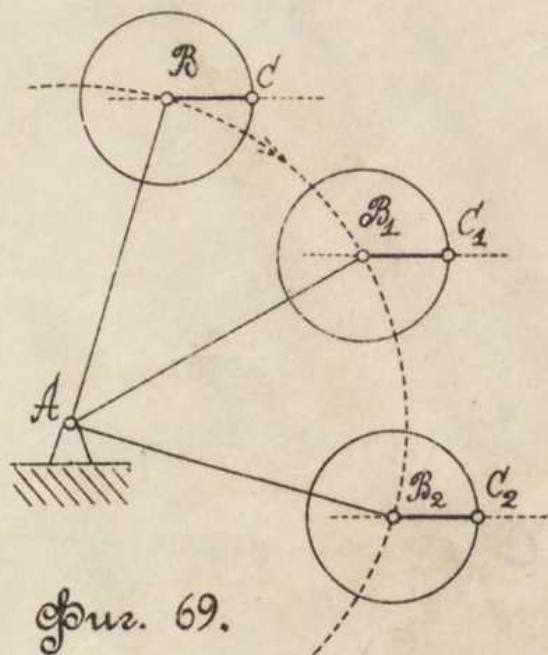
Фиг. 66.



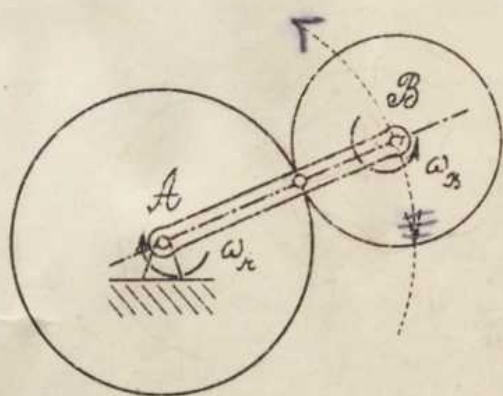
Фиг. 67.



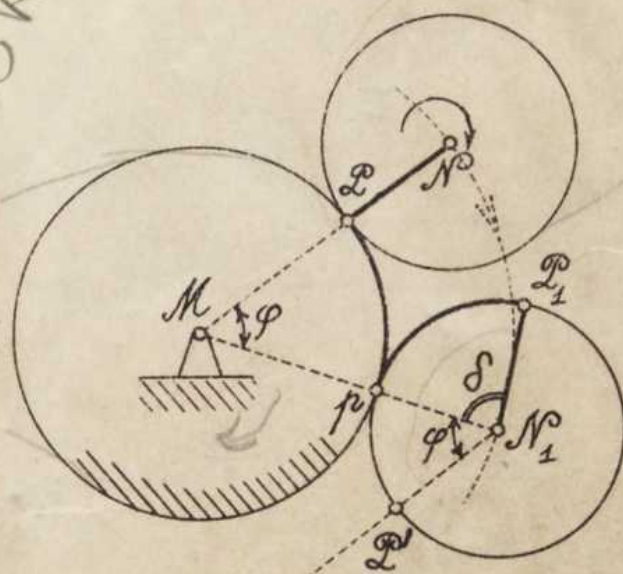
Фиг. 68.



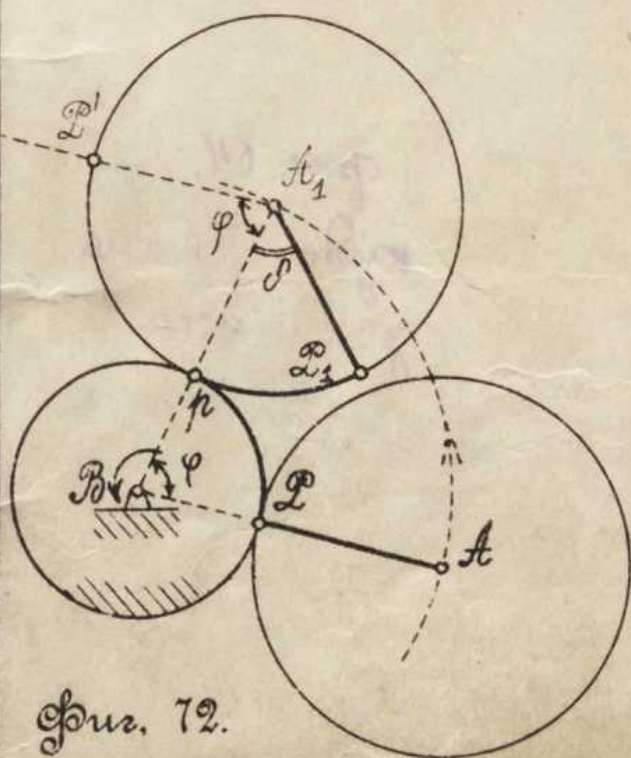
Фиг. 69.



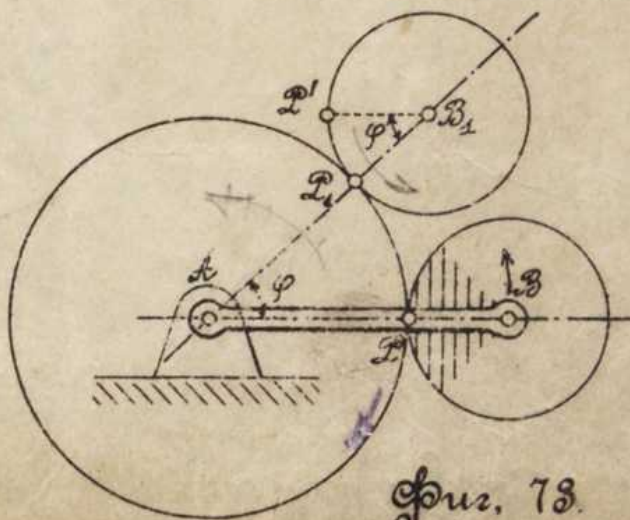
Фиг. 71.



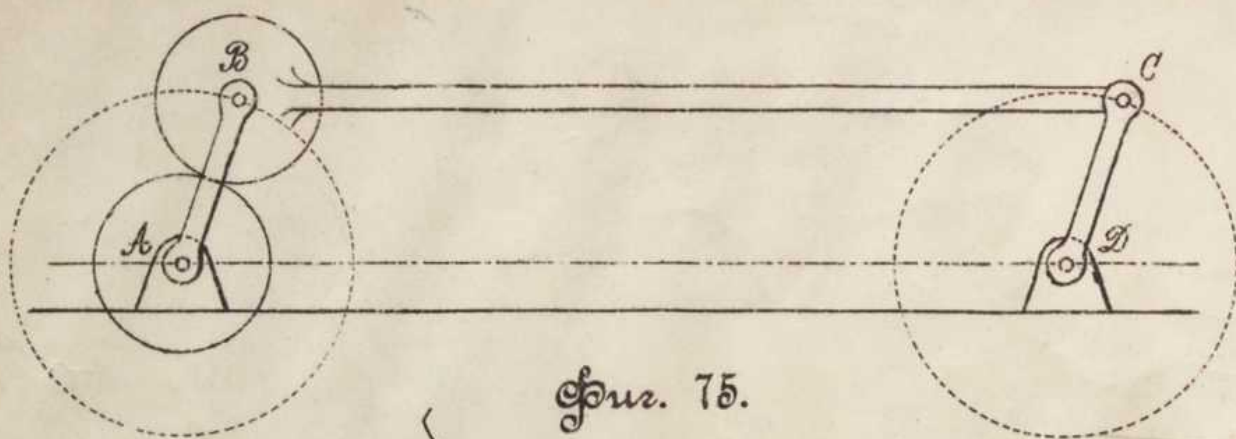
Фиг. 70.



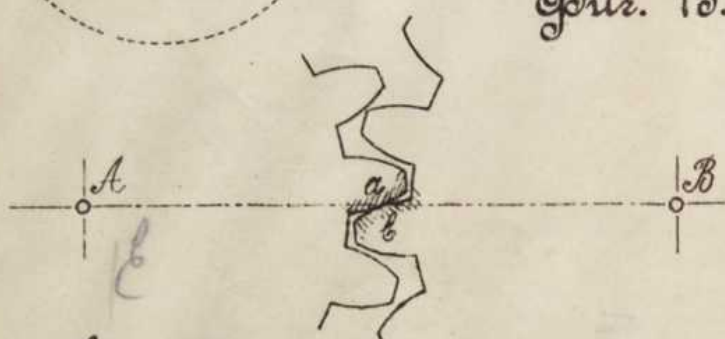
Фиг. 72.



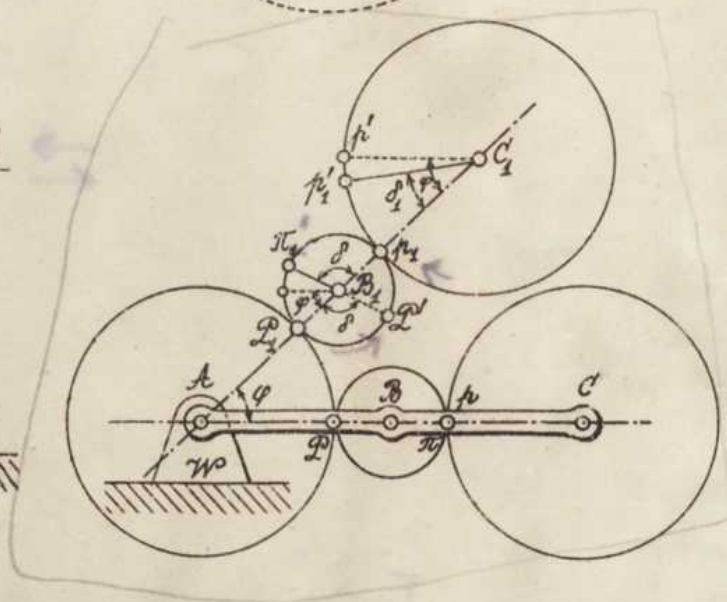
Фиг. 73.



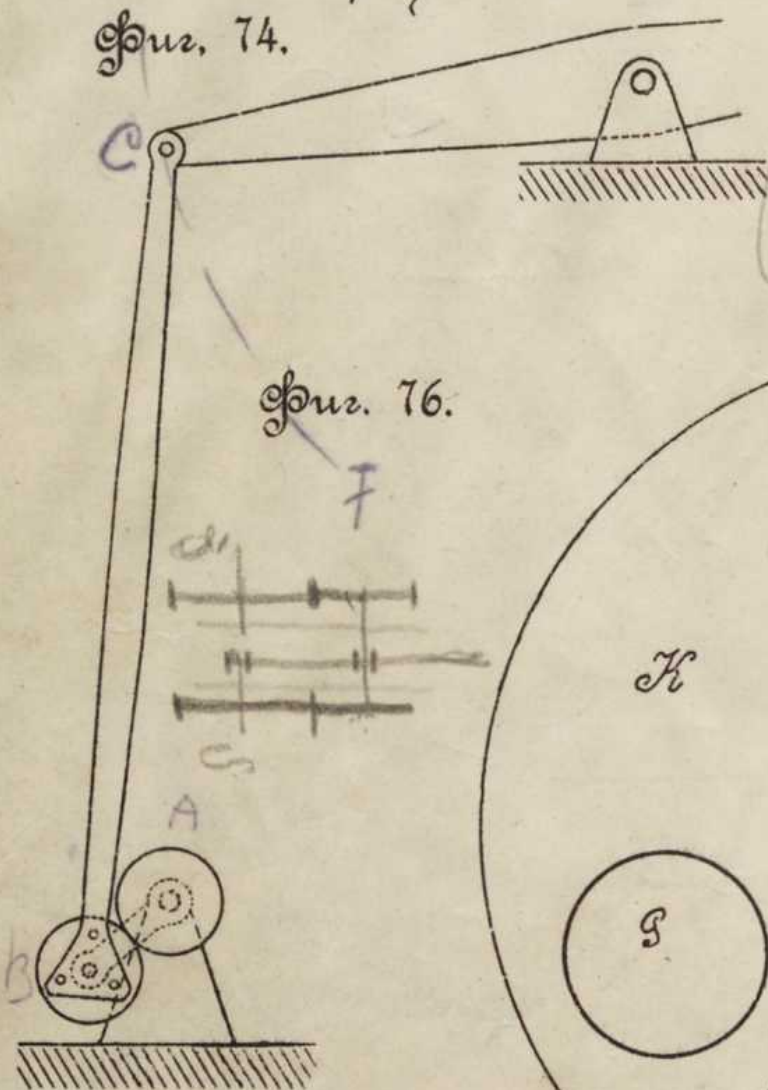
Фиг. 75.



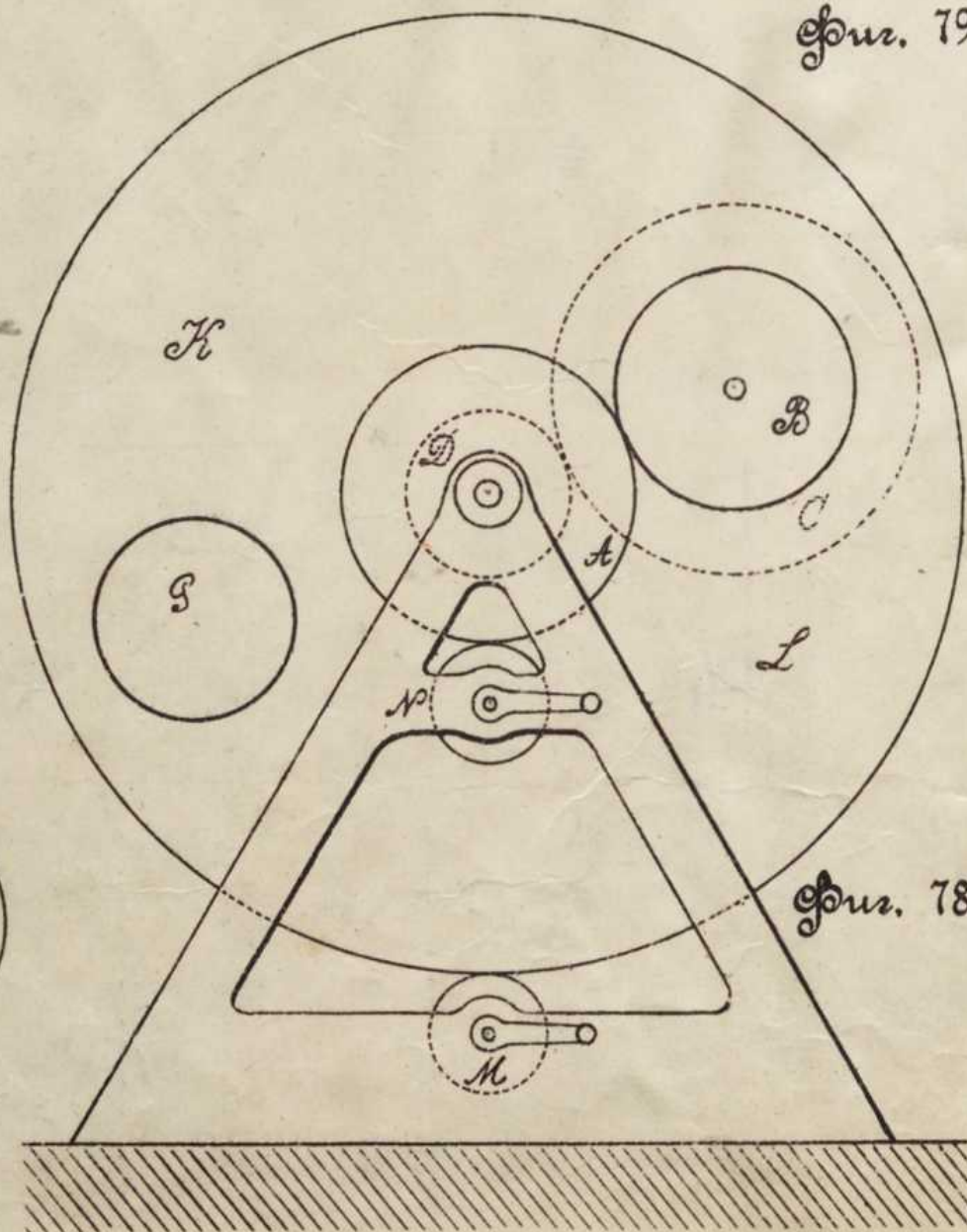
Фиг. 74.



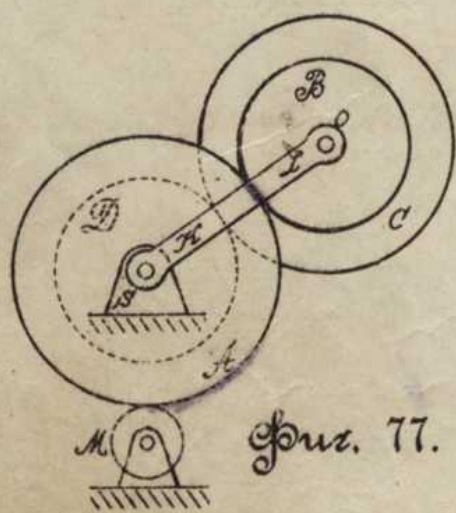
Фиг. 79.



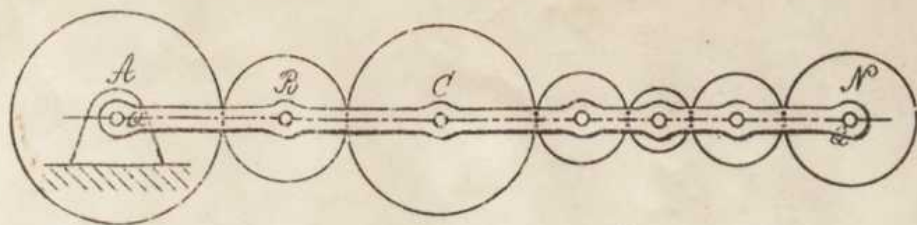
Фиг. 76.



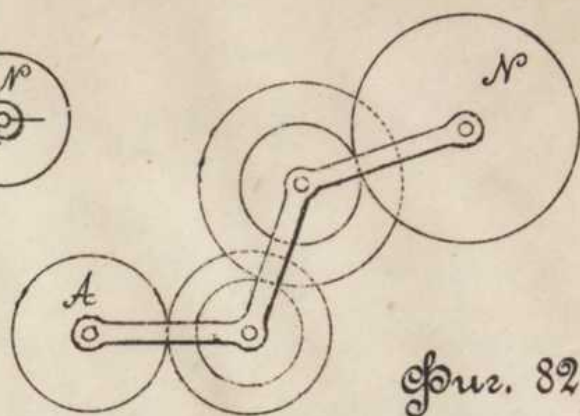
Фиг. 78.



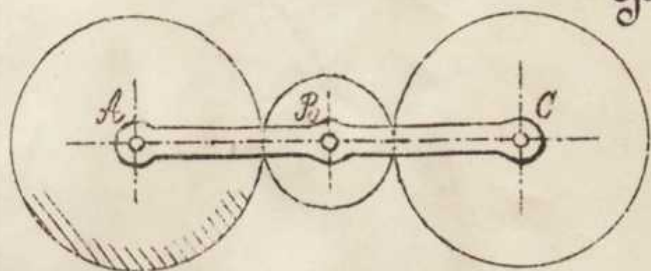
Фиг. 77.



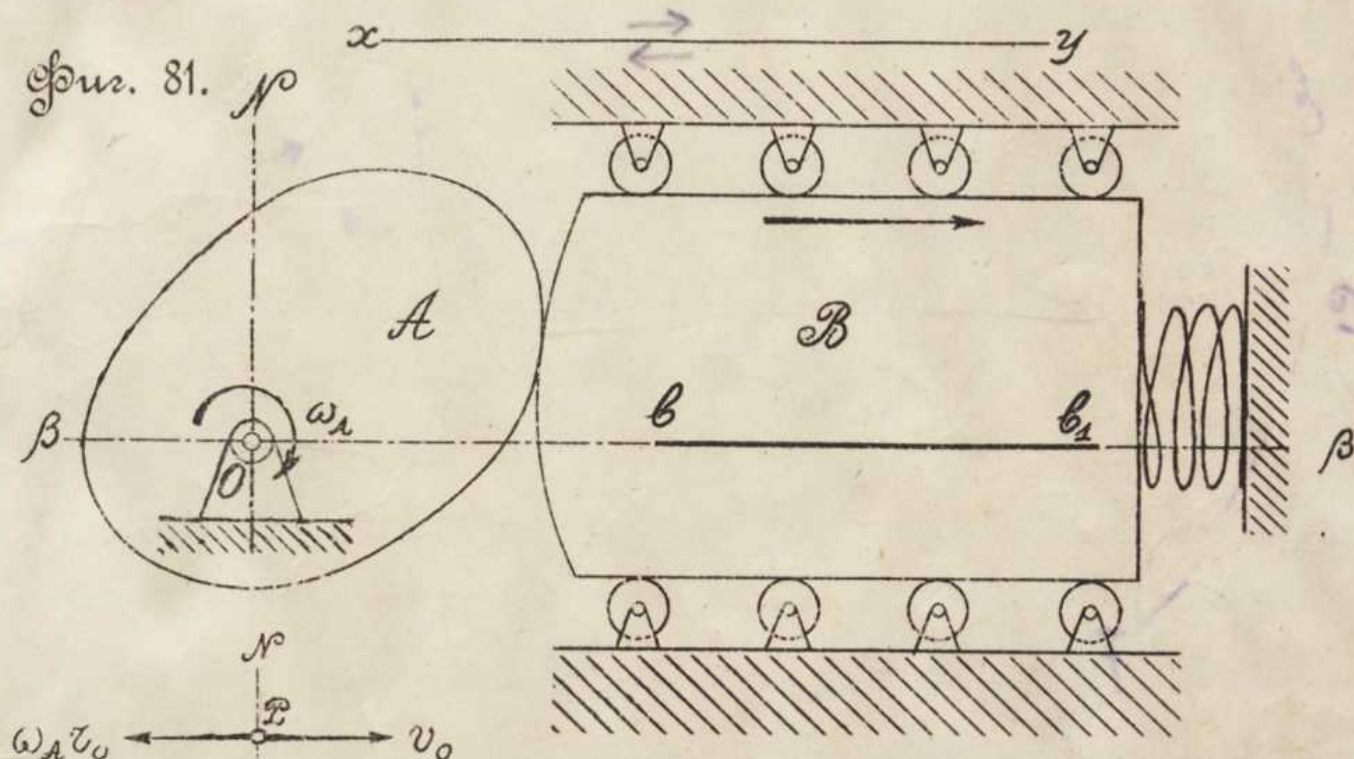
Фиг. 80.



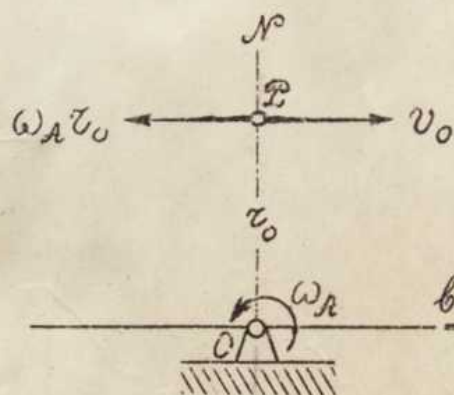
Фиг. 82.



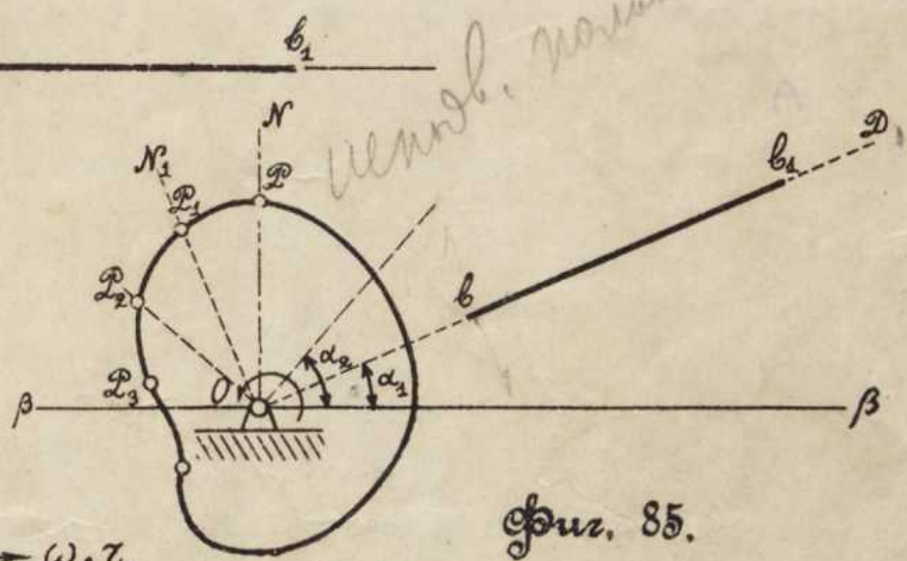
Фиг. 81.



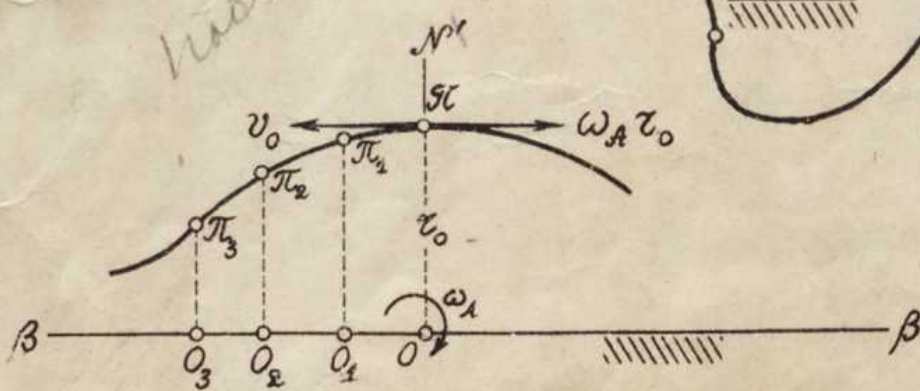
Фиг. 83.



Фиг. 84.



Фиг. 85.



Фиг. 86.

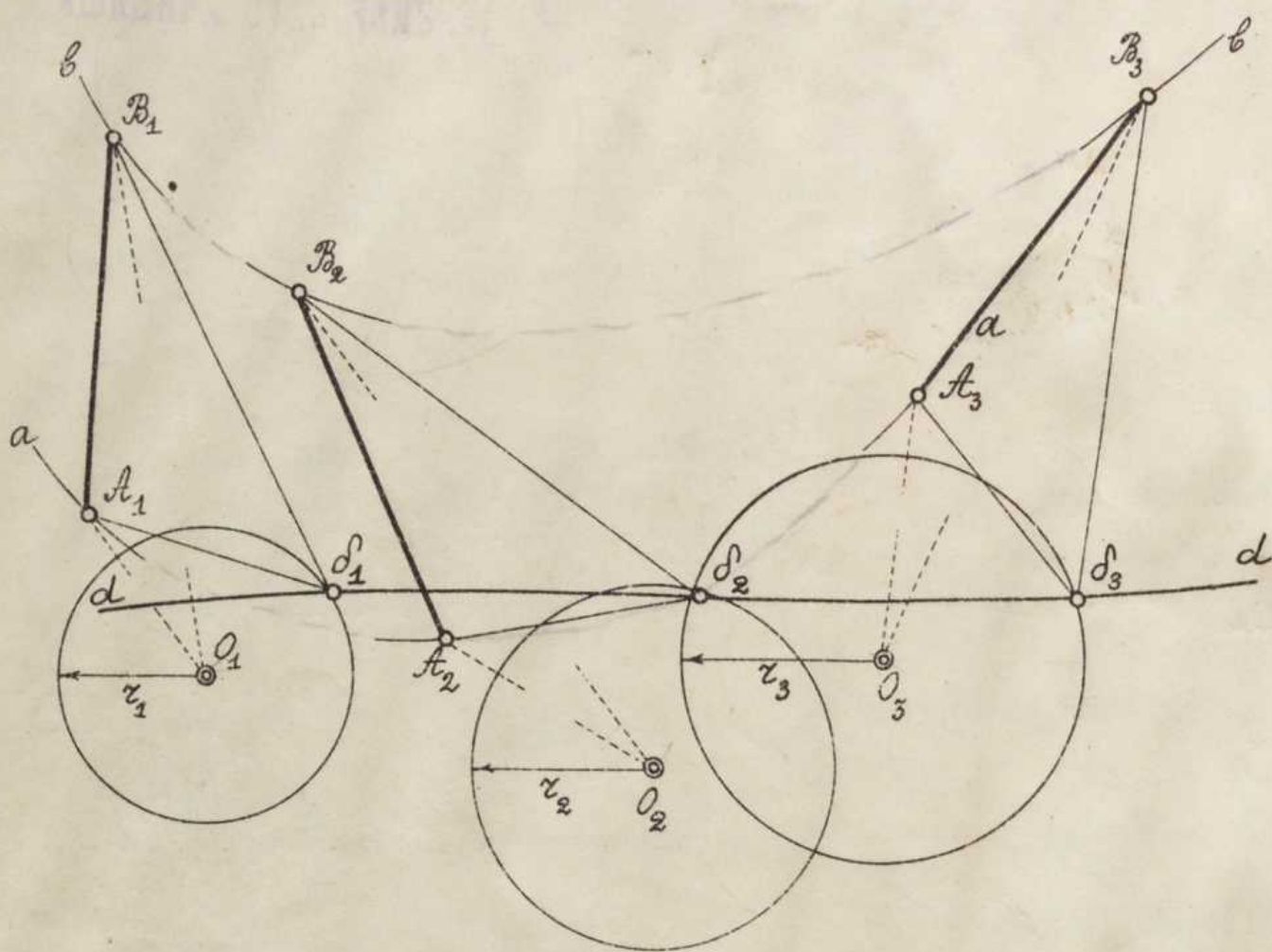


Fig. 87.

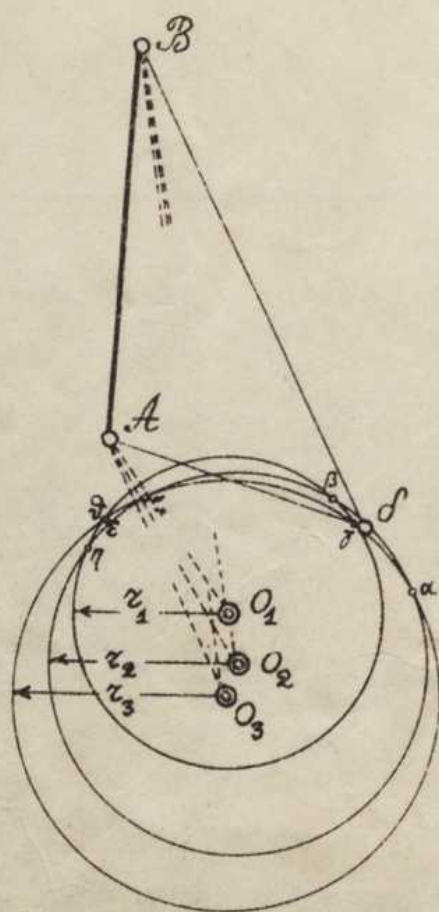


Fig. 88.

Кинематическія пары.

Согласно общему определению, всякій механизм служит для производства, при помощи которого мы заставляем силы производить только определенные, нужные для нас, движения. Отсюда следует, что каждая деталь механизма имеет некоторое вполне определенное движение относительно прочих деталей, — определенность же эта достигается тем, что все ненужные движения какой-либо части устраниваются соответствующим сопротивлением других частей.

Каждая деталь имеет себе соответствующую другую деталь, такъ или иначе определяющую относительно движение первой; следовательно, въ механизме мы имеемъ всегда парное сочетание деталей, и простѣйшимъ механизмомъ будетъ одна пара такихъ деталей или, какъ говорятъ, кинематическая пара. Если одинъ изъ элементовъ такой пары не сдвигается неподвижно, то другой будетъ иметь вполне определенное движение въ пространство. Наоборотъ, если это движение дано заранее, то по данной формѣ одного элемента можно, вообще говоря, найти форму другого.

Для выполнения своего назначения — ограничивать движение первой, другая деталь, конечно, должна быть съ ней въ постоянномъ

соприкосновения, и, если, напр., первая дуга имеет форму дуги круга, центр которого должен описывать определенную кривую, то можно построить вторую дугу так, чтобы она была касательна к первой дуге во всем протяжении дуги.

Соприкосновение элементов пары может происходить или по линиям и точкам, или по цилиндрическим поверхностям, — во последнем случае пары называются винтовыми. При этом поверхность соприкосновения должна, очевидно, обладать тем же свойством, что элемент ее, перемещенный в направлении движения одной дуги по другой, должен всегда совпадать с поверхностью. Следовательно, начерченная на поверхности кривая должна обладать свойством совпадения ее частей. Такой кривой будет винтовая линия постоянного шага, начерченная на цилиндрической поверхности. Винтовой парой будет, например, образующая винтовой пары или винт и гайка.

Частными случаями винтовой пары будут: пара вращательная и пара поступательная. Первую можно себе представить в виде двух цилиндров, полных и полых, находящихся один внутри другого; при этом полный цилиндр имеет закраины или насаженные колеса, не дающие возможности полному цилиндру сдвинуться в сторону. Вторую пару, поступательную, можно представить себе в виде пустой призмы, скользящей по дру-

гой призму, проходящей внутри первой.

Данным тремя парами и исчерпывается область возможных кинематических пар. Если в такой паре обратить движение, т.-е. элемент неподвижный сделать подвижным и наоборот, то характер движения отъ этого не изменится, т.-е. оно опять будет винтовым, вращательным или поступательным; траектории точек опять останутся тѣ же, напр., в случае винта и гайки опять винтовая линия того же шага. Такое свойство возможных пар называется **свойством обратимости**.

Всякая пара, очевидно, таковы свойства не обладает, — точка, неразрывно соединенная с другим элементом, при движении этого элемента будет описывать, вообще говоря, траекторию, отличную отъ той, которую она описала бы, если бы не соединена с другим элементом и двигаем его, оставляя первый неподвижным.

Кинематическая цепь. Шарнирный четырехугольник. Теорема Брасгора.

Всякій механизм можно разложить на кинематическія пары, и обратно: из совокупности пар можно составить механизм. Если мы имеем несколько пар — обозначим их элементы цифрами 1, 2, 3, 4, ..., то, соединяя неразрывно 2 с 3, 4 с 5 и т.п., получим такъ называемую кинематическую цепь. Со-

единице последний из этого ряда элементов со элементом 1, получив зашкнутую цепь, и можно подобрать соединение таким образом, что относительное движение каждого элемента или звена цепи (здесь под словом „элемент“ или „звено цепи“ разумеется неразрывное соединение, напр., 2 со 3, 4 со 5 и т.п.) будет вполне определенным.

Если теперь сдвинуть какое-либо звено неподвижным, то движение всех других звеньев будет вполне определено, и мы получим механизм: какая-нибудь сила при помощи такой зашкнутой цепи будет совершать определенная движения.

Разсмотрим теперь несколько механизмов, составленных из простых пар и, в частности, из пар вращательных. Соединение трех вращательных пар, очевидно, не дает никакого механизма. Нужно взять теперь таких пар, и мы получим шарнирный четырехугольник со сторонами а, в, с и d (фиг. 1). Если какая-либо сторона, напр. в, сдвинута неподвижной, то другие будут иметь вполне определенное движение; при этом звенья с и а будут вращаться около конечных точек звена в и будут носить название кривошипов, если могут сдвинуть полный оборот, и ^{коромысло} коромысло — в противном случае, звено же d носит название маятника; его движение сводится к движению системы, заданной двумя ее точками и их траекториями (фиг. 2). Это дви-

жение нами уже детально разобрано, и мы теперь можем оставаться не бдущим.

Представляет значительный интерес решение вопроса о том, когда звено AB или DC может совершить полный оборот около своего центра, т. е. когда эти звенья могут быть кривошипными. Ответ на это дает так называемая теорема Грасгофа, к разбору которой мы теперь и приступим.

Пусть у нас имеется некоторый механизм с четырьмя звеньями $ABCD$ (фиг. 3). Обозначим длины звеньев его, как это показано на чертеже, через a, b, c, d , и пусть в данном случае между этими длинами существуют соотношения

$$a < b \text{ и } c < d \dots\dots\dots (1)$$

Ставим нашу задачу на звено d и рассмотрим, при каких условиях звено a может быть кривошипным, т. е. может совершить полный оборот вокруг своего центра A . Если это звено a есть кривошип, то мы получаем возможность построить два треугольника, — один со сторонами $(d-a), b$ и c (фиг. 4), и другой со сторонами $(d+a), b$ и c (фиг. 5). Первый из них получается тогда, когда звено a , при своем вращении, приходит в совпадение со звеном d , а второй — тогда, когда это звено приходит в совпадение с продолжением звена d . Для возможности построения этих треугольников необходимо выполнение условий, известных из курса начальной геометрии:

$$\delta - a \geq b - c, \dots\dots\dots (\alpha)$$

$$\delta - a \leq b + c, \dots\dots\dots (\beta)$$

для случая, изображенного на фиг. 4, и

$$\delta + a \geq b - c, \dots\dots\dots (\gamma)$$

$$\delta + a \leq b + c, \dots\dots\dots (\delta)$$

для случая, изображенного на фиг. 5. Условия (β) и (γ) можно отбросить, такъ какъ они всегда удовлетворяются сами собой: путемъ переноса членовъ съ минусами въ другую часть неравенствъ, получаемъ соотношения, имѣющія силу всегда:

$$\delta \leq a + b + c \text{ и } b \leq \delta + a + c.$$

Существенными являются, поэтому, соотношения (α) и (δ) . Первому изъ нихъ можно дать видъ:

$$\delta + c \geq b + a, \dots\dots\dots (\alpha')$$

второе же можно оставить безъ переноса:

$$\delta + a \leq b + c, \dots\dots\dots (\delta)$$

Если $\delta \geq b$, то оба неравенства могутъ быть удовлетворены при $c \geq a$. Если же $\delta \leq b$, то они удовлетворяются опять при $c \geq a$. Такимъ образомъ, звено a , совершающее полный оборотъ вокругъ своего центра A , при наличности условий (1), должно быть наименьшимъ. Въ виду этого, условия (α') и (δ) могутъ быть прогитаны, вообще, такъ при условияхъ, выраженныхъ уравнениями (1), наименьшее звено a шарнирного четырехугольника можетъ быть криволинейнымъ тогда, когда сумма его съ наибольшимъ звеномъ меньше суммы другихъ двухъ звено-

евъ имъ равна ей. Это и есть теорема Брауэра.

Задача Брауэра-Брауэра паръ поступательнымъ. Показывъ.

Браздо болѣе значеніе, чѣмъ въпераз-
снотрѣнныя слуган, нѣмѣтъ нѣ частныя
виды мартирнаго геторугеленника, въ кото-
рыхъ одна изъ Брауэра-Брауэра паръ заимѣ-
нена поступательной.

Пусть наша Брауэра-Брауэра пара состо-
итъ изъ тѣла A , Брауэра-Брауэра около непо-
двигнаго типа O (фиг. 6). Каждая точка
тѣла A будетъ перемѣщаться по окружно-
сти съ центромъ O . Предположимъ теперь,
что мы начнемъ постепенно увеличивать диа-
метр нашего типа (фиг. 7). Тогда тѣло A
должно будетъ также соответственнѣмъ уве-
личиваться, чтобы нѣмѣтъ возможность обни-
мать свой типъ. На практикѣ бываетъ обни-
женно такъ, что при мало-маленьки значитель-
ныхъ диаметрахъ типа тѣло A не совершаетъ
уже полнаго Брауэра-Брауэра вокругъ O на 360° , а
качается на опредѣленную дугу типа назадъ
и впередъ. Въ такомъ случаѣ выполнятъ все
типъ въ видѣ круглаго цилиндра становит-
ся безполезнымъ, и отъ него мы оставляемъ
только нѣмѣтъ кусокъ, по которому
и будетъ показывать наше тѣло, теперь уже
не обни-мать типъ, но показывающее по по-
верхности его, по участку опредѣленного

размера (фиг. 8). Противъ схода съ поверх-
ности должны быть приняты соответ-
ствующія меры, — должны быть устроены
защитки и т. д. (фиг. 9).

Станемъ теперь увеличивать диаметр
типа дальше, дабы еще, наконецъ, въ предѣлахъ
безконечно-большой разности; тогда кини-
матическая поверхность типа перейдетъ въ
плоскость, вращательное возвращенное движе-
ние тела перейдетъ въ прямолинейное воз-
вращенное, и нашъ типъ обратится въ на-
правляющую, а тело — въ ползунъ, ползаю-
щій по этой направляющей. Такимъ
образомъ, если въ какомъ-нибудь механизме
имеются поступательная пара, то ихъ
можно разсматривать, какъ частные слу-
чай вращательныхъ, типы которыхъ раз-
вились до безконечно-большихъ разностей и
перешли въ направляющую. Подобнымъ же
образомъ, въ данномъ механизме съ враща-
тельными парами мы можемъ каждую та-
кую пару заменить поступательной, что
приведетъ насъ къ новымъ модификаціямъ
даннаго механизма. Этотъ приемъ мы
будемъ въ дальнейшемъ пользоваться все-
гда часто.

Запомнимъ, что, заменивъ типъ на-
правляющимъ, а тело, вращающееся во-
кругъ типа, то-есть втулку — ползуномъ,
мы должны произвести эту замену
такъ, чтобы все, бывшее до того начисто
скрѣпленнымъ съ типомъ, оставалось теперь

также малых соединительных с направляющими, а все, бывшее ранее малых скрепленных со втулкой, — оставалось после этой замены соединительным, опять таки малых, со ползунком. Этого правила никогда не надо упускать из виду.

Заимствуя, что волею направления, по которому мы удаляем центр шипа в бесконечность, зависит от нас, почему мы и распоряжаемся лишь малыми удобствами для нас образом. Кроме того, движение ползуна по направляющим удобства всего задавать движением какой-либо прямой, ему принадлежащей и параллельной направлению его движения, по совпадающей с ней прямой, принадлежащей системе направляющих. Сокращенно и будем определять движение ползуна движением оси его вдоль оси направляющих.

Модификации шарнирного четырехзвенника помощью замкнутой вращательной пары поступательной.

Заимствуя в полученном нами шарнирном четырехзвеннике одну из вращательных пар, например, пару с поступательной. В этой роли центр шипа удаляем в бесконечность по какому-либо направлению ZZ (фиг. 10), втулку, принадлежащую звену B , превращаем в ползун yy , а шип, принадлежащий звену C , — в

направляющія xx . При этомъ съ ползункомъ мы должны оставить жестко скрепленнымъ все то, что было раньше жестко скреплено съ втулкой, а съ направляющими - все то, что было до того соединено съ типомъ. На этомъ основаніи мы соединяемъ съ ползункомъ наше бывшее звено B , продолжающее и теперь вращаться вокругъ оси D , а направляющія - малую со звеномъ C , продолжающую и теперь вращаться вокругъ оси C .

При движеніи этой системы прямая xx , жестко съ рычагомъ FD соединенная, будетъ все время находиться на постоянномъ разстояніи $ED = \delta$ отъ центра D (фиг. 11). Следовательно, при вращеніи этого рычага, прямая xx будетъ все время касаться окружности mn , описанной изъ центра D радиусомъ $\delta = ED$, равнымъ разстоянію прямой xx отъ центра D . Но прямая xx все время должна совпадать съ прямой yy ; отсюда заключаемъ, что, въ свою очередь, прямая yy , то-есть ось ползуна, будучи увлекаема прямой xx , вліяетъ съ ней будетъ также все время касаться той же окружности mn .

Итакъ, наша система геометрически опредѣлится слѣдующимъ образомъ: у насъ имѣются двѣ прямыя, BC и yy , жестко другъ съ другомъ связанная (фиг. 12). Одна точка этой системы, B , движется по окружности kl центра A и радиуса A , а прямая yy этой же системы, значитъ, жестко съ этой точкой B соединенная, все время касается окружности, описанной изъ центра D опредѣленнымъ ра-

диусом δ . Этот случай представляет собою
высшее изменение случая, изображенного на
фигуре 21 курса (стр. 20).

Полное P мгновенного вращения найти здѣсь
не трудно, — оно будетъ лежать въ точке пере-
сечения нормалей BA и ED (радиусовъ въ точ-
кахъ B и E). Если полное мгновенное враще-
ние недоступно, то построениемъ подобныхъ
треугольниковъ обойдемъ и эту трудность.
Затѣмъ, поворотный кругъ опредѣлится по-
мощью теоремы Савари. Вообще, кинемати-
ческое изслѣдованіе этого механизма ника-
кихъ трудностей не представляетъ.

Такую же записку вращательной пары
поступательной можно произвести и у дру-
гихъ паръ, напримеръ, у паръ D . Пусть не-
подвижный штифтъ a принадлежитъ неподвиж-
ному звену AD , а втулка — звену c . Угловая
центр штифта по какому-нибудь направлению
 zz (фиг. 13), заставляющаго его направляющимъ
 xx , а втулку, принадлежащую звену c — пол-
зуна yy . Такъ какъ штифтъ былъ соединенъ
со звеномъ d наглухо, то и направляющія xx
будутъ соединены со звеномъ d также наглу-
хо, тѣмъ словомъ, направляющія xx бу-
дутъ здѣсь неподвижны. Вдоль оси этихъ
неподвижныхъ направляющихъ будетъ пол-
зати ползуна yy ; значитъ, оно будетъ дви-
гаться все время поступательно, но неиз-
мѣнному направлению xx . Звено c , наглухо
съ ползуномъ соединенное, будетъ раздвѣлять
это поступательное движение по напра-

вектор xx , в виду чего точка C этого звена будет двигаться по прямой tt , параллельной xx , и движение системы BC определится здесь движением отрезка BC одним концом, B , по окружности k радиуса AB и центра A , а другим концом, C , по неподвижной прямой tt , направление вности определенное направлением и положением (фиг. 14). Использование этого механизма также не представит никаких трудностей.

Легко проверить, что замкнутая пара B и A ничего нового не дает: замкнутая пара B дает механизм, подобный механизму фиг. 11 и 12, а замкнутая пара A — подобный фиг. 13 и 14. Значит, наша замкнутая дает фактически два новых различных механизма, а не четыре.

Механизм паровой машины.

Для дальнейшего изменения полученных схем можно прибегнуть к новому методу, а именно — ставить механизмы на различных звеньях, что мы и выполним по отношению к механизму фиг. 14, упростив предварительно схему в том смысле, что направление ZZ выберем так, чтобы прямая tt проходила через точку A ; для этого, очевидно, при данном положении механизма (фигура 13) прямая ZZ должна идти перпендикулярно AC . Итак, мы получим механизм, ничем, в сущности, от механизма фиг. 14

не отличающийся, но и многозначный на практике
громадное распространение. Это — механизм
обыкновенной паровой машины (фиг. 15). При
использовании его обращаются к обыкновенно-
му построению полноты мгновенного вращения,
как точки пересечения продолженного радиуса
 AB и нормали CD в точке C , не считая,
ибо этот полнос весьма часто удаляется
за пределы чертежа. Во избежание этого,
прибегая к искусственному построению,
весьма простому: для суждения о скорости
матюна BC составляем план скоростей
точки C , приняв за полнос плана точ-
ку A . Проводя из нее AN параллельно нор-
мали CD к траектории tt точки C , то-есть
проводя AN перпендикулярно tt и продолжая
его до пересечения с продолжением BC в точ-
ке Π , найдем, что точка Π и будет соот-
ветствовать точке C . Эта же точка Π
явится полнотой мгновенного вращения для
искусственного движения отрезка AB (см.
стр. 126 и след. курса), при том направлении
угловой скорости ω вращения около этого
полноса Π в этом искусственном движе-
нии оказывается одинаковым с направле-
нием вращения кривошипа AB в реальном
его движении; сама же угловая скорости
вращения около Π и около A между собою равны.

Угол μ искусственного движения есть
угол действительного ускорения j с векто-
ром AB . Если угловая скорости ω кривошипа
есть величина постоянная, то все это уско-

рение j_B сводится къ нормальному j_n , и угол μ оказывается равным нулю. Если же ϑ есть величина переменная, то должны быть даны законы изменения ее со временем или же ускорение j_B должно быть дано для любого момента, какъ по величине, такъ и по направлению. Этотъ случай разобранъ на стр. 130 и слѣд.

Механизмъ карающей паровой машины.

Модификация этого механизма получена, ставя его, по очереди, на разныя звенья. Поставивъ его на шатуны ВС, получимъ механизмъ такого рода (фиг. 16): въ точку С неподвижнаго теперь шатуна ВС укреплена ось вращения ползуна уу, получаго теперь вращаться около этой оси. Направление АТ стало теперь подвижнымъ и можетъ скользить по ползуну АА. Точка А системы направляющихъ теперь можетъ двигаться по окружности радиуса ВА и центра В. Въ виду этого, нашъ механизмъ геометрически представится такъ: имѣется система неограниченной прямой АТ (оси машины направляющихъ); одна точка, А, этой оси движется по окружности радиуса ВА и центра В, а сама прямая постоянно проходитъ черезъ определенную точку С неподвижной прямой ВС (фиг. 17). Это — такъ называемый механизмъ карающей паровой машины. Легко видѣть, что этотъ случай

представляет собою не что иное, как частный случай механизма, где вращательная пара C замещена поступательной (фиг. 10-12). Действительно, заменив систему прямих BC и CC , жестко между собою связанных, одной прямой AT , то-есть сшьем эти прямые в одну, и сократив радиус d окружности D до нуля, мы и получим механизм, изображенный на фиг. 16-17.

План скорости для этого механизма строится весьма легко: проводя из неподвижной точки B луч Bh перпендикулярно AT , получаем в пересечении его с AT точку c , дающую, вместе с A и B , план скорости системы Ac — треугольник BAC ; полюсом его служит неподвижная точка B , а точка c является соответствующей для точки C .

Угловая скорость качания бывшего ползуна CC , ползущего теперь только вращаться около точки C , есть, в то же время, угловая скорость вращения прямой AT вокруг полюса ее, P , ибо, разь направление этого ползуна, вращающегося теперь роль муфты, должно все время совпадать и следовать за направлением прямой AT , то угол поворота муфты будет равен углу поворота прямой. При равномерном вращении кривошипа BA муфта будет качаться неравномерно, ибо один и тот же полный угол отклонения α она описывает как при обходе кривошипа под углом φ , так и угла $360^\circ - \varphi$ (фиг. 18). Угловые ускорения находятся весьма просто

помощью плана ускорений

Механизм Витворта.

Следующей модификацией является та, когда мы делаем неподвижным кривошип AB . В таком случае точка C , центр вращения нашего ползуна, описывает окружность радиуса BC (фиг. 19), а ось ползуна yy , принужденная все время скользить по прямой AT , вращающейся теперь вокруг неподвижного центра A , вынуждена, таким образом, постоянно проходить через неподвижную точку A .

Механизм этот можно рассматривать, как частный случай такого, где прямая yy постоянно проходит через неподвижную точку A , а некоторая точка C , жестко с прямой связанная, перемещается по окружности радиуса BC и центра B (фиг. 20). Перемещая эту точку C на самой прямой yy , получим кинематическую схему нашего механизма, изображенную на фиг. 21.

В искусственному приему, подобному тому, который мы применяем в случае обыкновенной паровой машины, здесь прибегать не приходится, ибо бывший кривошип AB всегда очень мал сравнительно с длиной шатуна BC ($AB = \text{около } \frac{1}{5} BC$), и потому построение полюса мгновенного вращения всегда выполняется удобно и в прямом движении. Сообразно со схемой (фиг. 21), полюс

мгновенного вращения для системы координат S , то-есть для оси его xy , найдется такъ: прямая Sy всегда проходитъ черезъ точку A , служащую, такъимъ образомъ, для нея огибающей; въ виду этого, полосу должно лежать на общей нормали-перпендикуляръ AN . Съ другой стороны, точка C прямой скользитъ по окружности lmn , описанной изъ B радиусомъ BC ; значитъ, огибающей служить здѣсь эта окружность lmn , а огибаемой - точка C . Въ виду этого, полосу мгновенного вращения должно лежать на общей нормали-радиусъ BC (или его продолженіи), то-есть на прямой CBN_1 . Значитъ, полосу лежитъ въ пересѣченіи AN съ CBN_1 , - въ точкѣ P .

Что касается поворотнаго круга, то огна точка его, t_1 , будетъ симметрична съ точкой A относительно полюса P , а другая, t_2 , будетъ опредѣляться соотношеніемъ $CP^2 = CB \cdot Ct_2$. Если дана ускореніе точки C по величинѣ и направленію, то, помощью поворотнаго круга, сейчасъ же найдется центръ ускореній.

Если прямая AT , ось направляющаго, по которой теперь все время скользитъ ось координатъ xy , вращается съ некоторой угловою скоростью ω , то ползунъ C , будучи вынужденъ постоянно сидѣвать за этой прямой и раздѣлять ея движеніе, будетъ вращаться съ того же углового скоростью ω . Значитъ, если прямая AT вращается равномерно, то будетъ столь же равномерно вращаться и прямая xy , а значитъ, и ползунъ C .

Вращение рычага $АТ$ около $А$ вызывает вращение рычага $ВС$ около $В$, но угловая скорости этих вращений неодинаковы. Определить как эти угловые скорости, так и угловые ускорения, затруднений здесь не представляет. Если угловая скорость вращения рычага $ВС$ постоянна, то линейная скорость точки $С$ будет также постоянной, а ускорение j_c точки $С$ окажется только нормальным и направленным все время по $СВ$. В таком случае поминим возможность найти ускорение любой точки прямой $уу$, а значит, и ползуна $С$, помощью поворотного круга $О$ (фиг. 21). Посредством этого сейчас же найдем угловое ускорение ползуна относительно полого многогранного вращения $Р$. Очевидно, что эти же самые определяются угловая скорость и ускорение рычага $АТ$, по направлению которого скользит ось ползуна $уу$, ибо эти факторы у ползуна $С$ и рычага $АТ$ одинаковы.

Составим план скоростей и ускорений для рычага $АС$, увидим, что, при равномерном вращении звена $ВС$, звено $АТ$ будет вращаться неравномерно. Если бы были даны угловая скорость и угловое ускорение рычага $АТ$, то эти же самые были бы даны угловая скорость и ускорение ползуна $С$, а значит, при данном поворотном круге $О$ системы ползуна определились бы ускорения всех остальных точек этой системы. Мы нашли бы полное ускорение точки $С$ и, разложив его, нашли бы тангенциальное, помощью

тангенциального ускорения, модуль углового ускорения. Схема этого рассмотрения представляется в таком виде:

Пусть рычаг $АТ$ вращается равномерно; тогда угловая скорость ползуна $С$ вокруг полюса P есть величина постоянная, вследствие чего в этом частном случае угол μ равен нулю, и центр ускорений совпадает с полюсом поворота K (фиг. 22). Значит, ускорение j точки $С$ ползуна будет направлено по $СК$ и равно $\omega^2 \cdot СК$, где ω есть угловая скорость вращения системы ползуна $С$ вокруг ее полюса мгновенного вращения P . Разлагая полное ускорение j на нормальное j_n (по $СК$, ибо точка $С$ все время движется по кругу радиуса BC) и на тангенциальное j_t , находя для этого посредством, по общему закону, выражение: $j_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\vartheta)}{dt} = r \frac{d\vartheta}{dt}$, где r есть радиус BC , величина постоянная, а v — есть линейная скорость точки $С$. Определим величину вектора j_t (в некотором масштабе), определим значение углового ускорения $\frac{d\vartheta}{dt}$ рычага BC из соотношения: $Cj_t = r \frac{d\vartheta}{dt}$, так что $\frac{d\vartheta}{dt} = Cj_t : r$.

Если рычаг $АТ$ вращается неравномерно, то необходимо дать зависимость ω от времени t или найти величину углового ускорения для каждого момента. Найдя все это, сейчас же построим угол μ по формуле: $\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt}$. Определяется теперь, по какому сторону диаметра PK надо откладывать этот угол μ .

Если $\frac{d\omega}{dt} > 0$, такъ что ω увеличивается, а вращение рычага АТ совершается, положивъ, по часовой стрѣлкѣ $\curvearrowright$ (направление вращенія легко сообразить по направлению движенія точки С), то вращение около полюса мгновеннаго вращенія Р будетъ совершаться также по часовой стрѣлкѣ $\curvearrowright$; въ такомъ случаѣ уголъ μ надо будетъ отложить по смыслу вращенія, на что и укажетъ стрѣлка, поставленная вѣкругъ полюса Р (фиг. 23). Отложивъ уголъ μ согласно этой стрѣлкѣ, получимъ положеніе центра ускоренія Р для системы ползуна С, — иначе говоря, для системы прямой xy , и ускореніе j пойдетъ по некоторому направлению CS , составляющему съ CP уголъ μ (фиг. 24). Если бы оказалось, что это направление CS совпадаетъ съ продолженіемъ радіуса РС, то все ускореніе j свелось бы къ нормальнаму ускоренію j_n , и точка С оказалась бы движущейся по своей окружности вполнѣ равномерно. Рычагъ АТ двигался бы, конечно, неравномерно.

Далѣе, если дается угловая скорость $\dot{\varphi}$ вращенія рычага РС вѣкругъ центра Р, то ускореніе j_c тамъ самымъ дается по величинѣ и направлению, вѣдствие чего можно будетъ опредѣлить положеніе центра ускореній Р. Такимъ образомъ опредѣлимъ уголъ μ . По ко тангенсу опредѣлимъ угловое ускореніе $\frac{d\omega}{dt}$; по скорости v_c опредѣлимъ ω ; значитъ, вращательное движеніе ползуна, а влѣстѣ съ этимъ — и рычага АТ, бу-

дентъ опредѣлено вполне.

Такъ можно легко убедиться въ томъ, что равномерное вращеніе одного звена не даетъ равномернаго вращенія другого. Этины пользуются въ некоторыхъ станкахъ для обработки матеріаловъ. Диаграммы угловыхъ скоростей ω и угловыхъ ускореній $\frac{d\omega}{dt}$ здесь составить весьма нетрудно.

Четвертого механизма, получаемого изъ механизма паровой машины путемъ постановки этого послѣдняго на ползунъ С, мы разбирать не будемъ, ибо этотъ механизмъ никогда на практикѣ не употребляется.

Дальнѣйшія модификаціи четырехшарнирнаго механизма помощью замены двухъ вращательныхъ паръ поступательными.

Въ четырехшарнирномъ механизме ABCD (фиг. 25) заменимъ две пары вращенія вращательные пары, напримеръ пары B и C, поступательными. Пусть звено BC несетъ на себѣ штифъ B и C, а звенья AB и CD — втулки въ штифъ. Угловая центры B и C въ безконечности по какому-либо направленію kl и mn, замѣщаемъ штифы направляющими, а втулки — ползунами; тогда и получимъ обійій типъ механизма съ двумя парами скользящихъ поступатель-

тѣмъ парамъ (фиг. 26). Такъ какъ каждая изъ втулокъ В и С соединена малухо со своимъ звеномъ АВ или СД, то каждый изъ ползуновъ останется жестко скрѣпленнымъ съ тѣломъ своего звена: ползунъ В со звеномъ АВ, а ползунъ С со звеномъ СД. Далее, оба тѣла были малухо закрѣплены въ одномъ и томъ же звенѣ ВС; преобразившись въ направляющія, каждый изъ нихъ, попрежнему, долженъ быть малухо скрѣпленъ съ однимъ и тѣмъ же звеномъ ВС, откуда заключаемъ, что оба системы направляющихъ, pq и qz , должны быть малухо скрѣплены съ однимъ и тѣмъ же тѣломъ ВС, — иначе говоря, должны быть одна съ другой скрѣплены малухо, составляя одну сложную систему pqz (фиг. 26)

Такимъ образомъ, оси ползуновъ будутъ все время скользить по осямъ направляющихъ, при чемъ эти послѣднія оси составляютъ, какъ видимъ, систему жесткаго угла pqz . Что касается осей ползуновъ, то они, въ силу жесткаго скрѣпленія съ рычагами АВ и СД, вынуждены все время касаться нѣкоторыхъ окружностей радиусовъ АЕ и ДФ и центровъ А и Д; радиусами АЕ и ДФ служатъ здѣсь разстоянія центровъ А и Д до осей обоихъ ползуновъ. Въ виду всего этого, данное движеніе можетъ быть задано движеніемъ жесткаго угла pqz , скользящаго своими сторонами по двумъ даннымъ окружностямъ радиусовъ АЕ и ДФ (фиг. 27).

Положа мновентного вращенія для этой жесткой системы pqr найти легко: онъ будетъ лежать въ точке P пересѣченія радиусовъ нормалей EA и FD . Две точки поворотнаго круга легко найти или применимая къ точкамъ E и F теорему Савари, или, что гораздо проще, разсуждая такъ: обернемъ движеніе, то-есть остановимъ систему pqr и заставимъ обѣ окружности A и D , жестко (отпрыжкомъ AD) между собою связанныя, двигаться по этимъ прямымъ, скользя по нимъ своими точками. Но когда окружность движется по прямой, — безразлично, катаясь или скользя, — то центръ ея будетъ оставаться все время на одномъ и томъ же разстояніи отъ этой прямой, равному радиусу окружности, то-есть будетъ перемѣщаться по прямой, перпендикулярной той, по которой катится окружность, и отстоящей отъ этой последней на величину радиуса. Итакъ, при обратномъ движеніи центры A и D будутъ двигаться по прямымъ PQ и QR , проведеннымъ черезъ точки A и D параллельно прямымъ pq и qr , то-есть по сторонамъ неподвижнаго угла PQR . Слѣдовательно, въ обратномъ движеніи точки A и D принадлежатъ окружности поворотнаго круга обратнаго движенія, откуда слѣдуетъ, что въ прямомъ движеніи точки, симметричная точка A и D относительно полюса P , будутъ принадлежать поворотному кругу прямого движенія. Поэтому, откладывая на прямой Pf

отрезок $Pd_1 = PD$, а на прямой Pe отрезок $Pa_1 = PA$, получим точки a_1 и d_1 , вместе с полосою P вполне определяющую новую точку O прямого движения жесткой системы pqr (фиг. 27).

Пусть рычаг AB вращается около своего центра A равномерно. Так как ползунок B (фиг. 26) связан с рычагом AB ниткою, вследствие чего принужден раздвигать движение этого последнего, то он будет, следовательно, вращаться около того же центра A и также равномерно. Итак, ось ползуна, вращаясь равномерно около A , будет менять свое направление во пространстве, поворачиваясь на равные углы в равные промежутки времени; вследствие этого, ось направляющих pq , постоянно совпадающая с осью ползуна B , также будет равномерно вращаться с тем же угловой скоростью, что и ползунок B или само звено AB . Но так как ось системы направляющих составляет одну жесткую систему, то, раз направляющая pq вращается равномерно, будут также равномерно вращаться и направляющая qr , а во таком случае, увлекаемый этими последними, будет равномерно вращаться и их ползунок C , а значит, и рычаг CD , его несущий, при чем это вращение будет совершаться с тем же угловой скоростью ω , что и у рычага AB . На какой угол $d\varphi$ повернулся первый ползунок B , на такой же повернется

его направляющія pq , заставивъ повернуться-
ся съ собою на тотъ же уголъ $d\varphi$ и вторая
направляющія qr , второй ползунокъ C и, окон-
чательно, второй рычагъ CD . Такимъ обра-
зомъ, выходятъ, что второй рычагъ будетъ
въ возможности повторять движение первого,
и легко усмотрѣть, что это имеетъ силу
какъ при равномерномъ вращеніи рычага
 AB , такъ и при неравномерномъ.

Механизмъ заставляющій только, что
вращеніе около одной оси передается въ немъ
тождественнаго вращенію около другой
оси (равномернаго или неравномернаго).

Если угловая скорость одного рычага, —
напримѣръ, AB — постоянна, то уголъ $\mu = 0$,
центръ ускореній будетъ совпадать съ по-
лосомъ поворота K , а ускоренія всѣхъ
точекъ будутъ направлены въ этотъ по-
лосъ K . Если же вращеніе неравномерно, то
центръ ускореній займетъ другое положеніе
на окружности поворотнаго круга.

Замѣчая, что при вращеніи движенія
мы получаемъ движеніе постоянного отрез-
ка AD по дугѣ неподвижнаго прясла PQ
и QR , заключаемъ, что такое движеніе
будетъ опредѣляться движеніемъ жесткаго
угла PQR , проходящаго своими сторонами
 PQ и QR постоянно черезъ двѣ неподвиж-
ныя точки A и D (фиг. 27). Положимъ это
движеніе мы уже находили (стр. 42 послѣд.
печатнаго курса). Въ слугахъ движенія отрезка
по сторонамъ угла (AD по PQR) подвижная

полодия оказывалась совпадающей со поворотным кругом, проходящим здесь через точки P, A, Q и D . В случае движения угля по концам A и D отрезка поворотный круг перемещается по другую сторону полюса, — во Id_1Pa_1 , а бывшая подвижная пология становится неподвижной. — Скорости и ускорения в этом механизме находятся очень просто.

Муфта Олсгэма.

Этот механизм обыкновенно осуществляется не в том виде, как это дает общая схема фиг. 27, а в более простом: длинный рычагов AB и CD или, что то же, радиусов AE и DF , сокращаются до нуля, вследствие чего центры вращения ползунков приходят в точки A и D , около которых ползунки теперь и будут вращаться. Направляющие, соединенные жестко друг с другом, осуществляются обыкновенно в виде полосы, ползающей каждая внутри своего ползуна. Получается механизм, изображенный на фиг. 28 и применяемый на практике при передаче вращения от одного вала A к другому D , ему параллельному, помощью так называемой муфты Олсгэма.

Замыкающие ползунки A и D снабжены укрепленными на концах параллельных друг другу валов a и d , подвеша-

ных соединено помощью этой муфты (фиг. 29). Майба эти муфты каждая по диаметру трапециевидному выступу и, значит, будут замкнуты наглухо. Чтобы соединить их, вкладываем самую муфту, диск Q (фиг. 30), между их с одной стороны по выступу, соответствующему каждому из прорезов; оба выступа друг друга перпендикулярны. Также как геометрические оси Aa и Dd концов своего положения не имеют, то движение майбы и сводится к движению прямого угла, образующего средним линиями выступов, по концам A и D неподвижного отрезка AD .

Станок Лионардо-да-Винчи.

Муфта Олдрези представляет собою внутреннее видоизменение станка Лионардо-да-Винчи, употребляемого для обтачивания эллиптических предметов. Дело в том, что движение средней майбы этой муфты определяется движением жестко связанного с ней прямого угла по концам данного отрезка. Также как при движении отрезка внутри прямого угла каждая точка, движущаясь соединенная с отрезком, описывает на плоскости этого прямого угла эллипс, то обратно, при движении угла ~~ли~~ неподвижного отрезка, карандаш, перомышленный его ~~ли~~ неподвижно, начертит на плоскости прямого угла опять-таки эллипс. Слѣ-

доватенство, если къ средней тайбѣ муфты Олс-
гэна прибавить прѣзень, то онъ обогрѣетъ
тайбу по эллипсу.

Этими замѣчаніями можно воспользо-
ваться для устройства станка для обтачиванія
овальныхъ предметовъ; для удобства работы
придется лишь видоизмѣнить вѣтвины обра-
зовъ муфты Олсгэна. Средняя тайба пред-
ставится теперь плантайбой токарного
станка; значитъ, ось ей придется по одну
сторону ея. Одну изъ осей выполнимъ въ ви-
дѣ кольца, сквозь которое эксцентрично бу-
детъ проходить вторая, сплошная ось; коле-
цо это вращается въ соответствующемъ под-
шипникѣ. Какъ это кольцо, такъ и сплошная
ось снабжена кулачками, ходящими въ прорѣ-
захъ плантайбы; прорѣзы эти замѣчаютъ
собой прежніе выступы на средней тайбѣ
муфты Олсгэна и другъ къ другу перпен-
дикулярны. Выполненный такимъ образомъ
станокъ носитъ названіе станка Лонардо-
да-Винчи (фиг. 31)

Здѣсь A есть сплошная ось, вращающаяся
въ подшипникахъ K и L ; F есть кольцо (полная
ось), могущее вращаться въ подшипникѣ E . Гео-
метрическая ось этого кольца проектируется
на вертикальной проекціи въ точку D . AD и
есть постоянный отрезокъ, теперь неподвиж-
ный. Какъ кольцо F , такъ и ось A снабжена
кулачками: первое — NN , вторая — MM , входя-
щими въ прорѣзы N_1N_1 и M_1M_1 плантайбы.
Прорѣзы эти перпендикулярны другъ другу и

расположится, раздвинется, съ задней стороны плантайбы; геометрическая ось ихъ и представляють собою прямой уголъ, отъраженный сторонами на неподвижной отрезокъ AD .

При вращении оси A кольца F , подобно второй оси въ муфту Олсдена, также придутъ во вращение. Плантайба выталкиваетъ при этомъ движение средней тайбы муфты, и приспавленной къ ея внешней стороны карандашъ начертитъ на ней эллипсъ, и, следовательно, повернутый къ плантайбѣ предметъ можетъ быть обточенъ по эллипсу. Какъ видно изъ чертёжей, подпятникъ E , въ которомъ вращается кольцо F , при помощи винтовъ y, y можетъ быть несколько передвигаемъ въ направляющихъ XX ; это даётъ возможность измѣнить величину отрезка AD , при чёмъ это измѣнение измѣняется съ помощью мутокъ m и n у правого винта yz ; мотка m (на нижней части подпятника E) — подвижная, мотки же n являются неподвижными элементами, это и даётъ намъ возможность получать эллипсы различныхъ эксцентриситетовъ; установивъ, напримеръ, резецъ въ направлении AD на разстояніяхъ c отъ A и $(c - AD)$ отъ D , получимъ эллипсъ съ полуосями c и $(c - AD)$.

Эллисографъ.

Если мы обратимъ движение и поставимъ

механизмъ. фиг. 28 на уголъ, то полученное движение прямого отрезка въ уголъ; это уже разобрано нами детально на стр. 43 и слѣд. Каждая точка отрезка отнестъ на систему неподвижнаго угла эллипса, уравнение коего найти весьма легко (стр. 45 и слѣд.) Замѣтимъ, что единственной точкой, отсѣкающей окружности, будетъ здѣсь центръ малой окружности. Ставя карандашъ въ различныхъ точкахъ системы отрезка, увидимъ, что, при движении этого послѣдняго, карандашъ описываетъ эллипсы.

Двойной ползунъ.

Поставимъ теперь общій механизмъ, изображенный на фиг. 26, на какой-либо изъ ползунковъ, напримеръ, на В. Получимъ механизмъ, изображенный на фиг. 32. Точка А, жестко скрѣпленная съ неподвижнымъ теперь ползункомъ В, будетъ также неподвижна, въ силу чего точка D будетъ двигаться по окружности ав. Жесткій уголъ эгр (система осей ползунковъ) будетъ теперь двигаться поступательно по направлению оси уу ползуна В. Ползунъ С будетъ, при этомъ, перемѣщаться по оси эд, а точка D, жестко съ нимъ связанная, будетъ перемѣщаться по окружности. Очевидно, что система ползуна CD движется поступательно, и центръ мгновеннаго вращенія ея лежитъ въ безконечности по направлению дд.

Вокрающая теперь динна отрезков DC и AB до нуля, то-есть переходя къ механизму фиг. 28 и ставя его на ползунъ, — например, A , — получимъ упрощенный механизмъ, изображенный на фиг. 33. Точка D , — ось вращения другого ползуна, будучи вынуждена все время находится на постоянномъ разстоянии AD отъ неподвижной теперь точки A , будетъ двигаться по окружности ab , описанной изъ центра A радиусомъ AD . Что касается системы угла PQR , то сторона его PQ должна будетъ все время скользя по направлению оси yy неподвижного ползуна A ; иными словами, вся система PQR будетъ двигаться поступательно по направлению оси yy ползуна A ; прямая QR , а вместе съ ней и ось ползуна D , будутъ, следовательно, двигаться параллельно самимъ себѣ, при чемъ прямая постоянно проходитъ черезъ безконечно удаленную по направлению QR точку. Въ силу этого послѣдняго соображенія, разобранный механизмъ, носящій междоименное названіе двойного ползуна, представляетъ собою тотъ частный случай механизма Витворта (фиг. 19-21), когда точка A , черезъ которую постоянно проходитъ ось ползуна C , удаляется въ безконечность. Въ силу этого, имѣетъ мгновенное вращеніе динна системы ползуна D и системы угла PQR лежатъ въ безконечности, — ползунъ и уголъ перемѣщаются поступательно (фиг. 33).

Такъ какъ точка D описываетъ окружность, то въ томъ случаѣ, когда уголъ PQR прямой, вершина Q его будетъ перемѣщаться по закону:

$QA = r \cos \varphi$, и, следовательно, если угол φ будет изменяться равномерно, то-есть угловая скорость вращения звена $AD = r$ будет постоянна, точка Q будет совершать гармоническое движение, как проекция на ось и тем же диаметр $уу$ точки D , движущейся по окружности $ав$ равномерно. Этот механизм, как видно, осуществляет гармоническое движение и, при том, не приблизительно, а вполне точно. Осуществить его можно, например, в том виде, как это показано на фиг. 34.

Легко заметить, что постановка общего механизма (фиг. 26) на другой ползун C не дает ничего нового. Поэтому все модификации его нами начерчены, и мы перейдем теперь к тому случаю четырехзвенного механизма с двумя поступательными парами, когда эти пары лежат диагонально, то-есть когда мы займемся движением диагонально-лежащих вращательных пар поступательными.

Займемся диагонально-расположенными вращательными парами A и C шарнирного четырехзвенника $ABCD$ (фиг. 1) поступательными. Полагая, что звеня AB и BC в точках A и C несут на себе штыри, а звеня AD и DC втулки для них, займемся штыри направляющими, а втулки - ползунками. Получим механизм, изображенный на фиг. 35. Ползун A будет неподвижен и скрывается вместе со звеном AD , но втулка A была неподвижна

и жестко соединена с AD . Осю его XX будетъ неподвижна. Следовательно, направляющая его aa , жестко соединенная с системой AB бывшаго рычага, будетъ двигаться поступательно вдоль этой прямой XX , вследствие чего точка B будетъ двигаться по прямой ZZ , параллельной xx .

Ползунокъ C , жестко соединенный с рычагомъ CD , будетъ вращаться вращеньемъ с осью yy его движеньемъ центра D , вследствие чего ось yy его будетъ все время касаться окружности, описанной изъ центра D радиусомъ DE , равнымъ расстоянию DE точки D отъ оси yy . Осю направляющихъ cc , все время совпадающую с осью ползуна C , будетъ также постоянно касаться этой окружности EF . Заключая теперь, что точка B , жестко соединенная с системой cc , движется по прямой ZZ , можемъ опредѣлить движение системы Bcc направляющихъ, какъ движение прямой yy и жестко соединенной с ней точки B , при чемъ прямая все время касается некоторой опредѣленной окружности EF , а точка движется по опредѣленной прямой ZZ (фиг. 36). Полное мгновенное вращенья найдется здѣсь въ точке P пересѣченія нормали BN и радиуса DE , проведеннаго въ точку касанія.

Что касается поворотнаго круга, то его найти здѣсь весьма нетрудно: точка B принадлежитъ ему постоянно, потому что движется по неподвижной прямой ZZ . Вторая точка, — полюсъ P , — ищется. Третья же точка можетъ быть найдена или при помощи

теорема Савари, или, что гораздо проще, по-
мощью того соображения, что здесь имеет место
случай движения прямой по окружности, - в
этом случае точка F , симметричная центру
 D относительно полюса мгновенного вращения
 P , будет принадлежать поворотному кругу
($DP = PF$). Проведя окружность через эти три
точки - B , P и F , получим искомого поворот-
ный круг.

Если радиус окружности D уменьшится
до нуля, то получим механизм, изображен-
ный на фиг. 37: прямая yy постоянно прохо-
дит через точку D , а точка B , жестко со-
пряженная с прямой yy , скользит по неподвиж-
ной прямой zz . Полюс P будет лежать
в точке F пересечения нормалей Bn и Dn_1 , а
поворотный круг определится точками B ,
 P и F , где точка F симметрична точке D
относительно полюса P .

Модель, изображающая это движение,
очень проста: на шпильке жесткий угол Bpy
(фиг. 38), сторона py которого и есть наша
прямая yy схемы фиг. 38, долженствующая
постоянно проходить через точку D . Для
осуществления этого, в точке D жесткого
угла zzK делается шпиль, на который и са-
жается ползунок dd , могущий, следовательно,
свободно вращаться около точки D . Для
того, чтобы точка B дано возможность
скользить по прямой zz , сажаем на zz
ползунок bb , на котором помещаем шпиль;
штука для него ввертывается в кольцо Bp

и нагрѣваемъ на минъ. Тогда, сдѣлавъ систему xxK неподвижной, увидимъ, что система Byy будетъ двигаться такъ, что прямая yy , ей принадлежащая, будетъ проходить черезъ постоянную точку D , а точка B , жестко съ yy связанная, будетъ скользить по прямой ZZ .

Если данны BV и ED сдѣлаютъ равными, то механизмъ получитъ симметричное расположение звеньевъ, и легко показать, что въ этомъ случаѣ положеніи будутъ служить некоторыми параболы, и движение системы эллипскаго угла BVV сведется къ качению одной параболы по другой. При этомъ, принявъ во вниманіе, что обращеніе движения даетъ тотъ же механизмъ, что и въ прямомъ движеніи, заключаемъ, что обѣ пологія параболы будутъ одинаковы.

Изъясненіемъ этого механизма мы и закончимъ статью о преобразованіяхъ генераторнаго механизма, ибо дальнейшія занятія интереса не представляютъ.

Переходъ черезъ мертвыя положенія.

Мертвыми положеніями механизма мы называемъ такіе, при которыхъ появляется неопредѣленность въ дальнѣйшемъ движеніи частей механизма, а иногда даже и невозможность двигаться дальше безъ посторонней помощи. Классическимъ примѣромъ можетъ служить механизмъ паровой машины въ тотъ моментъ, когда татунъ и кривошипъ вытягиваются въ одну прямую. Если движеніе идетъ отъ кривошипа,

то мертвых положений не будет, ибо всякая точка механизма всегда имеет в это время су-
чае определенное движение. Но если движение
фактически вызывается силами, действующими
на ползун, то в указанные моменты вытесни-
тия в одну или другую сторону может или сжа-
тие катушка и кривошипа, или их вытеснива-
ние; усилие, действующее на ползун, не произво-
дит в этот момент никакого движения.
Кроме того, машина с этого момента, криво-
шип получает возможность двигаться как
в одну сторону, так и в другую, с одинако-
вым правом. Чтобы обеспечить непрерывность
движения, прибегают к помощи маховиков
и т. п.

В механизме параллельного кривошипа
для той же цели к шатунам уже парал-
лельному кривошипу присоединяют другой,
тоже параллельный, кривошип, шатуны
мертвого положения, отстоящие по времени от
первого (фиг. 39). Второй кривошип, как и
первый, могут соединить с осью A и D , так
что эти два кривошипа являются как бы со-
единенными шатунами между собой, как и по-
казано на фиг. 39.

Неопределенность движения теперь устрани-
ма совершенно: когда кривошипы AB и DC
окажутся в мертвом положении, кривошипы
 AA_1 и DC_1 не будут в таковом и переведут
первые кривошипы через это мертвое положе-
ние в определенном направлении. Такую же
роль сыграют первые кривошипы, когда второе

окажутся въ мертвыхъ положеніи.

Подобное соединеніе двухъ параллельныхъ криволиний прилагается въ паровозахъ, где именно такимъ образомъ соединяются две пары (или болѣе) колесъ, лежащихъ съ разныхъ сторонъ.

Во другихъ случаяхъ устраняютъ неопредѣленность **защепленіемъ**. Сущность этого способа состоитъ въ томъ, что опредѣляютъ движеніе какого-либо звена по отношенію къ другому и пристраиваютъ на этихъ звеньяхъ приспособленія, заставляющія звенья около мертвыхъ положеній продолжать свое прежнее относительное движеніе. Способомъ этимъ можно съ удобствомъ воспользоваться для устранения неопредѣленности движенія въ мертвыхъ положеніяхъ симметричнаго криволишня.

Пусть у насъ имѣется симметричный криволишнъ $ABCD$ (фиг. 40). Опредѣлимъ движеніе звена BC по AD . Центръ мгновеннаго вращенія для звена BC лежитъ въ точкѣ пересѣченія радиусовъ BA и DC , — допустимъ, въ точкѣ P ; при этомъ имѣемъ: $AB = CD$, $AD = BC$, — значитъ, треугольники PAD равенъ треугольнику PBC , откуда

$$\angle APD = \angle BPC,$$

это показываетъ, что $\triangle PBD$ — равнобедренный и $PB = PD$; въ такомъ случаѣ можемъ написать:

$$PB - AB = PD - CD \text{ или } PA = PC,$$

это, наконецъ, даетъ намъ возможность написать: что

$$PD - PC = CD = \text{const.},$$

то-есть $PD - PA = \text{const.}$, - значит, точка P есть одна из точек, разности расстояний которых до двух данных неподвижных точек A и D постоянна; геометрическое место таких точек есть, как известно, гипербола с фокусами A и D и с действительной осью $AA' = AB$. Точки A' и A служат полюсами мгновенного вращения для BC в обоих мертвых положениях.

Подвижной положий для BC , - то-есть положий движения AD по отношению к BC будет также гипербола с действительной осью $A_1A_1' = CD = AB$.

В первом мертвом положении совпадут точки A_1 и A' гиперболы, во втором - A_1' и A .

Чтобы заставить звено BC в том или другом мертвом положении действительно вращаться около точек A' и A и, тем самым, продолжать двигаться в прежнем смысле, а не изменять характера движения, мы можем устроить в точках A_1 и A_1' звена BC кулачки, а в точках A и A' звена AD - соответствующия этим кулачкам вилки. Теперь помню, что когда, например, кулачок A_1 совпадает с вилкой A' , то, при дальнейшем вращении кривошипа AB все в ту же сторону (указанную на чертеже стрелкой), стержень BC будет вынужден повернуться около A' , и так как при этом один конец его, B , повернется в прежнем

направлений (по стрелкам), то другой конец его, С, будетъ вынужденъ повернуться въ обратномъ концу В направлений, то-есть повернется въ то же направление, что и передъ темъ (фиг. 41), и, значитъ, симметричный кривошипъ и дальше останется симметричнымъ, и направления вращений останутся прежними.

Защитение можно устроить и на звеньяхъ АВ и СД. Определяя относительное ихъ движение, легко найдемъ, что въ этомъ случае одной пологій будетъ эллипсъ съ фокусами А и В, а другой — также эллипсъ, съ фокусами С и Д (фиг. 42).

Подобные переходы черезъ мертвые положения при помощи защитения употребляются и въ некоторыхъ другихъ частныхъ случаяхъ плоской четырехзвенной кинематической цепи. Такъ, напримеръ, если у насъ имеется кривошипный механизмъ, въ которомъ длина кривошипа равна длине шатуна, то получимъ здѣсь мертвые положения и въ томъ случае, когда движение происходитъ отъ кривошипа, чего въ общемъ случае механизма кривошипа и шатуна не бываетъ. На самомъ дѣлѣ, когда кривошипъ АВ (фиг. 43), вращаясь, придетъ въ положение, перпендикулярное линіи В₀В₁, то ось шатуна С совпадетъ съ осью А, и шатунъ приметъ направление такое же, какъ и кривошипъ; при дальнейшемъ вращении кривошипа шатунъ, съ нимъ совпадши, сво-

бодно может вращаться съ тѣмъ около оси C , теперь совпадшей съ A ; при этомъ ползунокъ останется неподвижнымъ, и механизмъ обратится въ простую вращательную пару. Устранимъ эту неопредѣленность мы можемъ, для чего заставимъ мануль BC и въ мертвыхъ положеніяхъ сохранить характеръ его движенія по отнотенію, наприимръ, къ неподвижному звену d .

Поломъ P мгновеннаго вращенія мануля найдется обыкновеннымъ способомъ; при этомъ вѣроятіе равенства $BC = AB$, имѣемъ также равенство:

$$BC = PB = AB, \text{ т.-е. } AP = 2AB,$$

это показываетъ намъ, что неподвижная пологія есть окружность центра A и радиуса $2a = 2AB$. Подвижную пологію найдемъ, сдѣлавъ CB неподвижнымъ, — это будетъ окружность съ центромъ въ B и равное меньшій радиусомъ.

Движеніе мануля есть въ данномъ случаѣ движеніе отрезка CD (гдѣ BD , равное BC , есть продолженіе мануля) внутри прямого угла CAD . Въ мертвыхъ положеніяхъ поломъ мгновеннаго вращенія мануля будутъ точки P_0 и P_1 ; заставимъ мануль дѣйствительно вращаться около этихъ точекъ, устроивъ въ P_0 и P_1 вилки, а въ точку D мануля, совпадающей въ мертвыхъ положеніяхъ съ P_0 и P_1 , — кулакъ, могущій сцепляться съ этими вилками; тогда неопредѣленность не будетъ имѣть мѣсто

Поставивъ этотъ же механизмъ на AB , увидимъ, что и здѣсь получатся мертвыя положенія того же рода и подобныя же образамъ устранившимся. Здѣсь, когда движущимъ звеномъ является B (CB), при равномерномъ его вращеніи около B , звено d будетъ также равномерно вращаться около A , но лишь съ вдвое меньшей угловой скоростью, — въ то время, какъ звено B совершаетъ два оборота, звено d совершаетъ только одинъ, при чемъ мертвыхъ положеній не будетъ совсемъ.

Но въ томъ случаѣ, когда движущимъ звеномъ является звено d , — следовательно, его вращеніе около A передается звену B , которое начинаетъ вращаться около B съ вдвое болѣе угловой скоростью, — мы опять получимъ неопределенность въ движеніи механизма въ тотъ моментъ, когда ось шарнира C совпадетъ съ осью A ; тутъ мы не можемъ заставить звено CB остаться неподвижнымъ, а ползуну вращаться вокругъ съ d около совпавшихъ осей C и A , — механизмъ опять обратится въ простую вращательную пару.

Взявъ опять на продолженіи шатуна въ разстояніи отъ B , равномъ BC , точку D и приладивъ въ ней кулакъ, заставимъ его вращаться въ мертвыхъ положеніяхъ съ кулакомъ, соединеннымъ теперь съ движущимъ звеномъ d . Но можно сделать иначе: можно въ D пристроить такой же ползунъ, какъ и въ C , а звену d придать соответ-

свободныя направляющія, перпендикулярныя направляющіе позуна С (фиг. 44).

Строго говоря, этотъ послѣдній способъ будетъ уже способомъ перехода черезъ мертвое положеніе при помощи прибавленія механизма, имѣющаго друга мертвое положеніе сравнительно съ даннымъ. — Разсмотрѣнный механизмъ употребляется иногда для передачи вращательнаго движенія между параллельными осями при отношеніи скоростей, равномъ $\frac{1}{2}$.

Подобные же способы перехода черезъ мертвое положеніе употребляются и въ тѣхъ, гораздо болѣе редкихъ, случаяхъ, когда нѣсколько вѣтвей гетерокулирной тарнирной цепи съ гетерокулирами равными попарно звеньями (фиг. 45).

Какъ мы уже знаемъ, механизмъ, поставленный на короткое звено, даетъ въ этомъ случаѣ двойной кривошипъ, и если движущееся звено является болѣе кривошипъ, то мертвое положеніе имѣютъ только, когда ось С приходитъ въ C_1 , а В — въ D, или когда С приходитъ въ C_2 , а В — опять въ D; въ этихъ случаяхъ кривошипъ А свободно можетъ вращаться неподвижно, въ то время, какъ оба звена С будутъ вращаться, какъ одно, около оси d — такимъ образомъ, у насъ получится простая вращательная пара.

Здѣсь можно такъ же можно устранить полугающуюся неопредѣленность движенія счѣтлемъ въ соответственныхъ положеніяхъ, напр., звена въ АВ и CD, для чего нужно отослать ихъ относительно положеніи и по-

ступинно, какъ раньше.

Если этотъ механизмъ будетъ поставленъ на звено С, то, какъ нетрудно видеть, мертвые положения будутъ иметь место въ случае получения движения отъ кривошипа А, звено С явится тогда коромысломъ, — и опять будутъ иметь тотъ же характеръ.

Кинематическая цѣпь съ пятымъ вращательными парами.

Пусть у насъ имеется кинематическая цѣпь АВСДЕ (фиг. 46) съ пятымъ вращательными парами. Ближайшаго изслѣдованія этой цѣпи мы производить не будемъ и ограничимся лишь некоторыми указаніями общаго характера.

Прежде всего, мы замѣчаемъ, что цѣпь эта, после постановки ея на одно изъ звеньевъ, — напримеръ, на АЕ, — механизма, въ томъ смысле этого слова, еще не даетъ, ибо при опредѣленномъ перемѣщеніи одного звена, напримеръ, АВ, — остальные три звена — ВС, CD и DE, могутъ совершить безконечное множество перемѣщений, такъ какъ каждому отъ данному положенію звена АВ является соответствующимъ свой отгороженный четырехзвонный механизмъ BCDE, могущій безконечно менять свою конфигурацію. Въ виду этого, для обращенія такой цѣпи въ механизмъ надо задать перемѣщеніемъ одного звена АВ, — необходимо также еще соот-

вращающиеся перемещение звена DE ; тогда точка C , а значит, и звена BC и DC , будут перемещаться вполне определенным образом, и наша цуна перейдет во вполне определенный механизм. Итак, при этих условиях перемещения точки C будут вполне определенными, вследствие чего вполне определится как траектория ее, так и скорости и ускорения. Не касаясь вопроса об ускорениях точки C , мы изобразим лишь вопрос о графическом определении скоростей ее по данным скоростям точек B и D .

Пусть скорости эти в данный момент равны v_B и v_D ; направим от перпендикулярно своим радиусам-векторам AB и ED (фиг. 47). Скорость точки C , v_C , вполне определенная по величине и направлению, будет перпендикулярна нормали CA к траектории st точки C . Легко видеть, что мы имеем здесь движение отрезка BC по траекториям $\beta\beta$ и st его концов и отрезка CD по траекториям его концов st и dd . Толмач этих движений лежат в пересечении соответственных нормалей, в точках P и P_1 . Строим теперь при одном и том же полюсе p (фиг. 48) план скоростей для движения отрезков BC и CD .

Проведя из полюса p лучи $p1$ параллельно PB и лучи $p3$ параллельно PC , откладываем на $p1$ отрезок $pв$, изображающий в каком-нибудь, заранее выбранном, масштабе скорость v_B точки B . Пусть

$$v_B = k \cdot pb = PB \cdot \omega \dots \dots (1),$$

здрѣ ω есть угловая скорость вращения отрезка BC около центра P . Проведемъ теперь изъ точки b луча $p1$ лучъ bn параллельно BC , и пусть онъ пересѣкаетъ лучъ $p3$ въ точку c_b ; тогда векторъ pc_b изобразитъ во взятомъ масштабѣ $[k]$ скорость v_c точки C . Действительно, изъ подобія $\Delta \Delta PBC$ и $pb c_b$ имѣемъ соотношенія:

$$pb : pc_b = PB : PC = (PB \cdot \omega) : (PC \cdot \omega) = v_B : v_c ;$$

но

$$v_B = k \cdot pb ;$$

поэтому имѣемъ также:

$$pb : pc_b = (k \cdot pb) : v_c = pb : \frac{v_c}{k} ,$$

откуда и получаемъ, что

$$v_c = k \cdot pc_b \dots \dots (2).$$

Переходимъ теперь къ отрезку CD . Откладываемъ на лучъ $p2$ отрезокъ pd , гарантія въ томъ же предѣлѣ масштаба $[k]$ скорость v_d точки D . Если полюсъ для системы CD лежитъ въ P_1 , то мы имѣемъ:

$$v_d = k \cdot pd = P_1 D \cdot \omega_1,$$

здрѣ ω_1 есть угловая скорость вращения отрезка CD около центра P_1 . Проведемъ теперь изъ d лучъ dn_1 параллельно DC , найдемъ въ пересѣченіи его съ лучемъ $p3$ точку c_d , гарантія скорости v_c въ томъ же масштабѣ $[k]$.

Действительно, изъ подобія треугольниковъ $P_1 CD$ и $pc_d d$ имѣемъ:

$$pd : pc_d = P_1 D : P_1 C = (P_1 D \cdot \omega_1) : (P_1 C \cdot \omega_1) = v_d : v_c = (k \cdot pd) : v_c ,$$

откуда и находимъ окончательно, что

$$v_c = k \cdot pc_d \dots \dots (3).$$

Сравнивая (2) и (3), находим, что

$$pc_b = pc_d,$$

а так как точки c_b и c_d лежат на одной и той же прямой p_3 , то они должны совпадать ввиду того, что мы считаем систему BCD инерциальной в этом смысле, изображенном на фиг. 49: прямые $dn_1 \parallel DC$, $bn \parallel BC$ и p_3 , как оказывается, должны пересекаться в одной и той же точке c , определяющей собою длину pc вектора, изображающего собою скорость точки C в той же масштабе $[k]$, в каком скорости v_B и v_D изображены векторами pb и pd .

Отсюда, в свою очередь, можем сформулировать закон, дающий собою разрешение поставленной нами себе задачи: для нахождения точки c , определяющей собою, во-первых, направление нормали $p_3 \parallel CN$ к траектории точки C и, во-вторых, длину вектора pc , дающего в известном масштабе скорость точки C , — проводим из некоторого произвольного полюса p прямые $p_1 \parallel AB$ и $p_2 \parallel ED$, на которых откладываем отрезки pb и pd , дающие, в заранее выбранном масштабе $[k]$, скорости v_B и v_D точек B и D . Проведя затем из так полученных точек b и d прямые $bn \parallel BC$ и $dn_1 \parallel DC$, находим в точке пересечения этих двух точек c , определяющей собою направление pc прямой p_3 , то-есть нормали CN к траектории точки C , и величину скорости v_C по $v_C = k \cdot pc$, подобно тому, как $v_B = k \cdot pb$

которой кривой S_1 по огибающей ее S . Пусть для первого промежутка времени dt нормалью мгновенного вращения служат точка T , а точкой касания кривых — точка T_1 ; для второго промежутка пусть этими точками служат точки T_1 и T_1 (фиг. 56). Общая нормаль в точке T пройдет через полюс P ; на этой же нормали лежит и центр кривизмы кривой S в точке T ее, при чем положение его определяется точкой пересечения нормалей, проведенных в двух смежных точках кривой, — выбираем за эти смежные точки точки T и T_1 . Ввиду этого, нормаль к кривой в смежной точке ее T_1 пройдет через тот же центр кривизмы ее, но, в то же время, она пройдет через второй соседней полюс P_1 , ибо в то время, когда касание будет иметь место в точке T_1 , полюсом будет служить именно эта точка P_1 . Таким образом, обе смежные нормали TN и T_1N_1 пересечением своим определят положение центра кривизмы A кривой S для участка ее TT_1 . Кроме того, с возможностью до бесконечно-малых величин порядков можно принять, что дуга TT_1 кривой S есть дуга круга кривизмы, описанного из центра A радиусом AT .

То же будет иметь место и для огибаемой S_1 : дугу $T_1\tau_1$, где τ_1 есть точка этой кривой, в succeeding момент совпадающая с T_1 , можно принять за дугу круга

кривизны, описанного из центра кривизны A_1 радиусом $A_1 T_1$, при чем векторы $T A_1$ и $\tau_1 A_1$ можно принять за радиусы этого круга кривизны. В тот же момент, когда точка τ_1 совпадет с T_1 , радиусы $A T_1$ и $A_1 \tau_1$ вытнутся в одну прямую - общую нормаль к кривизне в точке T_1 ; центр A_1 в этот момент перенесется в точку A'_1 , при чем нулевое равенство:

$$A_1 T = A_1 \tau_1 = A'_1 T_1.$$

Замечая, что отрезки $A T$ и $A T_1$, с точностью до безконечно-малых высшего порядка, можно считать равными, как радиусы круга кривизны, заключаем, что нулевое равенство:

$$A T + T A_1 = A T_1 + T_1 A'_1;$$

замечая, далее, что точки A, T и A_1 лежат на одной прямой $A A_1$, а точки A, T_1 и A'_1 на одной прямой $A A'_1$, заключаем, что $A A_1 = A A'_1$, откуда вытекает, что в продолжение двух соседних безконечно-малых промежутков времени, $2 dt$, некоторая точка A_1 подвижной системы, - центр кривизны огибаемой для рассматриваемого промежутка времени, - вращается вокруг неподвижной точки A , - центра кривизны огибающей, - перемещаясь по окружности радиуса $A A_1$, неизменяющегося за это время.

Итак, в подвижной системе, определенной перемещением некоторой кривой S_1 по неподвижной кривой S , выделится

некоторая определенная точка A_1 , центр кривизмы кривой S_1 для рассматриваемого момента, движущаяся, за взятый промежуток времени, по окружности центра A и радиуса AA_1 , равного сумме радиусов кривизмы огибающей и огибаемой, $\varrho + \varrho_1$, где радиус ϱ назван радиусом AJ кривизмы огибающей, а радиус ϱ_1 - радиусом A_1J кривизмы огибаемой. Таким образом, движение огибаемой по ее огибающей мы свели на движение некоторой определенной точки A_1 по дуге $A_1A'_1$ определенного центра и радиуса.

В таком случае, мы получаем возможность найти на векторе AA_1 точку M поворотного круга, пользуясь известными нам соотношениями (33), - см. стр. 76 курса, приняв следующий вид

$$A_1P^2 = A_1M \cdot A_1A \dots \dots \dots (1),$$

откуда, по известным из чертежа отрезкам A_1P и A_1A , сейчас же определится искомый отрезок A_1M .

Полученному соотношению (1) можно дать более привлекательный для нас вид, выражая отрезки, в него входящие, через радиусы кривизмы ϱ и ϱ_1 , диаметр d поворотного круга, угол φ и расстояние PT от полюса P до точки касания T , обозначаемое обыкновенно через p . Сообразно положению и месту расположения кривых S и S_1 , знаки придется ставить различно; для случая, взятого на фиг. 56, имеем

$$A_1P = A_1T + TP = \varrho_1 + p;$$

$$A_1 A = \varrho + \varrho_1;$$

$$A_1 M = A_1 T + TP - TM = \varrho_1 + p - d \cos \varphi.$$

Ввиду этого, соотношение (1) перепишется так:

$$(\varrho_1 + p)^2 = (\varrho + \varrho_1)(\varrho_1 + p - d \cos \varphi),$$

откуда получаем:

$$d \cos \varphi (\varrho + \varrho_1) = (\varrho + \varrho_1)(\varrho_1 + p) - (\varrho_1 + p)^2 = (\varrho_1 + p)(\varrho + \varrho_1 - p - \varrho_1) = (\varrho_1 + p)(\varrho - p).$$

Отсюда находим следующее:

$$\frac{1}{d \cos \varphi} = \frac{\varrho + \varrho_1}{(\varrho_1 + p)(\varrho - p)} = \frac{(\varrho_1 + p) + (\varrho - p)}{(\varrho_1 + p)(\varrho - p)} = \frac{1}{\varrho - p} + \frac{1}{\varrho_1 + p} \dots (2),$$

— известная из предыдущего формула (35), — стр. 85 курса. Это — симметричная форма теоремы Савари. Она применима ко всякой огибаемой и огибающей, — значит, применима и к параболам, ибо параболы есть огибающая всех парабол параболы; поэтому, замечая, что для параболы точка T касания огибаемой и огибающей совпадает с фокусом F , ввиду чего $p = 0$, и обозначая радиус кривизны параболы через R и R_1 , дадим соотношение (2) вид:

$$\frac{1}{d \cos \varphi} = \frac{1}{R - 0} + \frac{1}{R_1 + 0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \dots (3),$$

знакомый нам из предыдущего, — формула (34), стр. 82.

Весьма легко, помощью соотношения (1), разобраться в самых запутанных случаях расположения кривых S и S_1 . Надо помнить лишь, что семь векторов ве-

денноа здръс отъ точки A_1 по направление
къ точке касанія T ; здръс на дуге по-
лучае векторъ съ положительнымъ зна-
комъ. При обратномъ счетъ, отъ T къ A_1 ,
векторамъ придается отрицательнъ знакъ
минусъ

✓ Въ виду этого, для случая, изображен-
наго на фиг. 79 (стр. 89 курса), получаемъ:

$$A_1P = A_1T - TP = \rho_1 - p;$$

$$A_1M = +A_1T - TP + PM = \rho_1 - p + d \cos \varphi;$$

$$A_1A = A_1T + TA = \rho + \rho_1.$$

Такимъ образомъ, соотношение (1)
принимаетъ здръс видъ:

$$(\rho_1 - p)^2 = (\rho_1 - p + d \cos \varphi)(\rho + \rho_1).$$

Отсюда получаемъ:

$$d \cos \varphi (\rho + \rho_1) = (\rho_1 - p)^2 - (\rho_1 - p)(\rho + \rho_1) = (\rho_1 - p)(\rho_1 - p - \rho - \rho_1) = \\ = (\rho_1 - p)(-p - \rho) = (p - \rho_1)(p + \rho).$$

Отсюда легко получимъ формулу этого
случая, приведенную на стр. 90.

Подобнымъ же образомъ для случая,
изображеннаго на фиг. 80 (стр. 90 курса),
получимъ:

$$A_1P = +A_1T - TP = \rho_1 - p;$$

$$A_1M = +A_1T - TP + PM = \rho_1 - p + d \cos \varphi;$$

$$A_1A = A_1T - TA = \rho_1 - \rho.$$

Поэтому соотношение (1) принима-
етъ видъ:

$$(\rho_1 - p)^2 = (\rho_1 - p + d \cos \varphi)(\rho_1 - \rho),$$

откуда

$$d \cos \varphi (\rho_1 - \rho) = (\rho_1 - p)(\rho_1 - p - \rho_1 + \rho) = (\rho_1 - p)(\rho - p).$$

Далее получимъ то же, что и на стр.
91, вверху.

Наконец, для случая, изображен-
ного на фиг. 81, имеем:

$$A_1P = A_1T + TP = \rho_1 + p;$$

$$A_1M = + A_1T + TP - PM = \rho_1 + p - d \cos \varphi;$$

$$A_1A = + A_1T - TA = \rho_1 - \rho.$$

Поэтому формула (1) принимает
следующую форму:

$$(\rho_1 + p)^2 = (\rho_1 + p - d \cos \varphi)(\rho_1 - \rho),$$

откуда

$$d \cos \varphi (\rho_1 - \rho) = (\rho_1 + p)(\rho_1 - \rho - \rho_1 - p) = (\rho_1 + p)(-\rho - p),$$

имеем

$$d \cos \varphi (\rho - \rho_1) = (\rho_1 + p)(\rho + p),$$

то же формула, что на стр. 91, внизу.

Достаточно замечить, что, по
какому-либо суждению относительно
направления вектора, направление которого
согласно с направлением A_1T отъ цен-
тра окружности A_1 къ точке касания T ,
а отрицательным — вектор, направ-
ленный обратно, — чтобы разобра-
ться во всех возможных случаях, вхо-
дящих на практике. Само собою ра-
зумеется, что применение формулы въ
функции ρ , ρ_1 , p и т. д., не всегда явля-
ется нужным, но центр тяжести
теоремы лежит не въ формуле, а въ
даваемой ею возможности найти
точку M на обратномъ кругу; но, такъ
не центр, тогда можетъ оказат-
ся нигде и въ формуле, обобщающей
данную случай формулу, и тогда
основная формула (1), въ сочетании

с указанными правилами знаков, да-
етъ всегда вполнѣ правильнѣйшій и тог-
нѣй отвѣтъ, а между тѣмъ, изло-
жение въ изложенномъ нами теперь
видѣ отличается особой простотой
и наглядностью и имѣетъ теорему
Савари того же качества по вѣрности
и удобному для запоминанія виду,
какой для изучающихъ кинематику
имѣетъ эта формула въ обыкновен-
номъ ея выводѣ, примѣномъ издавна
во всехъ учебникахъ.

Передатка движенія.

Общая задача плоскихъ механизмовъ
такова: имѣется плоская система, дви-
жущаяся по некоторому опредѣленному
образу; имѣется, затѣмъ, некоторая
другая плоская система, которую нуж-
но привести въ опредѣленное движеніе.
Требуется выполнить такіе приспособле-
нія, чтобы опредѣленное движеніе одной
системы вызвало опредѣленное движе-
ніе другой. Эту общую задачу мы сво-
димъ на рядъ частныхъ. Движенія си-
стемъ могутъ быть поступательными
и вращательными. Соединяя ихъ, по-
лучимъ любое другое плоское движеніе,
и нашу задачу можно свести на част-
ную задачу: 1) при данномъ вращатель-
номъ движеніи одной системы воспро-

известн заданное вращательное движение другой и, 2), при данном вращательном движении одной системы воспроизвести заданное поступательное движение другой. Разберем сначала первую задачу.

Пусть у нас имеются две системы I и II, могущая вращаться около некоторого своего центра A и B, служащих, такими образом, центрами этих вращений. Расстояние AB между этими центрами за все время движения остается постоянным и равным d (фиг. 57), при чем сами эти центры могут быть и неподвижны в пространстве, и перемещаться. Мы разберем детально вступавшуюся здесь комбинация движений этих центров.

Обозначим угловую скорость вращения системы I около своего центра A через ω_A , а скорость вращения системы II около своего центра B через ω_B . Между этими скоростями может быть задана известная зависимость в форме некоторого соотношения $\omega_B = f(\omega_A)$, где функция f может быть весьма различного вида и состава, но, вообще говоря, ее всегда можно представить себе в виде некоторого ряда, расположенного по степеням аргумента ее, то-есть можно

положить, что зависимость между угловыми скоростями выражается уравнением:

$$\omega_B = k + k_1 \omega_A + k_2 \omega_A^2 + k_3 \omega_A^3 + \dots \dots \dots (1),$$

где коэффициенты $k, k_1, k_2, \dots$, представляют собою некоторые постоянные величины, очевидно, различного изчисления. Рассмотрим сначала простейшую зависимость между ω_B и ω_A , когда во второй части уравнения (1) мы возьмем только два первых члена; в этом случае мы имеем соотношение:

$$\omega_B = k + k_1 \omega_A \dots \dots \dots (2),$$

рассмотрим теперь которого мы теперь и займемся. Движение наших систем характеризуется уравнением (2), отсюда видно особенность, что при $\omega_A = 0$ имеем $\omega_B = k$, а при $\omega_A = -\frac{k}{k_1}$ скорость $\omega_B = 0$. Итак, при таком движении обе системы одновременно прекратят своего вращения не могут: если система А не вращается, то система В вращается со скоростью k ; если же перестает вращаться система В, то система А оказывается в этот момент вращающейся со скоростью $(-\frac{k}{k_1})$.

Чтобы упростить изложение уравнения (2), перепишем его в форме

$$\omega_B - k = k_1 \omega_A, \dots \dots \dots (3)$$

и будем рассматривать не действитель-

-телное вращение системы II со скоростью ω_B , а преобразованное, со скоростью $(\omega_B - k)$, которую мы будем обозначать через ω'_B , так что

$$\omega'_B = \omega_B - k \dots \dots \dots (4),$$

в виду чего

$$\omega'_B = k_1 \omega_A \dots \dots \dots (5).$$

Таким образом, мы уменьшаем скорость ω_B системы II, отняв от нее некоторую ограниченную скорость k . Иначе говоря, как можно перейти от этой скорости ω'_B к действительной скорости ω_B , — возмещение ω_B по данной ω'_B оказывается возможным всегда.

Итак, полагаем, что система II вращается со скоростью ω'_B , а система I — со скоростью ω_A ; как показывается уравнение (5), в данном случае между этими скоростями существует соотношение:

$$\omega'_B : \omega_A = k_1 \dots \dots \dots (6),$$

показывающее, что отношение угловых скоростей наших систем есть величина постоянная и вполне определенная, равная k_1 . Теперь при $\omega_A = 0$ и скорость $\omega'_B = 0$, так что движение одной системы всегда влечет за собой движение другой. Ради простоты рассуждения, полагаем теперь, что ось A и B наших систем неподвижны, и тогда мы получим за-

-дату, детально рассмотренную на стр. 2 - 26 временного 4^{го} выпуска. На ней, поэтому, останавливаться более не будем.

Не касаясь пока вопроса о восстановлении действительной скорости ω , системы II, при k , отменим отсюда, продолжив рассмотрение уравнения (1), при обозначении (4) приведенного вида

$$\omega'_s = k_1 \omega_s + k_2 \omega_s^2 + k_3 \omega_s^3 + \dots \quad (7).$$

Оси A и B в этом случае, как и в предыдущем, предполагаем неподвижными. В силу того, чтобы уравнение (7) рассматривать непосредственно, оставшая в правой части его сначала два члена, затем при и т.д., мы поступим иначе.

Из уравнения (7) имеем соотношение:

$$\omega'_s : \omega_s = k_1 + k_2 \omega_s + k_3 \omega_s^2 + \dots \quad (8)$$

Значит, отношение скоростей не будет здесь постоянным, как это мы имели выше, - см. ур-е (6), - а будет зависеть от основной скорости ω_s , которая, в свою очередь, вовсе не должна быть всегда постоянной, - она может меняться и представлять собой, вообще, некоторую функцию времени. Поэтому задачу можно обобщить, приняв всю вторую часть соотношения (8) за некоторую функцию времени $\varphi(t)$, в виду чего соотношение (8)

переходит в уравнение:

$$\omega'_s : \omega_s = f(t) \dots \dots \dots (9)$$

Такая форма соотношения (8) дает возможность принять во внимание все члены правой части этого соотношения, приводя нас к естественному ходу разсуждений к такой задаче, где отношение $(\omega'_s : \omega_s)$ является уже не постоянной величиной, а некоторой определенной функцией времени. Посмотрим, как осуществляются такие переходы.

Угловая скорость ω_s , вообще говоря, будет переменной величиной, то есть известной функцией времени, и закон ее изменения может быть задан или в аналитической форме, или графически, при чем последний составляется так: по оси абсцисс откладываются времена, а на ординатах — соответствующие каждой абсциссе значения скоростей ω_s . Получается кривая, весьма наглядно рисующая изменение угловой скорости ω_s со временем.

Если угол поворота системы I от начала его поворота будем обозначать через α , то угловая скорость ω_s ее выразится через $\frac{d\alpha}{dt}$. Поэтому, если нам задается зависимость угла α от времени t в виде уравнения

$$\alpha = F(t), \dots \dots \dots (10),$$

то закон изменения угловой скорости ω_s будет задан уравнением

$$\omega_a = \frac{da}{dt} = F'(t) \dots \dots \dots (11).$$

Можно задавать ω_a и прямо, в виде

$$\omega_a = f(t) \dots \dots \dots (12);$$

тогда угол поворота α выразится интегралом:

$$\alpha = \int f(t) dt \dots \dots \dots (13).$$

Во время и градусе сугарь мы получаем возможность строить как за изменениями α , так и за изменениями ω_a , и определять их значения для любого момента времени t . —

Данные соотношения можно воспользоваться для построения графика изменений ω_a . Откладывая на различных абсциссах соответствующие значения $\omega_a = f(t) \equiv F'(t)$, получим несколько графиков угловых скоростей, о которых мы упоминали выше. —

Пусть в данном сугаре он представляется кривой KL (фиг. 58). Рассмотрим, как и как выразится по этому графику угол поворота системы I от некоторого начального положения. За начальный момент берем точку O оси абсцисс, — начало координат. Возьмем на кривой KL какую-либо точку M и соединим с ней точку O . Задача, что OM есть угловая скорость $\frac{da}{dt}$ для момента OM , и обозначая ее через y , а OM через dx , находим, что площадь OM выразится через ydx , вся же площадь KL , за вре-

-на Ox , выразится через $\int_0^{Ox} y dx$. Но значение нулевым:

$$мощ. Kx = \int_0^{Ox} y dx = \int_0^{Ox} \frac{da}{dt} dt = a_{Ox}.$$

Умная, улов поворота системы за какое-либо время выражается площадью, ограниченной кривой, глупа крайними ординатами и осью абсцисс.

Во изображение медоразумий, могущих возникнуть из-за принятого нами способа выражения угла некоторым площадью, заметим, что эти площади имеют как раз желаемое измерение. Действительно, по оси ординат на откладываемся отрезки, имеющие измерение $[a][t]^{-1}$, а по оси абсцисс - отрезки с измерением $[t]$; очевидно, что произведение, выражаемое площадью, будет иметь измерение $[a]$.

Для вычисления площади, спрямляем ее в равновесный прямоугольник или разбиваем на трапеции, или же пользуемся планшетом.

Спрашивается теперь, как погугливаются по этим ω_a и угла поворота α системы I то же факторы системы II, то-есть скорости ω'_β и угла β ? Для этого и может служить задаваемое заранее уравнение (9), из которого для каждого момента находим величину отношения $\omega'_\beta : \omega_a$, которое будем обозначать через q :

$$\omega'_3 : \omega_3 = q = \varphi(t) \dots \dots \dots (14)$$

Полученное отношение дает возможность построить диаграмму, изображающую ход отношений между скоростями; откладывая по оси абсцисс время, а по ординатам — величину q в известном масштабе, получим кривую QQ_1 , дающую эту диаграмму (фиг. 58). Кривые KL и QQ_1 дают возможность построить кривую GH угловых скоростей ω'_3 . Само построение состоит очень просто: пусть в момент 3 скорость ω_3 имеет значение 53 (фиг. 58); диаграмма (q) показывает, что в этот момент отношение q имеет значение $0,75$, равное, положим, $0,75$. Также как, согласно ур-ию (10), $\omega'_3 = q \cdot \omega_3$, то, произведя умножение на данное число, получим $\omega'_3 = 0,75 \cdot 53 = 39,75$ (фиг. 59). Угол поворота системы II , непрерывно, будет определяться известными моментами.

Теперь мы можем все данные для определения положений. По условию, ось системы вращается около неподвижных точек A и B (фиг. 60). — Для нахождения положений движущихся объектов путь, определяющий относительное движение системы и нахождения положения точек. Также, пусть желаемо определить движение

системы В относительно системы А. Придаемъ обрѣну систему ско-
рости, противоположную скорости ω_A
системы А. Тогда система А остано-
вится, а система В будетъ участво-
вать въ движеніи (ω'_B) около своей оси
В и въ движеніи ($-\omega_A$) около оси А. По-
мощь мгновеннаго вращенія этого слож-
наго движенія системы В найдется
обыкновеннымъ путемъ: въ любой моментъ
онъ будетъ лежать въ точкѣ Р, гдѣ

$$РА:РВ = \omega'_B : \omega_A = q \dots \dots (15);$$

величина q дается или аналитически,
въ видѣ соотношенія (14), или графиче-
ски (фиг. 58), и будетъ, следовательно,
известна для каждаго момента; въ
начальной моментъ она равна OQ
и т. д. Такъ какъ АВ, по условию, оста-
ется постояннымъ, то точка В бу-
детъ описывать окружность радиуса АВ
и центра А, двигаясь при этомъ со ско-
ростью $v_B = \omega_A \cdot АВ$, — это ясно изъ то-
го соображенія, что въ рассматривае-
момъ относительномъ движеніи век-
торъ АВ вращается около центра А
съ угловой скоростью ω_A и никакого
другого движенія онъ не имеетъ.

Это обстоятельство, въ свою оче-
редь, позволяетъ намъ опредѣлять угла
поворота вектора АВ при помощи
диаграммы для ω_A , — эти углы а выра-
зятся также известными площадями.

Положим образом, за промежуток времени 01 угол поворота системы от начального ее положения (α_1) возьмется моментом $KP10$ (фиг. 58); за время 02 — моментом $KS20$, углом (α_2), и т. д. Углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ отклонения вектора AB от начального его положения AB , найдем последовательности положений этого вектора: AB_1, AB_2 и т. д. Так как для каждого момента можем взять величину q , определяющую положение полюса P , или по ур-ию (10) или по диаграмме фиг. 58, то определяются последовательности положений полюса $P, P_1, P_2, \dots$, определяющая собой, в свою очередь, последовательность положений pp в движении системы B относительно A (фиг. 60). Эта последовательность может быть как суммарной, так и раздельной. Везде полагим зависить, очевидно, от значений заданых.

Уравнение положения pp можно написать также в начальных координатах. Со этой целью, положим $PA = r$. Полагая $AB = d = \text{const.}$, найдем $PB = d - r$. В виду этого, согласно ур. (14) и (15), получаем

$$PA : PB = \omega'_x : \omega_x = q = \varphi(t) = r : (d - r) \dots (16)$$

Исклывая отсюда время t по моменту уравнения (10): $\alpha = F(t)$, находим уравнение, связывающее r с α :

$$z: (d-z) = \psi(\alpha) \quad (17)$$

Это и будет поларное уравнение одной неподвижной точки. Если задана зависимость ω_A от t в форме ур-ия (12): $\omega_A = f(t)$, то, заморозив, что $\omega_A = \frac{d\alpha}{dt}$, получим уравнение (13) для угла поворота: $\alpha = \int f(t) dt$, сводящееся к уравнению $\alpha = F(t)$; исключая, получим его, из ур-ия (16) t , получим уравнение (17). Подобный же вид

$$(d-z): z = \chi(\beta)$$

будет иметь поларное уравнение другой точки.

Нахождение точек, принадлежащих системе B , также не представляет никаких трудностей: придем к обратному вращению, противоположное вращению B , то-есть вращение $(-\omega'_B)$. Тогда система B остановится, а система A будет вращаться как в своем вращении около A со скоростью ω_A , так и во вращении около B со скоростью $(-\omega'_B)$. Обыкновенным путем найдем положение. Отсюда, в которых придется строить подвижной вектор BA , даются только же уравнение (14). Нужно лишь определить угол β поворота системы B , соответствующий различным моментам. Это будет выведено при помощи диаграммы фиг. 59 или же путем непосредственного вычисления.

Если углы β найдем правильно, то соответствующия углы и тригонометрические функции положий. — напр., $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_1$. — будут равны, так как положий даны катетами без скоса. Также получаются положий, изображенные на фиг. 61. Если полученная положий прижмем одну к другой, во избежание скоса, то, вращая положий A со скоростью ω_a , получим вращение B со скоростью ω'_a . По устройству такой функционной передачи, во избежание сложностей, является здесь невозможным; его можно воспроизвести при помощи огибаемых и огибающих. На одной из положий вычерпав профиль огибаемой, на другой найдем профиль огибающей. При этом можно пользоваться обычным методом Poncellet; можно задать циклический профиль; теорема Касуса применима здесь вполне, — циклическому профилю в одной положий будет соответствовать циклический же профиль в другой. Метод Денлеана также применим, но он сложнее других, и при применении его нужно принять во внимание следующее обстоятельство.

Основная идея этого метода состоит, как известно, в том, что, взяв какую-нибудь точку основного

профиля, на иницию, затвору, где
она соприкоснется с соответствующей ей точкой искомого профиля;
вырвется с тросом, на маховике по-
ложение этой второй точки в дан-
ный момент. Положим, таким
образом, что в системе В нами ба-
брама некоторая точка b ; спраши-
вается, где в этот момент нахо-
дится соответствующая ей точка
сопряженного профиля в системе А
и где эти точки придут в сопри-
косновение. Если точка b лежит на
профиле ZZ , прилегающем к систе-
ме В, то найдем в момент со-
прикосновения профилей точками их
 b и a будет соответствующая точка π_1 по-
лю В, лежащая на нормали к про-
филе ZZ в точке b его, (в момент
касания огибаемой и огибающей об-
щая нормаль проходит через по-
люс). Определив точку π_1 , найдем
ее положение на мин центров в
момент касания профилей точками
их b и a , для чего откладываем на
Вд от точки В отрезок $BP'_1 = B\pi_1$.
Таким путем найдем положение
полюса мгновенного вращения в мо-
мент совпадения. Задаем из P'_1
дугу радиусом, равным $\pi_1 b$, и в пе-
ресечении этой дуги с окружностью
 xx , по которой движется вокруг В

точка b , найдем положение b' этой точки b в тот момент, когда полосою будет суженна точка π_1 . Теперь найдем вектор AP_1 системы A , соответствующий вектору $B\pi_1$. Длина его есть $P_1'A$, а угол, соответствующий углу β , пусть равен α . Засекая из A дугу радиусом AP_1' , найдем точку P_1 , соответствующую, в свое время, совпасть с π_1 . — Отсчитаем теперь из P_1 дугу радиусом $\pi_1 b$, а из A — дугу радиусом Ab' ; в пересечении этих дуг получим точку a , в моменте (π_1) соответствующую совпасть с точкой b .

Усложнение этих передач, сравнительно с кинематическими, состоит в том, что, при движении системы, полосою не остается на месте, а перемещается по линии центров. Гораздо проще принимается в этих случаях метод Poncelet, и его употребляют чаще всего.

Случай замкнутых положий встречается далеко не всегда; он имеет место лишь тогда, когда выталанчивается некоторая добавочная условия, вытекающая из предыдущих разсуждений: пусть поларное уравнение положий I имеет вид:

$$z:(d-z) = \varphi(a).$$

Очевидно, что полодия A будет замкнутой тогда, когда радиус вектор ее z

принимаетъ одно и то же значение какъ при $\alpha = 0$, такъ и при $\alpha = 2\pi$; иными словами, функция $\psi(\alpha)$ при $\alpha = 0$ и при $\alpha = 2\pi$ должна имѣть одно и то же значение. Это значитъ, что функция ψ должна быть периодической, съ периодомъ, равнымъ какъ разъ 2π , такъ это должно существовать равенства:

$$\psi(0) = \psi(2\pi) = \psi(4\pi) = \dots = \psi(2n\pi) = \dots$$

Если это условие выполняется, то положивъ A окажется замкнутой.

Что касается положивъ B , то она будетъ замкнутой въ томъ случаѣ, если при $\alpha = 2\pi$ уголъ β поворота системы B (за то же время) оказывается равнымъ 2π . Если же этого не будетъ, то положивъ B можетъ оказаться незамкнутой, несмотря на то что мы хотимъ чтобы была замкнутость положивъ A . Деленные подсчеты сейчасъ же выясняютъ намъ этотъ вопросъ. Они могутъ быть также разсмотрѣны при помощи разсмотрѣнія диаграммы фиг. 58 и фиг. 59: если площади u за некоторое время T окажутся равными каждая 2π , а сумма соответствующихъ конечныхъ радиусовъ-векторовъ дасть $AB = d$, то оба положивъ будутъ, несомненно, замкнутыми. (76)

Периодъ можетъ быть равенъ и не 2π , а $4\pi, 6\pi, \dots$, — вообще, $2n\pi$, — см. фиг. 64, на которой изображены слу-

ной пологин A сь периодомъ въ 6π . Периоды, величина которыхъ не представляется кратной отъ 2π , приводятъ къ незамкнутымъ пологиямъ.

Можетъ случиться, что отъ системы будетъ требоваться периодичность движения уже для поворотовъ, меньшихъ 2π ; въ такомъ случае придется добавлять новыя стъснющія условия, сущность которыхъ лучше всего уяснится на искусственно проецируемомъ примере.

Пусть система A должна все время вращаться равномерно, такъ что уголъ α увеличивается равномерно; система же B должна двигаться то равномерно-ускоренно, то равномерно-замедленно, чередуя такія свои движения за каждый полный оборотъ четыре раза такими образомъ, что за одну четверть оборота она поворачивается равномерно-ускоренно, следующую четверть - равномерно-замедленно, затѣмъ четверть оборота - опять равномерно-ускоренно и т.д., при чемъ ставится еще одно условие, что каждая четверть оборота системы B должна соответствовать четверти же оборота системы A . Посмотримъ, какъ все это скажется на диаграммахъ.

Диаграмма скоростей вращения си-

- степеней Δ , ω_Δ , представится прямой KL , параллельной оси Ot и отстоящей от нее на длину, равную ω_Δ (фиг. 65), - по условию, ω_Δ есть const. Таким образом, углы α поворота степеней Δ будут пропорциональны времени: они выражаются площадями типа $KVVO$, - прямоугольниками с одной и той же высотой $VV = \omega_\Delta$; площади эти будут, очевидно, пропорциональны времени.

Что касается степеней B , то скорости вращения ее будут изменяться равномерно, по закону, изображаемому графически ломаной линией $gh_1g_2h_3g_4h_5...H$, при чем, согласно условию, четверти оборотов этих степеней должны проходиться обычными системами в одно и то же время. Таким образом, если время полного оборота степеней A , а значит, и степеней B , обозначим отрезком $O4$ оси абсцисс, так, что четверти оборотов обозначаются отрезками $O1, 12, 23, \dots$, каждый из которых равен одной четвертой части отрезка $O4$, - то площади прямоугольника $Kl1O$ и трапеции gh_11O должны быть равны. То же самое будет иметь место и для соответствующих площадей за каждую четверть оборота.

Фигуры $gh_1, 1g_2, \dots$, должны быть трапециями, ибо скорости ω'_B должны изменяться равномерно, - изменения

скоростей пропорциональны временам. Рассмотрим теперь, какъ решается данная задача аналитически.

Пусть начальный моментъ ось системы показывается неподвижнымъ; приходя во вращение, система А движется со скоростью ω_A , остающейся постоянной, а система В въ начальный моментъ получаетъ отъ А скорость ω'_B , равную $\frac{1}{2} \omega_A$. Рассмотримъ это, рассмотримъ движение за первую четверть оборота, когда система В вращается равноускоренно; затемъ рассмотримъ вторую четверть, когда эта система движется равномерно-замедленно, далее-третью и т.д.

Если система В вращается равноускоренно, то это значитъ, что угловая скорость ея ω'_B изменяется по закону:

$$\omega'_B = a + bt \dots \dots \dots (18)$$

Это уравнение прямой ϑh_1 , наклонной къ оси отъ нуля угломъ δ , тангенсъ котораго равенъ b .

Скорость системы А остается постоянной:

$$\omega_A = k = \text{const.} \dots \dots \dots (19)$$

Это уравнение прямой, параллельной оси отъ и остающейся отъ нея на расстоянии, равномъ k .

Такимъ образомъ, отношение q

скоростей изменяется по закону:

$$\omega'_B : \omega_A = q = \frac{a}{k} + \frac{b}{k} t \dots \dots \dots (20).$$

По такому закону будет перемещаться вдоль АВ полость подвижного бранзения Р. Далее, помня, что $\omega_A = \frac{da}{dt}$ и $\omega'_B = \frac{d\beta}{dt}$, найдем из соотношений (18) и (19) дифференциальные уравнения:

$$\frac{d\beta}{dt} = a + bt,$$

$$\frac{da}{dt} = k,$$

откуда находим, что

$$\beta = at + \frac{1}{2} bt^2 + C_1,$$

$$a = kt + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования. Замечая, что, по условию, при $t = 0$ как $a = 0$, так и $\beta = 0$, заключаем, что $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, ввиду чего a и β выражаются в функции времени так:

$$\left. \begin{aligned} a &= kt, \\ \beta &= at + \frac{1}{2} bt^2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21).$$

Определим теперь значения постоянных a и b по известному давлению. Прежде всего, мы найдем, что в начальной момент скорости $\omega'_B = \frac{1}{2} \omega_A$. Это значит, что при $t = 0$ отношение q , по ур-ию (20), равно $\frac{1}{2}$. Значит,

$$\frac{a}{k} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$a = \frac{1}{2} k \dots \dots \dots (22).$$

Ввиду этого, ур-ия (21) переисчисляются так:

$$\left. \begin{aligned} a &= kt, \\ \beta &= \frac{1}{2} kt + \frac{1}{2} bt^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23).$$

Исканная t через α , находясь для β уравнение:

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} b \cdot \frac{\alpha^2}{k^2} \dots \dots \dots (24).$$

Коэффициент b можно определить из условия, по которому при повороте системы A на $\frac{\pi}{2}$ система B поворачивается также на $\frac{\pi}{2}$. Значит, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ должно быть $\beta = \frac{\pi}{2}$. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ найдем для определения соответствующего времени t_1 уравнение:

$$\frac{\pi}{2} = kt_1,$$

откуда

$$t_1 = \frac{\pi}{2k} \dots \dots \dots (25)$$

При таком значении t угол β должен быть $\frac{\pi}{2}$. Подставляя ^{t_1 из (25)} в (23), находим условие для определения b :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} b \cdot \frac{\pi^2}{4k^2},$$

что, по сокращении на $\frac{\pi}{2}$, дает уравнение:

$$1 = \frac{1}{2} + b \cdot \frac{\pi}{4k^2},$$

откуда

$$\frac{b\pi}{4k^2} = \frac{1}{2},$$

так что

$$b = \frac{2k^2}{\pi} \dots \dots \dots (26)$$

Из той же результатной придем, подставляя в уравнение (24), вместо α и β по $\frac{\pi}{2}$; тогда получим:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} b \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{k^2},$$

что дает то же значение для b . Ввиду соотношения (26) зависимость между β и α (24) напишется так:

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha + \frac{k^2}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2}{k^2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{\pi} \dots \dots \dots (27)$$

Таким образом, уравнения (23) сви-

-жения маннхъ снстемъ маннхъ вндъ:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= kt \\ \beta &= \frac{1}{2} kt + \frac{k^2}{\pi} t^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

Связь между α и β дается уравнением (27):

$$\beta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{\pi}.$$

Что касается выражения скорости вращения ω'_B , то она, по ур-нию (18), (22) и (26), получается вндъ:

$$\omega'_B = \frac{k}{2} + \frac{2k^2}{\pi} t \dots \dots \dots (29)$$

Въ концъ первой земверти, при $t = t_1 = \frac{\pi}{2k}$, - см. ур-ие (25), - получено

$$\omega'_B = \frac{k}{2} + \frac{2k^2}{\pi} t_1 = \frac{k}{2} + \frac{2k^2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2k} = \frac{k}{2} + k = \frac{3}{2} k \dots (30),$$

что указываетъ на возрастание скорости вращения системы В отъ $\frac{1}{2} k$ - въ начальной моментъ - до $\frac{3}{2} k$ въ конечный моментъ первой земверти, такъ что отрезокъ $OG = \frac{1}{2} k = \frac{1}{2} OЖ$, а $1h_1 = \frac{3}{2} k = \frac{3}{2} OЖ$. Площадь $Oh_110 = \frac{1}{2} \cdot O1(OG + 1h_1) = \frac{1}{2} \cdot O1(\frac{1}{2} OЖ + \frac{3}{2} OЖ) = O1 \times OЖ = \text{пл. } Ж10 = k \times \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{2}$, какъ и должно быть, ибо ось системы совершаетъ поворотъ на $\frac{\pi}{2}$ въ одно и то же время $O1 = t_1 = \frac{\pi}{2k}$.

Положимъ за эту земверть оборота построится легко помощью ур-ий (20) и (27), - углы α удобнее всего выразить въ градусахъ π . Уравнение кривой, описанной нологией Δ , легко найти по ур-ию (16), примененному здръ вндъ:

$$r:(d-r) = q = \frac{a+bt}{k}, -$$

согласно ур-ию (20), - что приводится къ уравнению

$$r:(d-r) = (ka+ba):k^2,$$

откуда

$$r = d \frac{\pi + 4a}{3\pi + 4a} \dots \dots \dots (31)$$

При $\alpha = 0$ имеем $r = \frac{1}{3} d$, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ получаем $r = \frac{3}{5} d$.

Что касается углового ускорения системы В, то оно, согласно ур-ию (29), выражится через

$$\frac{d\omega'_s}{dt} = \frac{2k^2}{\pi} = \frac{2\omega_s^2}{\pi} \dots \dots \dots (32)$$

и представляется собою, как видим, величину вполне определенную и от нас не зависящую, раз мы выбрали определенную скорость $\omega_s = k$. Обратно, если мы зададимся этим ускорением, то сейчас же определится скорость ω'_s и скорость ω_s , ибо, если это ускорение равно, положим, А, то из ур-ия $\frac{d\omega'_s}{dt} = A$ находим, что

$$\omega'_s = \int A dt = At + c,$$

$$\text{а из ур-ия } \frac{2k^2}{\pi} = A \text{ получим}$$

$$k = \omega_s = \sqrt{\pi A : 2}.$$

Движение системы В за первую четверть оборота разобрано нами весьма подробно. Перейдем ко второй четверти, когда оно выполняется равномерно-замедленно, по некоторому закону, данному уравнением

$$\omega'_s = g - ht \dots \dots \dots (33),$$

где g и h суть опять некоторые постоянные, подлежащие определению по начальным данным, которые выразятся здесь следующим образом.

Въ начальномъ моментъ этого замедленнаго движения, при $t = 0$, нулевъ $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, — ось системы находится свое вращение. Начальная скорость вращений суть:

$$(\omega_A)_0 = k = \text{const.},$$

$$(\omega'_B)_0 = \frac{3}{2} k.$$

Ось системы совершаетъ поворотъ на $\frac{\pi}{2}$ въ одно и то же время. Уравнения движения нулевъ:

$$\omega_A = k,$$

$$\omega'_B = g - ht.$$

При $t = 0$, какъ видно изъ предыдущаго, скорость ω'_B обращается въ $(\omega'_B)_0 = \frac{3}{2} k = c$, такъ что

$$\omega'_B = \frac{3}{2} k - ht.$$

Далѣе нулевъ уравнение:

$$\omega_A = \frac{d\alpha}{dt} = k,$$

откуда

$$d\alpha = k dt,$$

$$\alpha = kt + c.$$

Такимъ же путемъ, но уравнение:

$$\omega'_B = \frac{d\beta}{dt} = \frac{3}{2} k - ht,$$

найдемъ, что

$$\beta = \frac{3}{2} kt - \frac{1}{2} ht^2 + c_1.$$

Такъ какъ при $t = 0$ нулевъ $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, то $c = 0$ и $c_1 = 0$, такъ что

$$\alpha = kt,$$

$$\beta = \frac{3}{2} kt - \frac{1}{2} ht^2.$$

Для опредѣленія h примемъ во вниманіе, что при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Тогда найдемъ ур-е $\frac{\pi}{2} = kt_1$, откуда

$$t_1 = \frac{\pi}{2k}.$$

Подставляя это значение t_1 в уравнение для β , находим

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} k \cdot \frac{\pi}{2k} - \frac{1}{2} h \cdot \frac{\pi^2}{4k^2},$$

откуда

$$h = \frac{2k^2}{\pi},$$

так что

$$\alpha = kt,$$

$$\beta = \frac{3}{2} kt - \frac{k^2 t^2}{\pi}.$$

Исклывая t , находим связь между α и β в виде уравнения

$$\beta = \frac{3}{2} \alpha - \frac{\alpha^2}{\pi}.$$

Что касается скорости ω'_B , то она выражится теперь так:

$$\omega'_B = \frac{3}{2} k - ht = \frac{3}{2} k - \frac{2k^2}{\pi} t. \quad *$$

Отсюда находим, что в конце поворота на $\frac{\pi}{2}$ скорость системы B выражится через

$$(\omega'_B)_1 = \frac{3}{2} k - \frac{2k^2}{\pi} \cdot t_1 = \frac{3}{2} k - \frac{2k^2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2k} = \frac{3}{2} k - k = \frac{1}{2} k.$$

Таким образом, скорость вращения системы B будет изменяться от $\frac{3}{2} k$ до $\frac{1}{2} k$. Угловое ускорение системы B выражится через

$$\frac{d\omega'_B}{dt} = -h = -\frac{2k^2}{\pi},$$

то-есть оно будет равно по абсолютной величине ускорению в первой реверти, но противоположно ему по знаку, и опять не будет зависеть от α и β , раз мы выбрали k , то-есть скорость ω_B . Угол прямой, изображающей ход ω'_B , с осью Ot , будет почти тангенсом, равным $(-\frac{2k^2}{\pi})$, т.-е. равным $(-\tan \delta)$;

значит, сумм углов равен $180^\circ - \delta$ (см. фиг. 66).

Итак, скорость ω'_B в концы второй четверти опять сводится до величины

$$\frac{1}{2}k = \frac{1}{2}\omega_A,$$

то-есть до начальной скорости первой четверти. Траектория Ph_1 и h_1g_2 дугами симметрична относительно оси h_11 .

Что касается уравнения пологин λ для этой четверти, то, замечая, что здесь

$$q = \omega'_B : \omega_A = \left(\frac{3}{2}k - \frac{2k^2}{\pi}t \right) : k = \frac{3}{2} - \frac{2k}{\pi}t = \frac{3}{2} - \frac{2\alpha}{\pi} = \frac{3\pi - 4\alpha}{2\pi}$$

и что

$$q = \frac{z}{z-d}, \quad \frac{4}{d-z}$$

находим уравнение

$$z : (z-d) = (3\pi - 4\alpha) : 2\pi,$$

откуда

$$z = d \frac{3\pi - 4\alpha}{5\pi - 4\alpha}.$$

При $\alpha = 0$ получаем $z = \frac{3}{5}d$, а при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ находим $z = \frac{1}{3}d$. В концы второй четверти z принимает то же значение, какое оно имело в начале первой четверти, а в начале второй четверти - то же значение, что и в концы первой, - как и должно быть.

Переходя к третьей четверти, где имеем опять равноугловое - ускоренное вращение, увидим, что здесь повторяется все то, что мы говорили по поводу первой четверти; за-

-тывъ, о четвертой четверти будетъ повторено все сказанное о второй, и эта „игра“ будетъ продолжаться за все время вращения системы. Диаграмма ω'_2 будетъ, следовательно, иметь видъ зубчатой полосы, правннство и симметрию построенной, съ двумя подъемами и двумя падениями за каждый полный оборотъ системы В. Объ полагин изображенъ, приблизительно, на фиг. 67.

Следуетъ обратить внимание на то обстоятельство, что при данныхъ условияхъ, каковыми являлись у насъ требование периодичности и уравнения, определяюща условия скорости ω_2 и ω'_2 въ зависимости отъ t , условия ускорения системы В являлись вполне определенными и никакому произвольному усмотрению не подлежащими. Это было ясно и изъ диаграммы: разъ требовалась известная периодичность, то отсюда вытекала необходимость въ равенствѣ между определенными углами поворотовъ за одно и то же время, то-есть между точками диаграммы, взятыми за некоторый определенный промежутокъ, одинаковой для обоихъ диаграммъ. Значитъ, наклонъ прямыхъ $gh_1, h_1g_2 \dots$ былъ вполнѣ определеннымъ.

То же можно сказать и въ общемъ случаѣ: разъ дается законъ измѣненія

скоростей ω_a и отношения q , то, темъ самымъ, вполнѣ опредѣлится законъ измѣненія скорости ω'_B и, значитъ, законъ хода ускореній. Если же дана ω_a и законъ ускореній B , то опредѣлится скорость ω'_B . Подушкамъ опредѣленію коэффиціентовъ найдутся по начальнымъ даннымъ, въ число которыхъ можетъ входить, между прочимъ, требованіе определенной периодичности, какъ это мы увидимъ въ нижеприведенномъ частномъ примѣрѣ.

Итакъ, если дана скорость ω_a и отношение q въ функціи времени t , то мы имѣемъ вѣсѣмъ сначала диаграмму для ω_a и q , а по ней — диаграмму для ω'_B . Плоскости диаграммъ (ω_a) и (ω'_B) даютъ углы поворота системъ A и B за известное время. Выясняется тѣмъ, что углы выражаются мощадами, не приходится. — Далее, находимъ по логин. Они будутъ, вообще говоря, не соизмѣримы. Для соизмѣримости необходимо, чтобы функція, выражающая зависимость между z и a , была периодической и, притомъ, съ периодомъ, кратнымъ 2π . — Замѣчая, что отношение скоростей есть функція времени, равно какъ и скорость ω'_B , и исключая время, найдемъ зависимость ω'_B отъ отношения скоростей. Это можно

условие на диаграмму скоростей системы А. — Если желаемое получить периодическое движение обобщенной системы, то это накладывает условие на обе кривые, — определенные площади должны быть равны; таким образом, если одну кривую мы выбрали произвольно, то другая кривая будет уже вполне определенной, отношения скоростей необходимо подбирать так, чтобы известные площади были равны. Следовательно, раз избирается закон изменения ω_1 и требуется выполнение известной периодичности, то, тем самым, вполне определяется закон вращения системы В; ускорения ее и прочие обстоятельства движения будут вполне определены и зависеть от нас уже не будут.

Такова, во главных чертах, теория так называемых некрутящихся колес. Изложив ее, вернемся к основной задаче передачи движения и разберем вопрос об осуществлении скорости ω_3 , а не ω'_3 , как это имело место до сих пор.

Вопрос об осуществлении скорости ω_3 , а не $\omega'_3 = \omega_3 - k$, мы разберем применительно лишь к тому частному случаю, когда ряд (1) отбрасывается на первых двух членах, то-есть когда мы имеем зависимость между ω_1 и ω_3 в форме (2):

$$\omega_B = k + k_1 \omega_A.$$

Мы сводим ее к виду $\omega'_B = k_1 \omega_A$, где

$$\omega'_B = \omega_B - k,$$

то-есть, вращение гиростатической скорости ω_B системы, разсматриваем скорости ω'_B , представляющую собою уменьшенную на k скорость ω_B .

Положим такое движение предмета вращается окружностями радиусов r_A и r_B , между которыми существует соотношение:

$$r_A : r_B = \omega'_B : \omega_A = k_1,$$

такъ это вращение положим A съ какой-либо скоростью ω_1 вызываетъ вращение системы B со скоростью $\omega_2 = k_1 \omega_1$; вращение же системы B со скоростью ω_2 влечетъ за собою вращение системы A со скоростью $\omega_1 = \frac{\omega_2}{k_1}$, — передаточное число въ первомъ случае есть k_1 , а во второмъ — $\frac{1}{k_1}$. Это необходимо запомнить. Наконецъ, для того, чтобы не осложнять приводимыхъ ниже элементарныхъ геометрическихъ построений введениемъ знаковъ, указывающихъ на направление вращений, условимся разсматривать случай вращающаго зацепления, где, следовательно, скорости ω_A и ω_B направлены въ разные стороны. Дополнение нумерованныхъ здесь местъ расчетовъ нумеромъ введения знаковъ никакихъ трудностей не представляетъ и можетъ быть вполнѣ вносимымъ.

Заметьте это, перейдемъ къ рассмотре-
нию нашей задачи.

Абсолютная скорость вращения ма-
шинъ системы, ω_A и ω_B , связаны соотно-
шениемъ

$$\omega_B = k + k_1 \omega_A.$$

Казалось бы, что для получения скорости
 ω_B вопросъ сводится пересмотреть, най-
ти новое положение этого действитель-
наго движения и т. д. Нетрудно, однако,
убедиться, что можно обойтись и безъ
этого нового рассмотрения и осуществи-
вить требуемое вращение ω_B при по-
мощи техъ же старыхъ положений дви-
жения (ω_A, ω'_A), представляя лишь подвижной
линию центровъ AB , — вращая ее или
около неподвижной оси A , такъ что
ось B будетъ двигаться по окружности
радиуса AB и центра A , или около не-
подвижной оси B , такъ что ось A бу-
детъ двигаться по окружности того
же радиуса BA , но центра B . Оказыва-
ется, что скорость вращения вектора
 AB , — будемъ обозначать ее черезъ $\dot{\varphi}$, — все-
гда можно подобрать такъ, что, при
вращении одной системы около своей
оси, другая система будетъ вращать-
ся около своей оси съ желаемой скоро-
стью, и условие (2) можно будетъ удо-
влетворить всегда.

Заметимъ, кстати, что изъ усло-
вия $\omega_B = k + k_1 \omega_A$ сводится, что при $\dot{\omega}_B = 0$,

то-есть когда система В не вращается, то система А вращается со скоростью $(-\frac{k}{k_1})$; если же не вращается система А, такъ что $\omega_A = 0$, то система В должна вращаться со скоростью $\omega_B = k$. Разсмотримъ теперь нашу задачу

✚ Пусть положимъ движение, совершаемое по закону $\omega'_B = k_1 \omega_A$, изображаемое окружностями А и В (фиг. 68). Мысль въ виду, что при движении положит. расстояние АВ между центрами ихъ должно всегда оставаться постояннымъ, беремъ радиусъ Q и проводимъ въ немъ втулку для осей АВ; при этомъ центры втулокъ накрываютъ на расстоянии, равномъ какъ разъ расстоянию АВ = d. Темъ-же осей А и В въ эти втулки, мы обеспечимъ постоянство расстояния АВ между осями при всевозможныхъ перемещенияхъ системы (А, В).

Давая одну изъ осей, напр., ось А, неподвижной, мы можемъ заставить ось В перемещаться по окружности центра А и радиуса АВ, для чего нужно будетъ сделать валомъ вращать рычагъ АВ. Такъ какъ скользящее между ползунками предполагается центральнымъ, то, кроме всего, достигается вполнѣе удобной передачей, то ползунъ В будетъ катиться по ползуну А и, следовательно, будетъ, во-первыхъ,

перемещаться поступательно, вращаться со своей осью B , по окружности радиуса AB и центра A , и, во-вторых, вращаться около своей оси B , — вот это — то вращение пологий B мы теперь и разберем. Как видно из предыдущих строк, это пологие B представляет так называемое энцикликческое движение, складывающееся из упомянутых двух частей. Если бы вращение системы B была не нулевой, то, при вращении кольца, она перемещалась бы в пространстве поступательно и какой-либо радиус BC в своих последовательных положениях BC, B_1C_1, B_2C_2 и т. д., оставаясь бы все время параллельным началу направлению его, BC (рис. 69). Это и будет случай отсутствия вращения: $\omega_B = 0$. Как видно, для того, чтобы система B не вращалась, вовсе не необходима ее неподвижность, система может быть и в движении, только это движение должно исключительно поступательным.

Посмотрим теперь, какие последствия имеют за собою вращение кольца AB вокруг той или другой оси. Если односторонне взять, возьмем какую-либо пару пологий (M, N) существующих движение $\omega_x = h \omega_B$, где

h есть передаточное число, учитывающее изменение вращения системы M и равно:

$$h = \omega_N : \omega_M = z_M : z_N,$$

и полагаясь на ось M и N во втулке рычага Q (фиг. 70), центры конусов, непосредственно, относительно друг друга на данное разстояние MM' . Пусть ось M и, вращаясь с ней, пология M остаются неподвижными. Поворачиваясь рычага MM' около оси M на какой-либо угол φ , полагаясь, но направлением за собой стрелки. Пология N остается при этом неподвижной не может, но скользящие между пологиями устранено, например, помощью зубчатого зацепления. Поэтому она будет перекатываться по пологии M , при чем, очевидно, дуги переката, пройденные точкой касания по обоим пологиям, будут во всех случаях равны.

Пология N , при таком повороте рычага MM' на угол φ , займет положение N_1 , прокатившись по M на дугу Pr , так что точка P пологии N , которой она касалась пологии M в начальном моменте, теперь будет занимать положение P_1 , при чем дуга Pr будет точно равна дуге P_1P , так что радиус PN займет теперь положение P_1N_1 , повернувшись относительно своего начального положения PN на некоторый угол

$P'N_1P_1$, определенно который можно так:
 Если бы пология N , будучи увлекаема
 поворотом MN , не вращалась, а перемеща-
 лась поступательно, то этот радиус
 PN при втором положении N_1 пологии
 занял бы положение $P'N_1$, параллельное
 первому. В действительности же
 он занимает теперь положение P_1N_1 ,
 откуда следует, что он отнес-
 тельно своего своего положения PN
 повернулся на угол $P'N_1P_1$, а так как
 радиус PN жестко связан со своей по-
 логией N , то, при таком повороте
 радиуса PN на угол $P'N_1P_1$, на тот
 же угол $P'N_1P_1$ повернулась и по-
 логия N . При этом замечать, — и
 это весьма важно; — что поворот ра-
 диуса PN , а вместе с ним и си-
 стемы N , совершился в ту же сто-
 рону, что и поворот ракета MN . — Как
 он, так и пология N повернулась по
 часовой стрелке. Если бы ракета повер-
 нулась в другую сторону, против ча-
 совой стрелки, то система N повер-
 нулась бы в ту же сторону, также
 против часовой стрелки. Поэтому,
 вообще, можно сказать, что, в случае
 неподвижности системы M , связанной
 на подвижной оси, направление враще-
 ния системы N , связанной на подвиж-
 ной оси, одинаково с направлением вра-
 щения ракета MN . Посмотрим теперь,

какова количественная зависимость между скоростями вращений ротора и статора системы.

Можно видеть, что, при повороте ротора на угол $\angle N M N_1 = \varphi$, система повернулась на угол $\angle P' N_1 P_1$, где $P' N_1 \parallel P N$. Соединяя M с N_1 прямой, находим, что угол $\angle M N_1 P' = \varphi$, как и накрест лежащие. Что же касается угла $\angle M N_1 P_1 = \delta$, то он, как видим, измѣряется дугой $p P_1$, равной дуге $p P$. Запишем теперь, что дуга $p P = r_M \cdot \varphi$, а дуга $p P_1 = r_N \cdot \delta$, находим равенство:

$$r_M \cdot \varphi = r_N \cdot \delta,$$

откуда следует, что угол $\delta = \varphi \cdot \frac{r_M}{r_N}$. Но отношение $\frac{r_M}{r_N}$ есть не что иное, как передаточное число h , увеличивающее измѣнение скорости вращения системы N при передаче вращения подвижной системы N' ($\omega_N = h \cdot \omega_M$). Поэтому $\delta = h \varphi$. Отсюда заключаем, что угол поворота системы N , равный $\delta + \varphi$, выразится иначе так:

$$\angle P' N_1 P_1 = \varphi + \delta = \varphi + h \varphi = \varphi (1 + h) \dots (34).$$

Предположим теперь, что ротор, совершая свой поворот на угол φ , вращается со равномерной угловой скоростью ϑ , так что $\varphi = \vartheta t$, где t есть время поворота. Изъ урав-ия (34) заключаем, что поворот системы N за то же время t выразится через $\vartheta t (1 + h)$, т. е. он будет совершаться со скоростью

$\mathcal{V}(1+h)$, такъ что скорость $\mathcal{V}$ ротора вызываетъ появление скорости $\mathcal{V}(1+h)$ системы, сдвинутой на погнхисной оси, причемъ, какъ мы уже указывали, направления обоихъ этихъ вращений, — ротора и системы, — будутъ всегда одинаковы. — Такимъ образомъ, пока система N вращается въ какую-либо сторону со скоростью $\mathcal{V}(1+h)$, а роторъ, несущий ее, — въ ту же сторону, со скоростью $\mathcal{V}$, то система M остается неподвижной, не принимая никакого участія въ движении системы N ; въ этомъ случаѣ просто перекатывающейся по M .

Въ случаѣ внутреннего зацепления, где будутъ обозначать собственную пологую черту M , а меньшую, катящуюся внутри нея, черту N , такъ что $h = R_M : r_N = \omega_N : \omega_M$, находимъ, что уголъ φ поворота системы N за время t будетъ равенъ $\varphi(h-1)$, такъ что скорость вращения системы N будетъ равна $\mathcal{V}(h-1)$, при чемъ это вращение будетъ всегда совершаться противоположно вращению ротора MN .

Посмотримъ теперь, что получится, если, кромѣ вращенія ротора MN , будетъ совершаться еще вращение системы M со скоростью ω_M , независимо отъ вращенія ротора MN . Очевидно, что въ такомъ случаѣ система N будетъ получаемая системой M вращаться со скоростью $\omega'_N = h\omega_M$, а, кромѣ того, вращение ротора со скоростью $\mathcal{V}$ будетъ заставляло ее (N) вращаться со скоростью $\mathcal{V}(1+h)$. Если теперь оба эти вращенія, которыхъ наша система N должна выполнить одновременно

ленно, окажется направленным в
одну сторону, - а это будет, очевидно,
тогда, когда рычаг MN вращается про-
тивоположно системе M , - то резуль-
тирующая скорость ω_x системы N ока-
жется равной сумме этих скоростей,
то-есть будет равна

$$\omega_x = h\omega_m + \vartheta(1+h) \dots \dots \dots (\alpha)$$

и будет направлено противоположно
вращению системы M и согласно враще-
нию рычага. Если же эти два враще-
ния окажутся направленными в раз-
ные стороны, то-есть если рычаг бу-
дет вращаться согласно с системой
 M , то результирующая скорость ω_x
системы N будет, очевидно, равна
разности упомянутых скоростей и
выразится через

$$\omega_x = h\omega_m - \vartheta(1+h) \dots \dots \dots (\beta)$$

Итак, если станем вращать си-
стему M со скоростью ω_m и ось бу-
дет неподвижна, то система N
будет вращаться со скоростью

$$\omega_x = h\omega_m \dots \dots \dots (\gamma).$$

обратно системе M .

Если, далее, продолжая вращать
систему M со скоростью ω_m , станем
вращать рычаг MN противоположно
системе M со скоростью ϑ , то система
 N станет вращаться со скоростью

$$\omega_x = h\omega_m + \vartheta(1+h) \dots \dots \dots (\alpha);$$

если же рычаг будет вращаться со-

-мало M , то система N будетъ вра-
щаться со скоростью

$$\omega_N = h \omega_M - \vartheta (1 + h) \dots (\beta).$$

Такимъ образомъ, при одной и той же основной скорости ω_M вращения си-
стемы M мы можемъ получить лю-
бую скорость системы N , давая раз-
ную величину ϑ соответствующей
скорости ϑ . Обратное заключение
также справедливо: давая подвиг-
ной системы N одну и ту же ско-
рость ω_N , можемъ получить самую
разнообразную скорости системы M пу-
темъ подбора магнетики величинъ
и направления скорости ϑ . Разберемъ
теперь некоторые частные примѣры.

Пусть требуется осуществить
поступательное движение системы
 N , подобное изображенному на фиг. 69.
Скорость вращения системы N должна
быть равна нулю, и уравнение (β) по-
казываетъ, что между скоростями ω_M
и ϑ должно существовать соотноше-
ние

$$\omega_N = h \omega_M - \vartheta (1 + h) = 0,$$

сводящееся къ соотношению

$$\vartheta : \omega_M = h : (1 + h) \dots (\delta),$$

при чемъ рычагъ долженъ вращаться
согласно съ системой M .

Пусть еще требуется найти, при
какихъ условияхъ система N за одинъ
оборотъ вокругъ оси системы M совер-

минуте один оборот вокруг собственной оси $\mathcal{N}$, - то движение будет вращательным аналогично движению Луны, всегда обращенной к земле одной своей стороной. При таком движении какой-либо радиус PN , совпадающий в начальный момент с осью $\mathcal{M}\mathcal{N}$, за все время движения будет оставаться совпадающим с осью, а это обстоятельство указывает на равенство между ω_x и ϑ . Тогда уравнение (β) показывает, что $\omega_x = \vartheta$, - то-есть система $\mathcal{M}$ движется с той же скоростью, что и радиус $\mathcal{M}\mathcal{N}$; иными словами, все три системы, - $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ и радиус $\mathcal{M}\mathcal{N}$, должны двигаться, как одно целое.

Итак, пока ось $\mathcal{N}$ остается в пространстве неподвижной, то скоростью ω_x системы $\mathcal{M}$ можно было создать такую одну скорость $h\omega_x = \omega_x$ системы $\mathcal{N}$. Если же начать вращать радиус $\mathcal{M}\mathcal{N}$ вокруг оси $\mathcal{N}$ с той или другой скоростью ϑ , то при одной и той же скорости ω_x оказывается возможным получить самую разнообразную скорость ω_x системы $\mathcal{N}$. Общее уравнение этих скоростей ω_x имеет вид:

$$\omega_x = h\omega_x \pm \vartheta(1+h).$$

Все сказанное дает нам возможность разбраться в подобном случае

движения системы двух зубчатых колес, оси которых сопряжены рычагом, могут быть только взаимное движение около одной из этих осей. Присутствие нашей системы к данной нашей системе положий А и В.

Пусть неподвижной остается ось положий А, сама же она пусть вращается по часовой стрелке со скоростью ω_A . Пусть, далее, рычаг АВ вращается противоположно системе А, то-есть против часовой стрелки, со скоростью ϑ , при чем как ω_A , так и ϑ предположим равными. В таком случае, согласно формуле (а), прикладной для этого случая, система В будет вращаться, во-первых, со скоростью $k_1 \omega_A$ против стрелки часов и, во-вторых, со скоростью $\vartheta(1+k_1)$ в том же направлении, то-есть будет вращаться со скоростью $k_1 \omega_A + \vartheta(1+k_1)$, направленной туда же, — против часовой стрелки †

Наша система дает возможность осуществлять движение $\omega'_B = k_1 \omega_A = \omega_B - k$; движения же ω_B , при неподвижных осях их, получиться не может, ибо в этом случае при вращении положий А со скоростью ω_A система В может вращаться только со скоростью $\omega'_B = k_1 \omega_A = \omega_B - k$, тогда как, в действительности, она должна вра-

-измѣняется со скоростью $\omega_B = k + k_1 \omega_A$. Это показываетъ, что, кроме вращения $k_1 \omega_A$, сообщаемого полюсу В полюсомъ А, мы должны сообщить ей, т. е. полюсу В, еще вращение k , независимое отъ полюса А. Ясно, что это возможно, добавочное вращение можно дать независимо помощью соответствующаго вращения рычага АВ, — см. уравнения (а) и (б).

Действительно, вращая А со скоростью ω_A по часовой стрѣлкѣ, а рычагъ АВ со скоростью v противъ часовой стрѣлки, мы получимъ вращение системы В со скоростью $[k_1 \omega_A + v(1 + k_1)]$, направленное противъ движенія стрѣлки. Итакъ какъ скорость v вращения рычага вносимъ произвольна и всецѣло зависить отъ насъ, то мы и можем распорядиться ею такъ, чтобы результирующая скорость отъ вращения колеса А и рычага АВ и оказалась равной какъ разъ ω_B . Для этого надо лишь выполнить условие

$$k_1 \omega_A + v(1 + k_1) = \omega_B,$$

изъ котораго и опредѣляется единственная неизмѣнная здрѣсь величина v .

Итакъ какъ $\omega_B = k + k_1 \omega_A$, то, подставляя эту величину, находимъ уравнение

$$k_1 \omega_A + v(1 + k_1) = k + k_1 \omega_A.$$

Отнимая по $k_1 \omega_A$ изъ обѣихъ частей этого ур-ня, получимъ ур-е для v :

$$\mathcal{I}(1+k_1) = k,$$

откуда

$$\mathcal{I} = \frac{k}{1+k_1} \dots \dots \dots (35),$$

при этом рычаг должен вращаться
противоположно вращению пологин А.
Таким образом, рычаг АБ
с такой скоростью $\mathcal{I}$, а системе А
со скоростью ω_A , получим вращение
системы В со скоростью ω_B .

По же значению скорости $\mathcal{I}$ получим
из условия, согласно которому, при не-
подвижной пологин А, пологин В долж-
на вращаться со скоростью k , — при $\omega_A = 0$
получим $\omega_B = k$. Таким как, при скорости
вращения $\mathcal{I}$ рычага и при неподвижной
пологин А, скорость пологин В выража-
ется через $\mathcal{I}(1+k_1)$, то мы и получим
требуемое условие в виде

$$k = \mathcal{I}(1+k_1).$$

откуда получается та же формула (35).

Таким, вращение системы В с
заданной скоростью ω_B вполне возмож-
но: для этого рычаг, несущий ее, нуж-
но вращать со скоростью $\mathcal{I} = \frac{k}{1+k_1}$, а си-
стему А вращать в противополож-
ную сторону со скоростью ω_A . Дости-
жение скорости ω_B возможно всегда,
если бы велико ни было это k , — соот-
ветственный подбор $\mathcal{I}$, согласно урав-
нению (35), даст возможность про-
мислу задану вполне можно

Пока ось пологин останется непо-

- движением, но можно получить
 эту скорость $\omega'_B = \omega_B - k = k_1 \omega_A$; ось си-
 стемы инертна при этомь один
 мить вращательного движения. Дости-
 жение ω_B оказывается возможным мить
 путем введения дополнительного эн-
 цимического движения системы В, по-
 мочь вращению рычага АВ вокруг
 центра А с угловой скоростью $\mathcal{D} = \frac{k}{1+k_1}$,
 тогда абсолютная угловая скорость
 системы В, при той же скорости ω_A
 системы А, сразу переходит в нуж-
 ную мить ω_B .

Итак, скорость ω_B системы В мо-
 жет быть получена помощью осу-
 ществления энцимического движения
 ее. Но можно получить ее и другим
 путем, оставая ось В неподвижной,
 а систему А сообщая энцимическое
 движение помощью вращений рычага
 АВ вокруг оси ^В А с магический ско-
 ростью $\mathcal{D}_1$. Непосредственное геометри-
 ческое рассмотрение вопроса сразу да-
 ет возможность определить вели-
 чину этой скорости $\mathcal{D}_1$.

Пусть пология В остается пока
 неподвижной, а пология А увлекается
 рычагом АВ, вращающимся, по ло-
 жению, такт согласно с пологией В,
 то-есть обратно движению часовой
 стрелки, с угловой скоростью $\mathcal{D}_1$, такт
 что за какое-мь время t угол φ по-

-воротна ротага равенъ $\varphi = \vartheta_1 t$ (фиг. 72).
 Также какъ скопление положий устрани-
 мо, то при этомъ поворотъ ротага по-
 логия A прокатится по положию B на ду-
 гу $Pr = pP_1$, такъ это радиусъ AP , мерный
 въ начальной моментъ въ точку каса-
 ния P , займетъ теперь положение A_1P_1 ,
 повернувшись, такъ же образомъ, за
 это время въ ту же сторону, что и
 ротага, то-есть противъ часовой стрел-
 ки, на уголъ $P'A_1P_1$, где $P'A_1 \parallel PA$. Но этотъ
 уголъ $P'A_1P_1 = \varphi + \delta = \varphi + \frac{\omega p P_1}{pA} = \varphi + \frac{\omega p P}{PP} \cdot \frac{PP}{PA} = \varphi + \varphi l$,
 где l есть передаточное число отъ поло-
 гия B , сцепленъ на неподвижной оси B ,
 къ подвижной положию A , равное, очевидно,
 $\frac{1}{k_1}$, такъ что $\angle P'A_1P_1 = \varphi + \delta = \varphi(1 + l) =$
 $= \varphi(1 + \frac{1}{k_1})$, что, въ виду равенства $\varphi = \vartheta_1 t$,
 даетъ соотношение

$$\angle P'A_1P_1 = \vartheta_1 t(1 + \frac{1}{k_1}),$$

показывающее, что, при вращении ротага
 AB вокругъ оси B съ какой-либо скоростью
 ϑ , система A поворачивается въ ту же
 сторону со скоростью $\vartheta_1(1 + \frac{1}{k_1})$, при чемъ
 система B остается неподвижной. Но,
 по основному условию, при вращении си-
 стемы B со скоростью ω_B противъ часо-
 вой стрелки система A должна вра-
 щаться со скоростью ω_A по стрелке.
 Это обстоятельство позволяетъ сразу
 разрешить поставленную задачу.

Примемъ систему B принято-
 муся ей скорости ω_B). По условию за-

-дания, это вращение вызовенно вращением системы А со скоростью $\frac{1}{k_1} \cdot \omega_B$, такъ это при совмещенномъ вращении рычага АВ со скоростью $\mathcal{V}_1$) и системы В со скоростью ω_B), система А будетъ вращаться со скоростью $\frac{1}{k_1} \cdot \omega_B$ въ должную сторону и со скоростью $\mathcal{V}_1 (1 + \frac{1}{k_1})$ въ обратную сторону, въ результатъ чего вращение системы А будетъ совершаться со скоростью

$$\omega'_A = + \frac{1}{k_1} \omega_B - \mathcal{V}_1 (1 + \frac{1}{k_1}).$$

Изъ этого уравненія можно опредѣлить $\mathcal{V}_1$ погъ нѣкое условие, чтобы скорость системы была равна какъ разъ ω_A ; это условие выразится уравненіемъ:

$$\omega_A = \frac{1}{k_1} \omega_B - \mathcal{V}_1 (1 + \frac{1}{k_1}),$$

откуда

$$k_1 \omega_A = \omega_B - \mathcal{V}_1 (1 + k_1);$$

такъ какъ, давая, $\omega_B = k + k_1 \omega_A$, то, подставляя и дѣлая приведение, имеемъ

$$\mathcal{V}_1 (1 + k_1) = k,$$

откуда

$$\mathcal{V}_1 = \frac{k}{1 + k_1};$$

сравнивая полученное для $\mathcal{V}_1$ значеніе со значеніемъ, найденнымъ для $\mathcal{V}$, заключаемъ, что

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 = \frac{k}{1 + k_1}.$$

Такъ какъ, при неподвижной системѣ В и при вращении рычага со скоростью $\mathcal{V}_1$, система А вращается со скоростью $\mathcal{V}_1 (1 + \frac{1}{k_1})$ въ ту же сторону, что и рычагъ, то при найденномъ значеніи $\mathcal{V}_1$, это вращеніе ея будетъ совершаться со

скоростно $\frac{k}{1+k_1} \cdot \frac{1+k_1}{k_1} = \frac{k}{k_1}$ и, притомъ, по-вторяемъ, въ ту же сторону, что и вращение рычага.

Итакъ, для того, чтобы, при враще-нии системы А со скоростью ω_A , система В вращалась со скоростью ω_B , удовлетво-ряющей условию

$$\omega_B = k + k_1 \omega_A,$$

рычагъ АВ необходимо вращать около неподвижной оси со скоростью $\frac{k}{1+k_1}$, въ ту же сторону, въ какую должна вра-щаться система В; если система А сидитъ на неподвижной оси, то ее нужно вращать съ ее скоростью ω_A ; если же она сидитъ на оси подвиж-ной, то, нитъ въ виду, что, при вра-щении рычага согласно съ В и при не-подвижной пока системой В, она вра-щается уже со скоростью $(-\frac{k}{k_1})$, т.-е. со скоростью $\frac{k}{k_1}$ въ сторону, противопо-ложную направлению, заключаемъ, что для того, чтобы она вращалась въ на-длежащую сторону со скоростью ω_A , ее нужно вращать еще со скоростью $(\omega_A + \frac{k}{k_1})$ въ надлежащую сторону.

Тогда абсолютная скорость системы А станетъ равной ω_A , скорость же си-стемы В станетъ равной ω_B , ибо отъ вращения А со скоростью $(\omega_A + \frac{k}{k_1})$ ско-рость В будетъ равна

$$k_1 (\omega_A + \frac{k}{k_1}) = k_1 \omega_A + k = \omega_B.$$

Потъ же результатъ получится

нужно признать, что подходящего сюда варианта (β) общего случая положий M и N . Системой M , связанной на неподвижной оси, является здесь пология B , а системой N — пология A ; передаточное число k для передачи вращения от M к N есть здесь $\frac{1}{k_1}$, и для скорости ϑ_1 вращения рычага получим выражение:

$$\omega_A = \frac{1}{k_1} \omega_B - \vartheta_1 \left(1 + \frac{1}{k_1}\right),$$

откуда получаем то же значение

$$\vartheta_1 = \frac{k}{1+k_1},$$

что и ранее.

Несравненно проще и удобнее получить всеохватывающее движение вытекающее из известного положения теоретической механики, по которому скорость вращения в абсолютном движении равна сумме скоростей вращения в движениях относительно и переносом. Эту теорему можно признать уместной в системе, связанной на неподвижной оси, ибо она, будучи убавлена рычагом, может быть рассматриваемая движущаяся, во-первых, переносимое движение, которое представляет собою движение ее в том предположении, что она движется, будучи жестко скреплена с рычагом, и, во-вторых, движение относительное, то-есть движе-

-мисль относительно рѣзка, - и таче
говора, таковыя движеніи, которое
нельзя бы было въ гравитационно-
сти, если бы рѣзакъ былъ неподвиженъ,
а система вращалась теперь на своей
оси съ нѣкоторой скоростью.

Прислуживъ эти соображенія къ
нашей системѣ пологій (А, В) и разбе-
рись сначала точку слугай, когда на
неподвижной оси сидитъ система А
(фиг. 74). Пусть рѣзакъ АВ вращается,
со скоростью v , противъ часовой стрѣл-
ки, а система А - со скоростью ω_A , по
стрѣлкѣ. Посмотримъ, что гравити-
са съ системой В.

По сказанному, абсолютное враще-
ніе системы В можно разсматривать,
какъ сумму вращеній въ переносномъ
ея движеніи и въ относительномъ.
Что касается переноснаго движенія,
то это будетъ такое ея движеніе, ко-
торое она имѣла бы, если бы была со-
единена съ рѣзаческимъ магнито. Подуми-
мось это движеніе. Для этого
скрѣпимъ систему В съ рѣзаческимъ
АВ магнито и видимъ, какъ враща-
ется рѣзакъ, съ прѣжней его скоростью v , про-
тивъ часовой стрѣлки. Система В
стативно переносится въ простран-
ствѣ вращеніи съ рѣзаческимъ, поворачи-
ваясь при этомъ своимъ переноснымъ
движеніемъ около центра А, съ угловою

скоростью v , в ту же сторону, что и
 рычаг. Действительно, если бы си- фиг. 1
 стема B двигалась, не вращаясь, то -
 ест. двигалась поступательно, то ра-
 зично PB , меняя в точку касания P
 положение, через время t примет бы в
 положение P_1P' , где $P_1P' \neq PB$. На время
 же точка P , вынужденная все время
 находиться на оси AB рычага, не сой-
 дется с ней и в моменты t и при-
 дется в P_1 , новую точку касания поло-
 жия, повернувшись, таким образом,
 относительно прежнего своего положе-
 ния PB или, что то же, параллельно
 ему $P'B_1$, на угол $P'B_1A = \varphi$, при чем
 в пространстве поворота этот бу-
 дется совершён в ту же сторону, в
 какую вращается рычаг AB , то-есть
 обратно движению расовой стрелки.
 Итак, перемещением вращением си-
 стемы B оказывается вращение её око-
 ло центра A со скоростью v , в ту же
 сторону, в какую вращается и ре-
 рычаг AB .

Скользящее между полюсами устра-
 нено, например, помощью зубчатой
 передачи. Следовательно, если мы, скре-
 пив полюсы B с рычагом AB , ста-
 вим этот рычаг вращать, то по-
 лодия A , ведомая полюсом B , станется
 вращаться с тем же скоростью v и
 в ту же сторону, что и рычаг. Это

убеждение положив A положив B , происходящее здесь, можно представить себе происходящим так, как если бы зубцы в положив B (фиг. 74), жестко через эту свою положив соединенный с рамкой, то-есть как бы принадлежащий раме, уперся бы зубцы A положив A и был, таким образом, эту положив, заставляя ее вращаться около оси A с той же скоростью, с какой она сама вращается около этой оси, то-есть со скоростью V .

Итак, при переносном движении системы B система A , бы видя невозможности взаимного скольжения положив, вынуждена вращаться с той же скоростью V и в ту же сторону, что и рама; само же переносное вращение есть вращение около A , против часовой стрелки, со скоростью V , общей, как оказывается, для всех трех тел: рамы, нашей системы; и так говоря, при переносном движении положив B система обоих положив A и B и рама AB вращаются, как одно целое, вокруг оси A .

Переносное движение системы B определено было. Переходим теперь к относительному, для чего предполагаем нашу раму остановившимся и начинаем вращать какую-либо из положив так, как это нужно

для насъ по тѣмъ или инымъ сообра-
женіямъ. Проще всего сначала задать-
ся чистою осуществимою и истинною абсо-
лютное вращение системы А. Эта си-
стема, по условию, должна имѣть
вращение по стрѣлкѣ часовъ, со скоро-
стью ω_A . Переносное вращение влечетъ
за собою, какъ мы видѣли, вращение ея
противъ часовой стрѣлки, со скоростью
 ϑ . Значитъ, для того, чтобы она могла
вращаться со скоростью ω_A , мы должны
сообщить ей въ относительно дви-
женіи вращение со скоростью $(\omega_A + \vartheta)$, на-
правленное по часовой стрѣлкѣ. Пусть
АВ при относительно движеніи
остается неподвижнымъ. Слѣдова-
тельно, указанное вращение системы
А повлечетъ за собою вращение системы
В противъ часовой стрѣлки, со ско-
ростью $k_1(\omega_A + \vartheta)$, - ось осн, А и В, въ от-
носительно движеніи системы В
останется неподвижнымъ, а углы
вращенія В произведется по общему
правилу передачи при неподвижныхъ
осяхъ.

Итакъ, данное абсолютное вра-
щение системы А достигнуто, - она
вращается вокругъ своей осн со ско-
ростью ω_A . Что же касается системы
В, то въ переносномъ своемъ движеніи
она вращается со скоростью ϑ , а при
выбранномъ нами погръ упомянутомъ

$$\vartheta + k_1 \omega_A + 106^\circ$$

условию относительного вращения системы А ее вращение происходит со скоростью $k_1(\omega_A + \vartheta)$; таким образом, абсолютное вращение системы В окажется вращением со скоростью

$$\vartheta + k_1(\omega_A + \vartheta) = k_1 \omega_A + \vartheta(1 + k_1).$$

Поскольку скорость ϑ произвольна, то ее можно подобрать так, чтобы полученная абсолютная скорость системы В оказалась равной как раз ω_B . Получается знакомое нам уравнение:

$$\omega_B = k_1 \omega_A + \vartheta(1 + k_1),$$

откуда находим известное уже из предыдущего выражение

$$\vartheta = \frac{k}{1+k_1}.$$

$$\vartheta(1+k_1) = \omega_B - k_1 \omega_A$$

$$\vartheta = \frac{\omega_B - k_1 \omega_A}{1+k_1}$$

Присмотримся теперь к этому случаю неподвижной оси В, воспользувшись (или же) фиг. 72. Вращаемся опять со скоростью ϑ . Тогда переносное вращение системы А будет иметь скорость ϑ ; со скоростью ϑ будет вращаться и полая В.

Прибавляем теперь к переносному вращению полой А такое относительное, чтобы сумма их дала абсолютное вращение со скоростью ω_A . Очевидно, что это относительное вращение есть вращение со скоростью $(\omega_A + \vartheta)$, ибо оно, складываясь с переносным вращением ϑ , дает абсолютное вращение именно со ско-

-ростом ω_A). Но относительное вращение пологин A , то-есть вращение пологин A при неподвижной оси AB , со скоростью $(\omega_A + \vartheta)$, ввернуть за собою вращение пологин B со скоростью $k_1(\omega_A + \vartheta)$ вращающееся относительно k_1 к основному вращению ϑ , и вращению ω_A при переносном вращении системы A . Таким образом, полное вращение системы B будет равно $[\vartheta + k_1(\omega_A + \vartheta)]$.

Так как величина ϑ произвольна, то ее можно подобрать так, чтобы полученное вращение было как раз равно ω_B . Тогда получаем знакомое уравнение:

$$\omega_B = \vartheta + k_1(\omega_A + \vartheta) = k_1\omega_A + \vartheta(1 + k_1),$$

откуда и получаем требуемое значение $\vartheta = \frac{k}{1+k_1}$.

Можно было бы рассуждать и так: вращаем ролик со скоростью ϑ ; система A в это время переносным вращением получает скорость ϑ , а система B - также скорость ϑ (вокруг оси A). Так как система B должна иметь скорость ω_B , то до ω_B ей не хватает скорости $(\omega_B - \vartheta)$. Придаем ей эту скорость, вызывая тем самым появление относительной скорости $\frac{1}{k_1}(\omega_B - \vartheta)$ у системы A . Поэтому абсолютная скорость системы A выразится теперь

$$\vartheta) + \frac{1}{k_1}(\omega_{\beta} - \vartheta),$$

то-есть через

$$\frac{1}{k_1}(\omega_{\beta} - \vartheta) - \vartheta = \frac{1}{k_1}[\omega_{\beta} - (\vartheta + k_1\vartheta)] = \frac{1}{k_1}[\omega_{\beta} - \vartheta(1 + k_1)].$$

Эта скорость должна быть равна ω_{α} ,
ввиду чего получаем уравнение:

$$\omega_{\alpha} = \frac{1}{k_1}[\omega_{\beta} - \vartheta(1 + k_1)],$$

то-есть уравнение

$$k_1\omega_{\alpha} = \omega_{\beta} - \vartheta(1 + k_1)$$

или, что то же, законное уравнение:

$$\omega_{\beta} = k_1\omega_{\alpha} + \vartheta(1 + k_1).$$

Итак, приняв этот способ,
надо помнить, что, давая ротору ско-
рость ϑ в ту или другую сторону, по-
даем систему, сидящую на подвижной
оси, переносное движение, в котором враще-
ние (переносное вращение) совершается со
скоростью ϑ в ту же сторону, что и у
ротора. Одновременно с этим систе-
ма, вращающаяся на неподвижной оси,
получает вращение с того же скоро-
стью ϑ . Поэтому, если желаемо,
чтобы на ней другая система имела
определенное вращение ω , то придется
добавить ей, в отношении ее
движения, не все вращение ω , как это
обыкновенно думать, а лишь недоста-
точную часть его, — для системы с по-
движной осью это часть известную
скорость относительно ротора. Сумма
относительного и переносного вращений
должна абсолютная, могущая быть за-
данная заранее. Отсюда получаем

известное уравнение, могущее служить для определения неизвестных факторов.

Принимая теперь во внимание заданную, представляющую обобщенно боковую прыгкость для изучающих кинематику, то на основе вышеизложенного про-стоих, — безприведенная соображения позволяющая нам разобратся в них внести. На первом месте поставим

Планиметрическое колесо Уатта.

Пусть колесо В совершает одно или несколько поступательных движений, что достигается, например, помощью рулевого управления его на рычаге ВС, могущем перемещаться только поступательно в направлении ^{направления} коренной оси кривошипа ABCD, где $AB \neq CD$. Пусть, кроме того, диаметры зубчатых колес А и В равны, так что $k_1 = 1$. В таком случае общее уравнение, связывающее абсолютную скорость вращения системы А, В и рычага АВ, вращаемого со скоростью ϑ , и искомое будет:

$$\omega_B = k_1 \omega_A + \vartheta (1 + k_1),$$

переходим в уравнение

$$0 = \omega_A + 2\vartheta,$$

откуда и находим, что

$$\omega_A = -2\vartheta,$$

то-есть это, вращая рычаг АВ (или

CD), со скоростью $\mathcal{V}$, вкручив его оси, получим вращение колеса А в ту же сторону, что и вращение рычага АВ, но с двойной противъ него угловой скоростью. Запишемъ, что основная формула написана для того случая, когда колесо А вращалось навстрѣчу рычагу, такъ что знакъ (+) у скорости $\mathcal{V}$ обозначаетъ вращение рычага противъ ω_A ; следовательно, знакъ (-) у $\mathcal{V}$ показываетъ отображеніе направлений ω_A и $\mathcal{V}$.

Разберемъ этотъ примѣръ помощью сложения движеній. Даемъ рычагу вращение $\mathcal{V}$). Тогда система В (освободивъ ее теперь отъ рычага ВС) получитъ переносное вращение $\mathcal{V}$); одновременно съ этимъ, система А также будетъ вращаться со скоростью $\mathcal{V}$). Но такъ какъ система В должна имѣть абсолютную скорость вращения, равную нулю, то къ переносному вращенію ея $\mathcal{V}$) мы должны добавить относительное вращение $\mathcal{V}$); тогда система В станетъ перемѣщаться поступательно, вращеніе ея прекратится, а система А, въ добавокъ къ своему вращенію $\mathcal{V}$), получитъ еще этого относительнаго вращенія $\mathcal{V}$) системой В вращение около А со скоростью $k_1 \mathcal{V}$). Значитъ, общія скорость вращения системы А выразится черезъ $\mathcal{V} + k_1 \mathcal{V} = \mathcal{V}(1 + k_1)$). А такъ какъ k_1 взято здѣсь равнымъ 1 (диаметръ колеса

равна), то результирующая скорость колеса A будет равна $2V$, то-есть будет равна двойной скорости кривошипа AB и будет направлена в одну сторону с тем.

Этот механизм был применен Уаттом в его первых паровых машинах, где он не мог применить кривошипного механизма в виду того, что этот механизм был намертво связан Ватсо. Так как точка C двигалась не по окружности CD , а по окружности EF , описываемой падающим коромыслом C (фиг. 76), то закреплённое это колесо B не будет двигаться поступательно, а будет немного покачиваться, почему для того чтобы избежать вращения колеса A нужно было бы составить диаграмму угловых скоростей машины по отношению к кривошипу; это и даю бы малые величины скоростей ω_B . Скорость ω_A была бы отменно от $2V$, но, при достаточном удлинении машины CD , эта разница была бы весьма мало заметной.

Механизм для изменения скоростей вращения.

Идея этого механизма крайне проста: по одну сторону рычага KL сидят колеса A и B , а по другой - колеса C и D ,

причем A концентрично D , а B с C (фиг. 77). Колеса B и C сидят на одном и той же оси O , вращаясь в противоположные стороны KL ; колесо A сидит на оси S , а колесо D соединено с ней наглухо; получается, таким образом, возможность вращать ось S с любой скоростью, давая движение вращению колесу A и рычагу KL , сидящему на этой оси и, следовательно, не могущим без участия остальных колес B и C влиять на вращение оси; связь их с осью устанавливается лишь введением системы колес B и C . Колесо A приводится во вращение специальным колесиком M , а рычаг KL , состоящий обыкновенно из двух углового диска, также зубчатого, своим приводом. Обозначим передаточное число для передних пар $резь K_1 = \omega'_B : \omega_A$, а для задних — $резь h_1 = \omega'_C : \omega_D$. Пусть рычаг вращается со скоростью ϑ , а колесо A — со скоростью ω_A . Для любой скорости ω_B найдем соотношение:

$$\omega_B = k_1 \omega_A + \vartheta (1 + k_1) \quad (\alpha)$$

С такой скоростью ω_B будет вращаться, при данных условиях, колесо B . Задача теперь, что колеса B и C заклинен наглухо на одной и той же оси O и, следовательно, составляют одну и ту же жесткую систему, за-

касаемо, это вращение колеса В ирре-
косно будет повторено колесом С, кото-
рое, следовательно, будет вращаться с
той же скоростью и в ту же сторону,
что и колесо В, так что

$$\omega_B \cdot r = \omega_C \cdot r = k_1 \omega_A + v(1+k_1) \quad (b)$$

Для пары (С, D) найдем такую
же зависимость:

$$\omega_C = h_1 \omega_D + v(1+h_1) \quad (c),$$

но скорость вращения рычага осталась
той же, равной v , а передаточное чис-
ло от D к С есть h_1 . Заменяя, что,
по уравнению (b), $\omega_C = \omega_B$, получаем
уравнение, связывающее скорости колес
А и D и рычага KL:

$$k_1 \omega_A + v(1+k_1) = h_1 \omega_D + v(1+h_1),$$

откуда для ω_D находим выражение:

$$\omega_D = \frac{k_1}{h_1} \omega_A + v\left(\frac{k_1}{h_1} - 1\right) \quad (d).$$

Задавая различным v , — скоростью
вращения рычага KL, получим раз-
личные значения для ω_D . Давая, напри-
мер, рычагу скорость $(-\omega_A)$, то-есть
вращая его со скоростью колеса А, и в
одну с ним сторону, получим, что
 $\omega_D = \omega_A$, то-есть система будет дви-
гаться, как одно целое.

Если колесо А неподвижно, то-есть
если $\omega_A = 0$, то $\omega_D = v\left(\frac{k_1}{h_1} - 1\right)$. Если при-
мем, что $\frac{k_1}{h_1} = 2$, то $\omega_D = v$, то-есть ко-
лесо D будет двигаться с той же ско-
ростью, что и рычаг; тогда $\omega_B = v(1+2h_1)$
и $\omega_C = h_1 v + v(1+h_1) = v(1+2h_1)$, то-есть

$\omega_B = \omega_C$, какъ и должно быть всегда.

Если колесо А вращается со скоростью ω_A , а $\frac{k_1}{h_1} = 2$, то $\omega_D = 2\omega_A + \vartheta$, и т. д.

Если $\frac{k_1}{h_1} = 1$, т. е. $k_1 = h_1$, то $\omega_D = \omega_A$, то есть оба колеса, А и D, будутъ вращаться съ одной и той же скоростью; если $\omega_A = 0$, то $\omega_D = 0$, то есть при неподвижности колеса А колесо D, въ этомъ случаѣ, будетъ также оставаться неподвижнымъ. Все это можно показать, такъ какъ при $k_1 = h_1$ колеса А и D, В и С будутъ непосредственно, при этомъ колеса В и С, какъ составляющая одну жесткую систему, могутъ быть представлены въ видѣ одного колеса, одновременно вращающагося съ двумя такими одинаковыми колесами А и D.

Вся система выводится обыкновенно такъ, какъ это показано на фигурѣ 78. Колеса А и В сидятъ на одну сторону гуска KL, изображающаго рычагъ и приводимаго въ движение колесомъ А, а колеса С и D — на другую сторону этого гуска. Колесо А приводится во вращение колесомъ А'. Для уравновѣсienia системы колесъ (В, С) къ гуску прикрепляется противовѣсъ G-механизмъ, какъ видно, крайне простъ.

Парадоксъ Феррассона.

Разберемъ сначала этотъ механизмъ

место геометрически, а затем уже разсмотрим его въ более общей формѣ и приведемъ общее правило задачи о движении всѣхъ подобныхъ механизмовъ.

Допустимъ, что у насъ имѣется система трехъ сцепляющихся другъ съ другомъ зубчатыхъ колесъ A, B, C (фиг. 79), сцепляемыхъ на своихъ осяхъ, при чемъ оси B и C закрѣплены на рычагѣ ABC , а ось A , около которой этотъ рычагъ можетъ вращаться, закрѣплена въ станнѣ W механизма. Допустимъ, что колесо A остается за все время движения системы неподвижнымъ (случай подвижнаго колеса A мы разберемъ потомъ), и пусть за время t рычагъ ABC повернулся на уголъ φ со скоростью $\dot{\varphi}$. Тогда колесо B повернулось со скоростью $\dot{\varphi}(1+k_1)$, где $k_1 = \frac{z_A}{z_B}$. Радиусъ BP принимаетъ при этомъ положение B_1P' , тогда онъ перпендикуляренъ точке касанія P_1 на уголъ δ , равный, какъ это видно изъ равенства дугъ PP_1 и $P'P_1$, $\varphi \cdot \frac{z_A}{z_B} = k_1 \cdot \varphi$.

Такимъ образомъ, точка π , другой концы диаметра $B\pi$, приняла теперь въ π' . Если бы точка π могла все время оставаться лежащей на оси ABC рычага, то, очевидно, въ моментъ (t) она занимала бы на той же оси положеніе p_1 , а такъ какъ она должна была съ этой осью сойтись и занять положеніе π' , отклонившись отъ оси ABC на уголъ δ , то точка p такъ же не осталась на оси, а перемѣстилась въ p'_1 .

при этом, очевидно, дуги $p_1 \pi'$ и $p_1 p'_1$ равны. Угол уклонения радиуса pC отъ оси ABC равенъ $\delta'_1 = \angle p'_1 C_1 p_1$. Нетрудно видеть, что онъ связанъ съ угломъ δ соотношениемъ :

$$\delta'_1 = \frac{z_B}{z_C} \cdot \delta.$$

Подставляя, вместо δ , его значение, найденное выше, находимъ, что

$$\delta'_1 = \varphi \cdot \frac{z_A}{z_B} \cdot \frac{z_B}{z_C} = \varphi \cdot \frac{z_A}{z_C}.$$

Рассмотримъ теперь, въ какую сторону произойдетъ абсолютный поворотъ колеса C . При вращении рейки AB со скоростью ϑ колесо B вращалось со скоростью $\vartheta(1+k_1)$ въ ту же сторону; следовательно, колесо C вращается вращается въ противоположную сторону, т.-е. $\curvearrowright$. Теперь, если бы колесо C перемещалось поступательно, то радиусъ pC его занялъ бы положение $p'_1 C_1$, повернувшись противоположно вращению рейки относительно этого последнего на уголъ $p'_1 C_1 p_1$, равный φ ; на дугу же онъ повернулся относительно этого рейки на уголъ $\delta'_1 = \varphi \cdot \frac{z_A}{z_C}$, такъ что абсолютный поворотъ его въ пространстве равенъ $\varphi - \frac{z_A}{z_C} \cdot \varphi = \varphi(1 - \frac{z_A}{z_C})$; это и есть уголъ поворота $p'_1 C_1 p_1$ системы C . Скорость вращения ее оказывается равной $\vartheta(1 - \frac{z_A}{z_C})$, при чемъ, какъ оказывается, вращение колеса C происходитъ такъ, какъ если бы среднего колеса B не было, а само колесо C при вращении рейки ϑ вращалось бы не въ одну сторону съ рейкою, а въ

обратно. Действительно, если бы колеса В не было, то колесо С, будучи приведено во вращение с колесом А, при вращении рокара вращалось бы со скоростью с той же скоростью, со скоростью $v(1 + \frac{v_a}{v_c})$; присутствие колеса В уменьшает значение $v \cdot \frac{v_a}{v_c}$, т. е. скорость обхода дуги $P_1 P'_1$ на колесе С, она будет пройдена во обратную сторону.

Если $v_a = v_c$, то скорость вращения колеса С оказывается равной нулю, и, следовательно, во этом случае колесо С переносится поступательно, — радиус CP , как и всякий грузик, за время движения системы переносится параллельно самому себе. Скорости всех точек системы одинаковы и равны $AC \cdot v$. Во этом случае, при равных диаметрах крайних колес, механизм получает название парадокса Феррессона.

Гораздо удобнее во всех подобных случаях пользоваться приведенным выше положением о составлении абсолютного вращения путем сложения вращений относительного и переносного. Предварительно необходимо замечание следующее:

Предположим, что у нас имеется ряд из n сцепляющихся друг с другом колес А, В, С, ..., N (фиг. 80), оси которых наглухо закреплены в одной и той же станине QQ . Пусть колесо А

вращается со некоторой угловой скоростью ω_A , положительной, но отрицательной расов. Рассмотрим, какъ выразятся скорости вращения остальных колесъ. При этомъ, желая получить формулы, получивъ выразить не только величину скорости вращения, но и направление его, условимся считать согласие вращений знакомъ плюсомъ, а противоположность — знакомъ минусъ или множителемъ (-1) . Поэтому для скорости ω_B второго колеса В напишемъ выражение:

$$\omega_B = (-1) \omega_A \cdot \frac{r_A}{r_B} \dots \dots \dots (a)$$

Введя множитель (-1) , мы отметили этимъ, что колесо В вращается противоположно колесу А. Далее, для третьего колеса С, получивъ выражение отъ колеса В, найдемъ выражение его скорости:

$$\omega_C = (-1) \omega_B \cdot \frac{r_B}{r_C} = (-1)^2 \omega_A \cdot \frac{r_A}{r_C} \dots \dots \dots (b).$$

Для четвертого колеса D получимъ же следующее выражение:

$$\omega_D = (-1) \omega_C \cdot \frac{r_C}{r_D} = (-1)^3 \omega_A \cdot \frac{r_A}{r_D} \dots \dots \dots (c),$$

и, вообще, для n -ого колеса, А, напишемъ:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \omega_A \cdot \frac{r_A}{r_n} \dots \dots \dots (d).$$

Формулы (a) — (d) показываютъ, 1), что величина скорости каждаго колеса А относительно основного А не зависитъ отъ разнѣровъ среднихъ колесъ, а лишь отъ разнѣровъ (т. е. радиусовъ или числа зубцовъ и т. п.) колесъ А и А; 2), направление же вращения колеса А

определяется числом n верхов колес от A до N включительно, и, какъ показано формула (d), если это число n четное, то вращение колеса N будетъ происходить обратно вращению колеса A ; если же n нечетно, то вращение N будетъ согласно съ вращениемъ A .

Такимъ образомъ, если на пути всего три колеса, какъ это изображено на фиг. 81, то скорость вращения колеса C относительно скорости вращения колеса A выразится такъ:

$$\omega_c = (-1)^{3-1} \omega_a \cdot \frac{r_a}{r_c} = \omega_a \cdot \frac{r_a}{r_c} \quad (e),$$

то-есть колесо C будетъ вращаться въ ту же сторону, что и колесо A , при чемъ условия скорости удовлетворяются такъ, какъ если бы колеса B не было, а колесо C было бы сопряжено непосредственно съ A , но вращалось не въ ту сторону, въ какую ему бы должно было вращаться при этомъ, а въ обратную, - среднее колесо B меняетъ смыслъ вращения крайнего колеса C , т.е. колесо, при этомъ, не вращая на величину самой скорости вращения.

Заметимъ это, предполагая, что рычагъ QQ , несущий на себѣ все колеса $A, B, \dots, N$, вращается съ некоторой скоростью ω вокругъ оси A , а, кроме того, колесо A само вращается, съ некоторой скоростью ω_a , вокругъ той же оси A . Тогда, какъ выразится абсолютная

скорости вращения крайнего колеса A этой системы.

Согласно сказанному, абсолютное вращение колеса A составится изъ вращения переносного и вращения относительного. Что касается переносного вращения, то оно будетъ для всехъ колесъ одно и то же, ϑ , согласно съ вращениемъ рокара. Напомнимъ, что переносное движение получимъ, закрѣпивъ колесо A на рокаре махухо, — такъ, чтобы оно составило съ рокаромъ какъ бы одну жесткую систему. Это, въ свою очередь, поведетъ къ тому, что колесо A не позволитъ повернуться относительно рокара ни одному изъ предметствующихъ ему колесъ, — зубцы его, которые это колесо соприкасается съ зубцами предметствующаго колеса, можно считать жестко скрепленными съ рамой рокара, почему все колеса касаются зажимными на рокаре и вынужденными повторять движение рокара. Итакъ, при переносномъ вращении колеса A какъ оно само, такъ и колесо A , будутъ вращаться со скоростью ϑ рокара, согласно съ темъ.

Пусть рокаре вращается по часовой стрѣлкѣ, такъ что переносная скорость всей системы есть ϑ . Колесо A , такимъ образомъ, при переносномъ движении колеса A , вращается вокругъ своей оси со скоростью ϑ . Но пусть оно должно

вращаться со скоростью ω_A); такъ какъ скорость ϑ) у него уже есть, то для того, чтобы оно могло вращаться съ данной скоростью, ему нужно сообщить еще скорость $(\omega_A - \vartheta)$). Эту-то скорость колеса А и примемъ за относительную его скорость, т. е. за скорость при неподвижномъ рычагѣ; въ такомъ случаѣ, скорости всехъ остальныхъ колесъ окажется относительными ихъ скоростями, ибо это будутъ скорости при неподвижномъ рычагѣ. Такимъ образомъ, можно определить и недостававшую намъ относительную скорость колеса А: останавливаемъ рычагъ и сообщаемъ колесу А скорость $(\omega_A - \vartheta)$; тогда колесо А останется вращаться со скоростью

$$\omega'_A = (-1)^{n-1} (\omega_A - \vartheta) \frac{z_A}{z_X};$$

такова будетъ относительная скорость колеса А. Имя въ виду, что переносная скорость его есть ϑ), заключаемъ, что абсолютная скорость будетъ равна сумме

$$\omega'_A + \vartheta = \vartheta + (-1)^{n-1} (\omega_A - \vartheta) \frac{z_A}{z_X} = \omega_X.$$

Если крайнія колеса одинаковы, такъ что $z_A : z_X = 1$, а число колесъ четное, такъ что $n = 2m + 1$ и $(-1)^{n-1} = +1$, то

$$\omega_X = \vartheta + (\omega_A - \vartheta) = \omega_A,$$

то-есть колесо А будетъ вращаться въ ту же сторону и съ такою же угловою скоростью, что и колесо А. Если же колесо А

неподвижно, такъ что $\omega_A = 0$, то $\omega_N = 0$, то-есть при нечетномъ числѣ колесъ, равныхъ диаметрахъ крайнихъ колесъ А и N и неподвижномъ колесѣ А, крайнее колесо N не будетъ испытывать никакого вращенія: $\omega_N = 0$, то-есть оно будетъ перемѣщаться поступательно. Въ частности, если число колесъ равно здръсь тремъ, то мы получаемъ уже знакомый намъ парадоксъ Феррессона. Здръсь общее ур-е для скорости колеса С имѣетъ видъ:

$$\omega_C = \vartheta + (\omega_A - \vartheta) \frac{r_A}{r_C}.$$

Если $r_A = r_C$ и $\omega_A = 0$, то $\omega_C = 0$

Само собою разумѣется, что вовсе необходимо, чтобы оси колесъ А, В, ..., N, были расположены по одной прямой, — посадка ихъ на рычагъ въ этомъ отношеніи является совершенно произвольной. Располагая эти оси по прямой, мы руководствовались исключительно соображеніями удобства геометрическихъ разсмотрѣній.

Легко разсмотрѣтся также въ эту задачу, что малому разсмотрѣнію предлагается движеніе, состоящее болѣе сложныхъ, когда колеса на осяхъ сидятъ не безъ по одному, а кое-гдѣ и по два, какъ это, напримѣръ, изображено на фиг. 82. Надо каждый разъ разлагать абсолютное движеніе крайняго колеса N на переносное и относительное. Переноснымъ вращеніемъ

будетъ сущности вращение со скоростью $\dot{\varphi}$ рамка. Относительное же определит-ся изъ условия, налагаемого на абсолют-ную скорость колеса A (или какого-либо другого), — она должна быть задан-ной. Также какъ переносное движеніе си-стемы влечетъ за собою определенное переносное вращение колеса A , то отно-сительному вращению A будетъ недо-статочное или теперь до абсолютнаго; а это относительное вращение A сейчасъ же даетъ вполнѣ определенное отно-сительное вращение колеса A , и, складыв-вая это послѣднее съ переноснымъ его вращениемъ $\dot{\varphi}$, получимъ иско-мое абсолютное его вращение.

Замѣтимъ, наконецъ, что зная скорости вращенія можно произвестн для любого члена данной колесной си-стемы, — стоитъ принять его за по-слѣдній, т. е. предположить разъ обо-ротами какъ разъ на этомъ членѣ, и тогда повтореніе всего разсужденія даетъ намъ желаемый отвѣтъ.

На этомъ мы и кончимъ съ во-просомъ объ эпиклимаческомъ движе-ніи и перейдемъ къ послѣднему вопросу теории передачъ, —

Преобразование вращательнаго движенія
въ поступательное
съ произвольнымъ отноше-

-иемъ скоростей.

Пусть некоторая система A (фиг. 83) вращается вокругъ неподвижной оси O и заставляетъ систему B двигаться возвратно-поступательно по какому-либо направлению xy съ постоянной скоростью v , значение коей въ каждый данный моментъ предполагается известнымъ. Это движение системы B можно разсматривать, какъ движение некотораго отрезка bb_1 , жестко съ этой системой связаннаго, расположеннаго въ ней параллельно данному направлению xy и, притомъ, проходящаго черезъ неподвижный центръ O вращения системы A . Въ такомъ случаѣ, движение системы B будетъ характеризоваться тѣмъ, что некоторая прямая bb_1 , принадлежащая этой системе, при движении этой последней, скользя по своему собственному направлению $\beta\beta$, проходя при этомъ постоянно черезъ неподвижную точку O . Это движение прямой bb_1 будетъ совершаться то въ одну сторону, то въ другую, какъ это показано отрезками у прямой xy . Пусть при этомъ угловая скорость ω системы A остается постоянной, скорость же v , въ виду возвратности движения системы B , т. е. движения по указанному направлению то въ одну

сторону, то въ группу, будетъ свой знакъ
мѣнѣе, то, согласно характеру движе-
нѣя, будетъ всегда направлена или по xy
или по yx . Пусть зависимость скорости
въ это время выражается уравненіемъ

$$v = f(t) \quad (1).$$

Такъ какъ система A вращается
равномерно, то время t можно изрѣкомъ
указать α поворота системы A отъ ка-
кого-либо начального положенія ея, въ ви-
ду чего можно положить, что

$$v = f(t) = \varphi(\alpha) \quad (2)$$

Допустимъ, что въ начальный моментъ
система A имѣла скорость v_0 , такъ что

$$v_0 = f(0) = \varphi(0) \quad (3).$$

Найдёмъ теперь пологіи этого дви-
женія, для чего опредѣлимъ сначала дви-
женіе системы B относительно систе-
мы A , съ каковою изрѣкомъ оставаема-
емъ систему A , придавая всей системе
($A-B$) вращеніе со скоростью ($-\omega_A$), т.-е.
со скоростью ω_A), равной и противопо-
ложной действительной скорости ея,
 ω_A). Пусть этого система A остано-
вится, а система B будетъ участвовать
въ двухъ движеніяхъ: во вращеніи вокругъ
точки O со скоростью ω_A и въ посту-
пательномъ движеніи по xy . Очевидно,
что это движеніе сводится къ вращенію
прямой bb_1 около центра O со скоростью
 ω_A и къ перемѣнѣ ея по-
стоянно черезъ эту же точку O . Та-

можно образовать, отбавившей сузить зрече-
точка O , а отбавимой - прямая bb_1 . Полное
мгновенное вращение будет лежать на
общей нормали к отбавимой и отбавившей,
т.е. на перпендикуляре OdN и может
быть найдено из того условия, что, со-
гласно общему определению, оно должно
представлять собою точку, в данный
момент не имеющую скорости.

Пусть в данный момент си-
стема B , а с ней и прямая bb_1 , дви-
жется вправо со скоростью v_0 (фиг. 84); в
то же время, при своем движении от-
носительно A , система B вращается око-
ло центра O со скоростью ω_A . В ви-
ду этого, исконая точка может ле-
жать в стороне OdN перпендикуляра
 NdN_1 , а не в стороне OdN , ибо только
на OdN и лежат точки, скорости v_0
которых от поступательного движения
будут противоположны по направле-
нию скорости ω_A от вращения систе-
мы B вокруг точки O . В положение
точки P , где эти скорости будут во-
звратно, еще и равны, т.е. уравнива-
ются, определится ур-ие:

$$v_0 = \omega_A r_0 = \varphi(0),$$

откуда

$$r_0 = \frac{\varphi(0)}{\omega_A} \quad (4)$$

Этим значением r_0 и определит-
ся положение полуса P на нормали OdN ,
в данный момент движения.

ное движение по направлению x , со скоростями, обратными скоростям в системе B . Значит, система B останется, а система A будет двигаться так, что точка O ее будет скользить все время по неподвижной прямой $\beta\beta$ (фиг. 86), со скоростями, равными скоростям системы B , обратными или одинаковыми для всех точек системы A ; кроме того, система A будет вращаться около точки O , непременно, со скоростью ω_A . Полное найдем из того же условия, что в данный момент оно не должно иметь скорости. Если в начальный момент скорость системы B была равна $v_0 \rightarrow$, то скорость системы A в обратном движении должна быть равна также v_0 , но будет направлена противоположно, т. е. $\leftarrow$. Полное π будет лежать в сторону ON на расстоянии z_0 , где

$$z_0 = \frac{v_0}{\omega_A} = \frac{g(0)}{\omega_A}.$$

Также же определяются и все другие точки π искомого положения. И так, как бы ни приходилось искать на перпендикулярах ON , возмещаемых из разных точек O неподвижной прямой $\beta\beta$, представляющих собой положения центра O , движущегося по $\beta\beta$ по закону $v = f(t)$ или $s = \int f(t) dt = F(t)$.

Таким образом кривую $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_n$, представляющую собой положение системы B .

Скрещивать полученные наложения ка-
ждую со своей системой и как-то одну
по другой, осуществившееся движение.
Скольжение достигнуто быть устраи-
ваемо помощью зубчатого зацепления или
какими-нибудь иными путями.

Получить желаемое движение мож-
но еще иначе; взяв какую-либо точку
в системе В, найдя ее траекторию и
заставивая затормозить или точку движе-
ния на эту траекторию или траекто-
рию действовать на точку. Таким обра-
зом приходится найти траекторию
какой-либо точки в системе В в дви-
жении В относительно А, что сводит-
ся к тому, что наша прямая bb_1 долж-
на двигаться, вращаясь около центра
О и скользя вдоль себя со известными
скоростями. Эти скорости могут быть
заданы диаграммами, откуда мы и опре-
деляем их для каждого данного мо-
мента. То скорость определяем мы
на какой-либо точке в, связанной жест-
ко с bb_1 , при этом проецируя эту точку
в на самую прямую bb_1 . Таким по-
лучим траекторию точки в, т.е. очер-
тание эксцентрика, вращая который
вокруг О с должной скоростью ω , полу-
чим искомого поступательное движе-
ние точки в, а вместе с нею и всей
системы В; эту последнюю осуществля-
ем в виде стержня с острием в в.

Графическій приёмъ рѣшенія задачи о построеніи направляющихъ меха- низмовъ.

Направляющими механизмами, какъ извѣстно, называются такіе, которые, состоя исключительно изъ шарнирныхъ соединений, даютъ возможность нѣкоторымъ своимъ точкамъ описывать траекторіи, представляющіяся или вполнѣ точными прямыми линиями (точнѣе напр. м-злы), или кривыми, на протяжении ихъ протяженіи настолько вытянутыми и такъ мало отходящими отъ нѣкоторой определенной прямой, что эти отрезки траекторій практически можно принять за отрезки прямыхъ. Определение такихъ точекъ легко выполнимо и основывается на непосредственныхъ очевидныхъ положеніяхъ.

Разъ траекторія нѣкоторой точки механизма, на протяжении своей длины, есть прямая, то это значитъ, что эта точка находится все время на поворотномъ кружѣ, т.-е. если для ряда положеній механизма мы построимъ поворотные круги для системы отрезка, несущаго такую точку, то эта точка каждый разъ будетъ лежать на поворотномъ кружѣ, построенномъ для взятаго положенія. Если же траекторія, на протяжении своего участка, пред-

- ставляется мало отличной отъ прямой, т.-е. если она сильно вытянута, то это значитъ, что радиусы кривизны траекторин на этомъ ея участке, вообще, весьма велики, такъ что кривизна траекторин здѣсь и оказывается весьма малой; при этомъ на указанномъ участке могутъ оказаться также точки съ перегибами траекторин, где радиусы кривизны дѣлаются безконечно большими. Такимъ образомъ, въ случаѣ, если кривизна траекторин, на некоторомъ ея участке, все время остается весьма малой, то такой участокъ практически можно принять за прямую, и тогда механизмъ, такую точку или точки, называемые приближенными напр. мех-змами. Принимая же во вниманіе, что радиусы кривизны на этихъ участкахъ весьма велики, заключаемъ, что такая точка остается, за все время движения, весьма близкой къ окружностямъ поворотныхъ круговъ, соответствующихъ разнымъ моментамъ, и въ которые она, быть можетъ, вступаетъ на самый поворотный кругъ. Вотъ это-то близость искривленной точки къ окружностямъ поворотныхъ круговъ, соответствующихъ разнымъ моментамъ, и можно воспользоваться для опредѣленія ея въ данномъ механизмѣ. Само опредѣленіе выносится слѣдующимъ образомъ.

Пусть движение некоторой системы, принадлежащей материальному механизму, определяется движением некоторого жестко скрепленного с ней отрезка AB , концы A и B которого движутся по своим траекториям, кривым aa и bb (фиг. 87), и требуется показать, движется ли в системе этого отрезка точка с траекторией, достаточно вытянутой на некотором отрезке, чтобы принять ее за отрезок прямой. Приближая, что такие точки могут лежать или в близком соседстве с окружностями кругов ^{поворота} кривизны, берем три положения системы, — два крайних и одно среднее, — т. е. положения, что эти положения характеризуются положениями A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 нашего отрезка AB . Строим теперь для этих трех взятых нами положений отрезка поворотные круги: круг O_1 для положения A_1B_1 , круг O_2 для A_2B_2 и круг O_3 — для A_3B_3 . Изменяя эти круги, можем теперь сказать, что все точки системы AB , в моменте (A_1B_1) вступившие на пути своих траекторий, лежат на окружности круга O_1 ; точки же с весьма близким радиусом кривизны своих траекторий в этот момент — лежат в близости с окружностью O_1 . При этом все эти точки, как точки одной и той же системы, тесно связа-

-мъ съ отрезкомъ AB .

Подобными же образомъ, въ моменты A_2B_2 вращившія на перемѣны своихъ траекторій, суть точки, лежащія въ этомъ моментѣ на окружности O_2 ; точки же, траекторіи которыхъ въ этомъ моментѣ нмѣютъ весьма болѣе радиусъ кривизны, лежащія по близости къ этой окружности, принадлежатъ, попрежнему, въ эти точки, вообще говоря, отличныя отъ точекъ, бывшихъ на поворотномъ кругѣ O_1 въ моментѣ A_1B_1 , тѣсно связанъ съ отрезкомъ AB . — Это же самое повторимъ и относительно круга O_3 .

Спрашивается теперь, гдѣ же могутъ находиться точки, лежащія на окружностяхъ поворотныхъ круговъ или вблизи ихъ за все три взятые момента времени. Очевидно, что это будутъ точки, приходящія въ первый моментъ на первой окружности O_1 или вблизи нея, во второй — попадающія на окружность O_2 (или близъ ея), а въ третій — приходящія на окружность O_3 (или въ соприкосновеніе съ нею); для того, чтобы ихъ опредѣлить, наложимъ все три отрезка A_nB_n съ ихъ поворотными кругами O_n однимъ на другой такъ, чтобы крайнія точки ихъ совпали; тогда получимъ одинъ отрезокъ AB (фиг. 88), представляющій собою три совмѣщенныхъ отрезка A_1B_1 ,

A_2B_2 и A_3B_3 , и три круга O_1 , O_2 и O_3 . Очевидно, что если в системе находится точки, лежащие в указанные три момента на трех соответствующих кругах или вблизи их, то они останутся на этих кругах (или вблизи их) и после события, так что искомыми точками могут быть или точки пересечения всех трех кругов, если таковые существуют, или же точки наименьших площадей, ограниченных дугой наших трех окружностей; так, на фиг. 88 все точки, лежащие внутри контуров $\alpha\beta\gamma$ и $\xi\eta\vartheta$, во взятые три момента будут оставаться в непосредственном соседстве с окружностями поворотных кругов. Отсюда, в свое очередь, следует, что траектории этих точек в три взятые момента будут почти весьма мало кривизны, а так как изменение кривизмы, по необходимости, будут протекать весьма плавно, то и заключаем, что траектории этих точек, напр., точки δ , - за взятое время окажутся почти совсем весьма близкие радиуса кривизмы, т. е. весьма близкими к, значит, почти совсем мало отходящими от прямой. Если мы возьмем внутри упомянутых контуров, - у нас $\alpha\beta\gamma$ и $\xi\eta\vartheta$, - по точке, ближе или менее равноудаленной от стороны

этих треугольных контуров, — у нас точки δ и ε , — то получим для точки δ треугольник $AB\delta$, сторона AB которого, перемещаясь по траекториям aa и bb (фиг. 87), будет совпадать во взятые моменты с безразличными маси положениями A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 отрезка, а вершина δ во первом положении, A_1B_1 , окажется лежащей близ окружности O_1 , во втором положении, A_2B_2 — близ O_2 , а во третьем — близ O_3 , и участки $\delta_1\delta_2\delta_3$ окажется весьма близкими к прямой. Они будут к ней тем ближе, чем меньше и уже площадки $\alpha\beta\gamma$ и $\xi\eta\theta$, и представится точной прямой, если эти площадки окажутся сведенными к нулю, т. е. если все три окружности будут пересекаться в одной точке.

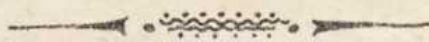
Участки $\delta_1\delta_3$ во некоторых своих местах будут, несомненно, иметь перегибы, это ясно из того соображения, что, при перемещении отрезка AB касаясь по траекториям aa и bb , окружности O_1 , O_2 и O_3 будут переходить одна во другую не скачками, а постепенно; следовательно, при переходе окружности O_1 во O_2 и O_2 во O_3 , будут моменты, когда поворотные круги пройдут через точку δ ; переход этот может иметь место, вообще говоря, несколько раз, во виду чего отрезок $\delta_1\delta_3$ может иметь

мѣсколѣко перемѣновъ, и, очевидно, тѣмъ болѣе этихъ перемѣновъ, тѣмъ ближе кривая будетъ подходить къ прямой.

Итакъ, происхождение точекъ, движущихся прямолинейно (точно или приближенно), вытекаетъ изъ путевъ построения мѣсколѣкихъ круговъ поворота, соответствующихъ мѣсколѣкимъ опредѣленнымъ положеніямъ отрезка AB , можно взять два крайнихъ и одно среднее. Затѣмъ, производимъ совмѣщеніе отрезковъ $A_n B_n$, съ ихъ поворотными кругами O_n , такъ, чтобы крайнія точки отрезковъ совпали. Тогда окружности O_n могутъ вогрѣзаться достаточно малая площадь типа $\alpha\beta\gamma$ или же пересѣкаться при этомъ совмѣщеніи въ одной точкѣ. Въ этихъ случаяхъ построение траекторій dd производится путевъ переноса Δ -ка $AB\delta$ по правъ положеніямъ $A_n B_n$ его основанія; вершина δ и даетъ прямолинейную, точную или приближенную, траекторию вогрѣзательнейся такимъ путевъ точки δ .

Если участки $\alpha\beta\gamma$ оказываются слишкомъ большими или, что еще хуже, если круги пересѣкаются только по два или не пересѣкаются совсѣмъ, то точекъ, движущихся приблизительно прямолинейно, въ матемъ счетѣ не существуетъ, и о нихъ говорить не приходится.

Почти весь механизм, разбирае-
мый на упражнениях по кинематике,
относится къ камеропи направляющих.
Придумать ихъ можно, очевидно, сколь-
ко угодно, задавшись какой-либо схемой
и подбирая, затемъ, длины различныхъ
рычаговъ такъ, чтобы получить наибол-
ее удобное совмѣщеніе поворотныхъ
круговъ. — Изложению этихъ соображе-
ній мы и закончимъ разборъ затрону-
таго нами вопроса.



Дополнительныя замѣчанія.

I. Къ параграфу о качающейся паровой машинѣ, на страницу 16-ую:

Построение поворотнаго круга выполняется здѣсь на основаніи данныхъ, приведенныхъ на страницахъ 97—101 печатнаго курса. Точка A прямой AL (фиг. 87) движется по окружности радиуса OA ; каждая же другая точка этой прямой будетъ двигаться по траекторіи, отличной отъ окружности, — на той же фигурѣ 87 изображены три траекторіи Ddd , Eee и Ccc точекъ D , E и C нашей прямой.

Между всеми точками прямой AL для опредѣленія поворотнаго круга удобнѣе всего воспользоваться точкой A , двигающейся по кругу по окружности, а затѣмъ, той точкой прямой, которая въ данный моментъ приняла въ точку B , т. е. той точкой, которой прямая въ этотъ моментъ отрается о точку B .

Что касается точки A , то она, какъ движущаяся по кругу радиуса $OA = R$, даетъ для опредѣленія первой точки M_1 поворотнаго круга уравненіе $AP^2 = AO \cdot AM_1$, откуда положеніе точки M_1 опредѣляется вполне.

Пусть, согласно фигурѣ 88 (стр. 100 печатн. курса), прямая AL отрается о точку B своей точкой Z , относительно траекторіи коей извѣстно, что радиусъ кривизны ея въ точку B этой траекторіи есть величина извѣстная, равная $\frac{1}{2} PB = \frac{1}{2} r$. Поэтому, имѣя въ виду, что точка Z служитъ огибаемой, а траек-

тория ее $K_{\text{жж}}$ — отрицательной, так что $\vartheta = \frac{1}{2} p$, а $\vartheta_1 = 0$, можем для момента нахождения точки Z в B написать уравнение

$$\frac{1}{d \cos \varphi} = \frac{1}{\frac{1}{2} p - p} + \frac{1}{0 + p} = -\frac{1}{p},$$

откуда

$$d \cos \varphi = P M_2 = -p,$$

что показывает, что точка M_2 будет лежать на прямой BP на расстоянии $p = PB$ от полюса, но по другую сторону его сравнительно с B ; иначе говоря, точки B и M_2 оказываются расположенными симметрично относительно полюса P , как это изображено на фиг. 85 печатн. курса, стр. 97 его. Три точки, P, M_1 и M_2 , определяют искомый поворотный кругль вполне.

II. — Вследствие частичной порчи перевода оборотной стороны 7-го листа, происшедшей подь конеуь печатания его, въ некоторых экземплярах три нижняя строки страницъ 99, 110 и 111 были недостаточно четко, въ виду чего помѣщаемъ здѣсь текстъ этихъ попорчен-ныхъ листовъ:

а) Стр. 99, строки 1-3 снизу, —
 $\vartheta_1 (1 + \frac{1}{\kappa_1})$ въ ту же сторону, что и рычагъ, то при найденномъ значеніи ϑ_1 это вращеніе ее будетъ совершаться со скоростью

б) Стр. 110, строки 1-3 снизу, —
 скорость вращенія системы A выразится черезъ

$\vartheta + k_1 \vartheta = \vartheta(1 + k_1)$. А такъ какъ k_1 взято
здесь равнымъ единицы (диаметры колесъ

с) Стр. 111, строки 1-3 снизу, —

Идея этого механизма крайне проста: по одну
сторону рычага KL сидятъ колеса A и B , а по
другую — колеса C и D .

Оглавление.

	Стр.
Кинематическія пары.	1.
Кинематическая цепь. Марнирный четырехугольникъ. Теорема Фрасгофа.	3.
Замѣтка вращательныхъ паръ поступательными. Ползунъ.	7.
Модификаціи марнирнаго четырехугольника помощью замѣтки вращательной пары поступательной.	9.
Механизмъ паровой машины	12.
Механизмъ качающейся паровой машины	14.
Механизмъ Витворта	16.
Дальнѣйшія модификаціи четырехмарнирнаго механизма помощью замѣтки двухъ вращательныхъ паръ поступательными	21.
Муфта Олдрича	26.
Станокъ Ліонардо-да-Винчи	27.
Эллипсографъ.	29.
Двойной ползунъ	30.
Переходъ черезъ мертвыя положенія	35.
Кинематическая цепь съ парью вращательными парами	43.
Упрощенное доказательство теоремы Савари	47.

Передатка движения	54.
Планетное колесо Уатта	109.
Механизмы для измѣненія скоростей вращенія	111.
Парадоксъ Ферюссона	114.
Преобразованіе вращательна- го движенія въ поступательное съ произвольнымъ отношеніемъ скоростей	124.
Графическій приемъ рѣшенія задачи о построеніи направляю- щихъ механизмовъ	130.
Дополнительныя замѣчанія	138.

— — — — —

Настоящій временный выпускъ,
вмѣстѣ съ его атласомъ, подле-
житъ обложку на третій вы-
пускъ курса „Теорія механизмовъ.“
О выходѣ въ свѣтъ этого третьего
выпуска будетъ своевременно объявлено

Классификація механизмовъ.

Высшими кинематическими парами, какъ мы знаемъ, будутъ такія, въ которыхъ соприкосновеніе элементовъ происходитъ только по линіямъ или точкамъ. При изслѣдованіи механизмовъ, составленныхъ изъ такихъ паръ, приходится держаться иного порядка изложенія, нежели при разсмотрѣніи низшихъ паръ. Тамъ, въ виду ограниченнаго числа самихъ паръ, можно было до извѣстной степени систематически исчерпать наиболѣе важныя ихъ комбинаціи, здѣсь же, при безграничномъ числѣ какъ самихъ паръ, такъ и ихъ комбинацій, нельзя произвести подобный систематическій обзоръ механизмовъ, какъ возможныхъ сочетаній изъ тѣхъ или другихъ винтовыхъ паръ. Является поэтому необходимость заранѣе положить въ основу изложенія болѣе или менѣе искусственную классификацію механизмовъ, а такъ какъ во всякомъ механизмѣ движеніе какого-либо звена должно передаваться въ опредѣленномъ видѣ другимъ звеньямъ, то на этомъ основаніи въ основу классификаціи можно положить именно *характеръ* передачи движенія; механизмъ здѣсь разсматривается, какъ преобразователь даннаго движенія въ желаемое для насъ. Преобразование это можетъ заключаться какъ въ измѣненіи направленія движенія, такъ и въ измѣненіи его скорости; при этомъ измѣненные факторы движенія (скорость и направленіе) могутъ оставаться или въ постоянномъ отношеніи съ основными, или въ переменномъ; можно, напримѣръ, передавать вращеніе отъ одной оси къ другой въ сторону, скажемъ, противоположную и съ отношеніемъ скоростей постояннымъ или переменнымъ по извѣстному заранѣе данному закону.

Далѣе можно различать, происходитъ ли передача при помощи непосредственнаго соприкосновенія двухъ звеньевъ, или при помощи промежуточныхъ звеньевъ. Такъ, напримѣръ, въ кривошипномъ механизмѣ вращательное движеніе кривошипа передается въ видѣ возвратнаго поступательнаго движенія ползуна (т.-е. отношеніе и скоростей и направленій здѣсь переменны), но не непосредственно, а при помощи промежуточнаго звена—шатуна.

Эти признаки характера передачи, т.-е. отношеніе факторовъ движенія, а также отсутствіе или существованіе промежуточныхъ звеньевъ, и положены въ основу классификаціи англійскаго ученаго Виллиса, коей мы, по примѣру проф. Д. С. Зернова, и будемъ придерживаться въ дальнѣйшемъ изложеніи.

Механизмы раздѣлены Виллисомъ на три класса. Къ *первому* отнесены тѣ, въ которыхъ передача происходитъ *непосредственнымъ соприкосновеніемъ*; ко *второму*—механизмы съ передачей движенія при помощи *промежуточныхъ твердыхъ* и къ *третьему*—*жидкихъ и гибкихъ тѣлъ*.

Каждый классъ дѣлится на три отдѣла, сообразно тому, каковы отношенія факторовъ движенія: въ *первомъ отдѣлѣ* отношенія направлений и скоростей—*постоянны*, во *второмъ*—отношеніе скоростей *переменно*, и въ *третьемъ*—*мѣняется и то, и другое отношеніе*.

Согласно такой классификаціи, прежде всего мы обратимся къ механизмамъ, передающимъ движеніе *непосредственнымъ соприкосновеніемъ* и съ *постояннымъ отношеніемъ* какъ между направленіями, такъ и между скоростями движеній.

Передача движенія непосредственнымъ прикосновеніемъ.

Отдѣлъ I. Отношенія между скоростями и направленіями постоянны.

Цилиндрическая фрикціонная передача.

Здѣсь важнѣйшими являются механизмы для передачи вращательнаго движенія между двумя какими-либо осями. Разсмотримъ, какъ можно устроить такую передачу въ случаѣ параллельныхъ осей. Пусть имѣются двѣ параллельныя оси *A* и *B* (фиг. 1). Пусть, далѣе, система, связанная съ осью *A*, вращается съ угловою скоростью ω , система же, связанная съ осью *B*, должна вращаться со скоростью ω_1 ; пусть, наконецъ, отношеніе этихъ скоростей не мѣняется, такъ что

$$\frac{\omega}{\omega_1} = n = \text{const} (1)$$

Вращенія около параллельныхъ осей суть движенія, параллельныя плоскости; поэтому разсмотримъ какое-либо плоское сѣченіе обѣихъ системъ, сдѣланное перпендикулярно къ направленію осей. Предположимъ, что направленія вращеній системъ *A* и *B* противоположны, т.-е. вращеніе системы *A* противъ часовой стрѣлки съ угловою скоростью ω должно передаться системѣ *B* вращеніемъ по часовой стрѣлкѣ и съ заданной угловою скоростью ω_1 , гдѣ $\omega : \omega_1 = n$, причемъ *n* заранее дано. Это число *n* называется *передаточнымъ числомъ*.

Предположимъ, что мы уже устроили систему, удовлетворяющую предъявленнымъ условіямъ, и теперь разсмотримъ, какъ движется система *A* относительно системы *B*. Для этого придаемъ обѣимъ системамъ вращательное движеніе около *B* со скоростью ω_1 , но направлен-

ное въ сторону, противоположную дѣйствительному вращенію системы *B*. Тогда, очевидно, система *B* придетъ въ покой, а получаемое абсолютное движеніе системы *A* и дастъ намъ ея движеніе относительно *B*.

Система *A* имѣетъ теперь 2 движенія: она вращается около оси *B* съ угловой скоростью ω_1 , а около оси *A*—со скоростью ω . Вслѣдствіе перваго изъ этихъ вращеній ось *A* будетъ описывать около оси *B* цилиндрическую поверхность и, слѣд., въ плоскомъ сѣченіи—кругъ центра *B*. Въ каждый данный моментъ оба вращенія—около *A* и около *B*—можно замѣнить однимъ около нѣкоторой промежуточной оси *P*, положеніе которой относительно прежнихъ осей находится по общимъ правиламъ сложенія вращательныхъ движеній между параллельными осями; точка *P* будетъ дѣлить разстояніе между *A* и *B* на части, обратно-пропорціональныя угловымъ скоростямъ, такъ какъ точка *P* должна удовлетворять соотношенію

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1}{n} \dots \dots \dots (2)$$

вращеніе же около этой точки *P* будетъ, конечно, въ ту же сторону, что и оба составныхъ.

Такъ какъ разстояніе *AB* между осями не мнѣется, а отношеніе *AP:BP* есть величина постоянная, какъ это ясно изъ равенства (2), гдѣ *n* величина постоянная, то и разстояніе точки *P* (въ плоскости сѣченія) отъ *B* будетъ постояннымъ:

$$BP = const = AB \frac{\omega}{\omega + \omega_1} = AB \frac{n}{n + 1} \dots \dots \dots (3)$$

Такимъ образомъ, неподвижной полоидой плоской системы *A* въ ея движеніи относительно *B* будетъ окружность центра *B* и радіуса *BP*.

Не трудно видѣть, что подвижной полоидой будетъ окружность центра *A* радіуса *AP*.

Такимъ образомъ, движеніе системы *A* относительно *B* приводится къ каченію одной окружности по другой въ плоскости сѣченія или, — въ пространствѣ, —къ каченію одного цилиндра по другому. Если мы выполнимъ въ дѣйствительности оба цилиндра такъ, чтобы они плотно прикасались другъ къ другу и не могли бы имѣть относительнаго скольженія, то при вращеніи одного изъ нихъ около *A* съ угловой скоростью ω , мы получимъ вращеніе другого около *B* съ угловой скоростью ω_1 , гдѣ ω_1 выразится въ видѣ $\omega_1 = \frac{\omega}{n}$; на самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе тренія цилиндра *A* будетъ увлекать за собою цилиндръ *B*, и такъ какъ скольженія, по нашему предположенію, нѣтъ, то относительное движеніе цилиндровъ будетъ каченіемъ одного по другому, цилиндры же эти построены именно для даннаго опредѣленнаго отношенія $\frac{\omega}{\omega_1}$.

Пользуясь такимъ методомъ, мы можемъ, слѣдовательно, устроить пе-

редачу вращательныхъ движеній съ постояннымъ отношеніемъ скоростей; передачи такого вида называются *цилиндрическими фрикціонными передачами*.

Итакъ, чтобы построить такую передачу между данными осями *A* и *B* при опредѣленномъ отношеніи и направленіи скоростей, надо раздѣлить разстояніе *AB* на части *AP* и *PB*, находящіяся между собою въ отношеніи, обратномъ отношенію скоростей, выполнить круглые цилиндры радіусовъ *AP* и *PB*, насадить ихъ на оси *A* и *B*, устроить плотное соприкосновеніе между ними, для чего потребуется нажатіе ихъ другъ на друга, съ опредѣленнымъ усиліемъ, зависящимъ, конечно, отъ относительнаго тренія матеріаловъ, изъ которыхъ сдѣланы цилиндры; нажатіемъ этимъ мы и устраняемъ относительное скольженіе цилиндровъ.

Въ указанномъ видѣ передача примѣняется довольно часто; но такъ какъ при ея примѣненіи приходится считаться съ нажатіемъ осей другъ къ другу, часто совершенно нежелательнымъ, то эту фрикціонную передачу замѣняютъ зацѣпленіемъ.

Замѣна катящихся цилиндрическихъ поверхностей скользящими.

Представимъ себѣ въ системѣ *A* (фиг. 2) нѣкоторую цилиндрическую поверхность, профиль которой пусть будетъ *MM*, а въ системѣ *B* также цилиндрическую поверхность съ профилемъ *NN*, находящуюся въ соприкосновеніи съ первой; вращая *A*, мы при помощи давленія поверхности *MM* на поверхность *NN* можемъ заставить вращаться и систему *B*. Спрашивается теперь, какое соотношеніе должно существовать между этими двумя профилями, чтобы вращеніе около *A* съ угловой скоростью ω могло передаться *B* со скоростью ω_1 , при чемъ должно быть выполнено условіе: $\omega : \omega_1 = n$, гдѣ *n*—данное число.

Система *B* должна вращаться со скоростью ω_1 ; поэтому, если мы въ какой-нибудь моментъ придадимъ обѣмъ системамъ еще общее вращеніе около оси *B* со скоростью ω_1 , направленной, однако, въ противоположную сторону, то система *B* должна придти въ покой; система *A*, а, слѣд., и профиль *MM*, въ этотъ моментъ будутъ вращаться около полюса *P*, находимаго указаннымъ выше способомъ. Но профиль *MM*, по условію, долженъ находиться въ соприкосновеніи съ профилемъ *NN*, допустимъ, въ данный моментъ въ точкѣ *K*; а такъ какъ, съ другой стороны, система *B* должна оставаться въ покой, то для того, чтобы при своемъ вращеніи около *P* этотъ профиль *MM* не стремился сдвинуть профиля *NN*, движеніе точки *K* его въ этотъ моментъ должно происходить по касательной къ профилю *NN* въ той же точкѣ *K*, а это будетъ выполнено, если нормаль къ обоимъ профилямъ въ точкѣ *K* будетъ проходить черезъ полюсъ *P*.

Приведенное разсужденіе остается справедливымъ для всякаго момента; поэтому отсюда вытекаетъ, что профиль *NN* долженъ служить огибающей профили *MM* при движеніи системы *A* относительно *B*.

Итакъ, задаваясь какимъ-нибудь профилемъ *MM* въ системѣ *A*, для данной опредѣленной передачи мы найдемъ соотвѣтствующій ему, или, какъ говорятъ, сопряженный ему профиль въ системѣ *B* въ видѣ огибающей профили *MM* при каченіи полоиды, связанной съ осью *A*, по полоидѣ, связанной съ *B*. Устроивъ, далѣе, цилиндрическія поверхности *MM* и *NN* съ направляющими, параллельными осямъ, мы приобрѣтемъ возможность передать вращеніе около оси *A* вращеніемъ около оси *B* съ желаемымъ отношеніемъ скоростей. При этомъ вращеніи поверхности *MM* и *NN* будутъ находиться въ соприкосновеніи, и общая нормаль ихъ въ точкѣ соприкосновенія пройдетъ черезъ полюсъ *P*, *вполнѣ и единственно* опредѣляемый на линіи *AB* для данной передачи.

Относительное движеніе профили *MM* по *NN* при вращеніи обѣихъ системъ будетъ, какъ это мы знаемъ изъ свойствъ огибающихъ и огибаемыхъ, сопровождаться скольженіемъ. Такъ какъ угловая скорость вращенія *MM* около полюса *P* для данной передачи при вращеніяхъ въ противоположныя стороны системъ *A* и *B* выразится черезъ $(\omega + \omega_1)$, то скорость скольженія въ данный моментъ будетъ равна $p \cdot (\omega + \omega_1)$, гдѣ черезъ *p* обозначена длина нормали *KP*.

Не трудно, подобно вышеизложенному, разобрать и тотъ случай, когда вращенія около оси *A* и *B* должны оба совершаться въ одну сторону съ сохраненіемъ, попрежнему, постояннаго отношенія между угловыми скоростями: $\omega : \omega_1 = n$, гдѣ и *n* дано.

Положимъ, что $\omega > \omega_1$; тогда полюсъ мгновеннаго вращенія въ движеніи *A* относительно *B* найдется по общимъ правиламъ въ точкѣ *P* на продолженіи линіи *AB* (внѣ отрѣзка *AB*) въ сторону *A* (фиг. 3), при чемъ разстоянія *PA* и *PB* должны удовлетворять соотношенію:

$$PA : PB = \omega : \omega_1.$$

Полоидами будутъ здѣсь опять окружности центровъ *A* и *B* и радіусовъ *AP* и *BP*; только одна изъ нихъ, *A*, будетъ находиться теперь внутри другой, *B*. Подобно тому, какъ мы это дѣлали въ случаѣ передачи вращенія въ противоположную сторону, можно представить себѣ два профили, связанные съ этими полоидами, выполнить по нимъ цилиндрическія поверхности, при помощи которыхъ и осуществится наша передача. Опять, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, профили должны находиться въ указанномъ соотношеніи, т.-е. одинъ изъ нихъ долженъ представлять собою огибающую положеній второго въ относительномъ движеніи полоиды, принадлежащей первому профилю, по полоидѣ, принадлежащій второму. Разница будетъ здѣсь только въ скорости относительнаго скольженія профилей, и не трудно видѣть, что въ этомъ случаѣ она выразится въ видѣ $p \cdot (\omega - \omega_1)$, гдѣ черезъ *p* мы попрежнему

обозначили отрѣзокъ общей нормали отъ полюса до точки прикосновенія; вторымъ же факторомъ произведенія взята разность $(\omega - \omega_1)$, — разность потому, что *относительная* скорость вращенія здѣсь равна *разности* (а въ первомъ случаѣ—*суммѣ*) угловыхъ скоростей обѣихъ системъ.

Графическое построение профиля, сопряженного данному.

Разсмотримъ теперь вообще, какъ по данному профилю находится графически профиль, ему сопряженный. Построение, какъ это слѣдуетъ изъ приведенныхъ выше соображеній, сводится къ отысканію огибающей по данной огибаемой, и его можно выполнить по нѣсколькимъ методамъ, точнымъ или приближеннымъ; ниже мы приводимъ два очень удобные метода, достаточно точные и несложные; одинъ изъ нихъ предложенъ *Poncelet*, а другой — *Reuleaux*. Основой какъ для того, такъ и для другого служить свойство огибающей имѣть съ огибаемой общую нормаль въ точкѣ соприкосновенія, проходящую черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія.

Способъ Poncelet. Пусть профиль *M* принадлежитъ полюидѣ *O* (фиг. 4); вращенія системъ указаны стрѣлками, и вращеніемъ *O* противъ стрѣлки часовъ требуется передать вращеніе O_1 по стрѣлкѣ. Последовательность точекъ соприкосновенія полюиды *O* въ движеніи этой системы относительно O_1 будетъ, очевидно, идти по стрѣлкѣ часовъ, т.-е. точками соприкосновенія будутъ последовательно служить, напр., точки 1, 2, 3, 4 и т. д. Соотвѣтствующія имъ точки полюиды O_1 найдемъ, отложивъ дуги:

$$\smile P2' = \smile P2, \smile 2'1' = \smile 21, \smile P3' = \smile P3, \smile 3'4' = \smile 34,$$

и т. д., что мы можемъ сдѣлать достаточно точно циркулемъ, если только дуги возьмемъ достаточно малыми, что и дастъ намъ возможность принимать ихъ за отрѣзки прямыхъ. Опустимъ теперь изъ точекъ (1, 2, 3...) нормали на профиль *M*; этотъ профиль *M* мы можемъ разсматривать, какъ огибающую окружностей, описанныхъ изъ точекъ 1, 2, 3... радіусами, равными нормалямъ, и, значитъ, касающихся профиля *M*; но нормали, опущенныя на искомую огибающую профиля *M* изъ точекъ 1', 2', 3',... должны быть равны нормалямъ изъ точекъ 1, 2, 3,... на *M*; слѣдовательно, искомая огибающая представляетъ собою огибающую окружностей, описанныхъ изъ точекъ 1', 2', 3',... радіусами, равными соотвѣтственнымъ нормалямъ профиля *M*. Чѣмъ больше мы возьмемъ точекъ 1, 2, 3,..., а, слѣд., и точекъ 1', 2', 3',..., т.-е. иными словами, чѣмъ ближе эти точки другъ къ другу, тѣмъ точнѣе можно построить сопряженный профиль, и при достаточномъ числѣ взятыхъ точекъ, а также при правильности построения нормалей, откладыванія равныхъ дугъ, дуги окружностей, описанныхъ изъ центровъ 1', 2', 3' и др., какъ бы сольются въ одну непрерывную кривую.

Само собою разумѣется, что для построения безразлично, будутъ ли полоиды окружностями или какими-нибудь другими кривыми.

Огибающую можно вычертить еще по точкамъ: такъ, напр., пусть величина нормали изъ точки 1 намъ извѣстна; значитъ, извѣстна величина нормали изъ точки $1'$ на искомую огибающую; стоитъ теперь только опредѣлить направленье этой нормали, и мы получимъ одну изъ точекъ огибающей; направленье же мы можемъ получить на основаніи того соображенія, что нормаль изъ точки (1) на M дѣлаетъ съ касательной въ точкѣ (1) такой же уголъ, какой должна дѣлать нормаль изъ точки $(1')$ на искомую огибающую M_1 съ касательной въ точкѣ $(1')$ полоиды O_1 —обѣ касательныя и обѣ нормали должны совпасть въ тотъ моментъ, когда обѣ полоиды коснутся одна другой въ точкѣ $(1, 1')$.

Способъ Reuleaux, излагаемый ниже, особенно удобенъ для разбираемаго нами теперь случая передачи вращенія *съ постояннымъ отношеніемъ скоростей*, слѣд., при полоидахъ—*окружностяхъ*; огибающая строится здѣсь по точкамъ. Способъ этотъ основанъ на отысканіи мѣста точекъ соприкосновенія профиля M (фиг. 5) съ сопряженнымъ ему профилемъ въ системѣ O_1 при вращеніи обѣихъ системъ, одной около O , другой около O_1 —съ требуемымъ отношеніемъ скоростей, т.-е. при каченіи полоидъ O и O_1 другъ по другу.

Возьмемъ на полоидѣ O какую-нибудь точку X и опустимъ изъ нея на профиль M нормаль XU . Въ тотъ моментъ, когда при вращеніи системъ O и O_1 профиль M коснется точкой Y соответствующаго ему профиля системы O_1 , нормаль XU , какъ мы знаемъ, пройдетъ черезъ P , т.-е. точка X придетъ въ точку P линіи OO_1 , но точка Y , какъ связанная неразрывно съ системой O , все время будетъ находиться на окружности центра O и радіуса OY , и, слѣд., мы найдемъ положеніе точки Y въ моментъ соприкосновенія профилей на пересѣченіи окружностей: одной—изъ O радіуса OY , и другой—изъ P радіуса XU . Именно въ этой точкѣ пересѣченія этихъ двухъ окружностей, точкѣ (yy_1) , и совпадетъ точка Y профиля M съ соответствующей ей точкой Y_1 профиля M_1 , сопряженнаго съ M .

Въ свою очередь, точка Y_1 будетъ во все время находиться на окружности центра O_1 и радіуса O_1Y_1 ; точкѣ X въ первомъ ея положеніи соответствуетъ въ системѣ O_1 точка X_1 , отстоящая (считая по полоидѣ O_1) на дугу $PX_1 = \text{дугѣ } PX$; отъ этой точки X_1 искомая точка Y_1 находится на разстояніи, равномъ XU . Поэтому начальное положеніе точки Y_1 , соответствующее первому положенію точки Y , мы найдемъ въ точкѣ пересѣченія окружностей: одной изъ O_1 радіуса O_1 (yy_1), а другой—изъ X_1 радіуса, равнаго XU . Пусть это будетъ точка Y_1 .

Эта точка Y_1 есть одна изъ точекъ искомага профиля M_1 , сопряженнаго заданному M , соответствующая одной изъ точекъ этого послѣдняго—точкѣ Y .

Поступая подобнымъ же образомъ, мы для каждой точки профиля M найдемъ соответствующую ей точку профиля M_1 , да кромѣ того,

опредѣлимъ мѣсто ихъ совпаденія при вращеніи системъ O и O_1 , т.-е. опредѣлимъ геометрическое мѣсто точекъ взаимнаго соприкосновенія профилей при движеніи обѣихъ системъ; это геометрическое мѣсто представится въ видѣ нѣкоторой кривой $(yy_1)P(kk_1)$. Кривая эта носитъ названіе *линіи зацепленія*.

Способъ *Reuleaux*, хотя и болѣе сложный, чѣмъ способъ *Poncelet*, даетъ возможность, кромѣ непосредственнаго нахожденія точекъ сопряженнаго профиля, M_1 , еще найти совокупность послѣдовательныхъ точекъ соприкосновенія обоихъ профилей. Не трудно убѣдиться, что точка соприкосновенія на профилѣ, принадлежащемъ системѣ *ведущей*, будетъ постепенно *удаляться* отъ центра (оси) вращенія этой системы; и, наоборотъ, на профилѣ *ведомой* системы точка прикосновенія будетъ *приближаться* къ центру вращенія системы. Если теперь въ ведущей системѣ мы возьмемъ какой-нибудь произвольный профиль, то, примѣняя къ нему сказанное, получимъ возможность судить о томъ, какая часть взятаго профиля можетъ служить намъ для передачи, — стоитъ лишь при этомъ помнить послѣдовательность точекъ соприкосновенія какъ полоидъ, такъ и профилей.

На практикѣ для этихъ профилей M берутъ по большей части нѣкоторыя опредѣленные кривыя, наприм., циклическія, эвольвентныя и др.

Циклическіе профили. обладаютъ однимъ весьма любопытнымъ свойствомъ, а именно, — если для одного профиля взята циклическая кривая, то сопряженнымъ профилемъ будетъ служить также циклическая кривая. Это есть такъ называемая *теорема Камуса*, которую мы и докажемъ ниже въ самомъ общемъ видѣ.

Какая-либо *циклическая* кривая есть, какъ мы знаемъ, траекторія точки, связанной съ какой-нибудь окружностью, катящейся по другой окружности. Въ данномъ случаѣ за профиль ведущей системы можно взять циклическую кривую, образованную при каченіи какой-либо окружности по полоидѣ ведущей системы; отыскивая затѣмъ сопряженный профиль въ ведомой системѣ, намъ придется убѣдиться, что этотъ сопряженный профиль окажется также циклической кривой, образованной тою же точкой той же окружности, но при каченіи этой послѣдней уже по второй полоидѣ. Мы обобщимъ эту теорему тѣмъ, что вмѣсто окружностей возьмемъ три какія-нибудь кривыя. Двѣ изъ нихъ, O и O_1 (фиг. 6), пусть служатъ полоидами двухъ системъ; пусть, далѣе, нѣкоторая третья кривая O_2 катится одинъ разъ по полоидѣ O_1 , другой — по O . Нѣкоторая точка X , связанная съ кривой O_2 , при каченіи O_2 по O , опишетъ въ системѣ полоиды O нѣкоторую опредѣленную кривую; эту кривую — траекторію точки X — мы можемъ построить по способу *Poncelet*, — а именно: отмѣчаемъ на кривой O_2 рядъ точекъ $A, B, \dots$ служащихъ послѣдовательными точками соприкосновенія кривой

O_2 при качении ея по O ; соединяемъ эти точки съ нашей точкой X ; далѣе на кривой O находимъ точки $A_1, B_1, \dots$, соотвѣтствующія точкамъ $A, B, \dots$, для чего придется отложить дуги: $\frown PA_1$, равную $\frown PA$, $\frown A_1B_1$, равную $\frown AB$, и т. д.; затѣмъ изъ полученныхъ точекъ $A_1, B_1, \dots$, описываемъ окружности радіусами $AX, BX, \dots$ (такъ какъ нормали на траекторію точки X изъ точекъ $A_1, B_1, \dots$ должны быть равны $AX, BX, \dots$); наконецъ, подыскиваемъ огибающую этихъ окружностей, — она и будетъ траекторіей точки.

Но если теперь мы станемъ отыскивать для этой кривой ея огибающую при качении O по O_1 , то, какъ и выше, должны будемъ отложить дуги $PA_2, A_2B_2, \dots$, соотвѣтственно равныя дугамъ $BA_1, A_1B_1, \dots$ (эти послѣднія, въ свою очередь, равны дугамъ $PA, AB, \dots$), затѣмъ изъ полученныхъ точекъ $A_2, B_2, \dots$, какъ изъ центровъ, описать окружности радіусами, равными нормалямъ на траекторію изъ точекъ $A_1, B_1, \dots$, т.-е. радіусами AX, BX , и проч., и, наконецъ, вычертить огибающую этихъ окружностей. Очевидно, что построение этой искомой огибающей вполне тождественно съ построениемъ траекторіи точки X при качении O_2 по O .

Слѣдовательно, вообще, если мы имѣемъ въ системѣ O нѣкоторую кривую, какъ траекторію точки X при качении кривой O_2 , связанной съ этой точкой, по полюду системы O_1 , то огибающей этой траекторіи при движеніи системы O_1 относительно системы O будетъ траекторія точки X , образованная при качении той же кривой O_2 , но уже по полюду, принадлежащей системѣ O . Соотношеніе это носитъ названіе теоремы Камуса.

Примѣняя эту теорему къ нашему частному случаю круговыхъ полюдовъ, находимъ, что если въ системѣ O_1 (ведущей) мы взяли за профиль кривую AX (фиг. 7), образованную точкой нѣкоторой окружности O_2 при качении ея по O_1 , т.-е. *гипоциклоиду*, то сопряженнымъ ему профилемъ будетъ *эпициклоида* BX , образованная точкой X при качении O_2 по O .

Выполненіе на чертежѣ гипо- и эпициклоидъ можетъ быть ведено или по методу *Poncelet*, или же по точкамъ. Чтобы найти, напр., точку гипоциклоиды, соотвѣтствующую прикосновенію окружности O_2 (фиг. 8) съ окружностью O_1 въ точкѣ A первой, откладываемъ, какъ всегда, дугу PA_1 , равную дугѣ PA ; затѣмъ изъ точки A_1 , какъ изъ центра, описываемъ окружность радіусомъ AX и ищемъ, на какомъ разстояніи отъ центра O_1 будетъ находиться точка X въ моментъ соприкосновенія окружностей точками A и A_1 ; такъ какъ въ этотъ моментъ точка A окружности O_2 будетъ имѣть то же значеніе, что теперь точка P , то искомое разстояніе найдемъ, отойдя отъ P по окружности O_2 на дугу PY , равную AX , т.-е. засѣкая изъ центра P дугу радіусомъ PY , равнымъ AX . Точка Y находится на такомъ разстояніи отъ центра O_1 , на какомъ, очевидно, будетъ точка X въ моментъ соприкосновенія окружностей точками A и A_1 ; проводя по-

этому изъ центра O_1 окружность радіусомъ O_1Y , найдемъ въ пересѣченіи ея съ окружностью, описанною изъ A_1 радіусомъ

$$A_1X_1 = AX,$$

искомую точку X_1 гипоциклоиды; прямая же A_1X_1 будетъ служить нормалью къ гипоциклоидѣ въ этой точкѣ.

Сравнивая это построение съ построениемъ, даннымъ *Reuleaux* для нахожденія *линии зацѣпленія*, видимъ, что точка X_1 будетъ соприкасаться съ соотвѣтствующей точкой сопряженнаго профиля (при вращеніи системъ O и O_1) какъ разъ въ точкѣ Y , что указываетъ намъ на то обстоятельство, что въ случаѣ *циклическаго профиля линіей зацѣпленія* будетъ служить сама вспомогательная окружность O_2 .

Совершенно такъ же чертимъ и эпициклоиду, служащую сопряженнымъ профилемъ.

Эвольвентный профиль. Эвольвентой окружности, какъ извѣстно, называется траекторія точки, лежащей на касательной къ окружности при каченіи этой касательной по окружности. Если касательная AB (фиг. 9) катится по окружности O , то точка B описываетъ кривую, называемую *эвольвентой* (линія B_0BB_1). Въ каждый данный моментъ касательная служитъ, конечно, нормалью къ эвольвентѣ, и притомъ, по самому способу образованія кривой, разность между длинами радіусовъ-векторовъ эвольвенты P_1B_1 и PB равна дугѣ PP_1 окружности O ; такимъ образомъ длина $PB = \text{дугѣ } PB_0$.

Какую-нибудь другую окружность, концентричную съ первой, касательная пересѣкаетъ всегда подъ однимъ и тѣмъ же угломъ, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться изъ равенства треугольниковъ OPC и OP_1C_1 , и такъ какъ $CP = C_1P_1$, то разность между длинами C_1B_1 и CB равна дугѣ PP_1 . Обратно мы можемъ замѣтить, что если данная кривая имѣетъ нормальми прямыя, пересѣкающія окружность подъ постояннымъ угломъ, то такая кривая служитъ эвольвентой для круга, концентричнаго съ первымъ. Дѣйствительно, прямыя, пересѣкающія окружность подъ постояннымъ угломъ, являются непремѣнно касательными къ окружности, концентричной съ данной, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться изъ чертежа; а, слѣд., всѣ нормали кривой служатъ касательными къ нѣкоторой окружности. Взявъ какую-нибудь точку B кривой и ея нормаль PB , мы, очевидно, можемъ заставить точку B проходить послѣдовательно всѣ точки кривой, катя нормаль по окружности.

Возьмемъ, переходя къ зацѣпленію, въ системѣ O_1 окружность O_2 , концентричную съ полоидой O_1 (фиг. 10), а за ведущій профиль возьмемъ эвольвенту окружности O_2 . Нормали къ этой эвольвентѣ пересѣкаютъ полоиду O_1 подъ однимъ и тѣмъ же угломъ. Въ моментъ соприкосновенія точки B съ соотвѣтствующей точкой профиля нормаль AB

должна будетъ пройти черезъ точку P соприкосновенія полоидъ, и, слѣдовательно, она совпадаетъ съ касательной PT , проведенной изъ точки P къ окружности O_2 , и такъ какъ это справедливо для какой угодно нормали, то *линіей зацепленія будетъ служить здѣсь касательная изъ P къ окружности O_2* . Отсюда слѣдуетъ, что въ профилѣ, сопряженномъ съ профилемъ BB_0 , нормали къ нему будутъ пересѣкать соотвѣтственную полоиду также подъ постояннымъ угломъ, равнымъ, конечно, первому; другими словами, этотъ сопряженный профиль будетъ эвольвента окружности, концентричной съ полоидой O и касающейся PT , т.-е. кривая, образованная точкой E при каченіи касательной PT_1 по окружности O_3 .

Цилиндрическія зубчатые колеса.

Перейдемъ теперь къ дѣйствительному выполненію передачи. Профили цилиндрическихъ тѣлъ, при помощи которыхъ мы устраиваемъ передачу, имѣютъ въ дѣйствительности опредѣленную длину въ радіальномъ направленіи, находясь частью между окружностью полоиды и центромъ, частью—внѣ полоиды. Чтобы устроить непрерывную передачу, придется взять рядъ такихъ цилиндрическихъ тѣлъ съ образующими, параллельными осямъ, и съ профилями, имѣющими найденныя выше соотношенія. Тогда мы получимъ рядъ зубцовъ, принадлежащихъ той и другой системѣ (фиг. 11, 12). Если мы мысленно проведемъ полоиду, принадлежащую системѣ O (въ дѣйствительности, конечно, невыполняемую), то, какъ сказано, она раздѣлитъ каждый зубецъ на двѣ части (въ радіальномъ направленіи): на $p_1 h_1$ и $h_1 m_1$ (фиг. 112), первая изъ нихъ, лежащая внѣ полоиды, называется *головкой* зубца, вторая—*основаніемъ* или *ножкой* зубца. Окружность радіуса Op , гдѣ p —крайняя внѣшняя точка рабочаго профиля, принято называть окружностью *вершинъ*; точно такъ же окружность, проходящую черезъ крайнія внутреннія точки,—окружностью *основаній*. Длина дуги ab измѣряетъ *толщину* зубца.

Очертанія зубцовъ обыкновенно бываютъ симметричны по отношенію къ радіусу, проходящему черезъ середину дуги ab , хотя, собственно говоря, если движеніе совершается всегда въ одну сторону, по правиламъ, изложеннымъ выше, слѣдуетъ строить только рабочій профиль, напр., $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\epsilon\zeta$, $\eta\xi$, и т. д.; стороны же нерабочія могутъ быть ограничены и другими какими-нибудь кривыми, лишь бы не затруднялась правильная смѣна зубцовъ и правильность зацепленія вообще.

Размѣръ ac , считая по полоидѣ, называется *шириною впадины*. Расстояніе между рабочими профилями пары смежныхъ зубцовъ, считая опять по полоидѣ, называется *шагомъ зацепленія*; такъ, напр., дуга $a_1 d_1$ есть шагъ зацепленія. Шагъ зацепленія у обоихъ колесъ долженъ

быть одинаковъ, иначе мы не получимъ непрерывной передачи съ желаемымъ отношеніемъ скоростей.

Какъ не трудно видѣть, d_1 и d , a_1 и a , ..., должны быть соотвѣтственными точками обѣихъ полоидъ, а потому дуга ad равна дугѣ a_1d_1 и т. д.

Назовемъ черезъ z и z_1 соотвѣтственно числа зубцовъ той и другой системъ, а радіусы полоидъ черезъ R и R_1 . Тогда, какъ мы знаемъ,

$$R : R_1 = \omega_1 : \omega$$

или

$$R\omega = R_1\omega_1.$$

Если шагъ зацѣпленія равенъ t , то получаемъ

$$2\pi R = zt$$

и

$$2\pi R_1 = z_1t$$

откуда

$$\frac{R}{R_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega}; \dots \dots \dots (1)$$

называя же числа оборотовъ въ минуту черезъ n и n_1 , имѣемъ:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60},$$

въ виду чего ур—ніе (1) перепишется еще разъ такъ:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{n_1}{n} \dots \dots \dots (2)$$

откуда видно, что числа зубцовъ обратно пропорціональны числамъ оборотовъ.

Размѣры зубцовъ выражаются обыкновенно въ доляхъ шага зацѣпленія t ; такъ, всю высоту зубца (фиг. 12) берутъ равной $0,7t$, при чемъ высота головки, n_1h_1 , берется равной $0,3t$, а ножки, h_1m_1 , — $0,4t$; толщина зубца берется различно, — въ металлическихъ передачахъ она берется въ $\frac{19}{40}t$, такъ что ширина впадины достигнетъ $\frac{21}{40}t$; длина b зубца, т.-е. размѣръ его въ осевомъ направленіи, берется различно, въ зависимости отъ разныхъ условій, часто берется равнымъ $2t$ и больше (подробности указаны въ курсѣ деталей машинъ).

Дугу, на которую прокатятся одна по другой полоиды, пока одна пара зубцовъ находится въ зацѣпленіи, принято называть дугой зацѣпленія. Очевидно, что дуга зацѣпленія должна быть больше шага за-

цѣпленія, иначе произошло бы, что одна пара зубцовъ уже вышла изъ зацѣпленія, а другая еще не вошла; передача въ этомъ случаѣ не могла бы быть непрерывной.

Для плавности передачи и для уменьшенія изнашиванія зубцовъ выгодно, чтобы одновременно въ зацѣпленіи находилось возможно большее число зубцовъ—требованіе, часто невыполнимое; чтобы судить о достоинствѣ передачи съ этой стороны, нужно умѣть опредѣлять, сколько паръ зубцовъ будутъ находиться одновременно въ зацѣпленіи. Зная профили и шагъ зацѣпленія, не трудно рѣшить эту задачу. Для этого сначала найдемъ, гдѣ началось соприкосновеніе пары зубцовъ, т.-е. гдѣ крайняя точка X профиля на ведомомъ колесѣ (фиг. 13) вступила въ соприкосновеніе съ соотвѣтствующей ей точкой на ведущемъ колесѣ; если линія зацѣпленія уже начерчена, напр., по методу *Reuleaux* (на чертежѣ это линія rPq), то, проводя изъ центра O окружность радиуса OX (окружность вершинъ), въ пересѣченіи ея съ линіей зацѣпленія найдемъ точку X_1 ,—положеніе точки X въ моментъ начала соприкосновенія; замѣчая, кромѣ того, что профиль XP своего положенія относительно полойды O не мѣняетъ, ибо онъ связанъ съ ней неизмѣнно, заключаемъ, что въ указанный моментъ точка P занимала положеніе p_1 , гдѣ

$$p_1X_1 = PX;$$

итакъ, теперь мы знаемъ, что точка P профиля, приходящаяся на полойдѣ, въ моментъ начала соприкосновенія находилась въ p_1 , а въ такомъ случаѣ дуга p_1P представитъ собою часть дуги зацѣпленія за время прикосновенія пары зубцовъ передъ линіей центровъ O_1O .

Указанную часть дуги зацѣпленія можно, впрочемъ, опредѣлить еще проще, проведя къ точкѣ X профиля PX нормаль Xp къ нему до пересѣченія съ соотвѣтствующей полойдой въ точкѣ p ; эта точка p въ моментъ начала зацѣпленія придется на линіи центровъ въ точкѣ P , потому что въ этотъ моментъ линія Xp , какъ общая нормаль въ точкѣ касанія огибающей и огибаемой, должна пройти черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія, т.-е. черезъ точку P ; какъ мы говорили раньше, точка профиля PX , совпадающая теперь съ P , въ этотъ моментъ придется въ p_1 , а если такъ, то $\triangle PXp = \triangle p_1X_1P$ (по двумъ сторонамъ: $X_1p_1 = Xp$, $X_1P = Xp$, и высотѣ изъ X и X_1 на O); значитъ хорды p_1P и Pp равны, а поэтому равны и дуги p_1P и Pp .

Подобнымъ же образомъ найдемъ конецъ зацѣпленія, проводя изъ O_1 окружность вершинъ для другого колеса O_1 до пересѣченія съ линіей зацѣпленія въ точкѣ X_1' ; найдемъ также и здѣсь, что за линіей центровъ дугой зацѣпленія служитъ нѣкоторая опредѣленная дуга Pp_2 ; такимъ образомъ, вся дуга зацѣпленія равна суммѣ дугъ Pp_1 и Pp_2 одной полойды O_1 , т.-е. равна дугѣ p_1p_2 . Теперь можно узнать, сколько разъ шагъ зацѣпленія содержится въ дугѣ зацѣпленія; частное и укажетъ намъ, сколько зубцовъ находится одновременно въ соприкосно-

веніи. Стараются, обыкновенно, достигнуть того, чтобы въ соприкосновеніи было одновременно, по крайней мѣрѣ, *два пары зубцовъ*, т.-е. чтобы дуга зацѣпленія была не меньше двухъ шаговъ зацѣпленія.

Циклическое зацѣпленіе. Мы знаемъ, что въ этомъ случаѣ линіей зацѣпленія будетъ служить дуга вспомогательной окружности. Вспомогательная окружность O_2 (фиг. 14) можетъ намъ служить, очевидно, только для образованія головки зубца колеса O_1 , давая для него *эпициклоиду*, и ножки зубца колеса O ,—давая *гипоциклоиду*. Чтобы получить головку второго зубца и ножку перваго, беремъ еще одну вспомогательную окружность O_3 , которая при каченіи по O дастъ *эпициклоиду*—профиль головки зубца колеса O , а при каченіи по O_1 ,—*гипоциклоиду*—профиль, служащій, по теоремѣ *Камуса*, профилемъ, сопряженнымъ эпициклоидѣ; по этой гипоциклоидѣ мы и очертимъ ножку зубца колеса O_1 . Колесо O , какъ видно изъ чертежа, ведущее; поэтому соприкосновеніе какой-нибудь пары зубцовъ начинается въ тотъ моментъ, когда профиль ведомаго колеса, PX_1 , вступаетъ своей крайней точкой X_1 на линію зацѣпленія, т.-е. на окружность O_2 . Проводя поэтому изъ O_1 окружность вершинъ радіусомъ O_1X_1 до пересѣченія съ O_2 передъ линіей центровъ въ точкѣ X'_1 , находимъ, такимъ образомъ, начало соприкосновенія.

Такъ какъ профиль X_1P есть эпициклоида, образованная каченіемъ O_2 по O_1 , то положеніе точки P профиля въ моментъ начала соприкосновенія найдемъ, отложивъ по полоидѣ O_1 дугу Pp_1 , равную дугѣ PX'_1 . Дуга Pp_1 есть часть дуги зацѣпленія до линіи центровъ и, какъ видимъ, она равна части линіи зацѣпленія до линіи центровъ.

Подобнымъ же образомъ мы найдемъ конецъ зацѣпленія въ точкѣ X' окружности O_3 , проведя окружность вершинъ для второго колеса радіусомъ OX до пересѣченія съ окружностью O_3 , а затѣмъ, какъ и выше, опять найдемъ, что часть дуги зацѣпленія Pp_2 для соприкосновенія за линіей центровъ равна дугѣ PX'_1 , такъ что получаемъ, что *въ случаѣ циклическаго зацѣпленія дуга зацѣпленія равна линіи зацѣпленія*.

При данномъ шагѣ зацѣпленія, величина котораго, какъ мы говорили уже, обуславливается требованіями прочности на изломъ и проч., и при данной высотѣ головки зубца (а эта высота, какъ извѣстно, обыкновенно выражается въ доляхъ шага), для плавности зацѣпленія выгодна возможно большая длина линіи X'_1PX' , такъ какъ эта линія равна дугѣ зацѣпленія; длина же этой линіи будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше радіусы вспомогательныхъ окружностей O_2 и O_3 , какъ это можно легко видѣть непосредственно изъ чертежа. Однако, здѣсь является другое неудобство: мы, на основаніи предыдущаго, знаемъ, что если діаметръ вспомогательной окружности равенъ радіусу полоиды, то гипоциклоида, по которой очерчено основаніе зубца у колеса O (фиг. 15), обращается въ этомъ случаѣ въ прямую линію, совпадаю-

щую съ радіусомъ большей окружности, проходящемъ черезъ разсматриваемую точку меньшей; если очертанія зубца будутъ симметричны по отношенію къ радіусу, проходящему черезъ середину толщины зубца, то, какъ это ясно видно изъ самаго чертежа, въ такомъ случаѣ получается *утоненіе* зубца въ его основаніи, что, конечно, вредно отзывается на прочности зубца. Еще большее утоненіе мы получимъ, если возьмемъ *діаметръ вспомогательной окружности больше радіуса начальной*, какъ это можно непосредственно видѣть, вычерчивая для этого случая гипоциклоиду. Кромѣ того, здѣсь является еще одно неудобство: *дѣйствительно работать приходится только очень малой части ножки зубца*.

Чтобы отыскать вообще, какая часть ножки (или головки) одного зубца работаетъ съ соотвѣтствующей головкой (или основаніемъ) другого, поступаемъ такъ: находимъ, какъ раньше, точку X_1' линіи зацепленія, гдѣ начинается соприкосновеніе зубцовъ (фиг. 16) (профили на чертежѣ изображены соприкасающимися на линіи центровъ въ точкѣ P); та точка профиля зубца колеса O , которая соприкасалась съ крайней точкой X_1 сопряженнаго профиля въ моментъ начала зацепленія, теперь, когда профили касаются другъ друга въ P , занимаетъ, очевидно, положеніе X_2 , гдѣ X_2 есть точка пересѣченія окружности радіуса OX_1' съ профилемъ XPY въ его настоящемъ положеніи. Часть PX_2 профиля и есть та часть ножки зубца X , которая работала со всей головкой зубца X_1 за время отъ начала соприкосновенія въ точкѣ X_1' до соприкосновенія на линіи центровъ въ точкѣ P .

Эта часть, какъ видимъ, тѣмъ меньше, чѣмъ больше радіусъ окружности O_2 ; на части PX_2 , какъ видимъ, сосредоточивается все передаваемое колесомъ O давленіе за время работы передъ линіей центровъ. Поэтому при меньшей длинѣ PX_2 естественно ожидать быстрого изнашиванія (истиранія) зубца въ этой части для тѣхъ передачъ, гдѣ имѣемъ дѣло съ болѣе или менѣе значительными давленіями, какъ это и бываетъ въ большей части случаевъ машиностроенія.

Подобнымъ же образомъ можно найти ту часть профиля у зубца X_1 колеса O_1 , которая работаетъ съ головкой зубца колеса O , и она также была бы тѣмъ меньше, чѣмъ больше радіусъ вспомогательной окружности O_3 . Отсюда становится понятнымъ, почему въ обыкновенномъ машиностроеніи избѣгаютъ брать діаметръ вспомогательной окружности больше радіуса начальной, внутри которой она должна катиться для образованія профиля.

Въ случаѣ, если при выбранномъ шагѣ зацепленія (выборъ его, какъ мы уже указывали, зависитъ обыкновенно отъ условій прочности передачи) дуга зацепленія получается очень короткая, такъ что въ соприкосновеніи находится только пара зубцовъ, наиболѣе раціональнымъ слѣдуетъ признать здѣсь увеличеніе радіусовъ полоидъ, если только ничто не мѣшаетъ намъ увеличить разстояніе между осями передачи. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда приходится дорожить мѣстомъ,

какъ, напр., во многихъ грузоподъемныхъ машинахъ, или когда усилія, передаваемые колесами, не особенно значительны, берутъ діаметры вспомогательныхъ окружностей и больше радіусовъ начальныхъ окружностей. Тогда, замѣтивъ, что часть профиля X_2Y (фиг. 17), совершенно не работаетъ, а потому можетъ быть очерчена по любой кривой, лишь бы она не мѣшала свободному движенію вершины X_1 сопряженного зубца, можемъ основаніе зубца 2 нѣсколько усилить. Мы сказали, что кривая, по которой можно очертить зубецъ, должна быть такова, чтобы не мѣшала свободному движенію вершины X_1 ; а для этого указанная кривая должна не заходить за геометрическое мѣсто вершинъ X_1 въ движеніи системы O_1 относительно O . Это геометрическое мѣсто легко построить слѣдующимъ образомъ: откладываемъ по обѣимъ полоидамъ O и O_1 дуги: $\smile P1 = \smile P1'$, $\smile 12 = \smile 1'2'$, $\smile 23 = \smile 2'3'$ и т. д., затѣмъ изъ точекъ 1, 2, 3... описываемъ дуги радіусами X_11' , X_12' , X_13' ...; огибающая этихъ дугъ и будетъ траекторіей точки X_1 въ относительномъ движеніи,—она и будетъ искомымъ геометрическимъ мѣстомъ; легко видѣть, что она должна пройти черезъ точки X_2 и X_1 . Такимъ образомъ, точка X_1 за линію X_2X_1 не зайдетъ, а слѣдовательно, начиная отъ точки X_2 , мы имѣемъ возможность вмѣсто крутой кривой профиля, X_2Y , взять любую, болѣе пологую, напр., X_2C , лишь бы она вся лежала внѣ кривой X_2X_1 . Очерчивая теперь зубецъ по кривой X_2C , мы, какъ легко видѣть изъ сравненія усиленного такимъ образомъ зубца съ прежнимъ неусиленнымъ, значительно увеличиваемъ его прочность, нисколько въ то же время не рискуя правильностью зацѣпленія.

Нужно также замѣтить, что иногда бываетъ нежелательнымъ брать вспомогательныя окружности слишкомъ малаго радіуса, потому, что это можетъ повести къ тому, что мы не будемъ въ состояніи выполнить нашу передачу.

Дѣйствительно, пусть намъ требуется устроить передачу съ даннымъ шагомъ зацѣпленія (величина его, какъ мы уже указывали, опредѣляется изъ расчетовъ прочности зубцовъ) и данными полоидами, радіусы которыхъ опредѣлятся изъ величины шага и числа зубцовъ (изъ урн—іа $2\pi R = \pi t$); обыкновенно знаемъ также и высоту головки зубца, находящуюся, какъ извѣстно, въ опредѣленномъ соотношеніи съ величиною шага, или же задаемся величиной дуги зацѣпленія, всегда не меньшей длины шага зацѣпленія; въ этомъ послѣднемъ случаѣ при выбранныхъ вспомогательныхъ окружностяхъ мы можемъ опредѣлить высоту головки зубца, и именно слѣдующимъ образомъ: откладываемъ на вспомогательныхъ окружностяхъ O_2 и O_3 такія двѣ дуги PK и PK_1 (фиг. 18), чтобы онѣ въ суммѣ дали дугу зацѣпленія и чтобы точка K отъ полоиды O_1 , а точка K_1 отъ полоиды O находились на одинаковомъ разстояніи, если эти разстоянія считать по соотвѣтствующимъ радіусамъ полоидъ O и O_1 ; такимъ образомъ $KX_1 = K_1X$; построивъ теперь дугу K_1Y эпициклоиды каченіемъ O_3 по O , найдемъ, очевидно, положеніе рабочаго профиля зубца ведущаго колеса O въ моментъ конца

защѣпленія; построивъ затѣмъ эпициклоиду KY_1 , опредѣлимъ положеніе профиля зубца ведомаго колеса O_1 въ моментъ начала защѣпленія. Отрѣзки KX_1 и K_1X будутъ высотами головокъ зубцовъ; защѣпленіе начнется въ точкѣ K и окончится въ точкѣ K_1 .

Очевидно, что дуга XU , равно какъ и X_1Y_1 , должна быть меньше половины толщины зубца, потому что зубецъ обыкновенно бываетъ симметриченъ относительно радіуса, проведеннаго черезъ середину толщины его, а головка не оканчивается остреемъ, а если бы XU вышло больше половины толщины зубца, что, какъ видно изъ чертежа, можетъ случиться при маломъ радіусѣ окружности O_3 , то заданное защѣпленіе невозможно было бы выполнить съ такою вспомогательною окружностью. Подобнымъ образомъ можно было бы рѣшить вопросъ при данной высотѣ головки (и данномъ, конечно, шагѣ); въ этомъ случаѣ пришлось бы повѣрить, достаточна ли величина дуги защѣпленія.

Иногда, хотя и очень рѣдко въ обыкновенномъ машиностроеніи, встрѣчаются случаи *неодинаковой высоты головокъ* на томъ и другомъ колесѣ; въ такихъ случаяхъ намъ даются или высоты зубцовъ (ихъ головокъ), или же даются части дуги защѣпленія до и послѣ линіи центровъ (каждая, конечно, отдѣльно); рѣшеніе этого вопроса будетъ вестись по вышеприведеннымъ указаніямъ.

Можетъ встрѣтиться и отсутствіе головки на одномъ колесѣ (и, значить, ножки на другомъ), слѣдовательно, профилированіе будетъ ведено здѣсь *при одномъ вспомогательномъ кругѣ* (объ этомъ см. ниже) или несимметричное строеніе зубца; въ каждомъ такомъ отдѣльномъ случаѣ вопросъ о возможности защѣпленія рѣшить не трудно.

Для полученія возможности защѣпленія, когда мѣстомъ дорожатъ, а радіусовъ полоидѣ увеличить нельзя, является, какъ мы видѣли, необходимость брать вспомогательныя окружности съ діаметрами, большими радіусовъ полоидѣ; а въ нѣкоторыхъ грузоподъемныхъ машинахъ встрѣчается даже *предѣльный случай циклическаго защѣпленія*, а именно случай, когда *вспомогательныя окружности совпадаютъ съ полоидами*; въ этомъ случаѣ профилемъ основанія зубца является *точка самой полоиды*, сопряженнымъ же съ нимъ профилемъ, профилемъ головки зубца другого колеса, будетъ эпициклоида, образованная этой точкой при каченіи полоиды по другой полоидѣ. При этомъ способѣ профилированія возможнымъ бываетъ осуществленіе защѣпленія съ весьма малымъ числомъ зубцовъ, доходящимъ, напр., до четырехъ на меньшемъ колесѣ. На чертежѣ (фиг. 19) схематически представлено такое защѣпленіе. PY_1 есть эпициклоида, образованная точкой окружности O при каченіи ея по O_1 ; PX —эпициклоида, описанная точкой полоиды O_1 при каченіи ея по O ; двѣ эти эпициклоиды и дадутъ профили обѣихъ головокъ у сопряженныхъ зубцовъ; основанія же зубцовъ обратились здѣсь въ *точки полоидѣ*. Проводя окружность вершинъ для

того и другого колеса, найдемъ линію зацѣпленія K_1PK ; на части KP точка P зубца XC , лежащая на полоидѣ O_1 , работаетъ съ эпициклоидой Y_1P ; далѣе, на части PK_1 ; работаетъ головка PX того же зубца XC съ точкой P зубца Y_1C_1 . Основанія зубцовъ, какъ профили не работающіе, могутъ быть ограничены произвольными кривыми, лишь бы эти кривыя, какъ объ этомъ мы уже говорили выше, не заходили за соотвѣтственные траекторіи точекъ Y_1 и X , т.-е. не вызывали защемленія зубцовъ. (Какъ мы знаемъ, траекторіи эти суть траекторіи ихъ въ относительномъ движеніи какъ O_1 по O , такъ и O по O_1 .)

Легко видѣть, что въ такомъ зацѣпленіи будетъ имѣть мѣсто сильное изнашиваніе зубцовъ около точекъ P , такъ какъ за все время зацѣпленія передъ линіей центровъ давленіе на зубецъ колеса O сосредоточивается въ одной (или почти въ одной) точкѣ; то же самое имѣетъ мѣсто для зубца колеса O_1 за время зацѣпленія за линіей центровъ. Благодаря этому обстоятельству зубцы быстро теряютъ правильность своей формы, что и принуждаетъ насъ по возможности избѣгать такихъ зацѣпленій и употреблять ихъ только въ исключительныхъ случаяхъ.

Мало употребительно въ машиностроеніи профилированіе съ однимъ вспомогательнымъ кругомъ и прямолинейнымъ профилемъ на одномъ колесѣ. Въ этомъ случаѣ вспомогательная окружность O_3 (фиг. 20) имѣетъ діаметръ PO_1 , равный радіусу полоиды O_1 . Колесо O_1 имѣетъ только рабочее основаніе зубца, которое тогда профилируется, конечно, по радіусу PO_1 ; колесо же O имѣетъ рабочій профиль головки—эпициклоиду PX . Проводя окружности вершинъ для колеса O до пересѣченія съ O_3 , допустимъ, въ точкѣ K_1 , получаемъ линію зацѣпленія PK_1 ; мы видимъ, что въ этомъ случаѣ, при ведущемъ колесѣ O , зацѣпленіе все будетъ происходить за линіей центровъ. Проводя далѣе окружность центра O_1 и радіусъ O_1q_1 до пересѣченія съ профилемъ PY_1 въ точкѣ C , найдемъ рабочую часть PC профиля PY_1 ; остальная же часть CY_1 работать не будетъ совсѣмъ.

Рѣдко употребляется теперь и такъ называемое *цѣвочное зацѣпленіе*, представляющее частный случай циклическаго. Здѣсь за профиль, обыкновенно на ведомомъ колесѣ, принимаютъ окружность нѣкотораго радіуса PK_1 , такъ что зубцы на этомъ колесѣ будутъ представлять собою круглые цилиндры, называемые *цѣвками* (фиг. 21). Профиль на ведущемъ колесѣ O найдется, какъ огибающая окружности PK_1 при каченіи полоиды O_1 по O . При этомъ каченіи точка P —центръ окружности PK_1 , опишетъ эпициклоиду PE , и огибающей будетъ поэтому кривая, параллельная эпициклоидѣ PE и отстоящая отъ нея на разстояніи радіуса PK_1 ; обозначимъ эту кривую черезъ AH .

Линію зацѣпленія мы построимъ обыкновеннымъ пріемомъ; такъ, чтобы найти, гдѣ будетъ имѣть мѣсто соприкосновеніе точки A зубца съ цѣвкой, проводимъ въ точкѣ A зубца нормаль къ его профилю до пересѣченія съ эпициклоидой PE въ точкѣ B , или, иначе говоря, отыскиваемъ на PE такое положеніе центра круга PK_1 , при которомъ по-

слѣдній касается профиля въ точкѣ A ; теперь находимъ дѣйствительное положеніе цѣвки въ моментъ соприкосновенія ея съ точкой A профиля, проведя изъ центра O полоиды окружность радіуса OB до пересѣченія съ полоидой O_1 въ точкѣ B_1 ; дѣйствительное же положеніе точки A въ этотъ моментъ найдемъ, описавъ изъ O окружность радіуса OA до пересѣченія съ окружностью цѣвки въ точкѣ A_1 , которая и будетъ, такимъ образомъ, одной изъ точекъ линіи зацѣпленія. Дугу зацѣпленія можемъ найти, если проведемъ изъ крайней точки X профиля зубца нормаль къ профилю до пересѣченія ея съ полоидой въ точкѣ K ; тогда PK и будетъ дугою зацѣпленія; эта послѣдняя должна быть больше шага зацѣпленія, сообразно чему и выбираютъ высоту зубца. Зацѣпленіе такого рода употребляется теперь рѣдко; ведущимъ дѣлаютъ зубчатое колесо.

Профилированіе можно выполнить точно или по методу *Poncelet*, или, какъ было указано, по точкамъ.

По методу *Poncelet* построеніе выполняется такъ: пусть имѣются полоиды O и O_1 (фиг. 22),—онѣ опредѣляются изъ условій передачи и изъ расчета прочности зубцовъ; пусть, далѣе, мы уже выбрали вспомогательныя окружности O_2 и O_3 ; какъ мы знаемъ, для полученія при точкѣ P профиля головки зубца у ведущаго колеса O_1 мы должны катить окружность O_2 по O_1 ; не вычерчивая каждый разъ положенія окружности O_2 , мы поступаемъ такъ: намѣчаемъ на O_2 рядъ точекъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ достаточно близкихъ другъ къ другу; затѣмъ дуги $Pa, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta \dots$ откладываемъ послѣдовательно по полоидѣ O_1 , такъ что получимъ рядъ точекъ $a_1, b_1, c_1, \dots$ такихъ, что дуги $Pa_1, a_1b_1, b_1c_1, \dots$ будутъ соотвѣтственно равны дугамъ $Pa, \alpha\beta, \beta\gamma, \dots$; далѣе, изъ точекъ $a_1, b_1, c_1 \dots$ описываемъ дуги окружностей соотвѣтственно радіусами $Pa, P\beta, P\gamma \dots$; огибающая этихъ окружностей и дастъ намъ искомый профиль PX_1 головки зубца; если точки $\alpha, \beta, \gamma \dots$ выбраны достаточно близко, то дуги сливаются въ одну непрерывную кривую.

Профиль основанія зубца у колеса O найдемъ, отложивъ теперь по полоидѣ O въ ту же сторону дуги, равныя $Pa, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta \dots$, и описавъ изъ концовъ $a, b, c \dots$ этихъ дугъ тѣми же радіусами $Pa, P\beta, P\gamma \dots$ окружности, получимъ такимъ образомъ искомый профиль PY .

Взявъ теперь по окружности O_3 въ другую сторону рядъ точекъ I, II, III, IV, ... откладываемъ на обѣихъ полоидахъ, начиная отъ точки P , въ ту же сторону, гдѣ лежатъ точки I, II, III, ... дуги, равныя $PI, I-II, II-III, \dots$ и изъ концовъ этихъ дугъ, т.-е. изъ точекъ 1, 2, 3 ... $1_1, 2_1, 3_1 \dots$, описываемъ дуги окружностей радіусами $PI, PII, PIII \dots$ совершенно такъ же, какъ это мы дѣлали для точекъ $a_1, b_1, c_1 \dots$. Такимъ образомъ мы получаемъ профили для головокъ зубцовъ колеса O и для основанія зубцовъ колеса O_1 .

Проводя теперь окружность вершинъ для колеса O , а также для колеса O_1 , найдемъ на окружностяхъ O_3 и O_2 точки K и K_1 —начало и конецъ зацѣпленія; при этомъ нужно всегда помнить, что на ведущемъ

колось точка соприкосновенія удаляется отъ центра, а на ведомомъ приближается къ центру. Ограничивъ профиль въ высоту, въ ту и другую стороны отъ полоиды, откладываемъ на полоидахъ толщину зубца и строимъ симметрично относительно радіуса профиль, ограничивающій зубецъ съ другой стороны; затѣмъ, по шагу зацѣпленія, вычерчиваемъ и другіе зубцы.

Вычерчиваніе профиля по точкамъ менѣе удобно, но также достаточно просто. Для этого проводимъ черезъ тѣ же точки $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ окружности изъ центра O_1 (если хотимъ найти головку профиля зубца O_1 —фиг. 23) и на нихъ находимъ точки профиля, засѣкая соответственнo изъ точекъ $a_1, b_1, c_1, \dots$ дуги окружностей радіусами $R\alpha, R\beta, R\gamma, \dots$, какъ было указано выше. Такимъ образомъ получаемъ точки профиля $A, B, C, \dots$

Указанные способы построенія профилей неудобны, однако, тѣмъ, что требуютъ большой траты времени; поэтому, ради быстроты вычерчиванія, удобнѣе будетъ подобрать одну или двѣ окружности, которыя могли бы съ достаточной точностью замѣнить дугу эпициклоиды или гипоциклоиды. Особенно удобенъ для этого способъ *Unwin's*, въ которомъ дуга эпициклоиды съ хорошимъ приближеніемъ замѣняется дугою окружности. Профиль головки зубца у колеса O_1 есть эпициклоида, ограниченная въ высоту окружностью вершинъ; ищемъ теперь такую окружность, которая имѣла бы съ этой эпициклоидой общую точку P и касалась бы ее, кромѣ того, въ точкѣ, лежащей отъ полоиды O_1 на разстояніи, равномъ $\frac{2}{3}$ высоты головки зубца, считая это разстояніе по радіусу полоиды. На этомъ основаніи проводимъ изъ O_1 окружность O_3 , имѣющую радіусъ, меньшій радіуса окружности вершинъ на $\frac{1}{3}$ высоты головки (фиг. 24). Пересѣченіе этой окружности съ вспомогательной окружностью O_2 даетъ точку A . Когда при каченіи O_2 по O_1 , точка P окружности O_2 придетъ на окружность O_3 , точка A совпадаетъ съ полоидой O_1 . Слѣдовательно, мы прямо можемъ найти точку N эпициклоиды, отстоящую отъ полоиды O_1 на $\frac{2}{3}$ высоты головки, если отложимъ на полоидѣ O_1 отъ точки P дугу PA_1 , равную PA , и изъ точки A_1 засѣчемъ дугою радіуса PA точку N на окружности O_3 . Теперь остается подыскать окружность, проходящую черезъ P и касающуюся эпициклоиды въ точкѣ N . Такъ какъ NA_1 есть нормаль къ эпициклоидѣ въ точкѣ N , то центръ такой окружности лежитъ гдѣ-либо на этой прямой NA_1 . Теперь мы путемъ пробъ отыскиваемъ на линіи NA_1 центръ (ω) окружности, проходящей чрезъ P и N ; этотъ центръ можно было бы найти непосредственно, возставивъ въ срединѣ отрѣзка PN къ нему перпендикуляръ и продолживъ его до пересѣченія съ NA_1 , но упомянутый способъ пробъ на практикѣ оказывается гораздо удобнѣе. Не трудно непосредственно убѣдиться, что дуга PNM этой окружности съ достаточной точностью замѣняетъ эпициклоиду.

Совершенно такимъ же образомъ находимъ приближенную дугу окружности и для основанія зубца: опять ищемъ окружность, имѣющую съ гипоциклоидой общую точку P и, кромѣ того, касающуюся ея въ точкѣ C , лежащей отъ полоиды, считая по радіусу, на разстояніи двухъ третей всей высоты основанія зубца.

Точное вычерчиваніе эпи- и гипоциклоидъ обыкновенно не выполняется, — эти кривыя съ большой степенью приближенія замѣняются дугами круговъ, приведенныхъ въ способъ *Unwin's*, и этимъ способомъ обыкновенно пользуются всегда для вычерчиванія упомянутыхъ профилей.

Замѣтимъ, наконецъ, что для очертаній другихъ зубцовъ колеса, благодаря ихъ симметріи, найти центры подходящихъ окружностей *Unwin's* очень легко.

Во многихъ машинахъ, какъ, напр., въ машинахъ для обработки металловъ, часто встрѣчается необходимость имѣть подъ рукою цѣлый рядъ (или серію) колесъ, въ которомъ каждое колесо должно правильно зацѣпляться съ любымъ другимъ колесомъ этого ряда, что дастъ намъ возможность составлять тѣ или другія комбинаціи зубчатыхъ колесъ, а, слѣд., осуществлять ту или другую передачу. Не трудно видѣть, что въ такомъ случаѣ всѣ вспомогательныя окружности, при помощи которыхъ произведены профили, должны быть одинаковаго радіуса, и, кромѣ того, шагъ зацѣпленія также долженъ быть одинаковъ.

Если бы вспомогательныя окружности были не одинаковы, то вышло бы, что какое-либо колесо A , у котораго профили произведены двумя неодинаковыми окружностями, могло бы сцѣпляться съ колесомъ B , если профили послѣдняго образованы тѣми же окружностями, равно какъ и съ колесомъ C , имѣющимъ профили того же происхожденія; но колеса B и C между собою сцѣпляться не могли бы, такъ какъ, по предположенію, окружность, производившая профиль головки колеса B (и C), разнится отъ окружности, производившей профиль ножки колеса C (и B), а между тѣмъ для зацѣпленія B съ C нужно (по теоремѣ *Камуса*), чтобы окружность, производящая профиль головки B , производила своимъ каченіемъ сопряженный профиль основанія у зубца C .

Въ такихъ смѣнныхъ колесахъ за производящую окружность берутъ окружность съ діаметромъ, нѣсколько меньшимъ радіуса меньшаго колеса; это обстоятельство представляетъ, однако, то неудобство, что въ случаѣ работы большихъ колесъ дуга зацѣпленія остается сравнительно очень малой.

Колеса съ внутреннимъ зацѣпленіемъ и циклическими профилями профилируются по тѣмъ же правиламъ, что и колеса внѣшняго зацѣпленія: выбираютъ опять двѣ вспомогательныя окружности, O_2 и O_3 (фиг. 25), и образуютъ каченіемъ O_2 по O основаніе зубца колеса O , а каченіемъ O_3 по O_1 — профиль головки у колеса O_1 . Точно такъ же окруж-

ность O_2 дастъ профиль головки у колеса O и основаніе—у колеса O_1 . Само собою разумѣется, что въ этомъ случаѣ точка прикосновенія одновременно удаляется или приближается къ центру на обоихъ профиляхъ. Изъ самаго способа произведенія профилей видно, что *здѣсь гипоциклоида работаетъ съ гипоциклоидой и эпициклоида—съ эпициклоидой*. Линіей зацѣпленія будутъ попрежнему служить части вспомогательныхъ окружностей, XP и PY , которыя мы находимъ, проводя окружности вершинъ для того и другого колеса; при этомъ всегда нужно помнить послѣдовательность точекъ соприкосновенія вспомогательной окружности при каченіи по полоидамъ, а также и то, что эти точки будутъ послѣдовательными точками соприкосновенія самихъ полоидъ; дуга зацѣпленія здѣсь также равна линіи зацѣпленія и также должна быть больше шага зацѣпленія.

Эвольвентное зацѣпленіе. Въ эвольвентномъ зацѣпленіи линіей зацѣпленія, какъ это мы уже видѣли, является прямая, касательная къ вспомогательнымъ окружностямъ. За все время работы давленіе одного зубца на другой постоянно направлено по этой прямой.

Въ практикѣ машиностроенія установилось требованіе вообще устраивать зацѣпленіе такъ, чтобы давленіе зубцовъ другъ на друга не отклонялось значительно отъ общей касательной къ полоидамъ. Въ циклическомъ зацѣпленіи это требованіе, какъ извѣстно, мы можемъ до известной степени выполнить, взявъ возможно большія вспомогательныя окружности. Здѣсь, въ эвольвентномъ зацѣпленіи, требованіе это сводится къ тому, чтобы прямая зацѣпленія была наклонена къ касательной къ полоидамъ подъ небольшимъ угломъ; обыкновенно берутъ уголъ въ 15° . При данныхъ полоидахъ выборомъ этого угла вполнѣ опредѣляются вспомогательныя окружности, а слѣдовательно, и профили зубцовъ.

Построеніе, такимъ образомъ, выполняется такъ: черезъ точку P (фиг. 26) прикосновенія полоидъ проводимъ прямую PN_1 подъ угломъ въ 75° къ линіи центровъ OO_1 ; далѣе, изъ точекъ O и O_1 опускаемъ на эту прямую перпендикуляры ON и O_1N_1 , которые и будутъ радіусами вспомогательныхъ окружностей. Точка P при каченіи касательной PN по окружности ON дастъ профиль зубца колеса O , а при каченіи PN_1 по окружности O_1N_1 —сопряженный ему профиль зубца колеса O_1 . Проведя окружности вершинъ зубцовъ для того и другого колеса, найдемъ начало и конецъ зацѣпленія въ пересѣченіяхъ K и H этихъ окружностей съ прямой PN_1 . Далѣе находимъ рабочія части профилей, проводя черезъ K окружность радіуса OK до пересѣченія съ профилемъ $kPeC$ въ точкѣ e и окружность радіуса O_1H до пересѣченія съ профилемъ K_1PeC_1 въ точки e_1 . Рабочими будутъ части kPe перваго профиля и k_1Pe_1 второго. Остальныя части, какъ мы уже говорили, могутъ быть очерчены произвольными кривыми.

Изъ подобія треугольниковъ ONP и O_1NP видимъ, что радіусы ON и O_1N_1 вспомогательныхъ окружностей относятся между собою, какъ

радіусы полоидъ; но для радіусовъ полоидъ PO и PO_1 имѣемъ соотношение (обозначая PO черезъ r , а $PO_1 \dots r_1$):

$$\omega r = \omega_1 r_1, \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ ω и ω_1 суть соотвѣтственные угловыя скорости; обозначая теперь радіусы вспомогательныхъ окружностей черезъ ϱ и ϱ_1 , гдѣ $ON = \varrho$, а $O_1N_1 = \varrho_1$, будемъ имѣть

$$r : r_1 = \varrho : \varrho_1 = \omega_1 : \omega,$$

такъ что ур—іе (1) приметъ теперь видъ:

$$\varrho \omega = \varrho_1 \omega_1 \dots \dots \dots (2)$$

Представимъ себѣ окружности ON и O_1N_1 неразрывно связанными съ полоидами O и O_1 ; вмѣсто того, чтобы катить касательную PN по окружности ON для образованія профиля, мы можемъ вращать эту окружность вмѣстѣ съ системой O , и тогда точка нити, намотанной на окружность ON и натянутой въ направленіи PN , дастъ на этой системѣ очертаніе эвольвентнаго профиля.

Представимъ теперь нить продолженной и намотанной другимъ концомъ на окружности O_1N_1 ; вращаемъ систему O со скоростью ω , а систему O_1 —со скоростью ω_1 ; получаемъ каченіе полоидъ другъ по другу и, кромѣ того, сматываніе (или наматываніе) нити съ окружности ON и наматываніе (или сматываніе) на окружность O_1N_1 ; при этомъ за время t съ окружности ON сматается кусокъ нити длиною въ $\omega \cdot \varrho \cdot t$, и, какъ показываетъ ур—ніе (2), столько же наматается на окружность O_1N_1 . Точка этой нити, описывая на системѣ O профиль зубца, описываетъ въ то же время на системѣ O_1 сопряженный ему профиль, и путь ея вдоль нити за время t , равный $\omega \cdot \varrho \cdot t$, будетъ частью линіи зацѣпленія за время t ; но за тотъ же промежутокъ времени точка полоиды опишетъ дуги $\omega \cdot r \cdot t$, а такъ какъ $\varrho = r \cos \alpha$, гдѣ α есть уголъ наклона PN_1 къ касательной къ полоидамъ TT_1 , равный у насъ 15° , то получаемъ, что часть линіи зацѣпленія за время t равна части дуги зацѣпленія за то же время, умноженной на косинусъ угла между линіей зацѣпленія и касательной къ полоидамъ. То, что справедливо относительно части дуги зацѣпленія за время t , очевидно, будетъ справедливо и для всей дуги зацѣпленія; поэтому, называя черезъ Y длину линіи зацѣпленія, а черезъ S —длину дуги зацѣпленія, можемъ написать:

$$S \cos \alpha = Y \dots \dots \dots (3)$$

Эвольвентный профиль легко вообще вычертить или точно по методу *Poncelet* или по точкамъ; но и здѣсь, ради экономіи времени, употребляютъ приближенное вычерчиваніе профиля аналогично вычер-

чиванію циклическихъ профилей. Раздѣляютъ часть высоты зубца (фиг. 27), считая отъ вспомогательной окружности до окружности вершинъ, на три равныя части ($ab = bc = cd = \frac{1}{3} ad$), берутъ одну изъ точекъ дѣленія, отстоящую отъ вспомогательной окружности на разстояніи двухъ такихъ частей,—въ данномъ случаѣ это будетъ точка c ,—и проводятъ изъ нея касательную cT къ вспомогательной окружности. Отрѣзокъ cT дѣлятъ на четыре равныя части, и тогда одна изъ точекъ дѣленія, точка X , отстоящая отъ точки T на одну такую часть, принимается за центръ круга радіуса Xc ; дугою psk этого круга и замѣняютъ эвольвенту. Часть профиля зубца, лежащая внутри вспомогательной окружности (часть pe), можетъ быть очерчена произвольно, лишь бы не было препятствія движенію вершины сопряженного зубца.

Эвольвентное зацѣпленіе имѣетъ ту особенность, что колеса съ эвольвентными зубцами можно нѣсколько отодвинуть одно отъ другого, и зацѣпленіе все-таки останется правильнымъ, если длина дуги зацѣпленія остается достаточной. Дѣйствительно, измѣненіе разстоянія между центрами полоидъ имѣло бы своимъ слѣдствіемъ только измѣненіе наклона линіи зацѣпленія къ линіи центровъ и увеличеніе радіусовъ полоидъ; но такъ какъ вспомогательныя окружности остались тѣ же, то отношеніе между радіусами полоидъ осталось прежнее, а слѣдовательно, и передача осталась та же. Подобнаго свойства циклическое зацѣпленіе не имѣетъ, что и представляетъ преимущество эвольвентнаго зацѣпленія передъ циклическимъ и особенное его удобство: *эвольвентное зацѣпленіе не требуетъ особенно точной установки.*

Однако, эвольвентное зацѣпленіе, въ свою очередь, имѣетъ свою невыгодную сторону, выясненную изъ опытовъ *Бахомъ*. Въ этомъ зацѣпленіи зубцы ограничены выпуклыми профилями, значить, *приходится работать выпуклой поверхности по выпуклой же*, и, какъ не трудно видѣть, соприкосновеніе въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто на меньшей поверхности (вслѣдствіе упругости матеріала и сминанія поверхностей соприкосновеніе никогда не происходитъ по линіи), нежели тогда, когда *выпуклая поверхность работаетъ съ вогнутой*; это послѣднее имѣетъ мѣсто именно въ циклическомъ зацѣпленіи (фиг. 28—29 ... $\alpha\beta < \gamma\delta$).

Въ этомъ и кроется причина большаго изнашиванія зубцовъ эвольвентнаго зацѣпленія сравнительно съ циклическимъ при всѣхъ остальныхъ равныхъ условіяхъ.

Опыты *Баха* надъ деревянными зубьями показываютъ, что эвольвентный профиль постепенно, путемъ истиранія, обращается въ профиль, близкій къ циклическому. На фиг. 30 представленъ одинъ такой зубъ; у него все время работала только одна сторона AB , и оказалось, что послѣ нѣкотораго промежутка времени рабочая сторона AB приняла

форму *циклическаго* очертанія, а нерабочая — сохранила *эвольвентное* (пунктиромъ выше *B* указана граница первоначальнаго эвольвентнаго профиля *BA*). Поэтому циклическое зацѣпленіе слѣдуетъ признать болѣе умѣстнымъ, особенно тамъ, гдѣ имѣетъ мѣсто болѣе или менѣе значительная угловая или окружная скорость колесъ.

Внутреннее эвольвентное зацѣпленіе не представляетъ для вычерчиванія никакихъ трудностей; вся разница состоитъ въ томъ, что обѣ вспомогательныя окружности будутъ лежать по одну сторону касательной къ полоидамъ (фиг. 31). Начало и конецъ зацѣпленія, а также соотвѣтственныя величины рабочихъ частей профилей находятся по общимъ правиламъ.

На основаніи приведенныхъ соображеній не представитъ никакихъ затрудненій вычерчиваніе *зацѣпленія зубчатой полосы съ колесомъ*. Это зацѣпленіе можетъ быть выполнено или съ циклическимъ профилемъ, или съ эвольвентнымъ. Въ первомъ случаѣ выбираемъ вспомогательныя окружности O_2 и O_3 (фиг. 32) и строимъ циклическіе профили на общихъ основаніяхъ. У зубцовъ полосы профилями будутъ служить простыя циклоиды, образованныя при каченіи вспомогательныхъ окружностей по прямой O_1O_1 , въ которую обратилась здѣсь полоида O_1 .

Иногда (теперь рѣдко) на полосѣ вмѣсто зубцовъ прилаживаютъ цѣвки. Можно устроить въ данномъ случаѣ и эвольвентное зацѣпленіе, для чего, подобно тому, какъ это мы дѣлали раньше, проводимъ прямую *PN* (фиг. 33) подъ угломъ въ 75° къ линіи центровъ; профилемъ зубца колеса будетъ эвольвента окружности *N*; для полосы же соотвѣтствующая вспомогательная окружность слилась съ прямой *NP* (центръ окружности удалился въ бесконечность); поэтому вмѣсто эвольвенты здѣсь будетъ прямая *AB*, перпендикулярная къ линіи *NP*, такъ что профили зубчатой полосы получаютъ здѣсь прямолинейное очертаніе.

Заканчивая этимъ вопросъ о цилиндрическихъ колесахъ, замѣтимъ, что въ практикѣ машиностроенія установились нѣкоторыя требованія относительно наименьшаго допустимаго числа зубьевъ. Теоретическое рѣшеніе этого вопроса въ отдѣльныхъ случаяхъ особыхъ трудностей не представляетъ, но, понятно, достаточно полнымъ быть не можетъ, почему здѣсь и приходится руководствоваться данными и правилами практики. Вообще избѣгаютъ брать малое число зубцовъ, и упомянутыя выше передачи съ четырьмя зубцами на маломъ колесѣ встрѣчаются только въ видѣ исключенія въ нѣкоторыхъ небольшихъ грузоподъемныхъ машинахъ. Для передачи съ малой скоростью (въ ручныхъ воротахъ, кранахъ и проч.) не берутъ меньше 11 зубцовъ на меньшемъ колесѣ; въ передачахъ приводныхъ, — отъ паровыхъ машинъ и проч., — не берутъ меньше 24 зубцовъ.

Что касается передаточнаго числа, т.-е. отношенія чиселъ зубцовъ, то вообще нужно замѣтить, что тамъ, гдѣ рѣчь идетъ о передачѣ болѣе или менѣе значительнаго постояннаго усилія, выгодно, чтобы зубцы какъ можно скорѣе приработались другъ къ другу, а это будетъ тогда, когда работать другъ съ другомъ придется однимъ и тѣмъ же зубцамъ. Въ этомъ смыслѣ выгодны передачи $1:1$, $1:2$, $1:3 \dots$; совершенно же невыгодны такія, какъ $11:17$, или, напр., $23:31$ и т. п.

Но если рѣчь идетъ о передачѣ усилія, періодически мѣняющагося, когда, напр., за одинъ оборотъ усиліе будетъ переходить черезъ *maximum* и *minimum*, тогда, очевидно, простыя передачи, каковы, напр., $1:2$, $1:4 \dots$, невыгодны, потому что, въ случаѣ простыхъ отношеній, однимъ и тѣмъ же зубцамъ пришлось бы испытывать постоянно наибольшія усилія, а другимъ—наименьшія. Для болѣе равномернаго изнашивания зубцовъ, по крайней мѣрѣ, у того колеса, которому передается усиліе, выгоднѣе брать менѣе простыя отношенія, наприм., $2:5$, $3:7$ и т. д.

Коническая фрикціонная и зубчатая передача.

Мы изложили вопросъ о передачѣ вращенія между параллельными осями; допустимъ теперь, что требуется передать вращеніе отъ оси *A*—другой оси *B*, пересѣкающейся съ первой, положимъ, въ точкѣ *O* (фиг. 34). Пусть вращеніе около оси *A* совершается съ угловою скоростью ω , вращеніе же около *B* должно совершаться съ угловою скоростью ω_1 , причемъ отношеніе $\omega : \omega_1$ есть нѣкоторое постоянное число. Допустимъ, наконецъ, что оба вращенія направлены въ противоположныя стороны.

Разсмотримъ и здѣсь, подобно тому, какъ это мы дѣлали при разборѣ передачи между параллельными осями, движеніе системы *A* относительно *B*; для этого попрежнему придаемъ обѣмъ системамъ скорость вращенія около оси *B*, равную ω_1 , но направленную въ сторону, противоположную дѣйствительному вращенію около *B*. Тогда система *A* будетъ обладать сложнымъ движеніемъ: ось *A* будетъ вращаться около *B* съ угловою скоростью ω_1 , а система *A* будетъ вращаться около оси *A* со скоростью ω . Въ каждый данный моментъ оба вращенія можно представить замѣненнымъ однимъ, положеніе оси мгновеннаго вращенія и угловая скорость котораго найдутся по извѣстнымъ правиламъ механики.

Замѣтимъ, что вращенія графически обыкновенно представляютъ въ видѣ векторовъ, величина которыхъ даетъ въ извѣстномъ масштабѣ угловыя скорости, а направленіе вращенія опредѣляютъ такимъ образомъ, что наблюдатель, смотря съ конца вектора на его начало, видитъ вращеніе совершающимся по часовой стрѣлкѣ. Какъ извѣстно, въ такомъ случаѣ вращенія около пересѣкающихся осей складываются по правилу параллелограмма движенія.

Система A , какъ было уже указано выше, въ каждый данный моментъ участвуетъ въ двухъ вращеніяхъ: во-первыхъ — около оси A , и во-вторыхъ — около оси B , направленныхъ въ одну и ту же сторону, такъ какъ вращеніе системы B около ея оси было, по предположенію, направлено въ сторону, противоположную вращенію около A . Составное вращеніе, замѣняющее въ данный моментъ эти два вращенія, мы найдемъ, если отложимъ отъ точки O (фиг. 35) два вектора OA и OB въ направленіи осей вращенія, представляющіе по своей величинѣ въ заданномъ масштабѣ угловыя скорости ω и ω_1 , построимъ на нихъ параллелограммъ $OACB$ и проведемъ діагональ его OC , — она и дастъ намъ направленіе оси и величину угловой скорости составного вращенія.

Уголъ между осями OA и OB предполагается неизмѣннымъ, поэтому ось A , въ движеніи системы A относительно B , опишетъ круглый конусъ. Въ каждый данный моментъ мы можемъ построениемъ параллелограмма опредѣлить положеніе оси OC составного вращенія (оси мгновеннаго вращенія); при этомъ мы всегда имѣемъ соотношеніе:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\sin AOC}{\sin COB} = \text{const} \dots \dots \dots (1)$$

откуда при постоянствѣ угла AOB слѣдуетъ постоянство угла COB ; иными словами, ось мгновеннаго вращенія будетъ лежать на кругломъ конусѣ, описанномъ діагональю OC около оси OB .

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что ось мгновеннаго вращенія въ движеніи системы B относительно A будетъ лежать на конусѣ, описанномъ тою же діагональю OC около OA . Такимъ образомъ движеніе системы A относительно B можно представить каченіемъ (безъ скольженія) второго конуса по первому.

Передачу въ данномъ случаѣ мы можемъ осуществить подобно тому, какъ это мы сдѣлали въ цилиндрической передачѣ, а именно: задав- шись направленіями осей и отношеніемъ угловыхъ скоростей (или чиселъ оборотовъ), строимъ на направленіяхъ осей параллелограммъ со сторонами, пропорціональными угловымъ скоростямъ; находимъ діагональ этого параллелограмма и выполняемъ два конуса, одинъ, — описанный этой діагональю около одной оси, и другой — около другой оси; заставляемъ эти конусы плотно прижиматься другъ къ другу (вершины ихъ должны все время оставаться совпадающими), и тогда, вращая одинъ конусъ съ угловою скоростью ω , получимъ вращеніе другого съ угловою скоростью ω_1 . Возьмемъ какую-либо точку K соприкосновенія этихъ конусовъ (фиг. 36). Разсматривая ее, какъ принадлежащую конусу A , мы выразимъ ея линейную скорость въ видѣ $KE \cdot \omega$, гдѣ $KE \perp$ оси OA ; при отсутствіи скольженія конусовъ другъ по другу ту же скорость должна имѣть точка K , если разсматривать ее, какъ принадлежащую конусу B , и предположивъ, что этотъ второй конусъ вращается съ какой-либо угловою скоростью ω' , мы найдемъ равенство

$$KE \cdot \omega = KH \cdot \omega' \dots \dots \dots (2)$$

или

$$\frac{KE}{KH} = \frac{\omega'}{\omega} \dots \dots \dots (3)$$

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ *ОЕК* и *ОКН*, имѣющихъ общую гипотенузу *ОК*, принимая во вниманіе ур—ніе (3), получаемъ:

$$\frac{KE}{KH} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin AOC}{\sin COB} \dots \dots \dots (4)$$

Сравнивая полученное ур—ніе (4) съ ур—ніемъ (1), пишемъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin AOC}{\sin COB},$$

т.-е.
$$\omega' = \omega_1 \dots \dots \dots (5)$$

Иными словами, построивъ конусы около *A* и около *B* съ образующей *ОС* и устранивъ ихъ взаимное скольженіе, мы дѣйствительно получаемъ требуемую передачу; при этомъ угловая скорость одной системы въ ея движеніи относительно другой, выражаемая діагональю *ОС*, будетъ равна

$$\sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega \cdot \omega_1 \cos \alpha},$$

гдѣ α есть уголъ между осями (выраженіе это получаемъ изъ $\triangle$ -ка *ОВС*). Обозначивъ черезъ α_1 и α_2 углы діагонали *ОС* со сторонами *ОВ* и *ОА*, можемъ ту же угловую скорость представить еще въ видѣ

$$\omega \cdot \cos \alpha_1 + \omega_1 \cos \alpha_2.$$

Для осуществленія передачи можно ограничиться выполненіемъ лишь отрѣзковъ конусовъ, и такая *коническая фрикціонная передача* употребляется (подобно фрикціонной цилиндрической) въ нѣкоторыхъ случаяхъ.

Болѣе употребительна, какъ и въ случаѣ цилиндрической передачи, передача *зубчатая*. Представимъ себѣ шаровую поверхность, описанную изъ точки *О'* какимъ-либо радіусомъ *О'С'* (фиг. 37); эта шаровая поверхность пересѣчетъ упомянутые конусы по двумъ окружностямъ; при каченіи конусовъ другъ по другу окружности, оставаясь на сферѣ, будутъ также катиться другъ по другу; взявъ на сферѣ профиль, связанный съ одной изъ окружностей, можемъ получить сопряженный съ нимъ профиль другой окружности, катя первую окружность по второй и отыскивая на сферѣ огибающую перваго профиля. Какъ и въ цилиндрическихъ колесахъ, можно взять вспомогательныя окружности, которыя своимъ каченіемъ по той и другой окружности конусовъ дадутъ сферическія эпи- и гипоциклоиды; послѣднія будутъ сопряженными

профилями головокъ и основаній зубцовъ, а сами зубцы представляются коническими поверхностями, образующія которыхъ будутъ постоянно проходить черезъ точку O' , направляющими же для нихъ будутъ служить сферическіе профили.

Не трудно найти горизонтальную и вертикальную проекціи профилей зубцовъ; ходъ построенія указанъ на чертежѣ. Даны основные конусы, вертикальныя проекціи которыхъ суть $O'S'K'$ и $O'S'M'$. Описываемъ сферу изъ вершины конусовъ (O' , O) радіусомъ, равнымъ $O'S'$, а за вспомогательную окружность для образованія профиля головки на колесѣ $O'S'K'$, беремъ на этой сферѣ окружность, проектирующуюся на вертикальную плоскость въ видѣ ^{снѣда} прямой $C'N'$,—діаметръ ея будетъ равенъ $C'N'$ и сама она (на половину) начерчена въ совмѣщеніи съ вертикальной плоскостью проекцій. При каченіи этой окружности по окружности $C'K'$ основанія конуса, или, что то же, при каченіи конуса $O'S'N'$ по конусу $O'S'K'$, точка окружности $C'N'$ образуетъ профиль головки, лежащій на сферѣ $K'S'M'$.

Чтобы построить горизонтальную проекцію этой сферической эпициклоиды, положимъ, что конусы, основной и вспомогательный, касаются другъ друга по образующей OX , $O'X'$. Замѣтимъ, что окружность основанія основного конуса проектируется на горизонтальную плоскость проекцій въ натуральную величину. Поэтому беремъ на вспомогательной окружности, начерченной въ натуральную величину на вертикальной плоскости проекцій, рядъ точекъ I, II, III, IV, V, и откладываемъ по горизонтальной проекціи основанія конуса $O'S'K'$ отъ точки X послѣдовательно дуги $X1$, 12 , 23 , равныя дугамъ $C'I$, $I'II$, $II'III$,; концы этихъ дугъ будутъ служить горизонтальными проекціями послѣдовательныхъ точекъ соприкосновенія окружностей.

Проведемъ теперь для начальнаго положенія конусовъ черезъ точку IV горизонтальную плоскость; слѣды ея найти легко,—стоитъ изъ точки IV совмѣщенной вспомогательной окружности опустить на прямую $C'N'$ перпендикуляръ IVp и провести черезъ основаніе его p горизонтальную прямую $a'pb'$ —эта послѣдняя прямая и будетъ вертикальнымъ слѣдомъ искомой горизонтальной плоскости; вмѣстѣ съ тѣмъ она будетъ служить вертикальной проекціей окружности, по которой плоскость пересѣкаетъ сферу. Горизонтальную проекцію той же окружности мы найдемъ, опустивъ изъ a' и b' перпендикуляры, при чемъ не слѣдуетъ забывать, что эта окружность будетъ проектироваться на горизонтальную плоскость проекцій въ натуральную величину, въ видѣ окружности bea .

Теперь, аналогично тому, что мы имѣли при построеніи плоскихъ эпициклоидъ, мы можемъ сказать, что въ тотъ моментъ, когда прикосновеніе окружностей будетъ имѣть мѣсто въ точкѣ $(4, 4')$, точка вспомогательной окружности, прикасавшаяся къ основной въ начальный моментъ, теперь будетъ находиться на горизонтальной окружности $(aeb, a'e'b')$, причемъ разстояніе ея отъ точки $(4, 4')$ дается непосредственно отрезкомъ $(C'IV)$. Ищемъ теперь по правиламъ начертательной геометріи

проекціи точки, отстоящей отъ другой данной на известное разстояніе и лежащей на данной горизонтальной окружности, — схема построения указана справа. Такимъ образомъ мы и находимъ точку (e, e'), которая и будетъ одной изъ точекъ искомой эпициклоиды.

Подобнымъ же образомъ отыскиваемъ и другія точки и находимъ такимъ образомъ вертикальную и горизонтальную проекціи профиля головки. Взявъ далѣе на окружности $K\chi C$ толщину зубца и ширину впадины и повторяя построение, получимъ горизонтальныя и вертикальныя проекціи профилей всѣхъ зубцовъ. Сами зубцы, какъ мы уже говорили, будутъ представлять собою коническія поверхности, направляющими для которыхъ будутъ служить найденныя сферическіе профили, образующія же будутъ проходить черезъ общую вершину (O, O') конусовъ. Ограничивая зубцы по длинѣ образующихъ другой сферической поверхностью, получимъ полныя поверхности зубцовъ.

Указанное построение на практикѣ однако не примѣняется, и обыкновенно употребляется нижеприводимое, *приблизительное*. Представимъ себѣ, что мы построили еще два конуса KPC и CQM (фиг. 38), касающіеся нашей сферы по окружностямъ основаній двухъ первыхъ конусовъ (KOC и COM); конусы эти будутъ имѣть образующую PCQ , перпендикулярную къ образующей соприкосновенія первыхъ. Если сферическіе профили не велики, т.-е., если зубцы не высоки по сравненію съ радіусомъ сферы OC , что, вообще, имѣетъ мѣсто почти всегда, то можно принять, что эти профили приблизительно совпадаютъ съ поверхностью конусовъ, касающихся сферы по окружностямъ KC и CM . Но поверхности этихъ дополнительныхъ конусовъ PKC и QCM мы можемъ развернуть на плоскости чертежа, — тогда на той же поверхности развернутся и профили, и въ такомъ случаѣ построение этихъ профилей мы можемъ свести на построение профилей у цилиндрическихъ колесъ, знакомое уже намъ, при чемъ придется считать, что полондами будутъ служить окружности Cx и Cy радіусовъ PC и QC (окружности KC и CM , развернутыя теперь на плоскости, будутъ, понятно, дугами этихъ окружностей).

Шагъ, толщина зубца и проч. будутъ, разумѣется, откладываться на окружностяхъ Cx и Cy въ дѣйствительную величину, и все построение, какъ видимъ, значительно упрощается.

Вычертивъ профили, наворачиваемъ ихъ на поверхности дополнительныхъ конусовъ PKC и QCM и строимъ зубцы совершенно такъ же, какъ и въ случаяхъ сферическихъ профилей, ограничивая ихъ однако въ длину не сферической поверхностью, а конической, какъ это видно на чертежѣ, гдѣ слѣва дана часть разрѣза колеса вертикальной плоскостью.

Назовемъ числа зубцовъ у колесъ черезъ z и z_1 , и тогда, аналогично цилиндрическимъ колесамъ, можемъ написать

$$z : z_1 = \omega_1 : \omega = R : R_1,$$

гдѣ черезъ R и R_1 обозначены соотвѣтствующіе радіусы окружностей $КС$ и $СМ$. Обозначая далѣе шагъ передачи черезъ t , имѣемъ:

$$zt = 2\pi R, \quad z_1 t = 2\pi R_1.$$

Далѣе изъ чертежа имѣемъ:

$$PC = r = \frac{R}{\cos \alpha_1}, \quad CQ = r_1 = \frac{R_1}{\cos \alpha_2}.$$

Углы β и β_1 секторовъ, въ которые развернутся боковыя поверхности дополнительныхъ конусовъ, опредѣляются условіями

$$r\beta = 2\pi R, \quad r_1\beta_1 = 2\pi R_1.$$

Если данъ или выбранъ шагъ зацепленія t , то, задаваясь числомъ зубцовъ, опредѣляемъ радіусы R и R_1 , проводимъ оси OP и OQ , затѣмъ проводимъ параллель оси OP на разстояніи R отъ нея и параллель оси OQ на разстояніи R_1 ; въ точкѣ ихъ пересѣченія и будетъ лежать точка C ; такимъ образомъ опредѣляется линія OC . Впрочемъ, направленіе линіи OC можно найти построеніемъ параллелограмма на осяхъ, какъ это было уже указано выше.

При обычномъ расчетѣ шагъ относится не къ окружности $СК$, какъ это мы принимали выше, а къ средней (по длинѣ зубца) окружности; и въ этомъ случаѣ радіусъ ея опредѣляется непосредственно по числу зубцовъ, а затѣмъ, зная радіусы этихъ среднихъ окружностей для обоихъ колесъ, мы опредѣляемъ направленіе OC проведеніемъ параллелей той и другой оси на разстояніяхъ, равныхъ радіусамъ, а затѣмъ находимъ и точку C , отложивъ отъ точки пересѣченія параллелей половины длины зубца по длинѣ образующей OC . Проведя прямую PCQ перпендикулярно къ OC до пересѣченія съ той и другой осью, получаемъ CP и CQ —длины образующихъ дополнительныхъ конусовъ; далѣе, изъ чертежа или вычисленіемъ опредѣляемъ радіусы R и R_1 , по числу зубцовъ находимъ шагъ зацепленія, отнесенный къ окружностямъ $СК$ и $СМ$, и такимъ образомъ получаемъ всѣ нужные для построенія профилей элементы. Для вычисленія R и R_1 имѣемъ соотношенія:

$$R = \varrho + \frac{l}{2} \sin \alpha_1$$

и

$$R_1 = \varrho_1 + \frac{l}{2} \sin \alpha_2;$$

далѣе

$$\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 = \varrho_1 : \varrho_2,$$

и, наконецъ,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha,$$

т.-е. углу между осями.

Внутренняя коническая передача не представляет послѣ сказаннаго никакихъ затрудненій; это будетъ передача вращенія между двумя пересѣкающимися осями въ одну и ту же сторону. Въ этомъ случаѣ дѣло сводится къ каченію одного конуса внутри другого (фиг. 39).

Замѣтимъ, наконецъ, что коническая передача употребляется по большей части между осями взаимно-перпендикулярными.

Скорость относительнаго скольженія какой-либо точки зубца по другому, очевидно равна произведенію изъ относительной угловой скорости вращенія на разстояніе этой точки отъ оси мгновеннаго вращенія, т.-е. она выразится такъ:

$$w = p \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos \alpha},$$

гдѣ p есть разстояніе точки отъ оси; та же величина w выразится еще такъ:

$$w = p (\omega \cos \alpha_1 \pm \omega_1 \cos \alpha_2).$$

Положивъ $\alpha = 0$, получимъ формулу для скорости скольженія въ случаѣ цилиндрической передачи:

$$w = p (\omega \pm \omega_1).$$

Знакъ *минусъ* относится къ внутренней передачѣ.

Передача между осями непараллельными и пересѣкающимися.

Пусть одна изъ такихъ осей есть ось A (фиг. 40), а другая — ось B ; положимъ далѣе, что вращеніе около A совершается съ угловою скоростью ω , а около B — со скоростью ω_1 и въ сторону, противоположную первому вращенію; пусть затѣмъ отношеніе $\omega : \omega_1$ есть величина постоянная.

Подобно тому, какъ мы это дѣлали въ предыдущихъ случаяхъ, для рѣшенія этого вопроса рассмотримъ движенія системы B относительно A , для чего даемъ обѣмъ системамъ скорость около оси A , равную ω , но направленную въ обратную сторону. Система A станетъ неподвижна, система же B будетъ заразъ участвовать въ двухъ движеніяхъ: около оси A и около оси B ; это сложное движеніе и будетъ относительнымъ движеніемъ системы B . Какъ это извѣстно изъ теоретической механики, сложеніе двухъ вращательныхъ движеній около осей непараллельныхъ и непересѣкающихся приводитъ къ результирующему вращательному движенію около нѣкоторой третьей оси и къ

поступательному движенію вдоль той же оси, такъ что эта ось будетъ осью *вращенія-скольженія*; положеніе ея не трудно найти. Съ этою цѣлью проводимъ линію *MN* кратчайшаго разстоянія между осями *A* и *B* и возьмемъ на ней нѣкоторую точку *E* (что касается выбора этой точки, то объ этомъ мы скажемъ ниже); замѣняемъ теперь вращеніе около оси *A* вращеніемъ около оси, параллельной оси *A* и проходящей черезъ точку *E*; вращеніе около оси *B* подобнымъ же образомъ замѣняемъ вращеніемъ около новой оси, параллельной прежней оси *B* и проходящей черезъ ту же точку *E*. Обѣ замѣны дадутъ еще два поступательныхъ движенія, направленія коихъ будутъ лежать въ плоскости, проходящей чрезъ ту же точку *E* и перпендикулярной къ *MN*, т.-е. въ плоскости, содержащей какъ направленіе *A*, такъ и направленіе *B*.

Вращенія мы откладываемъ въ этой плоскости, какъ векторы *EX* и *EY* (фиг. 41), гдѣ *EX* параллельна оси *MB* (фиг. 40), а *EY* параллельна оси *NA*, и складываемъ ихъ по правилу параллелограмма; результирующее вращеніе представится діагональю этого параллелограмма *EC*, и величина его Ω выразится черезъ ω и ω_1 такъ:

$$EC = \Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos \alpha},$$

гдѣ α обозначаетъ уголъ между осями.

Что касается поступательныхъ движеній, то каждое изъ нихъ будетъ перпендикулярно къ соотвѣтствующей оси: поступательное движеніе, получившееся при перенесеніи вращенія около *B*, будетъ перпендикулярно къ *EX*, а поступательное движеніе отъ замѣны вращенія около *A*—перпендикулярно къ *EY*; величина же каждаго выразится произведеніемъ изъ разстоянія точки *E* отъ оси на соотвѣтствующую угловую скорость. Назовемъ *EN* (фиг. 40) черезъ r_1 , а *EM*—черезъ r_2 ; обозначимъ *MN* черезъ r , такъ что

$$MN = r = r_1 + r_2;$$

поступательныя движенія (скорости ихъ) выразятся одно черезъ $r_1\omega$, а другое—черезъ $r_2\omega_1$; складывая ихъ по правилу параллелограмма, получимъ результирующее поступательное движеніе, направленіе котораго будетъ направленіемъ оси скольженія. Чтобы эта ось совпадала съ осью вращенія, необходимо, чтобы точка *E* была выбрана нѣкоторымъ опредѣленнымъ образомъ. Дѣйствительно, для совпаденія указанныхъ осей необходимо, чтобы слагающія величины $r_1\omega$ и $r_2\omega_1$, взятая въ направленіи, перпендикулярномъ къ *EC*, взаимно уничтожались; это требованіе влечетъ за собою необходимость удовлетворить уравненію:

$$r_1\omega \cdot \cos CEY = r_2\omega_1 \cos XEC \quad (1)$$

или, называя углы прямой *EC* съ осями *A* и *B* черезъ α_1 и α_2 , получимъ уравненіе:

$$r_1\omega \cos \alpha_1 = r_2\omega_1 \cos \alpha_2, \quad (2)$$

такъ какъ, далѣе, α_1 и α_2 суть вполне опредѣленные величины при данномъ отношеніи угловыхъ скоростей вращенія и, кромѣ того,

$$r_1 + r_2 = r,$$

т.-е. нѣкоторой вполне опредѣленной величиной, то r_1 или r_2 опредѣлятся единственнымъ образомъ, такъ что отсюда становится возможнымъ заключить, что точка E есть нѣкоторая вполне опредѣленная точка кратчайшаго разстоянія MN .

Такую замѣну сложнаго движенія однимъ вращательнымъ и однимъ поступательнымъ мы можемъ произвести въ каждый данный моментъ относительнаго движенія системы B ; каждый разъ мы будемъ получать новую ось EC —ось *скольженія—вращенія*. Геометрическимъ мѣстомъ этихъ осей EC будетъ служить, очевидно, поверхность, описанная прямой EC , наклоненной къ оси A подъ опредѣленнымъ угломъ α_1 и находящейся отъ нея на опредѣленномъ разстояніи r_1 . Извѣстно, что такая поверхность будетъ однополымъ гиперболоидомъ вращенія съ осью A .

Такимъ образомъ, *аксоидъ* въ движеніи системы B относительно A есть, слѣдовательно, *линейчатый гиперболоидъ вращенія*. Точно такъ же мы найдемъ, что аксоидомъ въ движеніи A относительно B будетъ служить гиперболоидъ, описанный прямой EC при вращеніи ея около оси B . Оба гиперболоида будутъ касаться другъ друга по прямой EC . Выполнивъ матеріально эти два гиперболоида (фиг. 42) и, нажавъ ихъ другъ на друга, мы можемъ, вращая одинъ изъ нихъ около A со скоростью ω , получить вращеніе другого около B со скоростью ω_1 , при чемъ отношеніе $\omega : \omega_1$ будетъ даннымъ числомъ. Взявъ отрѣзки этихъ гиперболоидовъ, ограниченные плоскостями, проведенными перпендикулярно къ осямъ черезъ какую-либо точку общей образующей (по которой происходитъ касаніе гиперболоидовъ), можемъ устроить зубчатую передачу, подобно тому, какъ это мы сдѣлали въ коническихъ колесахъ, опять при помощи дополнительныхъ конусовъ; образующими этихъ конусовъ будутъ служить нормали къ поверхностямъ гиперболоидовъ, проведенныя въ точкахъ окружностей основаній отрѣзковъ. Развернувъ конусы, найдемъ соотвѣтствующие профили. Такъ какъ движеніе гиперболоидовъ сопровождается, какъ мы видѣли, взаимнымъ скольженіемъ вдоль линіи соприкосновенія, то подобнаго рода зубчатая передача будетъ сопровождаться болѣе потерей на треніе, нежели въ передачахъ цилиндрической и конической; это обстоятельство, а также и трудность выполненія, заставляютъ избѣгать на практикѣ употребленія этой гиперболоической передачи, и въ машиностроеніи она, вообще говоря, примѣненія не имѣетъ; въ виду этого болѣе на ней останавливаться не будемъ. Замѣтимъ только, что передачу между осями непараллельными и непересѣкающимися всегда можно выполнить при помощи двухъ коническихъ передачъ. На самомъ дѣлѣ пред-

ставимъ себѣ, что посредствующею осью для передачи служить линія кратчайшаго разстоянія MN (фиг. 40); тогда мы устраиваемъ одну передачу между осями NA и MN , а другую—между MN и MB и такимъ образомъ выполнимъ передачу между NA и MB . Можно и не брать линіи MN посредствующею осью, можно за эту ось взять прямую, соединяющую двѣ любыя точки прямыхъ NA и MB ; но передъ всѣми этими передачами передача при помощи линіи кратчайшаго разстоянія имѣетъ то преимущество, что это будетъ коническая передача при осяхъ, наклоненныхъ другъ къ другу подъ *прямымъ* угломъ. Такимъ образомъ мы всегда можемъ обойтись безъ гиперболической передачи.

Менѣе выгодна, а потому и менѣе употребительна замѣна гиперболическаго зацѣпленія такъ называемымъ *винтовымъ*; въ машиностроеніи оно употребляется почти такъ же рѣдко, какъ и гиперболическое. Возьмемъ на линіи кратчайшаго разстоянія между осями, на линіи MN (фиг. 43), какую-нибудь точку E и радіусами ME и EN опишемъ около осей B и A цилиндры PQ и RT ; оба эти цилиндра будутъ касаться другъ друга въ одной точкѣ E . Заставимъ теперь одинъ цилиндръ вращаться со скоростью ω_1 , а другой—со скоростью ω . Если мы будемъ разсматривать движеніе одного цилиндра по отношенію къ другому подобно тому, какъ мы это дѣлали выше при разсмотрѣніи гиперболическихъ колесъ, то можно замѣтить, что это относительное движеніе сопровождается скольженіемъ (какъ и въ случаѣ гиперболоидовъ), направленіе котораго найти легко. Для этого черезъ точку E проводимъ плоскость, параллельную обѣимъ осямъ; плоскость эта будетъ въ то же время касательною плоскостью къ обоимъ цилиндрамъ. Отложимъ въ этой плоскости векторъ EX , пропорціональный произведенію $r_1 \cdot \omega$, гдѣ $r_1 = EN$ (фиг. 43 и 44), направленный противъ окружной скорости цилиндра A въ точкѣ E ; затѣмъ проводимъ векторъ EY , пропорціональный произведенію $r_2 \omega_1$, гдѣ $r_2 = EM$, и направленный по окружной скорости цилиндра B . Діагональ EK параллелограмма, построеннаго на этихъ векторахъ, и дастъ скорость относительнаго скольженія. Эту скорость мы можемъ получить еще иначе, какъ замыкающую сторону YY_0 треугольника EY_0Y , въ которомъ стороны EY и EY_0 пропорціональны окружнымъ скоростямъ цилиндровъ и отложены въ направленіи этихъ скоростей.

Ось относительнаго вращенія будетъ, какъ и прежде, опредѣляться діагональю параллелограмма, построеннаго на векторахъ, пропорціональныхъ угловымъ скоростямъ системъ и параллельныхъ осямъ A и B . Такъ какъ отношеніе угловыхъ скоростей намъ дано, а направленіе осей неизмѣнно, то діагональ параллелограмма будетъ и по величинѣ, и по направленію та же, что и въ параллелограммѣ EC (фиг. 41), построенномъ нами при разсмотрѣніи гиперболической передачи; разница будетъ въ томъ, что тамъ, благодаря выбору нѣкоторой опредѣленной

но по свойству діагонали EC_1 параллелограмма $EX_1C_1Y_1$ имѣемъ

$$\omega \sin \alpha_1 = \omega_1 \sin \alpha_2,$$

и, слѣд., первый членъ (въ скобкахъ) подъ радикаломъ равенъ

$$[\omega \cdot \sin \alpha_1 (r_1 + r_2)]^2,$$

т.-е. представляетъ при данной ω и данномъ отношеніи $\omega : \omega_1$ величину вполне опредѣленную и неизмѣняющуюся. Весь радикалъ получить наименьшее значеніе тогда, когда исчезнетъ второй членъ, т.-е. когда

$$(\omega r_1 \cos \alpha_1 - \omega_1 r_2 \cos \alpha_2)^2 = 0,$$

а это будетъ имѣть мѣсто при выполненіи условія

$$\omega r_1 \cos \alpha_1 = \omega_1 r_2 \cos \alpha_2,$$

но этимъ уравненіемъ опредѣлялись именно радіусы r_1 и r_2 горловыхъ круговъ гиперболоидовъ. Поэтому съ точки зрѣнія потери на треніе винтовья колеса въ *общемъ видѣ* менѣе выгодны, нежели когда радіусами ихъ служатъ радіусы горловыхъ круговъ.

Въ виду малаго употребленія винтового зацѣпленія въ машиностроительной практикѣ, больше мы на немъ останавливаться не будемъ, а обратимся теперь къ передачѣ, весьма часто встрѣчающейся на практикѣ, а именно къ *червячной* передачѣ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда требуется устроить передачу между осями не пересѣкающимися, но идущими въ направленіяхъ, перпендикулярныхъ другъ къ другу, вмѣсто одного колеса берутъ винтъ и сцѣпляютъ съ нимъ колесо, сидящее на другой оси; устранивъ возможность поступательнаго движенія винта (посредствомъ шпонки и проч.), даютъ ему вращательное движеніе около его оси; тогда зубцы колеса, входящіе во впадины винтовой нарѣзки, будутъ представлять собою выступы винтовой нарѣзки гайки, соотвѣтствующей винту. Вслѣдствіе вращенія винта гайка должна получить поступательное движеніе вдоль оси винта; скорость этого поступательнаго движенія обратится въ окружную скорость колеса, и послѣднее станетъ вращаться около своей оси (фиг. 47).

Проведемъ сѣченіе черезъ ось винта перпендикулярно къ оси колеса и рассмотримъ движеніе профилей зубцовъ колеса въ этомъ сѣченіи, *предполагая, какъ всегда бываетъ въ этомъ зацѣпленіи, ведущимъ червякъ.*

Проводимъ также мысленно рядъ осевыхъ сѣченій винта; при вращеніи винта около своей оси эти сѣченія будутъ послѣдовательно, одно

за другимъ, совпадать съ плоскостью нашего чертежа; каждое изъ этихъ сѣченій представляетъ въ сущности ничто иное, какъ сѣченіе зубчатыхъ профилей, расположенныхъ вдоль прямой. Принимая теперь во вниманіе, что въ каждомъ изъ этихъ сѣченій профили передвинуты относительно профилей сосѣдняго сѣченія на нѣкоторую величину вдоль оси винта,—по самой сущности винтовой нарѣзки,—мы увидимъ, что послѣдовательное совпаденіе этихъ сѣченій съ плоскостью нашего чертежа равносильно простому передвиженію основного нашего сѣченія винта вдоль его оси, а это, въ свою очередь, равносильно тому, какъ если бы мы заставляли профили зубчатой полосы дѣйствовать на профили зубцовъ колеса, передвигая зубчатую полосу вдоль ея направленія. Слѣдовательно, мы найдемъ какъ профили винта, такъ и профили винтового колеса, въ сѣченіи, перпендикулярномъ оси колеса и проходящемъ черезъ ось винта, если выполнимъ построеніе зацепленія зубчатой полосы съ колесомъ. Теперь, взявъ найденный профиль полосы и зная наклонъ винтовой линіи, образуемъ поверхность нарѣзки на винтѣ движеніемъ даннаго профиля по винтовой линіи, какъ это вообще дѣлается для всякихъ винтовъ.

Что касается зубчатого колеса, то для точнаго выполненія зубцовъ лучше всего сдѣлать фрезъ, имѣющій форму червяка, и этимъ фрезомъ нарѣзать зубцы: при вращеніи фрезы около оси острия его ребра будутъ врѣзываться въ тѣло цилиндра, изъ котораго должно быть сдѣлано колесо и который посаженъ на ось, перпендикулярную къ первой, и такимъ образомъ винтовые нарѣзки мало-по-малу оставятъ какъ бы слѣдъ на поверхности цилиндра въ видѣ точныхъ зубцовъ колеса.

Чтобы имѣть на чертежѣ профили поверхности зубца колеса въ различныхъ точкахъ, мы можемъ поступить такимъ образомъ: проводимъ рядъ вспомогательныхъ сѣченій, параллельныхъ главному, которое мы выше разсматривали; тогда отъ поверхности винтовой нарѣзки червяка останутся на каждой изъ плоскостей этихъ сѣченій слѣды опять въ видѣ профилей зубцовъ полосы. Ищемъ далѣе для каждой изъ полосъ сопряженные профили на колесѣ, предполагая полосу движущейся вдоль своего направленія; найденные профили и будутъ профилями поверхностей зубцовъ колеса, лежащими въ проведенныхъ нами сѣченіяхъ.

Возьмемъ для червяка, какъ это часто берутъ на практикѣ, трапециoidalный профиль; тогда въ главномъ сѣченіи мы будемъ имѣть эвольвентное зацепленіе зубчатой полосы съ колесомъ.

На чертежѣ *bkNp* есть профиль червяка; окружность червячнаго колеса и представляетъ собою полоиду плоской системы *O*; прямая *AB*, касательная къ окружности, является полоидой для системы, принадлежащей зубчатой полосѣ.

Въ точкѣ *N* касанія полоидъ проводимъ прямую, нормальную къ профилю *kp*, и отыскиваемъ вспомогательную окружность *aa*, развертывающей которой будетъ служить профиль *lq* зубцовъ колеса въ этомъ

главномъ сѣченіи. Шагъ зацѣпленія получается изъ расчета прочности зубцовъ, подобно тому, какъ мы это имѣли въ другихъ передачахъ. Зная шагъ и помня, что размѣры профилей, какъ въ радіальномъ, такъ и въ окружномъ направленіяхъ, даются обыкновенно въ частяхъ шага, вычерчиваемъ полные профили зубцовъ, находимъ длины линіи и дуги зацѣпленія, а также опредѣляемъ рабочую часть какъ профиля lq , такъ и профиля kr , пользуясь при этомъ обыкновенными, изложенными выше приемами.

Будемъ считать нашъ червякъ однооборотнымъ, — иными словами, шагъ винтовой нарѣзки его будетъ равенъ шагу зацѣпленія. Такъ какъ шагъ зацѣпленія считается вдоль AB , то мы описываемъ прямою AB цилиндрическую поверхность около оси O_1 червяка, на этой поверхности опредѣляемъ винтовую линію bc , имѣющую шагъ, равный шагу зацѣпленія, и беремъ ее за направляющую при образованіи профилемъ $bkNr$ поверхности винтовой нарѣзки. Считая сдѣланное нами сѣченіе за вертикальную проекцію, вычертимъ еще горизонтальную проекцію червяка; въ такомъ случаѣ мы увидимъ, что различныя винтовые линіи, описанныя точками профиля при его движеніи по направляющей bc , изобразятся въ горизонтальной проекціи окружностями, изъ коихъ на чертежѣ показаны лишь тѣ, которыя соотвѣтствуютъ крайнимъ точкамъ p и k и средней N . Проведемъ теперь вертикальное сѣченіе IV , параллельное главному, и найдемъ профили впадины на червякѣ. Такъ какъ сѣченіе это параллельно вертикальной плоскости проекцій, то вертикальная проекція профиля и дастъ намъ его истинный видъ. Находимъ эту проекцію: беремъ произвольную точку x_1 на вертикали, проходящей чрезъ точку пересѣченія плоскости съ среднею окружностью, такъ что точка (x, x_1) будетъ представлять собою точку пресѣченія плоскости IV съ средней винтовой линіей. Проводимъ теперь черезъ точку x_1 вертикальную проекцію средней винтовой линіи, т.-е. пристраиваемъ при x_1 кривую, тождественную съ bc , или же просто строимъ гдѣ-нибудь эту кривую и отыскиваемъ на ней точку x_1 , соотвѣтствующую точкѣ x .

Чтобы найти другія точки профиля, напр., точку, соотвѣтствующую P_v , можемъ провести чрезъ P_v слѣдъ осевого сѣченія винта, т.-е. прямую O_1P_v , продолжить его до пересѣченія съ среднею окружностью въ точкѣ y , найти на вертикальной проекціи средней винтовой линіи, проведенной черезъ x_1 , точку y_1 , соотвѣтствующую y , и теперь, по свойству образованія винтовой поверхности, можемъ сказать, что точка этой поверхности, представляемая горизонтальной проекціей P_v , находится въ такомъ же разстояніи отъ горизонтальной плоскости, проведенной черезъ (yy_1) , въ какомъ точка p профиля kNr находится отъ прямой ON (движеніемъ этого профиля и образована винтовая поверхность). Проводя поэтому горизонталь y_1y_2 черезъ точку y_1 , находимъ на вертикали, проходящей черезъ P_v , точку P_{v1} , находящуюся въ указанномъ разстояніи отъ y_1y_2 и служащую вертикальной проекціей для P_v .

Подобнымъ же образомъ находимъ проекціи и другихъ точекъ профиля, т.-е. проводимъ черезъ горизонтальную проекцію z какой-либо точки окружности O_1z , которая будетъ служить горизонтальной проекціей винтовой линіи, соотвѣтствующей точкѣ z . Опредѣляемъ далѣе относительное положеніе точки z на образующемъ профилѣ, для чего изъ точки пересѣченія окружности (O_1z) съ (O_1K_1) проводимъ вертикаль до пересѣченія съ профилемъ. Далѣе проводимъ осевое сѣченіе, т.-е. соединяемъ O_1 съ z ; на средней винтовой линіи получаемъ точку y_3 (не показанную на чертежѣ), отыскиваемъ соотвѣтствующую ей вертикальную проекцію и заканчиваемъ построеніе совершенно такъ же, какъ мы это сдѣлали для точки P_v . Теперь беремъ этотъ профиль и отыскиваемъ ему сопряженный по общимъ правиламъ (по методу *Reuleaux*), при чемъ профиль этотъ рассматриваемъ принадлежащимъ зубчатой полосѣ AB , сдѣпляющейся съ колесомъ радіуса ON ; замѣтимъ при этомъ, что такъ какъ профиль впадины уже не будетъ симметричнымъ, то придется отыскивать сопряженные профили отдѣльно какъ для $k_2x_1P_{v1}$, такъ и для S_at_a . Шагъ зацепленія остался тотъ же, что и въ главномъ сѣченіи, но ширина впадины, считая по AB , будетъ теперь другая, сообразно чему нѣсколько измѣнится теперь и толщина профиля зубца. Высота зубца въ радіальномъ направленіи можетъ быть опредѣлена изъ того обстоятельства, что зубцы колеса обыкновенно ограничиваются линіей CD ; разстояніе точки пересѣченія WV съ CD отъ оси O и служитъ ограниченіемъ профилей въ радіальномъ направленіи для рассматриваемаго сѣченія. Безъ труда находимъ линію зацепленія и рабочія части профилей.

Проведя нѣсколько такихъ сѣченій, мы будемъ въ состояніи опредѣлить вполнѣ видъ зубцовъ колеса, равно какъ величины рабочихъ частей для различныхъ сѣченій, т.-е. опредѣлимъ дѣйствіе винта на зубцы колеса; соотвѣтственно этому будемъ имѣть представленіе и о работѣ нарѣзки.

Относительно связи между шагомъ зацепленія и шагомъ винта можно сказать, что послѣдній бываетъ или равенъ первому, или вдвое, втрое, ... въ n разъ больше его; въ первомъ случаѣ мы имѣемъ однооборотный червякъ, во второмъ — двухъ-, трехъ-, ... n — оборотный. Если у насъ имѣется однооборотный червякъ, а колесо имѣетъ z зубцовъ, то очевидно, что при одномъ оборотѣ червяка колесо сдѣлаетъ $\frac{1}{z}$ -ую часть оборота, повернувшись на одинъ зубецъ; при двухъ-оборотномъ червякѣ колесо повернется (за время одного оборота червяка) уже на 2 зубца, т.-е. сдѣлаетъ $\frac{2}{z}$ часть оборота, и, вообще, повернется на $\frac{n}{z}$ часть оборота при n -оборотномъ червякѣ. Отсюда видно, что червячная передача можетъ служить для преобразованія быстрого вращательнаго движенія въ медленное. Задавшисъ передаточнымъ числомъ

и выбравъ опредѣленный типъ червяка (одно-, двухъ- ... оборотный), находимъ число зубцовъ на колесѣ; далѣе изъ расчета прочности опредѣляемъ шагъ зацепленія, а по шагу и числу зубцовъ находимъ радіусъ R колеса, ибо мы имѣемъ

$$zt = 2\pi R.$$

Если червякъ n -оборотный, то шагъ нарѣзки равенъ $n \cdot t$. Выбираемъ уголъ наклона β нарѣзки на среднемъ цилиндрѣ и опредѣляемъ средній радіусъ червяка r (соотвѣтствующій AB на чертежѣ); для этого воспользуемся соотношеніемъ

$$nt = 2\pi r \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Профилируемъ, какъ указано, червякъ и колесо сначала въ главномъ сѣченіи, а затѣмъ, такъ какъ всѣ размѣры червяка извѣстны, находимъ профили зубцовъ колеса и въ другихъ сѣченіяхъ; все это позволить намъ составить полное представленіе о работѣ червяка. *Ведущимъ всегда бываетъ червякъ.* При маломъ углѣ наклона винтовой нарѣзки, меньшемъ, такъ наз. *угла тренія*, колесо не въ состояніи привести червякъ во вращеніе, каковымъ обстоятельствомъ приходится часто пользоваться въ машиностроеніи (напр., при конструированіи подъемныхъ механизмовъ и проч.).

Винтообразныя зубчатыя поверхности иногда употребляются и въ простой цилиндрической передачѣ. Представимъ себѣ цилиндръ (аксоидъ), принадлежащій какому-либо изъ колесъ, раздѣленнымъ на двѣ половины плоскостью, перпендикулярной къ оси цилиндра. Оставляя въ этой плоскости профили зубцовъ на мѣстѣ, строимъ винтовыя линіи (на той и другой половинѣ) одного и того же шага, но противоположнаго направленія: одна правая, другая лѣвая. Взявъ ихъ за направляющія, описываемъ имѣющимися профилями винтовыя поверхности, которыя и будутъ служить теперь зубцами (фиг. 48).

Колесо такого рода можно разсматривать, какъ состоящее изъ ряда тонкихъ дисковъ съ одними и тѣми же зубцами, но только сдвинутыхъ по отношенію другъ къ другу такъ, что соотвѣтствующія точки зубцовъ лежатъ на винтовыхъ линіяхъ.

На чертежѣ 48 изображена половина одного такого зуба въ проекціи его на среднюю плоскость, а также проекція того же зуба (цѣлаго) на плоскость, перпендикулярную средней (т.-е. проходящую параллельно оси колеса); контуры зуба на этой плоскости представляются винтовыми линіями.

Зацепленіе выбрано *циклическое* и указана линія зацепленія APA_1 . Ведущимъ предположено разсматриваемое колесо O . Такъ какъ каждое

сѣченіе, параллельное средней плоскости, изобразится въ проекціи на эту плоскость въ натуральную величину, и такъ какъ каждое такое сѣченіе, какъ мы указали выше, представляетъ собою какъ бы тонкое колесо, тождественное съ среднимъ сѣченіемъ, но только сдвинутое по отношенію къ нему на нѣкоторый уголъ, то ясно, что дуга PA_1 представляетъ въ данный моментъ проекцію на среднюю плоскость линіи соприкосновенія пары сопряженныхъ зубцовъ.

Не трудно видѣть, что въ данный моментъ соприкосновеніе въ средней плоскости дошло уже до полоиды: въ сѣченіи, соотвѣтствующемъ точкѣ A_1 , соприкосновеніе только начинается, въ сѣченіяхъ же, лежащихъ дальше отъ средняго, соприкосновенія еще нѣтъ. При дальнѣйшемъ вращеніи колеса точка соприкосновенія будетъ постепенно удаляться отъ полоиды, дальнѣйшія сѣченія будутъ вступать въ соприкосновеніе; въ нѣкоторый моментъ соприкосновеніе въ среднемъ сѣченіи прекратится, постепенно оно будетъ прекращаться на дальнѣйшихъ, а линія соприкосновенія все будетъ укорачиваться и въ послѣдній моментъ обратится въ точку (съ той и другой стороны).

Для этой пары зубцовъ соприкосновеніе началось также въ точкѣ средняго сѣченія, затѣмъ стала увеличиваться линія соприкосновенія, какъ это не трудно видѣть.

Такимъ образомъ, въ данномъ зацѣпленіи мы имѣемъ постепенное увеличеніе, а затѣмъ постепенное же уменьшеніе длины линіи соприкосновенія, между тѣмъ какъ въ простыхъ цилиндрическихъ колесахъ длина линіи соприкосновенія всегда равна длинѣ зубцовъ; это обстоятельство приводитъ насъ къ заключенію того рода, что въ разсматриваемыхъ нами колесахъ съ угловыми зубцами имѣются болѣе выгодныя условія работы, чѣмъ въ простыхъ цилиндрическихъ, такъ какъ зубецъ не сразу подвергается дѣйствію полной нагрузки, а постепенно.

Кромѣ того, если мы черезъ γ обозначимъ уголъ, на который является сдвинутымъ крайнее сѣченіе относительно средняго, а, слѣдовательно, дуга полоиды, соотвѣтствующая этому углу, будетъ равна γR , то не трудно видѣть, что продолжительность зацѣпленія пары зубцовъ выразится теперь величиной $(\sigma + \gamma R)$, гдѣ черезъ σ мы обозначили дугу зацѣпленія для простыхъ цилиндрическихъ колесъ съ тѣми же профилями. Что касается угла β наклона винтовой линіи, то онъ связанъ, какъ это можно видѣть изъ чертежа, съ половиною ширины колеса $\frac{b}{2}$ и съ дугой γR соотношеніемъ:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\gamma R}.$$

Выбравъ уголъ γ , получаемъ изъ этого уравненія уголъ β и такимъ образомъ вполне опредѣлимъ видъ зубцовъ.

Изъ чертежа понятно, что если бы въ нашей парѣ колесъ вращеніе совершалось въ другую сторону (ведущимъ было бы колесо O_1),

то соприкосновение началось бы въ обоихъ крайнихъ сѣченіяхъ и кончилось бы въ среднемъ. Точно такъ же легко видѣть, что соотвѣтствующія винтовые линіи на обоихъ колесахъ противоположны, т.-е. правой винтовой линіи на одномъ колесѣ соотвѣтствуетъ лѣвая на другомъ и обратно.

Коловратныя машины.

Къ числу вопросовъ объ отысканіи сопряженныхъ профилей относятся вопросы о построеніи профилей въ *коловратныхъ* машинахъ. Эти машины предназначаются для перемѣщенія жидкихъ тѣлъ и въ частности употребляются также, какъ вентиляторы. Мы ниже рассмотримъ только одинъ изъ наиболѣе распространенныхъ, а именно, такъ называемый *вентиляторъ Рута*. Онъ состоитъ изъ двухъ крыльевъ, заключенныхъ въ кожухѣ и плотно прилегающихъ какъ къ кожуху, такъ и другъ къ другу (фиг. 49). Оба крыла вращаются съ одинаковою угловою скоростью, но въ обратныя стороны. При этомъ, какъ не трудно видѣть, какая-либо жидкость (или воздухъ) будетъ всасываться въ одинъ конецъ кожуха и нагнетаться въ другой. Полоидами для системъ обоихъ крыльевъ будутъ здѣсь двѣ равныя окружности O_1 и O (фиг. 50). Для профиля выступа крыла *Рута* бралъ часть окружности, описанной изъ нѣкоторой произвольной точки O_2 , лежащей на радіусѣ OP , радіусомъ O_2N , гдѣ точки M и N суть концы дугъ PN и PM , равныхъ каждая $\frac{1}{8}$ части всей окружности O ; такимъ образомъ точки M и N *Рута* взялъ постоянными, и профиль, такимъ образомъ, занимаетъ по полоидѣ четверть ея длины.

Чтобы найти профиль впадины, соотвѣтствующей этому профилю выступа, ищемъ огибающую кривой NKM (дуги окружности) при каченіи полоиды O по O_1 . Беремъ какую-нибудь точку x кривой профиля, проводимъ нормаль къ нему, т.-е. соединяемъ точку x съ центромъ O_2 . Пусть эта прямая пересѣкаетъ полоиду O въ точкѣ P_1 ; откладываемъ теперь по другой полоидѣ, считая отъ точки P , дугу PP_2 , равную дугѣ PP_1 . Далѣе, при точкѣ P_2 мы должны построить векторъ, наклоненный къ окружности полоиды O_1 подъ тѣмъ же угломъ α , что и векторъ xP_1 — къ окружности O . Пусть это будетъ векторъ P_2p . Отложивъ теперь на немъ, считая отъ точки P_2 , длину x_2P_2 , равную xP_1 , получимъ точку x_2 , одну изъ точекъ профиля впадины. Итакъ,

$$\angle x_2P_2y = \alpha = \angle xP_1z,$$

и прямая yP_2T есть касательная къ полоидѣ O_1 въ точкѣ P_2 . Опустимъ теперь изъ точки x_2 перпендикуляръ x_2y на эту касательную yT и, продолживъ его по другую сторону касательной, отложимъ $yx_3 = yx_2$. Соединивъ полученную точку x_3 съ P_2 , находимъ, что

$$\triangle x_2P_2y = \triangle x_3P_2y;$$

значить, имѣемъ;

$$x_3 P_2 = x_2 P_2 = x P_1,$$

при чемъ отръзокъ $x_3 P_2$ наклоненъ къ касательной въ P_2 подъ тѣмъ же угломъ α , что и $x P_1$ къ касательной въ P_1 .

Вслѣдствіе равенства полоидъ мы можемъ заключить, что различныя точки x_3 , какъ и различныя x , находятся всѣ на окружности, центръ коей O_3 лежитъ отъ P на такомъ же разстояніи, что и O_2 , и радіусъ которой равенъ радіусу $O_2 x$. Поэтому нахожденіе точекъ профиля впадины сводится къ слѣдующему: проводимъ изъ центра O_3 , гдѣ $PO_3 = PO_2$, окружность того же радіуса, что и NKM ; какую-нибудь точку ея x_3 соединяемъ съ центромъ O_3 , проводимъ въ точку пересѣченія радіуса $x_3 O_3$ съ окружностью O_1 , т.-е. въ точку P_2 , радіусъ $O_1 P_2$, а изъ x_3 проводимъ параллель ему $x_3 x_2$ и на этой параллели отръзкомъ, равнымъ $P_2 x_3$, изъ центра P_2 засѣкаемъ точку x_2 , которая и будетъ одной изъ точекъ искомаго профиля.

Какъ видно изъ построенія, профиль пересѣчетъ полоиду въ тѣхъ же точкахъ, что и вспомогательныя окружности, т.-е. въ точкахъ, находящихся другъ отъ друга на разстояніи четверти длины полоиды.

Выполнивъ построеніе профиля, сопряженнаго съ профилемъ NKM , чертимъ далѣе профиль выступа въ видѣ окружности, тождественной съ окружностью NKM , и затѣмъ ограничиваемъ соотвѣтственно все крыло, пристраивая еще профиль впадины и выступа. Другое крыло, конечно, будетъ ограничено тождественнымъ контуромъ.

Отд. 2. Отношеніе между скоростями переменнo, — направленіями постоянно.

Некруглыя колеса.

Разсмотримъ теперь передачу вращенія около двухъ параллельныхъ осей съ *переменнымъ* отношеніемъ скоростей. Замѣтимъ, что на практикѣ передачи эти употребляются рѣдко, а потому мы остановимся на нихъ лишь вкратцѣ.

Допустимъ, что у насъ имѣются двѣ оси (фиг. 51), A и B , въ опредѣленномъ разстояніи другъ отъ друга, и пусть вращеніе около A съ угловою скоростью ω требуется передать вращеніемъ около B съ угловою скоростью ω_1 , при чемъ отношеніе $\frac{\omega}{\omega_1}$ должно быть нѣкоторой функціей, $f(\varphi)$, угла поворота системы A . Вращенія имѣютъ совершаться въ противоположныя стороны.

Опредѣлимъ, какъ и прежде, движеніе системы B относительно A , придавъ обѣимъ системамъ еще общее вращеніе около оси A со скоростью ω ; тогда система A остановится, а система B будетъ имѣть два

вращенія, которыя мы въ каждомъ данномъ положеніи оси B при вращеніи около A замѣняемъ однимъ мгновеннымъ вращеніемъ около оси, лежащей на плоскости AB , параллельной имъ, и, какъ извѣстно, дѣлящей разстояніе AB на части, обратно пропорціональныя ω и ω_1 . Въ плоскомъ сѣченіи, совпадающемъ, напр., съ плоскостью чертежа, оси спроектируются въ точки A и B . Полоиду въ движеніи плоской системы B относительно A мы найдемъ слѣдующимъ образомъ.

Проводимъ черезъ точку A какой-нибудь векторъ APB подъ угломъ φ къ линіи AB , на немъ отъ точки A откладываемъ AB_1 , равное AB , и дѣлимъ AB_1 внутреннимъ образомъ въ отношеніи

$$\frac{PA}{PB_1} = \frac{\omega_1}{\omega} = f(\varphi);$$

при данномъ углѣ φ величина $f(\varphi)$ будетъ вполне опредѣленной и извѣстной. Такимъ образомъ мы получимъ точку P , которая и будетъ одной изъ точекъ полоиды.

Далѣе нужно найти, какъ обыкновенно, полоиду въ движеніи A относительно B . Такъ какъ разстояніе между осями есть величина постоянная и такъ какъ точка P постоянно должна находиться на AB , то отсюда слѣдуетъ, что два соотвѣтственные радіуса r и r_1 въ суммѣ должны давать AB , т.-е. должны удовлетворять условію

$$r + r_1 = AB.$$

Если вектору $AP = r$ соотвѣтствуетъ въ другой полоидѣ векторъ $BP_1 = r_1$, то углы, образуемые ими съ осью AB , т.-е. углы $P_1BA = \varphi_1$ и $PAB = \varphi$, должны быть таковы, чтобы векторы PA и BP_1 при вращеніи системы A со скоростью ω и системы B со скоростью ω_1 , одновременно могли вступить на линію AB . Это условіе можно выразить такъ: элементарное вращеніе $d\varphi$ за промежутокъ времени dt выразится въ видѣ

$$d\varphi = \omega \cdot dt;$$

для вращенія $d\varphi_1$ имѣемъ аналогично

$$d\varphi_1 = \omega_1 \cdot dt$$

(для того же промежутка времени dt). Эти два соотношенія приводятъ насъ къ ур—нію

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi} = f(\varphi),$$

откуда находимъ ур—ніе

$$d\varphi_1 = f(\varphi) \cdot d\varphi,$$

опредѣляя изъ котораго φ_1 , получаемъ:

$$\varphi_1 = \int_0^{\varphi} f(\varphi) d\varphi.$$

Выполнивъ интегрированіе, опредѣлимъ отсюда уголъ φ_1 , соответствующій данному φ , а этимъ опредѣлится точка полоиды P_1 , — для полученія ея придется на сторонѣ угла φ_1 отложить отъ точки B отръзокъ BP_1 .

Кривыя, построенныя такимъ образомъ, и будутъ полоидами. Не трудно, кромѣ того, убѣдиться, что дуга P_0P_1 равна дугѣ P_0P , и радіусъ векторъ BP_1 дѣлаетъ съ кривою такой же уголъ, какъ и векторъ PA . На самомъ дѣлѣ, на основаніи вышеприведенныхъ соображеній, мы можемъ теперь написать, что

$$\frac{d\varphi}{d\varphi_1} = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{r_1}{r},$$

что даетъ намъ

$$r d\varphi = r_1 d\varphi_1 \dots \dots \dots (1)$$

Уголъ вектора BP_1 съ кривою, т.-е. съ касательною къ кривою въ крайней точкѣ вектора, который мы назовемъ черезъ ψ_1 , опредѣляется изъ условія

$$tg\psi_1 = \frac{r_1 d\psi_1}{dr_1} \dots \dots \dots (2)$$

а уголъ между векторомъ AP и кривою—условіемъ

$$tg\psi = \frac{r d\psi}{dr} \dots \dots \dots (3)$$

при чемъ если dr_1 положительно, то dr , по построенію кривыхъ, отрицательно, но по абсолютной величинѣ равно dr_1 . Принимая во вниманіе равенство (1), мы получаемъ изъ ур—ній (2) и (3) слѣдующее:

$$tg\psi = tg\psi_1, \dots \dots \dots (4)$$

т.-е.

$$\psi = \psi_1 \dots \dots \dots (5)$$

Далѣе мы имѣемъ для элементовъ дуги ds и ds_1 выраженія:

$$ds = \frac{1}{\sin\psi} \cdot r d\varphi \dots \dots \dots (6)$$

и аналогично

$$ds_1 = \frac{1}{\sin\psi_1} \cdot r_1 d\varphi_1; \dots \dots \dots (7)$$

сравнивая которая, въ виду ур—ній (1) и (5), находимъ:

$$ds = ds_1, \dots \dots \dots (8)$$

т.-е. всякій элементъ дуги между двумя бесконечно-близкими радіусами одной полоиды равенъ элементу дуги другой полоиды, заключенному между соотвѣтственными радіусами другой.

Кривыя будутъ катиться одна по другой *безъ скольженія*, если мы начнемъ вращать систему *A* со скоростью ω , а *B* — со скоростью ω_1 . Здѣсь, однако, далеко не всегда можно устроить фрикціонную передачу вслѣдствіе того, что кривыя могутъ имѣть угловатые выступы и т. п. формы, при которыхъ нельзя увлечь одну систему другой лишь помощью силы тренія.

Зубчатая передача можетъ быть устроена всегда и устраивается совершенно такъ же, какъ и въ цилиндрическихъ колесахъ: беремъ опять нѣкоторый произвольный профиль въ одной системѣ и находимъ сопряженный ему въ другой, катя одну полоиду по другой, — здѣсь удобнѣе всего примѣнить методъ *Poncelet*, годный, какъ было сказано, для всякихъ полоидъ.

Примѣромъ некруглыхъ колесъ могутъ служить *эллиптическія* колеса. Представимъ себѣ два одинаковыхъ эллипса, посаженныхъ на осяхъ, проходящихъ черезъ ихъ фокусы *F* и *f*₁ (фиг. 52). Разстояніе между осями равной большой оси эллипсовъ:

$$Ff_1 = MN = mn;$$

кромѣ того,

$$PF = Pf \text{ и } PF_1 = Pf_1.$$

Не трудно видѣть, что расположенные такимъ образомъ эллипсы, если ихъ вращать около ихъ осей, будутъ катиться одинъ по другому.

Взявъ на одномъ изъ нихъ точку *P*₁, а на другомъ—точку *P*₂ такъ, чтобы дуга *PP*₁ была равна дугѣ *PP*₂, вслѣдствіе тождества эллипсовъ получаемъ:

$$FP_2 = fP_1,$$

а такъ какъ

$$FP_2 + F_1P_2 = 2a = fP_1 + f_1P_1,$$

то и

$$F_1P_2 = f_1P_1,$$

а значитъ

$$f_1P_1 + FP_2 = 2a = Ff_1,$$

Далѣе, линія *TP*₂*T*, касательная въ точкѣ *P*₂, образуетъ съ векторомъ *FP*₂ уголъ *FP*₂*T* = μ такой же, какой образуетъ касательная въ *P*₁, прямая *tP*₁*t*, съ векторомъ *f*₁*P*₁, т.-е. уголъ

$$\angle FP_2T = \mu = \angle f_1P_1t;$$

на самомъ дѣлѣ, въ силу тождественности эллипсовъ, заключаемъ, что углы FP_2T и fP_1t , какъ углы между соотвѣтственно-равными векторами FP_2 и fP_1 и касательными TT и tt , равными между собою; углы же fP_1t и f_1P_1t равны между собою по свойству эллипсовъ: $\angle FP_2T = \angle fP_1t = \mu$.

Такимъ образомъ векторы FP_2 и f_1P_1 суть соотвѣтственные векторы, и взятые эллипсы, прокатившись другъ по другу на дугу PP_2 , равную дугѣ PP_1 , будутъ касаться въ этотъ моментъ точками P_1 и P_2 , которыя одновременно придутъ на линію центровъ Ff_1 ; касательныя же ихъ въ точкахъ P_1 и P_2 сольются въ одну общую касательную. Отношеніе угловыхъ скоростей $\omega_1 : \omega$ равно отношенію $FP : f_1P$ и, очевидно, мѣняется отъ *maximum*'а, когда векторомъ FP будетъ на одно мгновеніе служить отрѣзокъ большой оси FN ,—до *minimum*'а, когда роль вектора FP перейдетъ на мгновеніе къ отрѣзку FM . Если эксцентриситетъ эллипса назвать черезъ e , гдѣ $e = c : a$, то *maximum* отношенія $\frac{\omega_1}{\omega}$ будетъ равенъ $\frac{a+c}{a-c}$ или $\frac{1+e}{1-e}$, а *minimum* $= \frac{1-e}{1+e}$.

Отд. 3. Отношеніе между скоростями и направленіями перемѣнно.

Кулаки и эксцентрики.

Въ машиностроеніи имѣетъ очень большое значеніе *преобразование вращательнаго движенія въ прямолинейное возвратное или въ качательное при помощи кулаковъ и эксцентриковъ*.

Пусть нѣкоторый стержень, могущій двигаться вдоль своего направленія (фиг. 53) (наприм., на каточкахъ), опирается концомъ на шайбу, сидящую на оси A .

Положимъ, что направленіе оси стержня встрѣчаетъ ось A и перпендикулярно къ ней.

При равномерномъ вращеніи шайбы (или эксцентрика) полоса будетъ двигаться, пока будутъ возрастать радіусы-векторы эксцентрика; при дальнѣйшемъ вращеніи, когда радіусы-векторы начнутъ убывать, стержень можетъ остаться на мѣстѣ (если онъ, напр., двигается горизонтально), и для замыканія пары въ этомъ случаѣ придется употребить постороннюю силу, которая всегда прижимала бы стержень къ эксцентрику, т.-е. придется примѣнить такъ-называемое *силовое замыканіе пары*, напр., при помощи нѣкоторой пружины.

Законъ движенія стержня, несомнѣнно, зависитъ отъ формы эксцентрика, и, наоборотъ, для даннаго закона движенія стержня всегда можно опредѣлить форму эксцентрика.

Пусть a есть наименьшій векторъ эксцентрика, а ρ какой-нибудь другой, образующій нѣкоторый уголъ ϕ съ первымъ. Движеніе стержня мы начнемъ разсматривать, начиная съ того момента, когда съ на-

правленіемъ движенія стержня совпадаетъ наименьшій радіусъ эксцентрика. При поворотѣ эксцентрика на уголъ φ , стержень, очевидно, по-двинется на величину x , равную $\varrho - a$.

Кривую, ограничивающую эксцентрикъ, мы можемъ выразить уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ, написаннымъ въ видѣ

$$\varrho - a = f(\varphi) \dots \dots \dots (1)$$

Мы примемъ *вращеніе эксцентрика равномернымъ*, и въ такомъ случаѣ углы поворота эксцентрика будутъ пропорціональны временамъ, т.-е. мы можемъ времена мѣрить этими углами поворота, а тогда уравненіе

$$\varrho - a = f(\varphi) = x \dots \dots \dots (1')$$

дастъ намъ зависимость пути, пройденнаго какой-либо гѣлкой стержня, отъ времени, если за начальный моментъ мы будемъ считать моментъ наибольшаго приближенія этой точки стержня къ центру (или къ оси вращенія) эксцентрика.

Обратно, если намъ данъ законъ движенія стержня въ видѣ $x = f(t)$, то это соотношеніе можетъ быть сейчасъ же преобразовано въ полярное уравненіе для кривой, ограничивающей эксцентрикъ, а именно въ ур—ніе $\varrho - a = f(t)$. Задавшись величиной a , т.-е. наименьшимъ векторомъ эксцентрика, мы опредѣлимъ форму кривой, его ограничивающей.

Пусть, напр., дано, что стержень за время поворота эксцентрика отъ 0 до π долженъ двигаться равномерно; это значитъ, что пути, проходимые какой-либо точкой стержня, должны быть пропорціональны временамъ, а поэтому ур—ніе кривой, ограничивающей эксцентрикъ, изобразится въ видѣ

$$\varrho - a = k \cdot \varphi \dots \dots \dots (2)$$

это ур—ніе представляетъ собою ур—ніе *Архимедовой спирали*. Факторъ пропорціональности k мы опредѣлимъ по величинѣ хода стержня. Пусть ходъ этотъ равенъ h ; тогда при $\varphi = \pi$ имѣемъ:

$$\varrho' - a = h = k\pi, \dots \dots \dots (3)$$

откуда

$$k = h : \pi,$$

и ур—ніе кривой эксцентрика (2) приметъ окончательно видъ:

$$\varrho - a = \frac{h}{\pi} \cdot \varphi \dots \dots \dots (4)$$

Построеніе этой кривой можно выполнить такъ: задаемся наименьшимъ радіусомъ эксцентрика A_1O , равнымъ, положимъ, a ; ходъ стерж-

жня попрежнему пусть равенъ h ; опредѣлимъ радіусъ-векторъ, соотвѣтствующій φ , равному π ; изъ ур—нія (3) имѣемъ, что этотъ радіусъ, который мы обозначили черезъ ρ' , равенъ $h + a$; итакъ, $\rho' = a + h$. Дѣлимъ теперь уголъ π векторами на n равныхъ частей (фиг. 54), на столько же частей дѣлимъ отръзокъ h и откладываемъ на векторахъ послѣдовательно отръзки a ; $a + \frac{h}{n}$; $a + 2 \cdot \frac{h}{n}$; $a + 3 \cdot \frac{h}{n}$; ...

Можно выполнить этотъ процессъ полученія точекъ кривой еще немного проще, а именно, описать изъ полюса O окружность радіусомъ a , какъ мы это сдѣлали на чертежѣ, раздѣлить половину ея (соотвѣтственно углу π) на n равныхъ частей и къ радіусамъ, проведеннымъ въ точки дѣленія, прибавлять послѣдовательно отръзки $1 \cdot \frac{h}{n}$; $2 \cdot \frac{h}{n}$; $3 \cdot \frac{h}{n}$; $4 \cdot \frac{h}{n}$; ...

Такимъ образомъ, мы получимъ рядъ точекъ, которыми имѣютъ оканчиваться векторы кривой эксцентрика,—это будетъ рядъ точекъ этой кривой. Соединяя теперь ихъ непрерывною кривою, мы получимъ Архимедову спираль, которая будетъ вычерчена тѣмъ точнѣе, чѣмъ больше взято дѣленій (чѣмъ больше n).

Если бы было поставлено требованіе, что назадъ стержень также долженъ идти равномерно, то намъ пришлось бы къ нашей кривой пристроить другую, ей симметричную, и, такимъ образомъ, эксцентрикъ былъ бы очерченъ вполне. Такой эксцентрикъ обладаетъ свойствомъ *постоянной ширины*, иными словами, *любые два вектора, составляющіе продолженіе одинъ другого*, напр., AO и OB , въ суммѣ даютъ постоянную величину, равную суммѣ наибольшихъ векторовъ. На самомъ дѣлѣ, назовемъ уголъ BOA_2 черезъ α ; тогда для вектора AO , соотвѣтствующаго BO , уголъ A_1OA также равенъ α . По построенію мы имѣемъ: $BO = a + \frac{h}{\pi} \cdot \alpha$ и $AO = a + \frac{h}{\pi} (\pi - \alpha)$. Складывая, находимъ:

$$AO + BO = 2a + h = a + (a + h) = \text{const}$$

Легко опредѣлить, напр., форму такого эксцентрика, который заставлялъ бы нашъ стержень двигаться впередъ сначала равномерно ускореннымъ движеніемъ, а затѣмъ—равномерно замедленнымъ, такъ что въ результатѣ къ концу хода скорость стержня будетъ равна нулю. Выполнимъ это требованіе.

Пусть попрежнему наименьшій радіусъ эксцентрика равенъ a , ходъ стержня равенъ h ; значитъ, за четверть оборота эксцентрика стержень долженъ пройти путь $\frac{1}{2} h$. При равномерно ускоренномъ движеніи пространства пропорціональны квадратамъ временъ, а поэтому уравненіе кривой эксцентрика имѣетъ видъ

$$\rho - a = k\varphi^2 \dots \dots \dots (5)$$

окончательно

$$mn = \frac{h}{1/2\pi} \psi - \frac{h}{1/4\pi^2} \frac{\psi^2}{2}; \dots \dots \dots (9)$$

но эта зависимость mn отъ ψ выражаетъ собою зависимость пути отъ времени въ движеніи равноѣрно-замедленномъ, если время считать углами ψ . *m.e.* ✓

Дальнѣйшее построение эксцентрика будетъ, очевидно, таково: проводимъ какой-либо векторъ Ok , откладываяемъ по другую сторону вектора OB уголъ BOm , равный углу BOk , находимъ отрѣзокъ mn между кривой, раньше начерченной, и окружностью радіуса $(a - 1/2 h)$ и прибавляемъ этотъ отрѣзокъ къ радіусу Ok той же окружности, т.-е. дѣлаемъ $kl = mn$; точка l , полученная такимъ образомъ, будетъ одной изъ точекъ кривой очертанія эксцентрика.

Тотъ же результатъ получимъ, если составимъ на общихъ основаніяхъ полярное уравненіе кривой для движенія равноѣрно-замедленного. Считая уголъ φ отъ OB , получаемъ для этого случая

$$x = \alpha\varphi - \beta \cdot 1/2 \varphi^2 \dots \dots \dots (10)$$

Постоянные α и β опредѣлимъ изъ этого условія, что при $\varphi = 0$ скорость стержня должна имѣть нѣкоторую опредѣленную величину, намъ заранѣе извѣстную; также и при $\varphi = 1/2 \pi$.

Скорость стержня выражается здѣсь такъ: $v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\varphi} = \alpha - \beta\varphi$; а при $\varphi = 0$ имѣемъ $v = \alpha$; но, съ другой стороны, та же скорость напишется въ видѣ $\frac{d\varrho}{d\varphi}$, гдѣ ϱ берется изъ прежняго уравненія

$$\varrho - a = \frac{h}{1/4\pi^2} \cdot \frac{\varphi^2}{2} = \frac{2h}{\pi^2} \cdot \varphi^2,$$

при чемъ, понятно,

$$v = \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)_{\varphi=1/2\pi}$$

ибо во второмъ случаѣ углы отсчитываются отъ A . Мы имѣемъ

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)_{\varphi=1/2\pi} = \left(\frac{h}{1/4\pi^2} \cdot \varphi \right)_{\varphi=1/2\pi} = \frac{h}{1/2\pi} = v = \alpha;$$

значить, получаемъ окончательно:

$$\alpha = \frac{h}{1/2\pi} \dots \dots \dots (11)$$

Постоянное β опредѣлится изъ того условія, что v при $\varphi = 1/2 \pi$ должна обращаться въ нуль, т.-е. мы имѣемъ условіе:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{\varphi=1/2\pi} = 0 \dots \dots \dots (12)$$

Откуда находимъ:

$$(\alpha - \beta \cdot \varphi)_{\varphi = \frac{1}{2}\pi} = 0,$$

т.-е.

$$\alpha - \beta \cdot \frac{\pi}{2} = 0; \quad \beta = \alpha : \frac{\pi}{2}$$

что, въ виду ур—нія (11), дастъ намъ

$$\beta = \frac{h}{\frac{1}{4}\pi^2} \dots \dots \dots (13)$$

Теперь въ виду ур—ній (11) и (13), ур—ніе (10) можно переписать такъ:

$$x = \frac{h}{\frac{1}{2}\pi} \cdot \varphi - \frac{h}{\frac{1}{4}\pi^2} \cdot \frac{\varphi^2}{2} \dots \dots \dots (14)$$

Если требуется получить обратное движеніе стержня такого же характера, какъ прямое, то дальше мы очерчиваемъ эксцентрикъ симметричной кривой.—Эксцентрикъ такого рода имѣетъ передъ первымъ то преимущество, что переходъ отъ одного направленія движенія къ противоположному совершается безъ потери въ скорости и поэтому безъ удара (— скорость при концѣ хода равна нулю).

Если эксцентрикъ обладаетъ свойствомъ *постоянной ширины*, то вмѣсто одного ролика можно поставить два, неизмѣнно связанныхъ съ стержнемъ, и между ними помѣстить эксцентрикъ; въ этомъ случаѣ *силовое замыканіе пары* становится ненужнымъ.

Можно также вмѣсто эксцентрика сдѣлать шайбу съ желобкомъ, въ который входилъ бы роликъ отъ стержня. Желобокъ долженъ быть ограниченъ кривыми, параллельными кривой для даннаго закона движенія на радіусъ ролика.

Часто бываетъ, что центръ вращенія эксцентрика не лежитъ на линіи движенія конца стержня; подобный случай схематически представленъ на фиг. 56: здѣсь эксцентрикъ *ЕКС* вращается около оси *О*, между тѣмъ какъ стержень ходитъ въ направленіи *NB*, черезъ центръ *О* не проходящемъ. Проводимъ прямую *BN* (продолженная ось стержня *AB*) и изъ центра эксцентрика *О* проводимъ окружность, касательную къ этой прямой *BN*. Пусть точкой ихъ касанія будетъ точка *N*. Проведемъ теперь какой-нибудь радіусъ-векторъ эксцентрика *OC* и изъ точки *С* касательную *CM* къ упомянутому выше кругу. Легко видѣть, что когда на линію движенія *AB* придетъ точка *С*, то стержень къ этому времени передвинется на разность между длинами касательныхъ *CM* и *BN*, при чемъ эксцентрикъ повернется на уголъ *NOM*.

Если намъ дана зависимость перемѣщенія стержня отъ времени или угловъ поворота эксцентрика, тогда мы опредѣляемъ длины ка-

сательныхъ для равныхъ угловъ поворота и безъ труда строимъ кривую эксцентрика такимъ образомъ: дѣлимъ окружность ON на n равныхъ частей, въ точкахъ дѣленія проводимъ касательныя къ этой окружности и, выбравъ наименьшую изъ нихъ, откладываемъ послѣдовательно на остальныхъ отрѣзки, возрастаніе которыхъ соотвѣтствуетъ закону движенія, совершенно такъ же, какъ это мы дѣлали для возрастающихъ векторовъ эксцентрика въ случаѣ, когда центръ его лежалъ на линіи движенія.

Во всѣхъ этихъ выводахъ мы предполагали, что стержень опирается на эксцентрикъ своимъ концомъ, т.-е. опирается одной точкой. Въ дѣйствительности на концѣ стержня всегда дѣлаютъ роликъ, которымъ стержень и опирается на эксцентрикъ. Тогда роль конца стержня перейдетъ (въ плоскомъ сѣченіи) къ центру ролика; поэтому эксцентрикъ (фиг. 57) придется ограничить не той кривой AOB , которая удовлетворяетъ данному закону движенія, а кривой KI , ей параллельной и отстоящей отъ нея на величину радіуса ролика.

Не трудно также рѣшить вопросъ о формѣ эксцентрика, который долженъ дѣйствовать на полосу, соединенную со стержнемъ и обыкновенно перпендикулярную къ его длинѣ (фиг. 58). Допустимъ, что центръ эксцентрика находится на продолженіи оси стержня. Такъ какъ направленіе полосы всегда касательно къ эксцентрику и перпендикулярно къ линіи движенія стержня, то мы можемъ получить зависимость OB ,—растоянія центра O отъ полосы KM ,—отъ угловъ поворота эксцентрика, т.-е. можемъ получить законъ движенія стержня, если будемъ проводить къ эксцентрику касательныя и опускать на нихъ перпендикуляры изъ точки O .

Какой-нибудь перпендикуляръ OP , соотвѣтствующій вектору OA и образующій уголъ φ съ линіей OB , опредѣлитъ собою удаленіе конца B стержня отъ центра O . Послѣ поворота эксцентрика на уголъ φ , стержень передвинется на величину $OP - OB$. Соединивъ различные концы P перпендикуляровъ, получимъ кривую, выражающую законъ передвиженія стержня.

Обратно, если намъ дана зависимость перемѣщеній отъ угловъ поворота φ эксцентрика, то мы строимъ, какъ въ обыкновенномъ эксцентрикѣ, геометрическое мѣсто точекъ P и къ каждому вектору этого геометрическаго мѣста, въ концѣ его, возставляемъ перпендикуляръ. Огибающая этихъ перпендикуляровъ и дастъ очертанія эксцентрика, дѣйствующаго на полосу и двигающаго стержень согласно данному закону.

Къ числу подобныхъ эксцентриковъ можно отнести *круглый дискъ*, эксцентрично сидящій на оси вращенія O и заключенный въ раму, составляющую одно цѣлое съ стержнемъ (фиг. 59). Очевидно, что такой эксцентрикъ представляетъ изъ себя ничто иное, какъ механизмъ двойного ползуна, въ которомъ кривошипъ имѣетъ длину OC —разстояніе между центромъ диска C и центромъ вращенія O ; слѣдовательно,

законъ движенія стержня будетъ тотъ же, что и тамъ, т.-е. движеніе будетъ гармоническое. Въ этомъ можно убѣдиться, впрочемъ, и изъ прямого разсмотрѣнія движенія диска C . Проведемъ какую-нибудь касательную TT и изъ центра вращенія O опустимъ на нее перпендикуляръ OP . Изъ треугольника REN , гдѣ N есть точка касанія, а E —точка пересѣченія EN , параллельной OC , съ $\perp$ -омъ OP , получаемъ: $OP = OE + EP = r + EN \cos REN = r + OC \cos ROC$, обозначивъ разстояніе OC черезъ d , а уголъ ROC черезъ φ , находимъ: $PO = r + d \cos \varphi$.

Какъ видимъ, движеніе, дѣйствительно, будетъ гармоническое. *Maximum* $PO = r + d$ (при $\varphi = 0$), *minimum* $PO = r - d$ (при $\varphi = \pi$). Перемѣщеніе стержня выражается формулой вида $\Delta = d (1 - \cos \varphi)$, и поэтому ходъ стержня будетъ равенъ $2d$.

Эксцентрики или кулаки могутъ имѣть также форму цилиндровъ, срѣзанныхъ по нѣкоторой кривой, на которую и будетъ опираться и скользить по ней конецъ стержня, могущаго ходить въ направленіи, параллельномъ оси цилиндра (фиг. 60). Легко вычертить, напр., вертикальную проекцію кривой, по которой долженъ быть срѣзанъ цилиндръ, если намъ дана зависимость движенія стержня отъ времени. Представимъ себѣ круглый цилиндръ, стоящій на горизонтальной плоскости проекцій (нижнее основаніе предполагаемъ кругомъ, такъ что оно перпендикулярно оси). Дѣлимъ окружность основанія на n равныхъ частей, проводимъ черезъ полученныя точки дѣленія вертикали (образующія) и откладываемъ на нихъ отъ оси проекцій xx ординаты, измѣненіе длины которыхъ зависитъ отъ угловъ, образуемыхъ соотвѣтственными радіусами основаній съ нѣкоторымъ опредѣленнымъ направленіемъ, принятымъ нами за начальное такъ же, какъ перемѣщеніе стержня зависитъ отъ времени.

Можно также развернуть цилиндръ на плоскости, раздѣлить развернутое основаніе на n равныхъ частей и въ точкахъ дѣленія возставить ординаты, пользуясь опять закономъ движенія стержня.

Если, напр., дано, что за поворотъ эксцентрика стержень долженъ двигаться пропорціонально квадратамъ временъ, то мы беремъ какую-нибудь ординату за наименьшую, проще всего, ординату начальной точки, и дальнѣйшія ординаты увеличиваемъ послѣдовательно на $1 \cdot \frac{h}{n^2}$, $4 \cdot \frac{h}{n^2}$, $9 \cdot \frac{h}{n^2}$ и т. д., гдѣ черезъ h обозначенъ ходъ стержня. Затѣмъ для обратнаго хода стержня, за второй полуоборотъ эксцентрика, строимъ кривую, требуемую заданными условіями движенія и т. д. Получимъ такимъ образомъ нѣкоторую кривую, которая, будучи наведена на цилиндръ, и покажетъ, какъ долженъ быть срѣзанъ цилиндръ для полученія требуемаго движенія.

Можно также на цилиндрѣ сдѣлать каналъ, въ который могъ бы входить роликъ отъ стержня; форма канала опредѣляется, понятно, указаннымъ выше способомъ.

Встрѣчаются эксцентрики и другихъ формъ, напр., коническіе и

т. п.; способъ очерчиванія ихъ не представляетъ никакихъ затрудненій и ведется аналогично разсмотрѣннымъ примѣрамъ.

Если стержень, опирающійся на эксцентрикъ, не двигается прямолинейно, а вращается около опредѣленнаго центра, то, по данной зависимости его качаній отъ времени, мы строимъ его положенія O_1E , O_1F , O_1K (фиг. 61), соотвѣтствующія различнымъ угламъ поворота эксцентрика. Откладывая эти углы отъ нѣкотораго вектора, принятаго за начальный, получаемъ рядъ векторовъ эксцентрика, длина коихъ, очевидно, должна быть равна соотвѣтственно OF , OK ... Такимъ образомъ мы и получимъ очертаніе нужнаго намъ эксцентрика.

Иногда предъявляется требованіе, чтобы на нѣкоторой части своего пути стержень остановился и остался нѣкоторое время въ покоѣ. Не трудно видѣть, какъ въ этомъ случаѣ долженъ быть очерченъ эксцентрикъ въ соотвѣтственной его части.

Для простаго эксцентрика кривая на этой части обратится въ окружность, описанную изъ центра эксцентрика. Переходъ отъ этой дуги окружности къ дальнѣйшей кривой слѣдуетъ сдѣлать постепеннымъ, подобравъ нѣкоторую переходную кривую.

Передача при помощи промежуточныхъ звеньевъ.

Отд. 1. Отношеніе между скоростями и направленіями постоянно.

Рядовое соединеніе зубчатыхъ колесъ.

Рядовое соединеніе зубчатыхъ колесъ является наиболѣе важнымъ въ практическомъ отношеніи примѣромъ передачи движенія при помощи промежуточныхъ звеньевъ.

Положимъ, что вращеніе отъ одной оси требуется передать другой, при чемъ передаточное число довольно велико. Какъ извѣстно, для зубчатой цилиндрической передачи большаго передаточнаго числа не берутъ, а если такое будетъ задано, то передачу разбиваютъ на рядъ передачъ: колесо, сидящее на оси A (фиг. 62) и имѣющее n_1 зубцовъ, зацѣпляются съ колесомъ, сидящимъ на оси B и имѣющимъ N_1 зубцовъ; на той же оси B сидитъ колесо съ числомъ n_2 зубцовъ, — оно зацѣпляется съ колесомъ N_2 (гдѣ N_2 — число зубцовъ его) на оси C , на этой же оси C сидитъ еще колесо n_3 , зацѣпляющееся съ N_3 на оси D и т. д.

Положимъ, что движеніе передается отъ колеса A ; тогда ведущими будутъ колеса n_1 , n_2 , n_3 , ... а ведомыми N_1 , N_2 , N_3 ... При z_1 оборотахъ колеса A колесо B совершитъ $\frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ, C совершитъ

$\frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ, колесо D — $\frac{n_3}{N_3} \cdot \frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ и т. д. Вообще, число оборотовъ послѣдней оси будетъ равно числу оборотовъ первой (z_1), помноженному на дробь, числитель которой есть произведение чиселъ зубцовъ ведущихъ колесъ, а знаменатель — произведение чиселъ зубцовъ ведомыхъ колесъ.

Послѣдняя ось будетъ вращаться или въ ту же сторону, что и первая, или въ обратную, — это зависитъ отъ числа промежуточныхъ передачъ: если мы назовемъ число всѣхъ передачъ черезъ m , то можемъ написать, что число оборотовъ послѣдней оси равно

$$(-1)^m \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot \frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_3}{N_3} \dots \frac{n_m}{N_m} z_1 \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ z_1 есть число оборотовъ первой оси, знакъ же *минусъ* будетъ указывать, что вращеніе послѣдней оси совершается въ сторону, противоположную первой.

Замѣтимъ здѣсь, что если на какой-либо оси сидитъ только одно колесо, сцѣпляющееся съ предшествующимъ и послѣдующимъ колесами, то вліянія на величину передаточнаго числа оно, очевидно, не имѣетъ; на самомъ дѣлѣ, это колесо мы можемъ разсматривать, какъ два одинаковыхъ колеса, посаженныхъ на одну и ту же ось; поэтому въ выраженіи (1) дробь $\frac{n_k}{N_{k-1}}$, соотвѣтствующая этому колесу, будетъ равна единицѣ; колесо это вліяетъ лишь на измѣненіе смысла вращенія.

Такимъ образомъ, разбивая передачу на рядъ передачъ, мы можемъ выполнить какое угодно передаточное число. Въ такъ называемомъ *переборѣ* токарныхъ станковъ мы имѣемъ одинъ изъ простѣйшихъ примѣровъ разбивки передачи.

Ступеньчатый шкифъ S , называемый также *конусомъ* (фиг. 63), получающій свое вращеніе отъ фабричнаго вала, сидитъ вольно на шпинделѣ A передней бабки токарнаго станка, на шпинделѣ вращается и обтачиваемый предметъ. Колесо N_2 наглухо, при помощи шпонки, соединено съ осью A и, въ свою очередь, можетъ быть соединяемо при помощи выключателя, не показаннаго на чертежѣ, со шкивомъ S ; малое зубчатое колесо n_1 составляетъ одно цѣлое со шкивомъ S .

Параллельно оси AA въ бабкѣ имѣется другая ось B съ парой зубчатыхъ колесъ N_1 и n_2 . Ось эта можетъ быть, смотря по надобности, удаляема или приближаема къ оси AA ; съ этою цѣлью она сдѣлана пустой и сидитъ на оси C , шипы которой, O_1 и O_2 , эксцентричны по отношенію къ оси B . Вращая рукоятку D , насаженную на шипъ O_1 , мы, очевидно, будемъ приближать или удалять ось B отъ оси A .

Если хотятъ, чтобы шпиндель AA вращался быстро, то выключателемъ соединяютъ колесо N_2 со шкивомъ S , удаляютъ вращеніемъ рукоятки D ось B отъ оси A , такъ что колеса N_1 и n_2 перестанутъ

сдѣлаться съ колесами n_1 и N_2 ; тогда шпиндель будетъ получать вращеніе непосредственно отъ вала при помощи шкива S .

Если же нужно получить медленное вращеніе шпинделя, то разъединяють колесо N_2 и шкивъ S , вращеніемъ рукоятки D заставляютъ ось B приблизиться къ оси A , пока колеса N_1 и n_2 не войдутъ въ зацепленіе съ колесами n_1 и N_2 ; въ этомъ случаѣ при одномъ оборотѣ шкива шпиндель сдѣлаетъ $\frac{n_1 n_2}{N_1 N_2}$ оборотовъ.

Ступенчатый шкивъ служитъ для того, чтобы можно было разнообразить число оборотовъ. При нарѣзкѣ винтовъ опредѣленнаго шага суппортъ, несущій рѣзецъ, долженъ подвигаться на нѣкоторую опредѣленную величину при каждомъ цѣломъ оборотѣ обрабатываемаго предмета.

Какъ мы знаемъ, передвиженіе суппорта производится при помощи частнаго видоизмѣненія трехзвенной винтовой цѣпи, въ которомъ одна пара превратилась во вращательную и одна—въ поступательную; при этомъ за одинъ оборотъ винта суппортъ подвинется на величину его шага h_1 . Если обрабатываемый предметъ совершаетъ z_2 оборотовъ за то время, въ какое винтъ суппорта совершаетъ z_1 оборотовъ, то рѣзецъ сдѣлаетъ нарѣзку, шагъ которой, h_2 , черезъ прежній, h_1 , выразится такъ:

$$h_2 = \frac{z_1 h_1}{z_2} \dots \dots \dots (2)$$

Чтобы имѣть возможность нарѣзать различные винты (съ разными шагами h_2), нужно, какъ показываетъ ур—ніе (2), гдѣ $h_1 = const$, имѣть возможность мѣнять отношеніе $\frac{z_1}{z_2}$; это мы можемъ сдѣлать, вставляя между шпинделемъ передней бабки, отъ которой винтъ суппорта получаетъ вращеніе, и этимъ винтомъ различныя промежуточные передачи сообразно требуемой нарѣзкѣ.

Если A есть шпиндель (фиг. 64), а B —винтъ суппорта, то при показанныхъ на чертежѣ числахъ зубцовъ колесъ шагъ нарѣзки будетъ равенъ (при одной промежуточной передачѣ, какъ это изображено на чертежѣ)

$$h_2 = h_1 \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot \frac{n_2}{N_2} \dots \dots \dots (3)$$

Имѣя рядъ смѣнныхъ колесъ (такъ наз. *серію*), мы можемъ выполнить разныя нарѣзки, а вставкой промежуточнаго колеса можемъ мѣнять направленіе вращенія винта и, слѣд., выполнять какъ правую, такъ и лѣвую рѣзбу. Въ последнее время, однако, вмѣсто такой системы колесъ примѣняютъ иногда червячную передачу для приведенія въ движеніе супорта. На фиг. 65 схематически представлено подобное устройство. Червякъ E сидитъ на шпинделѣ A передней бабки и при-

водитъ во вращеніе червячное колесо M , а вмѣстѣ съ нимъ колесо K_1 K_2 . На продолженіи винта суппорта B сидитъ колесо K_3 . Колеса K всѣ коническія.

Колеса K_1 и K_2 , соединенныя общей втулкой, могутъ быть немного передвигаемы вдоль оси C , и мы можемъ такимъ образомъ заставить спѣпляться съ колесомъ K_3 или колесо K_1 , или колесо K_2 ; этимъ дается возможность сообщить винту суппорта вращеніе въ ту или другую сторону.

Червячное колесо смѣнное, и по числу его зубцовъ, числу винтовыхъ нитокъ на червякѣ E и шагу винта B не трудно опредѣлить шагъ нарѣзки на обрабатываемомъ предметѣ.

Къ числу рядовыхъ соединеній относятся также различные *счетчики чиселъ оборотовъ*. Такъ, напр., для отсчитыванія единицъ, десятковъ и проч. можно употребить слѣдующее соединеніе: на ось A , непосредственно соединенную такъ или иначе съ той, число оборотовъ которой (за извѣстный промежутокъ времени) мы хотимъ сосчитать, мы насаживаемъ наглухо колесо съ *однимъ* зубцомъ; слѣдующая ось B (фиг. 66) имѣетъ колесо съ 10 впадинами, соотвѣтствующими каждой зубцу колеса A . Если на осяхъ A и B посадимъ указатели, ходящіе по циферблатамъ, то указатель, соединенный съ колесомъ A , будетъ, очевидно, показывать *десятыя* части, а указатель B —*единицы* оборотовъ, если циферблаты имѣютъ дѣленія 0, 1, 2, . . . , 8, 9.

Далѣе, на ту же ось B мы можемъ посадить еще одно колесо съ однимъ зубцомъ, подобное колесу A , а на слѣдующей оси C —колесо съ десятию впадинами; тогда указатель, соединенный съ C , будетъ давать на своемъ циферблатѣ *десятки* оборотовъ и т. д. При такомъ устройствѣ послѣ полного оборота какой-либо оси слѣдующая повернется на $\frac{1}{10}$ оборота.

Другой способъ счета оборотовъ основывается на *относительномъ движеніи двухъ колесъ, оси которыхъ совпадаютъ*.

Червякъ E (фиг. 67) сидитъ на оси B и одновременно зацѣпляется съ колесами M и N , изъ которыхъ одно, N , сидитъ *вольно* на оси A , а другое, M , съ тою же осью A соединено наглухо. Колесо N на передней сторонѣ имѣетъ два циферблата: внутренній и внѣшній; на внутренній указываетъ стрѣлка K_2 , соединенная съ осью A , а на внѣшній—стрѣлка K_1 , неподвижно укрѣпленная въ станкѣ. Вольно-сидящее колесо N имѣетъ 100 зубцовъ, колесо M —101 зубецъ. При одномъ оборотѣ червяка колесо N повернется на $\frac{1}{100}$ оборота, и, значитъ, указатель k_1 будетъ указывать на шкалѣ единицы и десятки оборотовъ червяка до 100. За 101 оборотъ червяка колесо N сдѣлаетъ $(1 + \frac{1}{100})$ оборота, колесо же M сдѣлаетъ лишь одинъ оборотъ; иными словами, оно отстанетъ отъ колеса N , и указатель k_2 подвинется относительно внутренней скалы на *одно дѣленіе*. Такимъ образомъ, на внутренней шкалѣ будутъ отсчитываться сотни оборотовъ до 10.000.

Переходя къ вопросу о рядовомъ соединеніи для какого-нибудь даннаго передаточнаго числа, можемъ видѣть, что если число это не особенно сложно, то не трудно разбить его всегда на произведеніе такихъ дробей, чтобы каждая изъ нихъ не превосходила допускаемыхъ на практикѣ передаточныхъ чиселъ, а также, чтобы числители и знаменатели этихъ дробей, выражающіе числа зубцовъ колесъ, не уклонялись ни въ ту, ни въ другую сторону отъ ходовыхъ чиселъ зубцовъ (не были бы меньше 6 или больше 150 и т. д.).

Если требуется выполнить, напр., передачу $\frac{1}{60}$, то, разбивая ее на 2, съ 6-ю зубцами у каждаго изъ ведущихъ колесъ, имѣемъ:

$$\frac{1}{60} = \frac{6 \cdot 6}{2160} = \frac{6}{45} \cdot \frac{6}{48};$$

такимъ образомъ, у большихъ колесъ числа зубцовъ будутъ 40 и 48.

Если передаточное число весьма сложно или если разбить его на нѣсколько дробей по указанному выше способу почему-либо нельзя, то приходится прибѣгнуть къ приближенному способу. Можно, напри- мѣръ, вмѣсто даннаго передаточнаго числа взять въ нѣкоторыхъ слу- чаяхъ приближенное къ нему, такое, чтобы оно хорошо разлагалось на рядъ болѣе простыхъ дробей. Такимъ образомъ, передача получается приближенной.

Пусть, напр., требуется, чтобы одна стрѣлка показывала часы, а другая—совершала полный оборотъ по циферблату за время обращенія луны, равное 29 дн. 12 час. 44 мин. (приблизительно).

Обращая это число въ часы, получаемъ $\frac{42524}{60}$ часовъ. Слѣдова- тельно, въ то время, какъ одна стрѣлка (часовая) совершаетъ $\frac{1}{12}$ обо- рота, другая совершаетъ $\frac{60}{42524}$ оборота; поэтому передаточное число въ данномъ случаѣ равно

$$\frac{60}{42524} : \frac{1}{12} = \frac{720}{42524} = \frac{180}{10631}.$$

Число, стоящее въ знаменателѣ получившейся у насъ дроби, первоначальное, значитъ, разложеніе на простѣйшія дроби невозможно. Но если вмѣсто 42524 мы возьмемъ число 42525, то получимъ:

$$\frac{720}{42525} = \frac{80}{4725} = \frac{8}{75} \cdot \frac{10}{63}.$$

Такимъ образомъ путемъ пробъ всегда можно подобрать удобныя пе- редачи.

При сложныхъ передаточныхъ числахъ часто бываетъ полезно употреблять способъ Гюйенса, состоящій въ томъ, что данную дробь разлагаемъ въ непрерывную и находимъ рядъ подходящихъ дробей.

Пусть послѣдняя подходящая дробь есть $\frac{n}{m}$, а данная $\frac{a}{b}$; тогда, какъ извѣстно, существуетъ соотношеніе

$$am - bn = 1 \dots \dots \dots (1)$$

Если какая-либо дробь $\frac{x}{y}$ есть одна изъ дробей, близко подходящихъ къ данной $\frac{a}{b}$, то разность между ними $\left(\frac{a}{b} - \frac{x}{y}\right)$ должна быть малой величиной. Мы имѣемъ:

$$\frac{a}{b} - \frac{x}{y} = \frac{ay - bx}{by} \dots \dots \dots (2)$$

Для того, чтобы разность $\frac{a}{b} - \frac{x}{y}$ была достаточно малой, нужно, чтобы въ правой части равенства (2) числитель былъ достаточно малымъ сравнительно съ знаменателемъ, by . Пусть этотъ числитель есть k , гдѣ k —нѣкоторая величина, сравнительно съ by очень малая:

$$ay - bx = k \dots \dots \dots (3)$$

Сопоставляя равенства (1) и (3), находимъ, что можно положить $y = mk$ и $x = nk$ (послѣ умноженія обѣихъ частей рав. (1) на k), или вообще: $y = mk + \mu b$, и $x = nk + \mu a$.

Подбирая теперь числа k и μ , можемъ получить такія значенія x и y , при которыхъ дробь $\frac{x}{y}$ хорошо разлагается и достаточно близка къ $\frac{a}{b}$.

Методъ Брокко, также дающій возможность получать удобныя для разложенія дроби и разбивать соотвѣтственно передачу, состоитъ въ слѣдующемъ:

Пусть данное передаточное число есть $\frac{m}{n}$; оно, положимъ, слишкомъ сложно и не допускаетъ разложенія. Мы попрежнему обращаемъ его въ непрерывную дробь и находимъ подходящія дроби. По свойству подходящихъ дробей мы знаемъ, что если двѣ послѣдовательныя подходящія дроби суть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, то всякая дробь, заключенная между ними, будетъ болѣе сложной, чѣмъ эти двѣ. То же замѣчаніе относится вообще ко всякимъ двумъ дробямъ, удовлетворяющимъ соотношенію

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}.$$

Дробь $\frac{a+c}{b+d}$, какъ не трудно убѣдиться, находится именно въ

такомъ соотношеніи съ дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Такимъ образомъ, если послѣ указаннаго обращенія въ непрерывную дробь и полученія подходящихъ эти послѣднія окажутся неудобными, то, взявъ двѣ подходящія дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, мы находимъ затѣмъ цѣлый рядъ другихъ подходящихъ дробей, интерполируя сначала между $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, т.-е. составляя дробь $\frac{a+c}{b+d}$, потомъ между этой и каждой изъ дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и т. д.

Перейдемъ теперь къ тому случаю соединеній колесъ, при которомъ оси нѣкоторыхъ колесъ имѣютъ сами движеніе около неподвижной оси.

Представимъ себѣ такое соединеніе: колесо N (фиг. 68), сидящее на оси A , зацѣпляется съ колесомъ n , сидящимъ на оси B ; на той же оси B сидитъ колесо N_1 , зацѣпляющееся съ колесомъ n_1 , вольно сидящимъ на оси A . Ось B сама сидитъ на рычагѣ AB , могущемъ вращаться около A .

Пусть колесо N совершаетъ z оборотовъ; при неподвижномъ рычагѣ колесо n совершило бы z_1 оборотовъ, при чемъ

$$z_1 = \frac{N}{n} \cdot \frac{N_1}{n_1} \cdot z.$$

Если же рычагъ совершаетъ въ то же самое время p оборотовъ въ ту же сторону, что и N , то разсмотрѣніе соотносительныхъ движеній мы можемъ свести опять къ случаю неподвижнаго рычага, если дадимъ всей системѣ скорость вращенія, равную и противоположную скорости рычага; исполнивъ это, имѣемъ

$$z_1 - p = \frac{N}{n} \cdot \frac{N_1}{n_1} (z - p),$$

или иначе

$$z_1 - p = k (z - p),$$

гдѣ k есть передаточное число между колесами N и n_1 .

Точно такъ же, если мы имѣемъ послѣднее колесо n_1 сидящимъ не на первой оси A , а на томъ же рычагѣ AB (фиг. 69), то число оборотовъ этого колеса около его оси опредѣлится изъ того же соотношенія. Дѣйствительно, то обстоятельство, что колесо n_1 участвуетъ вмѣстѣ съ рычагомъ во вращеніи около оси A , можно разсматривать какъ вращеніе колеса около своей оси B со скоростью рычага и параллельное перенесеніе по кругу радіуса AB . Слѣдовательно, число оборотовъ колеса n_1 опредѣлится какъ сумма числа оборотовъ рычага p и числа

оборотовъ, происходящаго вслѣдствіе вращенія колеса N относительно рычага, т.-е. z_1 (кол. n_1) $= p + k(z - p)$; параллельное перенесеніе къ вращенію не прибавитъ ничего.

Если между колесами N и n_1 имѣется лишь одно колесо и если колесо N неподвижно, то, такъ какъ $N_1 = n$, мы находимъ: $z_1 = p - \frac{N}{n_1} \cdot p$, а при $N = n_1$ получимъ $z_1 = 0$, т.-е. колесо n_1 въ этомъ случаѣ будетъ лишь передвигаться параллельно самому себѣ, что, впрочемъ, въ данномъ случаѣ можно видѣть и прямо: промежуточное колесо, очевидно, нисколько не вліяетъ на отношеніе чиселъ оборотовъ, а заставляетъ лишь колесо n_1 вращаться относительно рычага въ сторону, противоположную его вращенію. Въ такомъ частномъ видѣ механизмъ носитъ названіе *парадокса Ферюссона*.

Если, далѣе, промежуточнаго колеса нѣтъ, и если колеса N и n_1 равны (они въ этомъ случаѣ непосредственно сцѣпляются одно съ другимъ), то, очевидно, колесо n_1 совершитъ около своей оси $2p$ оборотовъ при неподвижномъ колесѣ N въ ту же сторону, что и рычагъ. Обратно, если мы заставимъ колесо n_1 перемѣщаться параллельно самому себѣ, то колесо N совершитъ въ то же время $2p$ оборотовъ въ сторону вращенія рычага. Это соображеніе положено въ основу механизма *Уатта*, гдѣ рычагъ K (фиг. 70), качаясь около O , увлекаетъ во вращеніе рычагъ AB ; A есть ось вала, съ которымъ соединено наглухо колесо A . Тяга M берется достаточно длинной для того, чтобы при качаніи коромысла K въ небольшихъ предѣлахъ можно было предположить, что она перемѣщается параллельно самой себѣ, т.-е., иными словами, что колесо B , неизмѣнно соединенное съ этой тягой M , не имѣетъ вращательнаго движенія, а лишь одно поступательное. Легко видѣть, что при качаніи рычага AB , вызываемомъ, какъ было указано, качаніемъ коромысла K , колесо A будетъ вращаться вдвое быстрее рычага AB .

Наглядно можемъ представить себѣ дѣйствіе механизма, если возьмемъ два равные круга A и B (фиг. 71) и прокатимъ, положимъ, колесо B по A , положимъ, въ положеніе B . Радиусъ этого колеса BP приметъ теперь положеніе B_1P_2 , при чемъ дуга OP будетъ равна OP_2 .

Для того, чтобы этотъ радиусъ BP и при новомъ положеніи B_1 круга B сохранилъ свое направленіе, необходимо теперь повернуть колесо A на уголъ, равный углу $P_2B_1P_1 = 2\varphi$; тогда точка P_2 придетъ въ P_1 и радиусъ BP окажется въ положеніи B_1P_1 , параллельномъ прежнему. Обратно, если при своемъ вращеніи около колеса A колесо B около своей оси B вращенія имѣть не будетъ, то именно съ этой удвоенной угловой скоростью и будетъ вращаться колесо A *).

*) Механизмъ этотъ, какъ называемое *планетное колесо Уатта*, былъ примѣненъ имъ для передачи движенія отъ коромысла K паровой машины (фиг. 70) главному валу A ; обыкновеннымъ кривошипнымъ механизмомъ Уаттъ воспользоваться не могъ, такъ какъ этотъ послѣдній механизмъ былъ въ то время патентованъ.

Если при вращеніи опредѣленнаго предмета, наприм., рѣзца въ цилиндро-сверлильныхъ станкахъ, требуется имѣть еще его медленное поступательное передвиженіе, то можно примѣнить рядовое соединеніе, разобранный въ первомъ примѣрѣ. Рѣзцы s, s (фиг. 72) укрѣплены на шайбѣ E , прикрѣпленной болтами къ шайбѣ D , снабженной выступомъ, позволяющимъ ей перемѣщаться вдоль пустотѣлаго вала L , на которомъ имѣется продольный вырѣзъ, въ которомъ и скользитъ этотъ выступъ. Шайба D , кромѣ того, представляетъ собою гайку для винта A , помѣщеннаго внутри этого пустотѣлаго вала L . На этомъ же валу L сидитъ (на шпонкѣ) рычагъ M , несущій на себѣ ось съ колесами n и N_1 ; наглухо съ винтомъ A соединено колесо n_1 ; колесо N наглухо соединено съ станиной. Пустотѣлый валъ L получаетъ вращеніе отъ приводнаго фабричнаго вала и заставляетъ поэтому вращаться и шайбу E съ рѣзцами s, s и рычагъ M съ его колесами. При p оборотовъ рычага винтъ сдѣлаетъ z_1 оборотовъ, гдѣ $z_1 = p - \frac{N}{n} \cdot \frac{N_1}{n_1} \cdot p$, или $z_1 = p \left(1 - \frac{NN_1}{nn_1} \right)$, и, слѣд., если шагъ винта есть h , то рѣзецъ подвигается на $h(z_1 - p)$ или на $\left(-\frac{NN_1}{nn_1} ph \right)$.

Подобное же сочетаніе зубчатыхъ колесъ можно представить себѣ и для конической передачи—аналогично цилиндрической. Колесо N (фиг. 73) наглухо соединено съ осью A , а колесо n_1 —вольно; колеса n и N_1 вращаются около оси, сидящей на рычагѣ K , который самъ можетъ вращаться около оси A . При неподвижномъ рычагѣ K колесо n_1 , при z оборотахъ колеса N , сдѣлаетъ $\left(-\frac{NN_1}{nn_1} z \right)$ оборотовъ, и, слѣдовательно, при p оборотахъ рычага K сдѣлаетъ $z_1 = p - \frac{NN_1}{nn_1} (z - p)$ оборотовъ (передаточное число является здѣсь отрицательнымъ по смыслу передачи вращенія). Приборъ этотъ иногда употребляется въ нѣкоторыхъ прядильныхъ машинахъ.

Механизмъ можно внѣшнимъ образомъ измѣнить: колеса n и N_1 соединить въ одно ($N_1 = n$); колеса N и n_1 дѣлаются равными (фиг. 74); рычагъ K выполненъ въ видѣ цилиндрическаго зубчатаго колеса K , внутри котораго помѣщается ось колеса n . Колесо K сидитъ, конечно, на оси A вольно, точно такъ же, какъ и колесо n_1 . Для симметріи прибавляютъ еще колесо n_2 . Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ: $z + z_1 = 2p$. Измѣняя число оборотовъ колеса K , можно измѣнить и число z_1 .

Отд. 2. Отношеніе скоростей перемѣнно,—направленій постоянно.

2

Шарниръ Гука.

Въ порядкѣ послѣдовательности классификаціи Виллиса мы теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію передачи при посредствѣ промежуточныхъ твердыхъ звеньевъ, гдѣ отношеніе скоростей перемѣнно, а направленій—постоянно. Здѣсь мы остановимся на одномъ изъ наиболѣе употребительныхъ механизмовъ, а именно на *шарниръ Гука*.

Шарниръ Гука представляетъ изъ себя муфту для двухъ валовъ, геометрическія оси которыхъ пересѣкаются въ точкѣ O (фиг. 75). Муфта устраивается въ видѣ двухъ перекладинъ, соединенныхъ крестообразно подъ прямымъ угломъ другъ къ другу; оси перекладинъ пересѣкаются въ той же точкѣ O , въ которой пересѣкаются и оси валовъ; каждая перекладина перпендикулярна къ своему валу: $CD \perp OB$, $EF \perp OA$. Концы валовъ снабжены вилами, въ которыя и входятъ, какъ шипы, концы перекладинъ.

Механизмъ, конечно, можетъ быть видоизмѣняемъ съ внѣшней стороны; напр., вмѣсто перекладинъ берутъ иногда шарикъ (фиг. 76), въ которомъ дѣлаютъ 4 радіальныхъ углубленія; соотвѣтствующіе осямъ этихъ углубленій радіусы лежатъ въ одной плоскости, образуя притомъ 2 діаметра сферы, перпендикулярные другъ другу; центръ этой сферы долженъ лежать въ точкѣ O . Въ упомянутыя углубленія ходятъ шипики каждого изъ валовъ. Сущность дѣйствія остается, конечно, та же, что и прежде.

При вращеніи вала A (фиг. 75) ось перекладины EF будетъ двигаться въ плоскости, перпендикулярной къ оси A , вращаясь около центра O со скоростью вращенія вала A ; точно такъ же перекладина CD во все время вращенія будетъ оставаться въ плоскости, проходящей также черезъ точку O и перпендикулярной къ оси B ; уголъ между плоскостями будетъ равенъ углу между осями. Опишемъ мысленно изъ центра O сферу какого-либо радіуса. Ось каждой изъ перекладинъ будетъ діаметромъ этой сферы. Пусть плоскости движенія этихъ діаметровъ будутъ OC_0H и OC_0KF (фиг. 77). Разсматривать движеніе цѣлыхъ діаметровъ мы не будемъ, а разсмотримъ движеніе радіусовъ OC_0 и OF_0 , представляющихъ какъ бы половины перекладинъ,—другія половины движутся совершенно такъ же, какъ эти.

Два эти радіуса OC_0 и OF_0 , движутся въ своихъ плоскостяхъ такъ, что уголъ COF между ними всегда остается прямымъ, такъ какъ перекладины соединены другъ съ другомъ неизмѣнно подъ прямымъ угломъ.

Начальнымъ положеніемъ радіусовъ условимся считать одно изъ тѣхъ, при которыхъ радіусы OC_0 и OF_0 лежатъ въ плоскости чертежа, перпендикулярной къ плоскости, проходящей черезъ оси A и B ; радіусъ OC_0 въ этотъ моментъ будетъ перпендикуляренъ къ этой послѣдней

плоскости (A, B), т.-е. къ обѣимъ осямъ. Пусть теперь этотъ радіусъ OC_0 передвинулся въ своей плоскости OC_0H на уголъ φ и занялъ положеніе OC ; радіусъ OF_0 также передвинется въ своей плоскости OC_0KF_0 на нѣкоторый уголъ ψ , и займетъ нѣкоторое опредѣленное положеніе OF ; при этомъ, какъ было указано, уголъ COF будетъ попрежнему прямой.

Спросимъ себя, каково соотношеніе между этими двумя углами φ и ψ . Для вывода его намъ придется воспользоваться теперь одной изъ основныхъ формулъ сферической тригонометріи, выводъ которой мы ниже и помѣщаемъ.

Пусть изъ точки O , какъ изъ центра, описана сфера радіусомъ, равнымъ единицѣ, и пусть на этой сферѣ лежитъ сферическій треугольникъ ABC (фиг. 78), дуги котораго AB , BC и AC представляютъ собою дуги большихъ круговъ. Положимъ, наконецъ, что двѣ изъ этихъ дугъ, напр., AB и AC , не превышаютъ четверти окружности большого круга, т.-е. меньше $\frac{1}{2}\pi$.

Проведемъ радіусы OA , OB и OC и два послѣдніе продолжимъ до пересѣченія въ точкахъ Q и P съ касательными, проведенными въ вершинѣ A къ сторонамъ AB и AC . Касательныя и радіусы пересѣкутся такъ, какъ это изображено на чертежѣ, только въ томъ случаѣ, если дуги AB и AC меньше $\frac{1}{2}\pi$. Такъ какъ радіусъ сферы принять за единицу, то, какъ видно непосредственно изъ чертежа: $AQ = tg \angle AOB$; если же мы условимся, уголъ AOB и ему подобные измѣрять дугами, ихъ стягивающими, то предыдущее уравненіе напишется такъ: $AQ = tg \smile AB$, или, обозначая $\smile AB$ черезъ c , подобно тому, какъ это дѣлается въ плоской тригонометріи, находимъ: $AQ = tg c$. Подобнымъ же образомъ мы найдемъ: $AP = tg b$, $OQ = sec c$, $OP = sec b$.

Кромѣ того, на основаніи формулъ плоской тригонометріи, изъ треугольниковъ OPQ и APQ имѣемъ:

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos \alpha,$$

и

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cos A.$$

Сравнивая эти выраженія между собою и съ выведенными выше равенствами, получаемъ:

$$tg^2 b + tg^2 c - 2tg b \cdot tg c \cdot \cos A = sec^2 b + sec^2 c - 2sec b \cdot sec c \cdot \cos \alpha.$$

Замѣняемъ $sec^2 x$ черезъ $(1 + tg^2 x)$ и сокращаемъ:

$$tg^2 b + tg^2 c - 2tg b \cdot tg c \cdot \cos A = 1 + tg^2 b + 1 + tg^2 c - 2sec b \cdot sec c \cdot \cos \alpha,$$

или

$$- 2tg b \cdot tg c \cdot \cos A = 2 - 2sec b \cdot sec c \cdot \cos \alpha,$$

Дифференцируя по t ур-ніе (1), находимъ:

$$\frac{1}{\cos^2 \psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \cos \alpha,$$

или, въ виду ур-нія (2), пишемъ:

$$\frac{1}{\cos^2 \psi} \cdot \omega' = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \omega \cdot \cos \alpha,$$

откуда

$$\omega' = \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \varphi} \cdot \omega \cos \alpha \dots \dots \dots (3)$$

Но изъ ур-нія (1) имѣемъ

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha,$$

иначе

$$\frac{\sin^2 \psi}{\cos^2 \psi} = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot \cos^2 \alpha;$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ по единицѣ, получаемъ:

$$\frac{\sin^2 \psi + \cos^2 \psi}{\cos^2 \psi} = \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

откуда получаемъ:

$$\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \psi} = \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha + 1 - \sin^2 \varphi;$$

иначе:

$$\frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{1 - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha},$$

и теперь ур-ніе (3) приметъ видъ:

$$\omega' = \omega \cdot \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha} \dots \dots \dots (4)$$

Формула (4) показываетъ намъ, что при равномерномъ вращеніи одного вала другой вращается неравномерно; это видно изъ того, что въ отношеніе скоростей входитъ переменная величина $\sin^2 \varphi$. При $\varphi = 0$ имѣемъ $\omega' = \omega \cos \alpha$, а при $\varphi = 1/2 \pi \dots \omega' = \frac{\omega}{\cos \alpha}$. При небольшихъ углахъ α , когда $\cos \alpha$ мало отличается отъ единицы, неравномерность выходитъ небольшая.

Представимъ себѣ теперь два вала A и C (фиг. 79), соединенные промежуточнымъ между ними валомъ B при помощи двухъ шарнировъ Гукъ; пусть оси обоихъ валовъ одинаково наклонены къ оси средняго.

Если вилы промежуточного вала лежатъ въ одной плоскости, то, очевидно, валъ *A* дѣйствуетъ на валъ *B* такъ же, какъ валъ *C*—на *B*, т.-е. при извѣстномъ вращеніи вала *B* валы *A* и *C* будутъ вращаться одинаково, и, слѣдовательно, если мы станемъ равномерно вращать валъ *A*, то валъ *C*, при помощи вала *B*, будетъ вращаться также равномерно и съ тою же скоростью, что и валъ *A*; понятно, что валъ *B* равномернаго вращенія имѣть не будетъ.

Тотъ же результатъ получился бы у насъ, если бы къ данной системѣ мы примѣнили соотношеніе (1). Относя ψ къ валу *B*, а φ къ *A*, находимъ для (*A*, *B*): $tg\psi = tg\varphi \cdot \cos\alpha$; пусть соотвѣтствующій уголъ поворота вала *C* равенъ φ_1 ; тогда имѣемъ: $tg\psi = tg\varphi_1 \cdot \cos\alpha_1$; здѣсь α есть уголъ между осями *A* и *B*, а α_1 —между *B* и *C*; при равенствѣ этихъ угловъ (на что было указано выше) получаемъ: $tg\varphi = tg\varphi_1$, т.-е. $\varphi = \varphi_1$.

Теперь предположимъ, что вилки вала *B* перпендикулярны другъ къ другу (фиг. 80). Валъ *C* вращаться равномерно не будетъ. На самомъ дѣлѣ, изъ того же соотношенія (1) между валами *B* и *A* имѣемъ: $tg\psi = tg\varphi \cdot \cos\alpha$; здѣсь ψ попрежнему есть уголъ поворота вала *B*, а φ —вала *A*. Для второй пары валовъ *B* и *C*, имѣемъ при углѣ φ_1 поворота вала *C*, $tg\varphi = tg\psi \cdot \cos\alpha_1$, такъ какъ теперь валъ *B* по отношенію къ *C* играетъ ту же роль, что у первой пары *A* по отношенію къ *B*. Два послѣднія ур-нія даютъ намъ соотношеніе $tg\varphi_1 = tg\varphi \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1$; оно показываетъ намъ, что углы φ и φ_1 одинаковыми быть не могутъ никогда, за исключеніемъ того случая, когда углы α обращаются въ нуль: $\alpha = \alpha_1 = 0$; но въ этомъ послѣднемъ случаѣ всѣ три вала по существу обращаются въ одинъ.

Замѣтимъ, наконецъ, что при $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ передача при помощи шарнира Гука становится невозможной.

Отд. 3. Отношеніе скоростей и направленій перемѣнно.

Къ этому классу механизмовъ относятся такъ называемые *направляющіе* механизмы. Цѣль ихъ при помощи ряда шарнирныхъ соединений получить прямолинейное движеніе опредѣленной точки механизма. Практическое примѣненіе эти механизмы находятъ себѣ тамъ, гдѣ почему-либо нежелательно устройство направляющихъ для прямолинейнаго движенія опредѣленной части механизма, подобное тому, какое имѣется въ паровой машинѣ для ползуна. Въ направляющихъ механизмахъ эта прямая получается не вслѣдствіе присутствія призматическихъ направляющихъ, а какъ *траекторія* нѣкоторой опредѣленной точки механизма.

Механизмы, относящіеся сюда, можно раздѣлить на *приближенные* и *точные*. Въ первыхъ прямая замѣняется нѣкоторой кривой траекто-

ріей, близко къ прямой подходящей и не трудно выполняемой; въ другихъ—траекторія будетъ теоретически точной прямой.

Механизмъ Эванса. Механизмъ Эванса принадлежитъ къ числу *приближенныхъ* направляющихъ механизмовъ и основанъ на томъ, извѣстномъ изъ кинематики, свойствѣ отрѣзка прямой, AB , по которому середина его, точка C (фиг. 81), при скользяніи концовъ A и B по сторонамъ прямого угла BOA описываетъ окружность центра O и радіуса OC .

Если мы возьмемъ довольно длинный стержень AB и поставимъ его подъ небольшимъ угломъ ψ къ линіи OA (фиг. 82), то при перемѣщеніи конца B стержня отъ B къ O и дальше къ B_1 на $OB_1 = OB$ получится очень малое передвиженіе точки A , могущее быть выраженнымъ въ видѣ: $AB - AB \cos \psi = a(1 - \cos \psi)$, гдѣ $a = AB$; передвиженіе конца B въ то же время выразится черезъ $a \sin \psi$, и отношеніе обоихъ перемѣщеній будетъ равно:

$$\frac{a(1 - \cos \psi)}{a \sin \psi} = \frac{2 \sin^2 \frac{\psi}{2}}{2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}.$$

Какъ видимъ, при достаточно маломъ углу ψ это отношеніе очень мало, между тѣмъ какъ въ то же самое время передвиженіе конца B , при достаточно длинномъ стержнѣ, можетъ быть достаточно велико.

Если мы соединимъ точку C , середину стержня, съ центромъ O рычагомъ CO , могущимъ вращаться около этой точки O , а конецъ A заставимъ двигаться по прямой OA , то конецъ B опишетъ прямую OB . Такъ какъ перемѣщеніе точки A мало, то вмѣсто малаго отрѣзка прямой AA_0 можно взять дугу круга достаточно большаго радіуса, для чего соединяемъ точку A рычагомъ съ нѣкоторой неподвижной точкой O_1 , находящейся на перпендикулярѣ къ OA_0 , проведенномъ изъ A_0 —средняго положенія точки A ; при этомъ A будетъ описывать малыя дуги круга радіуса O_1A ; точка B будетъ двигаться, собственно говоря, не по прямой OB , а по нѣкоторой кривой, которая можетъ однако при соотвѣтственно выбранныхъ a , ψ и радіусѣ O_1A , весьма близко подходить къ этой прямой OB ; во всякомъ случаѣ эта кривая съ этой прямой будетъ имѣть три общія точки: B , O и B_1 , гдѣ BB_1 есть весь размахъ точки B .

Съ геометрической стороны движеніе точки B будетъ движеніемъ одной изъ точекъ прямого отрѣзка AC , опирающагося своими концами на двѣ окружности радіусовъ O_1A и OC .

Разсмотрѣнный приближенный направляющій механизмъ носитъ названіе *механизма Эванса* и употребляется въ индикаторахъ,—замѣтимъ, что вмѣсто точки C можно взять и другую точку отрѣзка AB ; какъ извѣстно, при движеніи отрѣзка въ углу она опишетъ эллипсъ; найдя центръ кривизны эллипса для средняго положенія точки, замѣ-

няемъ дугу эллипса дугою окружности, имѣющей центръ въ центрѣ кривизны.

Параллелограммъ Уатта. Механизмъ Уатта, такъ же, какъ и механизмъ Эванса, принадлежитъ къ числу *приближенныхъ* направляющихъ механизмовъ. Представимъ себѣ рычагъ OA (фиг. 83) съ шарнирнымъ параллелограммомъ $ABCD$. Пусть рычагъ качается около средняго его положенія OA_0 , отклоняясь въ обѣ стороны на уголъ α . Заставимъ точку B двигаться по прямой, перпендикулярной къ OA_0 и дѣлящей стрѣлку A_0N пополамъ; при этомъ точка C опишетъ нѣкоторую кривую CC_0C_1 ; обратно, если по этой кривой мы будемъ вести точку C , то точка B будетъ двигаться по прямой. Кривую C_1C_0C мы замѣняемъ окружностью, проходящей черезъ точки C , C_0 и C_1 , т.-е. черезъ среднее и два крайнихъ положенія точки C ; центръ этой окружности будетъ лежать на линіи B_0C_0 средняго положенія точекъ B и C . Соединяемъ теперь рычагомъ точку C съ найденнымъ центромъ O_1 ; теперь при качаніи рычага OA точка B будетъ описывать уже не прямую, а нѣкоторую кривую, которая однако при соотвѣтствующемъ выборѣ элементовъ этого механизма, можетъ весьма близко подходить къ прямой. Ходъ точки B , т.-е. отрѣзокъ BB_1 , будетъ, конечно, равенъ отрѣзку AA_1 .

Нетрудно убѣдиться, что мы имѣемъ здѣсь движеніе, съ геометрической точки зрѣнія подобное движенію въ *механизмъ Эванса*. На самомъ дѣлѣ, продолживъ BC и провода $OK \parallel CD$, получаемъ:

$$OK = CD = const$$

и

$$CK = DO = const;$$

слѣдовательно, мы имѣемъ движеніе отрѣзка CK постоянной величины, опирающаго своими концами на окружности радіусовъ O_1C и OK и центровъ O и O_1 ; точка K будетъ описывать дугу K_1K , гдѣ K_1 лежитъ, очевидно, на продолженіи B_0C_0 и соотвѣтствуетъ точкѣ K , когда BC приметъ положеніе B_0C_0 . Обыкновенно ходъ точки B дается заранѣе. Имѣя его, выбираютъ длину рычага OA (часто берутъ $OA = 1,5 BB_1$), и чертятъ дугу AA_0A_1 такъ, чтобы хорда AA_1 равнялась данному ходу; находятъ затѣмъ стрѣлку ея A_0N , дѣлятъ ее пополамъ и проводятъ черезъ точку дѣленія прямую, параллельную AA_1 , которая и будетъ предполагаемой траекторіей точки B ; задаются затѣмъ длинами AB и AD и чертятъ рычагъ и параллелограммъ въ обоихъ крайнихъ положеніяхъ и въ среднемъ (т.-е. $ABCD$, $A_0B_0C_0D_0$ и $A_1B_1C_1D_1$) такъ, конечно, чтобы точка B приходилась на своей прямой. Такимъ образомъ находятъ три соотвѣтствующихъ положенія точки C , т.-е. точки C , C_0 и C_1 , и ищутъ центръ окружности, проходящей черезъ эти три точки. Затѣмъ соединяютъ точку C съ центромъ O_1 при помощи рычага, и тогда, при

качаніи рычага AO около центра O , а—рычага O_1C около O_1 , точка B приблизительно будетъ описывать прямую BB_0B_1 .

Замѣтимъ, что если мы соединимъ прямою OB точки O и B и опредѣлимъ точку пересѣченія этой прямой BO съ прямой CD , то точка E также будетъ описывать прямую,—это видно изъ того, что фигуры ODE и OAB всегда остаются подобными другъ другу; на самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ равенство отношеній:

$$DE : AB = DO : OA;$$

значить, отношеніе $DE : AB$ есть *const.*; прямая AB и DE всегда между собою параллельны; такимъ образомъ, точки B и E будутъ всегда лежать на одной прямой съ точкой O ; поэтому если B будетъ двигаться по прямой то, въ виду постоянства отношенія $BO : EO$, точка E будетъ двигаться по прямой, параллельной первой.

Поэтому, найдя такую точку E , можно удалить части AD , AB и BC , оставивъ лишь рычаги OD , O_1C и звено CD ; точка E этого звена и будетъ описывать прямую. Механизмъ будетъ имѣть видъ, изображенный на фиг. 84.

Механизмъ Поселье. Этотъ механизмъ принадлежитъ къ разряду *точныхъ* направляющихъ механизмовъ и основанъ на такъ называемой *инверсии* или помноженіи кривыхъ.

Пусть мы имѣемъ окружность O и точку A (фиг. 85) и нѣкоторый данный по величинѣ отрѣзокъ прямой k . Проводимъ изъ точки A лучъ AL , пересѣкающій окружность O въ точкахъ B и B_1 и ищемъ на томъ же лучѣ AL такую точку C , чтобы произведеніе $AB \times AC$ равнялось данной величинѣ k^2 . Оказывается, что геометрическимъ мѣстомъ такихъ точекъ C будетъ нѣкоторая опредѣленная окружность O_1 . Дѣйствительно, подыскавъ еще такую точку C_1 , чтобы произведеніе $AB_1 \times AC_1$ равнялось опять k^2 , можемъ написать

$$AB \times AC = k^2,$$

и

$$AB_1 \times AC_1 = k^2.$$

Перемноживъ, имѣемъ:

$$(AB \times AB_1) \cdot (AC \times AC_1) = k^4.$$

Но произведеніе $(AB_1 \times AB)$ есть величина постоянная, равная AT^2 , гдѣ AT есть касательная къ кругу O изъ точки A , значить, произведеніе $AC \times AC_1$ есть также величина постоянная, что и показываетъ намъ, что точки C и C_1 лежатъ также на окружности,—это и будетъ упомянутая выше окружность O_1 . Не трудно убѣдиться въ томъ, что обѣ общія касательныя къ этимъ двумъ окружностямъ $T_0T'_0$ проходятъ черезъ ту же точку A .

Въ томъ частномъ случаѣ, когда точка A лежитъ на окружности O (фиг. 86), геометрическимъ мѣстомъ точекъ C будетъ прямая, занимающая вполне определенное (при данномъ k) положеніе относительно круга O . Дѣйствительно, если мы проведемъ черезъ A діаметръ AA_1 , возьмемъ на немъ какую-нибудь точку K такъ, чтобы произведеніе $AA_1 \times AK$ равнялось данной величинѣ, и въ этой точкѣ K возставимъ перпендикуляръ KC къ діаметру AA_1 , то для какой-нибудь точки C этого перпендикуляра, пользуясь подобіемъ треугольниковъ ABA_1 и ACK , можемъ написать:

$$\frac{AC}{AK} = \frac{AK}{AB},$$

откуда получаемъ:

$$AK \cdot AA_1 = AC \cdot AB,$$

что и указываетъ намъ, что точка C принадлежитъ искомому геометрическому мѣсту. Такимъ образомъ, съ перемѣщеніемъ точки B по окружности O , точка C будетъ двигаться по нѣкоторой вполне определенной прямой CK . Эта идея и положена въ основу механизма *Поселье*. Здѣсь взять шарнирный ромбъ $BMCN$ (фиг. 87); точки M и N его связаны тягами AM и AN съ неподвижной точкой A , при чемъ эти рычаги AM и AN между собою равны.

Не трудно видѣть, что въ такомъ случаѣ точки A , B и C , при всѣхъ измѣненіяхъ фигуры остаются на одной прямой AC (по свойству ромба діагональ $BC \perp MN$ и дѣлитъ ее пополамъ, а вълѣдствіе равенства $MA = NA$, точка A всегда придется на этомъ же перпендикулярѣ BC).

Окружность изъ M радіуса MC проходитъ черезъ точку B , такъ какъ $MC = MB$; отсюда слѣдуетъ, что произведеніе $AB \cdot AC$ есть величина постоянная; дѣйствительно, упомянутая окружность M имѣетъ определенный радіусъ MC , а точка A находится въ определенномъ разстояніи MA отъ центра M этой окружности, и это послѣднее соотношеніе между окружностью M и точкой A имѣетъ мѣсто при всѣхъ положеніяхъ ромба. Такимъ образомъ у насъ имѣется постоянное по величинѣ произведеніе векторовъ AB и AC .

Заставимъ теперь конецъ одного вектора, B , описывать окружность, проходящую черезъ точку A (сравн. съ фиг. 86), тогда конецъ другого, точка C , опишетъ точную прямую. Выбираемъ за центръ этой окружности нѣкоторую точку O такъ, что

$$OB = OA,$$

соединяемъ ее рычагомъ съ точкой B и такимъ образомъ получаемъ направляющій механизмъ, носящій названіе механизма *Поселье* (1864 г.). Если BO не будетъ равно OA , то точка C будетъ описывать дугу нѣкоторой, вполне определенной въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, окружности.

Механизмъ Гарта. Въ механизмѣ Гарта, являющемся, какъ и механизмъ Поселъе, точнымъ направляющимъ механизмовъ, положены въ основу четыре стержня, соединенные шарнирами (фиг. 88); длины ихъ подбираются такъ, чтобы они составляли діагонали и бока равнобокой трапеціи $KPMN$. Возьмемъ на стержнѣ KN какую-нибудь точку A сдѣлаемъ ее неподвижной, такъ что стержень KN получить возможность вращенія около этой точки.

Проводимъ изъ этой точки A линію AE , параллельную NM ; точки пересѣченія ея съ діагоналями KM и PN обозначимъ черезъ B и C . Не трудно видѣть, что фигура $BPMN$ будетъ также равнобокой трапеціей. Точки B и C будутъ вполне опредѣленными точками стержней KM и PN , разъ выбрана точка A ; дѣйствительно, мы имѣемъ:

$$KB = \frac{KA}{KN} \cdot KM \quad \text{и} \quad PC = \frac{KA}{KN} \cdot PN;$$

$$\frac{KB}{KM} = \frac{KA}{KN} \quad \frac{PC}{PN} = \frac{KA}{KN}$$

выбравъ точку A , мы тѣмъ самымъ задаемся длиною KA , а этимъ, въ свою очередь, опредѣляются длины KB и PC , т.-е. точки B и C .

Около трапеціи $BPMN$, какъ равнобокой, можно описать кругъ; пусть онъ пересѣчетъ прямую KN еще въ точкѣ F . Сѣкущія KBM и KNF даютъ соотношенія:

$$KF \cdot KN = KM \cdot KB = const;$$

откуда слѣдуетъ, что F есть нѣкоторая вполне опредѣленная точка прямой KN . Далѣе, сѣкущія изъ точки A , AC и AE , даютъ:

$$AE \cdot AN = AC \cdot AB = const,$$

что показываетъ намъ, что, если мы соединимъ точку B рычагомъ съ неподвижной точкой O , такъ что она будетъ описывать дугу окружности радіуса OB , то точка C будетъ описывать или прямую, при $OB = OA$, или окружность. Весь механизмъ будетъ состоять только изъ пяти стержней: KN , KM , PM , PN и OB , при двухъ неподвижныхъ точкахъ O и A .

Винтовые пары.

Винтовое движеніе, какъ мы знаемъ, есть сочетаніе вращательнаго движенія около нѣкоторой оси и поступательнаго вдоль той же оси; но одно и то же вращательное движеніе, положимъ, происходящее по часовой стрѣлкѣ, можно сочетать съ поступательнымъ двояко: одинъ разъ при одномъ направленіи поступательнаго движенія, другой разъ при противоположномъ, что, въ свою очередь, обуславливаетъ различіе винтовыхъ паръ.

Пусть передъ нами находится винтовая пара; будемъ смотрѣть на нее вдоль ея оси; наръзка этой пары можетъ быть такова, что при

вращеніи по часовой стрѣлкѣ одного элемента относительно другого, остающагося неподвижнымъ, первый будетъ удаляться отъ насъ; такимъ образомъ здѣсь имѣемъ сочетаніе вращательнаго движенія съ поступательнымъ въ направленіи отъ насъ; такая нарѣзка, а вмѣстѣ съ ней и вся пара, называется *правой*. Но можно устроить нарѣзку такъ, что элементъ пары, вращаясь опять по часовой стрѣлкѣ, станетъ *приближаться къ намъ*,—въ этомъ случаѣ имѣемъ сочетаніе того же вращательнаго движенія съ поступательнымъ, совершающимся теперь въ другую сторону,—такая нарѣзка называется *лѣвой*.

Легко видѣть, что, если мы будемъ вращать элементъ пары *противъ* часовой стрѣлки, то въ первомъ случаѣ—въ случаѣ правой пары—элементъ будетъ приближаться къ намъ, а во второмъ—удаляться отъ насъ. При вращеніи элемента по часовой стрѣлкѣ на 360° , онъ, въ случаѣ правой нарѣзки,—удалится отъ насъ на величину h , равную *шагу* винтовой линіи (разстоянію двухъ сосѣднихъ точекъ винтовой линіи, лежащихъ на одной образующей цилиндра). Изъ самаго закона образованія винтовой линіи на поверхности круглаго цилиндра слѣдуетъ, что, въ случаѣ поворота элемента пары вообще на нѣкоторый уголъ φ , элементъ подвинется вдоль оси цилиндра на величину, равную $\varphi h : 2\pi$ или на αh , гдѣ α есть величина поворота въ частяхъ полного оборота.

При томъ же поворотѣ α элементъ лѣвой пары, имѣющей тотъ же шагъ h , подвинется на ту же величину αh , но въ другую сторону (къ намъ); если первую величину αh считать положительной, то вторую можно считать отрицательной. Такимъ образомъ является возможность алгебраически различать правыя и лѣвыя нарѣзки тѣмъ, что у первыхъ будемъ считать шагъ положительнымъ, у вторыхъ—отрицательнымъ; повороты же, какъ это принято вообще, считаются положительными въ направленіи часовой стрѣлки и отрицательными—въ обратную сторону.

Трехзвенная винтовая цѣпь.

Обратимся теперь къ сочетанію винтовыхъ паръ, ограничиваясь простѣйшими. Здѣсь, въ противоположность вращательнымъ и поступательнымъ парамъ, можно составить замкнутую цѣпь изъ паръ, оси которыхъ совпадаютъ, и именно изъ трехъ паръ. Дѣйствительно, не трудно представить себѣ винтъ a (фиг. 89), на оси котораго имѣется еще какой-нибудь винтъ; гайка b этого послѣдняго имѣетъ на своей внѣшней сторонѣ нарѣзку и служитъ такимъ образомъ въ то же время винтомъ, гайка для котораго c соединена неразрывно съ гайкой для a . Получаемъ такимъ образомъ цѣпь изъ трехъ одноосныхъ винтовыхъ паръ: $A(c, a)$, $B(b, a)$, $C(b, c)$. Разсмотримъ относительныя движенія звеньевъ этой цѣпи.

Повертываемъ a относительно c на α , гдѣ α выражено въ доляхъ π , и пусть b повернется относительно a на β , тогда относительно c оно повернется на $(\alpha + \beta)$, и, если шаги паръ мы назовемъ соотвѣтственно черезъ x , y и z , то найдемъ, что поступательное движеніе a относительно c равно αx , b относительно a равно βy ; слѣд., b относительно c подвинулось на $(\alpha x + \beta y)$; но такъ какъ оно повернулось въ то же время относительно c на $(\alpha + \beta)$, а шагъ этой пары (b, c) есть z , то поступательное перемѣщеніе b выразится въ то же время въ видѣ $z(\alpha + \beta)$, что даетъ намъ возможность написать равенство:

$$\alpha x + \beta y = (\alpha + \beta)z.$$

Отсюда видимъ, что при данныхъ шагахъ, т.-е. для данныхъ винтовыхъ паръ, опредѣленному повороту a звена a относительно c соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное движеніе звена b относительно того же звена c ,—другими словами, цѣпь является вполнѣ опредѣленной.

Если механизмъ былъ поставленъ на звено c , то движеніе звена b относительно c является абсолютнымъ, и, слѣдов., при поворотѣ звена a на α , звено b повернется на $\alpha + \beta = \alpha \cdot \frac{x-y}{z-y}$ и подвинется на $(\alpha + \beta)z = \alpha z \cdot \frac{x-y}{z-y}$, какъ это видно изъ уравненія, связывающаго α и β .

Если механизмъ поставленъ на звено a , то абсолютнымъ движеніемъ звена b будетъ его движеніе относительно a . У насъ α было поворотомъ звена a относительно c , слѣд. $(-\alpha)$ являлось поворотомъ c относительно a ; поэтому теперь $(-\alpha)$ будетъ выражать абсолютный поворотъ звена c , а β —абсолютный поворотъ звена b , при чемъ α и β опять связаны прежнимъ ур—ніемъ; оно намъ даетъ

$$\beta = (-\alpha) \cdot \frac{x-z}{y-z};$$

звено c подвинется на $(-\alpha) \cdot x$, а звено b — на $\beta \cdot y$, т.-е. на

$$-\alpha y \cdot \frac{x-z}{y-z}.$$

Точно такъ же при неподвижномъ b имѣемъ абсолютный поворотъ звена a равнымъ $(-\beta)$, а звена c — равнымъ $[-(\alpha + \beta)]$, гдѣ α и β опять связаны приведеннымъ выше уравненіемъ; нетрудно получить теперь передвиженія a и c .

Въ такомъ общемъ видѣ механизмъ этотъ почти не имѣетъ примѣненій. Гораздо чаще встрѣчаются частные случаи этой трехзвенной винтовой цѣпи, когда какая-либо пара обращается въ поступательную или вращательную.

Предположимъ, что пара $C(b, c)$ обратилась въ поступательную пару съ направлениемъ движенія, параллельнымъ общей оси оставшихся винтовъ (фиг. 90). Поставивъ механизмъ на c , мы можемъ вращениемъ винта a передвигать взадъ и впередъ гайку b второго винта, имѣющую извнѣ направляющія, параллельныя оси винта a (поступательная пара c). Обозначимъ, какъ и прежде, шаги обоихъ винтовъ черезъ x и y ; поворотъ α звена a относительно c теперь будетъ въ то же время и поворотомъ a относительно b , такъ какъ гайка b сама вращаться не можетъ, или, другими словами, (β) ,—поворотъ b относительно a будетъ теперь равенъ $(-\alpha)$. Такимъ образомъ звено b относительно звена a подвинется на величину $(-\alpha y)$; но звено a подвинется относительно звена c (т.-е. абсолютно) на величину αx , слѣд., гайка b подвинется абсолютно на величину $\alpha(x - y)$.—Это выраженіе могло быть получено изъ найденнаго выше соотношенія:

$$(\alpha + \beta)z = \alpha z \cdot \frac{x - y}{z - y},$$

въ которомъ, примѣнительно къ рассматриваемому случаю, пришлось бы положить $z = \infty$ (для поступательной пары); произведеніе же $(\alpha + \beta)z$, обращающееся теперь въ $0 \cdot \infty$ (ибо $(\alpha + \beta)$ теперь равно нулю), попрежнему остается осевымъ перемѣщеніемъ гайки b .

Какъ показываетъ выраженіе $\alpha \cdot (x - y)$, передвиженіе гайки b можетъ быть сдѣлано произвольно малымъ,—стоитъ только шаги обоихъ винтовъ, при одинаковой нарѣзкѣ (правой или лѣвой) сдѣлать мало разнящимися другъ отъ друга. Подобный механизмъ носитъ названіе *дифференціального винта*, и имъ можно пользоваться для измѣренія малыхъ отрѣзковъ числомъ оборотовъ винта a , а также и во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ требуется весьма малое передвиженіе. Если теперь видоизмѣнить эту цѣпь тѣмъ, что сдѣлать нарѣзки обоихъ винтовъ противоположными, то передвиженіе гайки будетъ равно $\alpha(x + y)$. Въ такомъ измѣненномъ видѣ этотъ механизмъ употребляется для соединенія вагоновъ (фиг. 91). Здѣсь винты A и B , принадлежащіе звену a , имѣютъ: одинъ (A)—правую нарѣзку, а другой (B)—лѣвую. Гайки O и O_1 для этихъ винтовъ соединяются при помощи крюковъ соответственно съ однимъ и другимъ вагономъ. Если мы будемъ вращать звено a по часовой стрѣлкѣ (смотря со стороны O_1), то, очевидно, винтъ A будетъ входить въ гайку O , т.-е. гайка O будетъ приближаться къ серединѣ звена a ; гайка O_1 точно такъ же будетъ приближаться къ серединѣ a ; значитъ оба вагона будутъ сдвигаться на величину $(x + y)$ при одномъ оборотѣ звена a .

Второе частное видоизмѣненіе нашей трехзвенной цѣпи получимъ, если сдѣлаемъ пару $A(c, a)$, вращательной, т.-е. одинъ изъ винтовъ a обратимъ въ простой шипъ, вращающійся въ подшипникѣ неподвижнаго звена c (фиг. 92). Въ этомъ случаѣ шагъ $x = 0$, и при поворотѣ

звена a на α получаемъ поворотъ гайки b въ видѣ $\alpha \cdot \frac{y}{y-z}$, гдѣ y и z опять обозначаютъ шаги оставшихся винтовъ; передвиженіе гайки b выразится черезъ $\alpha z \cdot \frac{y}{y-z}$.

Какъ это, такъ и предыдущее выраженіе можно получить изъ выраженія $(\alpha + \beta)z = \alpha \cdot z \frac{x-y}{z-y}$, гдѣ придется положить $x = 0$.

Въ противоположность тому, что мы имѣли для предыдущаго случая (дифференціального винта), здѣсь при данномъ оборотѣ α передвиженіе можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ, если шаги x и y будутъ сдѣланы мало разнящимися одинъ отъ другого.

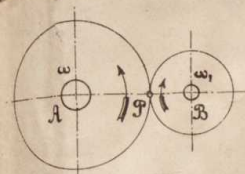
Если теперь пару $A(a, c)$ сдѣлаемъ вращательной, а пару $C(b, c)$ поступательной, то получимъ одно изъ наиболѣе часто встрѣчаемыхъ на практикѣ видоизмѣненій этого механизма (фиг. 93). Здѣсь при поворотѣ винта a на α гайка b будетъ подвигаться въ ту или другую сторону на величину αx , гдѣ x есть шагъ винта; другими словами, одинъ элементъ (a) винтовой пары $B(b, a)$ имѣетъ только вращательное движеніе, другой же (b)—только поступательное.

Описанный механизмъ примѣняется въ параллельныхъ тискахъ и во многихъ машинахъ по обработкѣ металловъ и дерева, тамъ, гдѣ, вообще говоря, равномерное вращательное движеніе желательно преобразовать въ равномерное же и достаточно медленное поступательное, напр., при движеніи суппорта въ такъ-называемыхъ самоточкахъ. Суппортъ въ такихъ случаяхъ имѣетъ гайку, соответствующую гайкѣ b , звено же a представляетъ шпиндель, снабженный нарезкой и вращающійся въ подшипникахъ, укрѣпленныхъ въ станинѣ (звено c) самоточки.

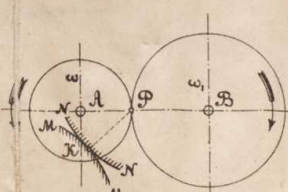
Разсмотрѣніемъ этого механизма мы заканчиваемъ разсмотрѣніе винтовыхъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и вообще низшихъ кинематическимъ паръ.

100
89
20

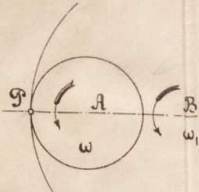
Настоящій временный выпускъ, вмѣстѣ съ его атласомъ, подлежитъ обмѣну на послѣдній 4-ый выпускъ курса „Теоріи механизмовъ“. О выходѣ въ свѣтъ этого 4-го выпуска будетъ своевременно объявлено.



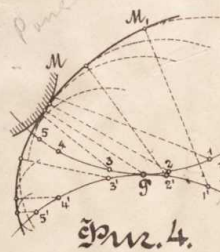
Змр. 1.



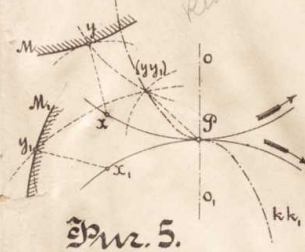
Змр. 2.



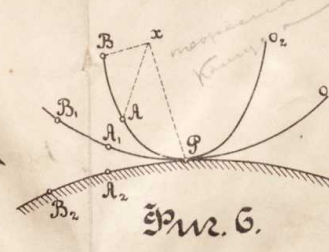
Змр. 3.



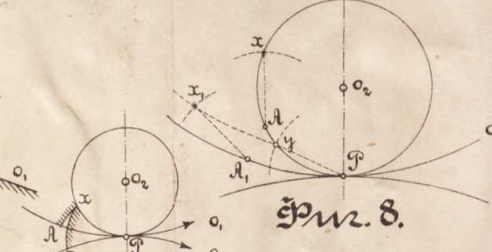
Змр. 4.



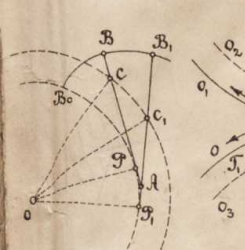
Змр. 5.



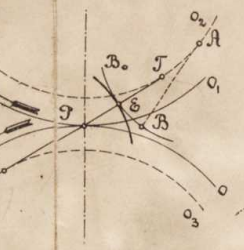
Змр. 6.



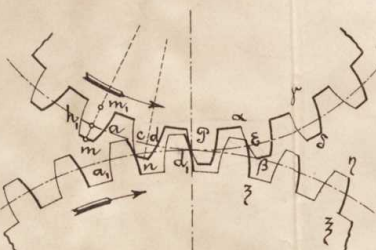
Змр. 7.



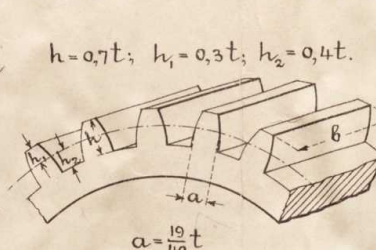
Змр. 9.



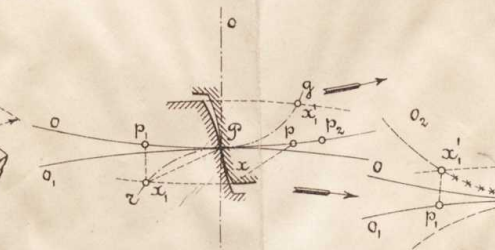
Змр. 10.



Змр. 11.



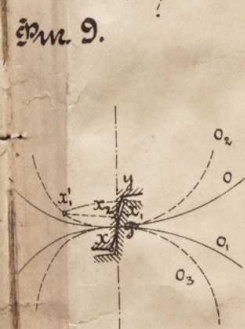
Змр. 12.



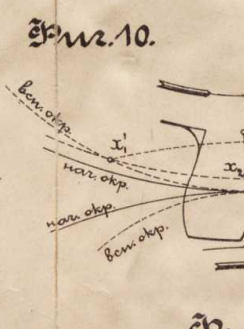
Змр. 13.



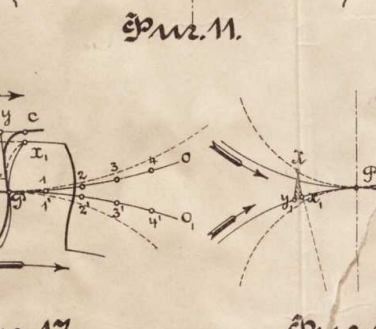
Змр. 14.



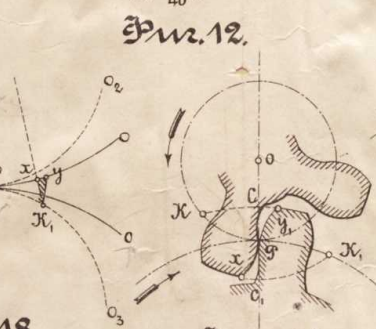
Змр. 16.



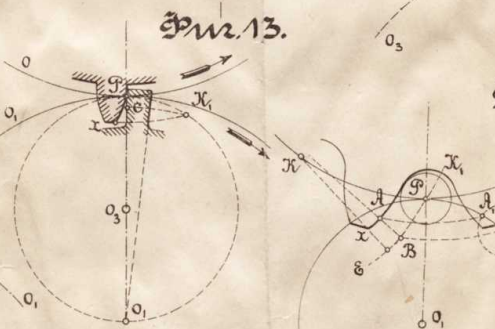
Змр. 17.



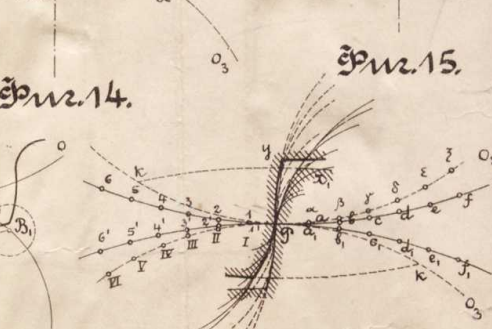
Змр. 18.



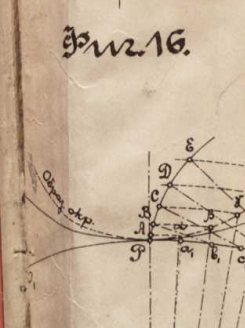
Змр. 19.



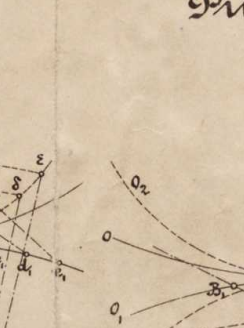
Змр. 20.



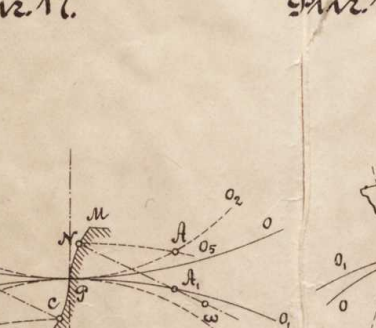
Змр. 21.



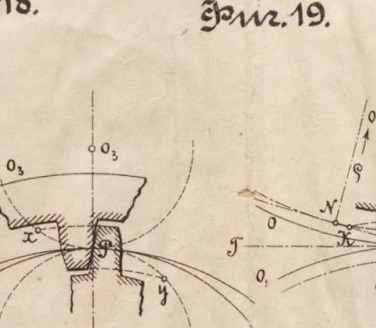
Змр. 23.



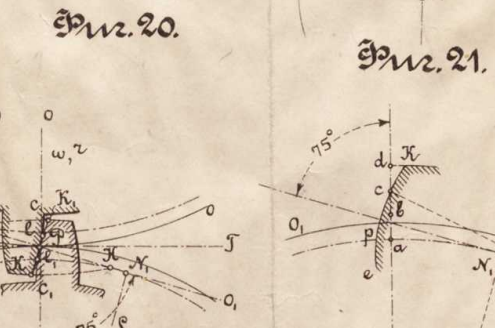
Змр. 24.



Змр. 25.



Змр. 26.



Змр. 27.



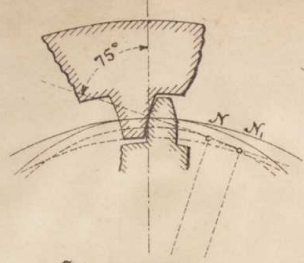
Змр. 28.



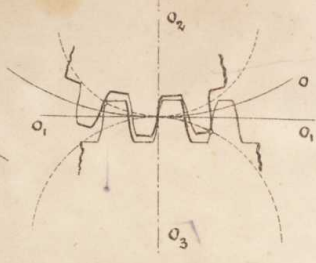
Змр. 29.



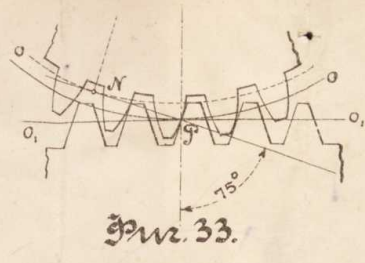
Змр. 30.



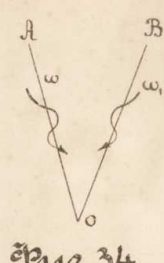
Змр. 31.



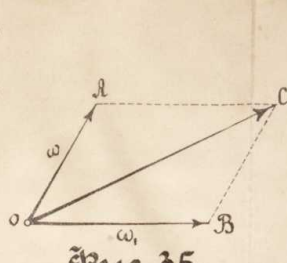
Змр. 32.



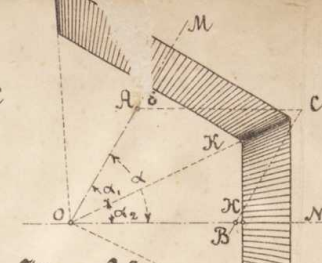
Змр. 33.



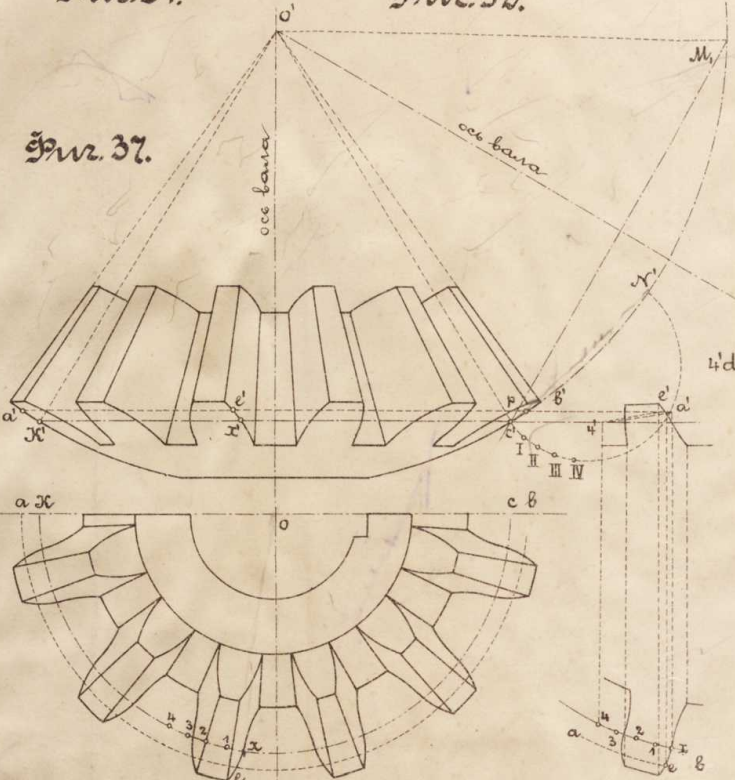
Змр. 34.



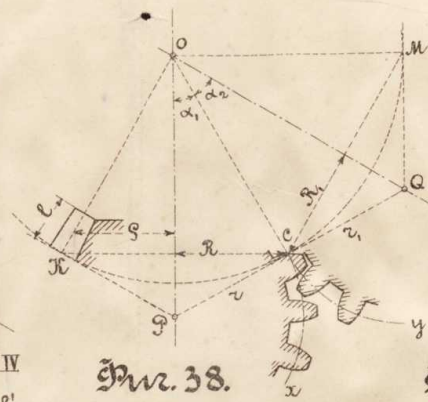
Змр. 35.



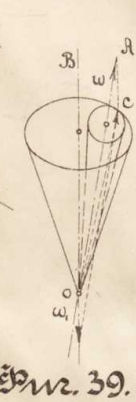
Змр. 36.



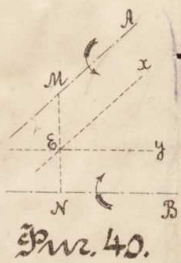
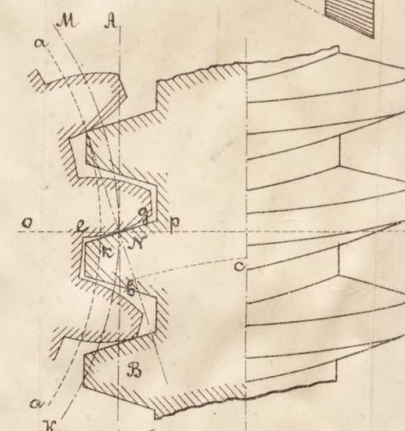
Змр. 37.



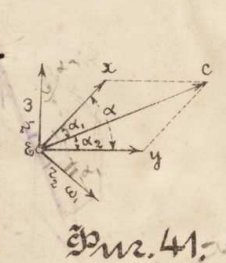
Змр. 38.



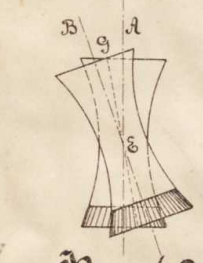
Змр. 39.



Змр. 40.



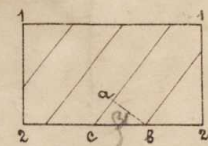
Змр. 41.



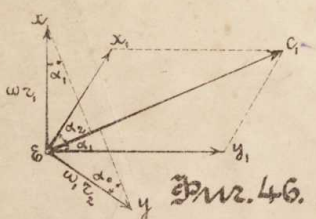
Змр. 42.



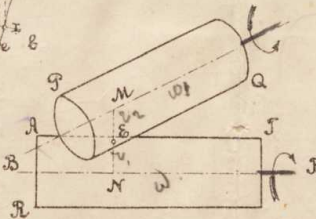
Змр. 43.



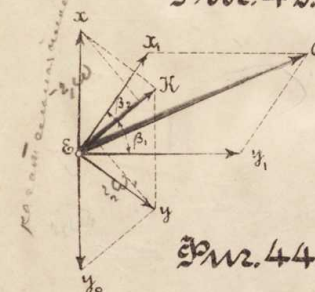
Змр. 44.



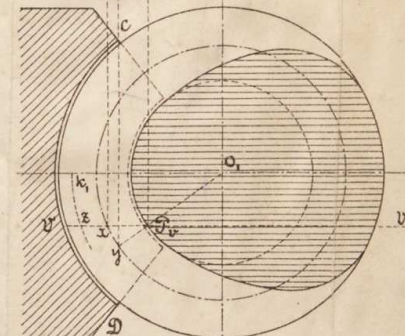
Змр. 45.



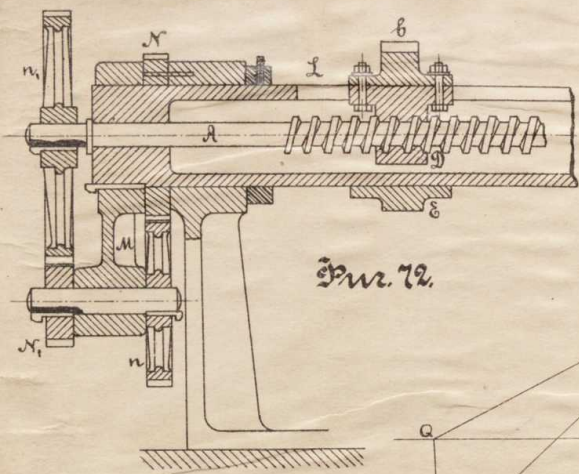
Змр. 46.



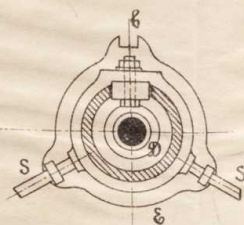
Змр. 47.



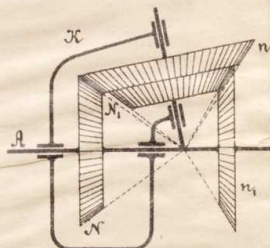
Змр. 48.



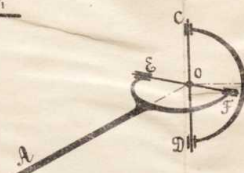
Фиг. 72.



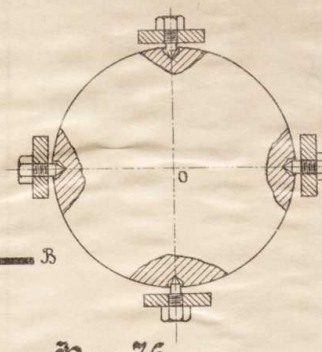
Фиг. 73.



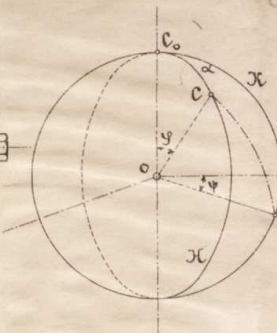
Фиг. 74.



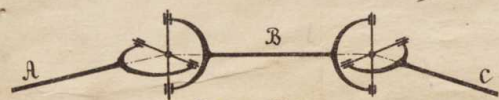
Фиг. 75.



Фиг. 76.

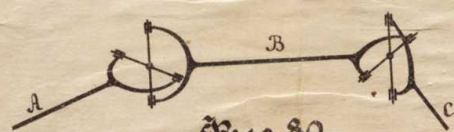


Фиг. 77.

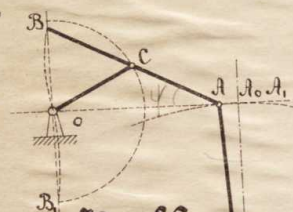


Фиг. 78.

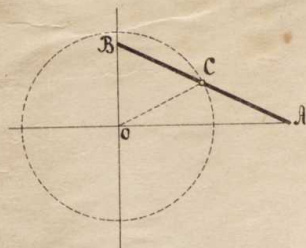
Фиг. 79.



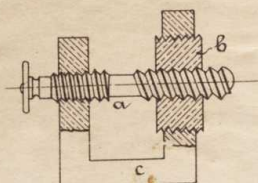
Фиг. 80.



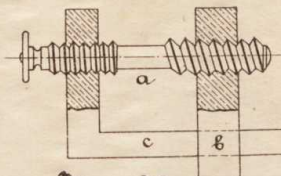
Фиг. 81.



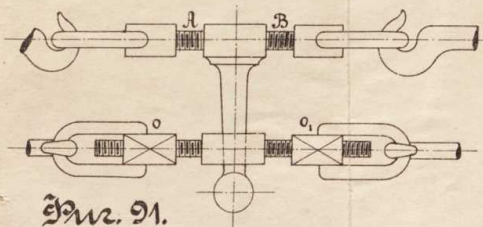
Фиг. 82.



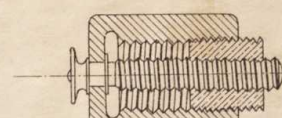
Фиг. 83.



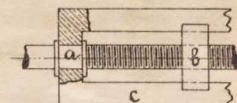
Фиг. 84.



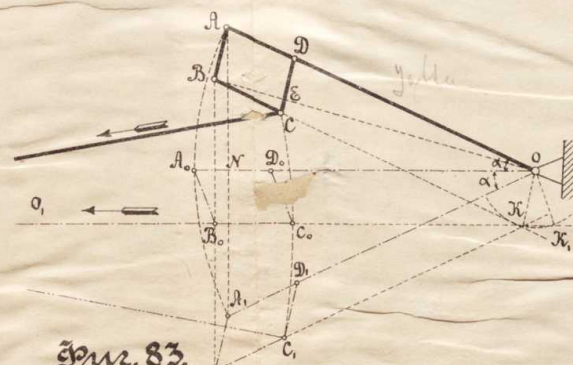
Фиг. 85.



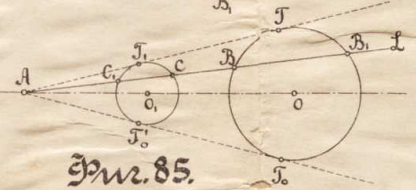
Фиг. 86.



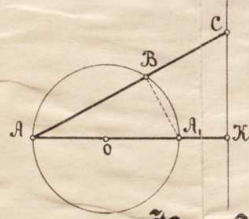
Фиг. 87.



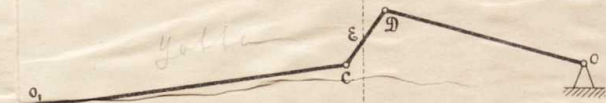
Фиг. 79.



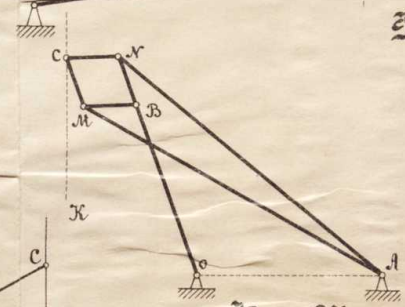
Фиг. 80.



Фиг. 81.



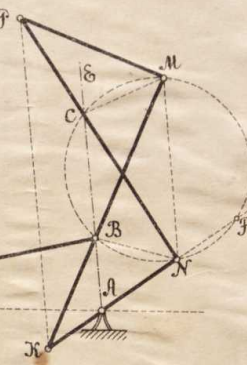
Фиг. 82.



Фиг. 83.



Фиг. 84.



Фиг. 85.

