

На правах рукописи
№ 2011-1
НЕ ВЫДАЕТСЯ

ФОМИНА ТАТЬЯНА АЛЕКСАНДРОВНА

**КОМПЛЕКС МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ
ВОЛНОВЫХ ШАГОВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ



АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2011

2
Работа выполнена на кафедре теоретической механики и теории механизмов
Московского государственного индустриального университета

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Клеников Сергей Сергеевич

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Самсонович Семен Львович

кандидат физико-математических наук, доцент
Темнов Александр Николаевич

Ведущая организация: ФГУП «Центральный научно-исследовательский
институт автоматики и гидравлики»

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



1988134

Филина Т.А. Комплекс матема

Защита состоится «6» декабря 2011 года в 13 час. 00 минут на
заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государст-
венном техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу: 105082, г. Мос-
сква, Рубцовская наб., д. 2/18, ауд. 1006л.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью, просим
отправлять по адресу: 105005, г. Москва, 2-ая Бауманская ул., д. 5, МГТУ им.
Н.Э. Баумана, учёному секретарю диссертационного совета
Д 212.141.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государ-
ственного технического университета имени Н.Э. Баумана.

Автореферат диссертации разослан «3» ноября 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат технических наук,
доцент

Аттетков А.В.

258

смазчик

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Анализ общих тенденций развития техники свидетельствует о том, что одним из направлений в альтернативном двигателестроении являются волновые механизмы. В зарубежной литературе практически отсутствуют работы теоретического характера по динамике волновых передач. В нашей стране уже к 1982 году было опубликовано свыше 2500 работ. Существует несколько теорий по принципу действия волновых передач, однако эти модели характеризуют работу только отдельных устройств и не являются общими для зубчатых и фрикционных волновых передач с различными типами волнообразователей, а принцип волнового деформирования или взаимосвязи пятен контакта не отражают динамические свойства волновых передач.

В настоящее время детально и весьма всесторонне разработаны волновые передачи с механическими волнообразователями. Значительно менее исследованы волновые механизмы с малоинерционными волнообразователями поршневого типа, у которых подвижная волна деформирования гибкого колеса организуется с помощью пневматических (или гидравлических) генераторов волн. В этом случае волновой механизм становится волновым шаговым двигателем (ВШД). Он преобразует энергию сжатого рабочего вещества во вращательную энергию выходного звена. По этому направлению различными авторами заявлен ряд отечественных и зарубежных патентов.

Организация механического движения с использованием подвижной волны упругого деформирования гибкого колеса, создаваемого с помощью системы переменных по величине сил с неподвижными точками их приложения к гибкому колесу, позволяет создавать принципиально новые ВШД. Замена вращающихся механических деформаторов импульсами переменных сил от давления, создаваемого в поршневых полостях воздухом или другим газом (далее — «рабочее вещество») или жидкостью позволяет избавиться от высокой инерционности волнового механизма. При этом существенно упрощается процесс изменения направления движения волны деформирования гибкого колеса и регулирования скорости ее вращения, а, следовательно, и направления и скорости вращения выходного звена. При дальнейшем развитии ВШД может стать альтернативой кривошипно-шатунного двигателя внутреннего сгорания.

К сожалению, в том числе и из-за сложности, теория расчета ВШД в должной мере еще не разработана. Это обстоятельство обуславливает актуальность данной работы.

Цель и задачи исследования. Целью данной работы является построение комплекса математических моделей и программ для динамических расчетов волновых шаговых двигателей.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих основных задач.

1. Построение комплекса взаимосвязанных математических моделей (рис. 1), разработка и тестирование комплекса программ для расчета:

1
М.Н.Э.Б. и
Б.И.П.И. Е

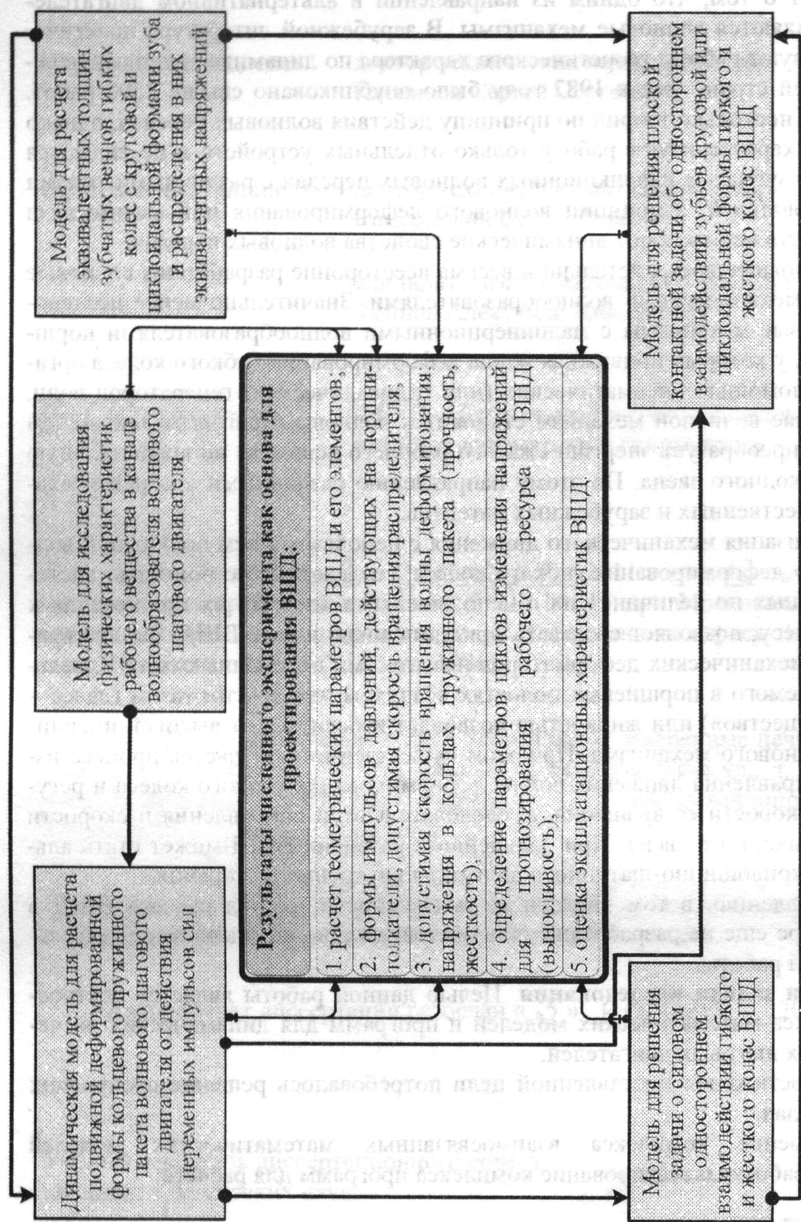


Рис. 1. Взаимосвязь математических моделей

- физических характеристик рабочего вещества в канале волнообразователя ВШД;
- эквивалентных толщин зубчатого венца гибкого колеса с круговой и циклоидальной формами зубьев и распределения в них эквивалентных напряжений;
- динамических деформированных форм колец пружинного пакета ВШД и напряжений в них под действием переменных по величине импульсов сил с неподвижными точками их приложения;
- сил одностороннего взаимодействия между гибким и жестким колесами волнового зацепления ВШД под действием системы радиальных сил;
- сил одностороннего контактного взаимодействия между круговыми или циклоидальными зубьями жесткого и гибкого колес.

2. Создание на основе численных расчетов и исследований натурной модели ВШД с новой конструкцией пневмораспределителя.

Методы исследования. Для достижения поставленной цели использованы методы численного анализа разработанных математических моделей: двухшаговая схема Лакса-Вендроффа, метод крупных частиц (МКЧ) и метод конечных элементов (МКЭ), а также методы строительной механики и теории упругости.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обусловлена корректной постановкой задач, применением математически обоснованных методов их решения, сравнением полученных результатов с результатами вычислительных экспериментов, в том числе и полученными другими авторами, а также сравнением с данными экспериментов, проведенных на натурном рабочем макете.

Практическая значимость диссертационной работы связана с ее прикладной ориентацией, а созданный программный комплекс может быть использован для расчета рабочих режимов функционирования пневмораспределителя ВШД; формы импульсов сил, действующих на волновое зацепление через гибкое колесо и поршни-толкатели; построения натурной модели рабочего макета и промышленного образца ВШД.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты, которые выносятся на защиту.

1. Комплекс математических моделей для динамических расчетов ВШД.
2. Комплекс прикладных программ, реализующий разработанные математические модели.
3. Результаты апробации разработанных моделей в вычислительных экспериментах, позволяющие оценить их адекватность.
4. Созданная на основе результатов численного исследования по предложенным математическим моделям натурная модель рабочего макета ВШД.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на IX Всероссийской научно-технической конференции «Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского» (Москва, 2010), научных конференциях «Гагаринские чтения» (Сергиев Посад, 2009 – 2011), научных семинарах по машиноведению

Владимирского государственного университета (Владимир, 2009) и динамике и прочности машин МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, 2011), научно-технической конференции «Студенческая весна» (Москва, 2010), конкурсе на лучший молодежный инновационный проект МГИУ (Москва, 2010).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 7 научных работах, в том числе в 4 статьях из Перечня рецензируемых ведущих научных журналов и изданий. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

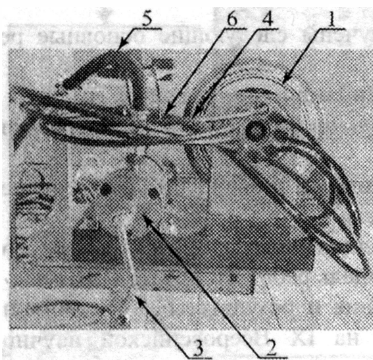
Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4-х глав, выводов, списка литературы и приложения. Работа изложена на 158 страницах, содержит 68 иллюстраций. Библиография включает 110 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** для понимания взаимосвязанности разработанных автором и изложенных в последующих главах математических моделей, подробно описана натурная модель рабочего макета ВШД (рис. 2), созданного на основе результатов численного исследования по предложенным математическим моделям. Натурный макет ВШД разработан совместно с А.И. Майковым. Указано, что анализируемый в главе пневмораспределитель обладает важным новым качеством – его конструкция позволяет достичь разного кратного соотношения между угловой скоростью вращающейся части пневмораспределителя и угловой скоростью вращения подвижной волны деформирования гибкого колеса. Это качественно новое свойство отмечено в формуле изобретения в поданной в Роспатент заявке на патент.



- 1 - волновое зацепление;
- 2 - распределитель с ручным управлением;
- 3 - шланговое соединение распределителя с волновым зацеплением;
- 4 - шланговое соединение распределителя с источником высокого давления;
- 5 - канал вывода отработавшего рабочего вещества.

Рис. 2. Рабочий макет ВШД

Во второй главе приводится описание математической модели для исследования физических характеристик (давления, скорости, плотности, энергии) рабочего вещества в канале волнообразователя ВШД.

В неподвижном массиве центральной части пружинного пакета имеются радиальные цилиндрические отверстия для перемещения в них поршней-толкателей под действием рабочего вещества. С помощью вращающейся части распределителя полости под поршнями (канал II на рис. 3) коммутируются поочередно с каналами высокого (p_0) и низкого (p_{00}) давлений. В результате подачи на поршни серии импульсов давления происходит их поочередное срабатывание, и кольца пружинного пакета, нагружаясь от толкателей, испытывают бегущую волну деформирования, вследствие чего зубья гибкого колеса приходят в силовое зацепление с зубьями жесткого колеса, создавая на нем крутящий момент.

В математической постановке задачи поочередная коммутация моделируется взаимодействием двух взаимно смещающихся каналов I и II (рис. 3). При этом канал II всегда моделирует полость под поршнем-толкателем. При нагнетании он коммутируется с каналом I высокого давления. При сливе канал II, получивший импульс высокого давления, коммутируется в модели с тем же каналом I, который в этом случае моделирует уже полость низкого давления. В расчетах такое чередование функций канала I реализуется заданием соответствующих значений характеристик (давления, скорости, плотности, энергии) рабочего вещества в этом канале в моменты начала слива или начала нагнетания. Взаимное смещение каналов моделируется с помощью изменения площади сечения между каналами I и II по нелинейному закону $S_0(t)$ (рис. 4), зависящему от скорости вращения распределителя ω и площадей поперечных сечений реальных каналов высокого и низкого давлений ($\bar{S}_0(t) = S_0(t)/S_{\max}$, $S_{\max}$ — максимальная по длине каналов I и II площадь сечения).

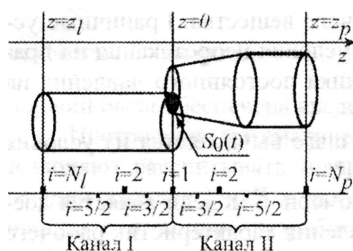


Рис. 3. Схема изменения взаимного положения каналов I и II во времени

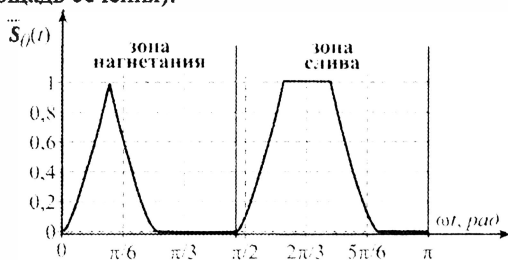


Рис. 4. Изменение площади сечения $\bar{S}_0(t)$ между каналами I и II во времени

В общем случае течение рабочего вещества описывается с помощью трехмерной модели, учитывающей взаимное смещение каналов. Однако, как показали проведенные численные исследования, во многих случаях расчет физических характеристик рабочего вещества можно упростить, если использовать для численного анализа квазиодномерную или двумерную модели. Квазиодномерная модель предполагает, что газовый поток однороден по сечению ка-

нала, а поперечная составляющая скорости движения рабочего вещества пренебрежимо мала по сравнению с осевой. Уравнения газовой динамики, описывающие нестационарные квазиодномерные течения идеального совершенного газа с постоянными теплоемкостями, имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho S(z)u}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho S(z)u^2 + pS)}{\partial z} - p \frac{\partial S(z)}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial (e+p)S(z)u}{\partial z} &= 0, & p &= (\gamma - 1)\rho E = (\gamma - 1)\left(e - \frac{1}{2}\rho u^2\right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $S(x)$ – площадь поперечного сечения канала; x – продольная координата; $dz = S(x)dx$ (рис. 3); t – время; γ – показатель адиабаты. Исследуемыми характеристиками рабочего вещества являются его давление p , скорость u , плотность ρ , полная энергия на единицу объема e .

В качестве начальных условий в момент времени $t = 0$ рабочее вещество в каналах I и II считается покоящимся, а давления задаются равными p_0 и p_{00} соответственно. Остальные характеристики рассчитываются через значения давлений.

Численное решение уравнений газовой динамики (1) осуществляется с использованием двухшаговой схемы Лакса-Вендроффа. На этапе «предиктор» независимо для каналов I и II вычисляются значения исследуемых характеристик рабочего вещества в центрах ячеек, на этапе «корректор» они вычисляются на границах ячеек.

Основную сложность представляет расчет характеристик рабочего вещества в сечении с координатой $z = 0$ (рис. 3). Для учета скачка площади сечения возникает необходимость введения в расчетную схему на этапе «корректор» дополнительной процедуры «стыковки» значений физических характеристик в каналах I и II. В этой процедуре учитывается выполнение условий непротекания в части каналов, закрытой для течения рабочего вещества. Граничные условия также учитываются на этапе «корректор»: условия непротекания на правой границе канала II и условия наличия источника постоянного давления на левой границе канала I.

Величина шага по времени Δt на каждом шаге вычисляется из условия устойчивости Куранта совместно для каналов I и II.

Расчет течений по приближенной квазиодномерной модели является достаточно эффективным инструментом для установления характеристик рабочего вещества в каналах волнообразователя ВШД. Точность расчетов в этом случае, несмотря на присущие ограничения, как правило, бывает достаточной для проектировочных расчетов. В то же время, эта модель имеет ряд недостатков, связанных с тем, что в ней учитывается изменение площади сечения канала лишь в малом диапазоне, и не учитывается его геометрия, что особенно важно в полосе под плунжером. Для их устранения разработана двумерная математическая модель для расчета физических характеристик рабочего вещества в канале с переменной геометрией сечения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial pr}{\partial t} + \frac{\partial pr u}{\partial x} + \frac{\partial pr v}{\partial r} &= 0; & \frac{\partial pr \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial pr u(\varepsilon + p/\rho)}{\partial x} + \frac{\partial pr v(\varepsilon + p/\rho)}{\partial r} &= 0; \\
\frac{\partial pr u}{\partial t} + \frac{\partial pr u^2}{\partial x} + \frac{\partial pr uv}{\partial r} &= -r \frac{\partial p}{\partial x}; & \frac{\partial pr v}{\partial t} + \frac{\partial pr uv}{\partial x} + \frac{\partial pr v^2}{\partial r} &= -r \frac{\partial p}{\partial r}; \\
p &= \rho(\gamma - 1) \left(\varepsilon - \frac{u^2 + v^2}{2} \right).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь дополнительно к (1) введены обозначения: $r(x)$ – радиус канала в сечении с координатой x ; u , v – продольная и радиальная скорости движения рабочего вещества; ε – полная энергия рабочего вещества на единицу массы.

Упрощение математической модели состоит в том, что не осесимметричное взаимное смещение каналов I и II (рис. 3) заменяется осесимметричным открытием и закрытием в расположенной между ними диафрагме центрального кругового отверстия, площадь которого изменяется по тому же закону $S_0(t)$ (рис. 4), как и в реальной системе.

Начальные условия задачи принимаются теми же, что и в квазиодномерной модели.

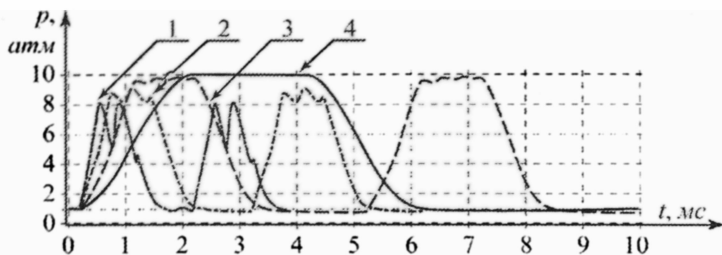
Численное решение системы дифференциальных уравнений (2) осуществляется методом крупных частиц первого порядка точности. Граничные условия реализуются с помощью ввода одного слоя фиктивных ячеек. На правой и верхней границах каналов так же, как и на подвижной диафрагме, ставится условие прилипания, на оси симметрии – условие непротекания, на правой границе – условие наличия источника постоянного давления. Расчеты проводятся на неподвижной сетке с прямоугольными ячейками, а криволинейные границы каналов моделируются с помощью дробных ячеек.

Для адекватного описания непрерывного изменения площади отверстия в диафрагме со скоростью $v_g(t + \Delta t) = \frac{\sqrt{S_0(t + \Delta t)} - \sqrt{S_0(t)}}{\Delta t \sqrt{\pi}}$ реализация граничных условий была обеспечена введением слоя дробных ячеек на границе отверстия.

Построенная математическая модель и созданный программный комплекс позволяют рассчитывать значения характеристик рабочего вещества в любом сечении каналов I и II в любой момент времени. Основная цель проведения анализа с помощью разработанных математических моделей – определение профиля давлений на правой границе канала II (рис. 5). Таким образом определяется зависимость от времени давлений на поршни-толкатели, которые создают подвижную динамическую волну деформирования гибкого колеса.

В третьей главе описана конечно-элементная модель для расчета эквивалентных толщин гибких зубчатых венцов с круговой и циклоидальной формами зубьев (рис. 6) и напряжений в них. Практических результатов расчетов гибких венцов с зубьями таких форм до настоящего времени не существовало. Замена в расчетах гибкого зубчатого венца гладким круговым кольцом с прямоугольным поперечным сечением с эквивалентной толщиной h_z (рис. 7) позволяет существенно упростить его расчетную схему на стадии определения

сил взаимодействия между зубьями волнового зацепления и соответствующих им деформированных форм зубчатого венца.



1 - $n = 500$ об/с; 2 - $n = 333$ об/с; 3 - $n = 100$ об/с; 4 - $n = 50$ об/с

Рис. 5. Зависимость давления в поршневой группе от частоты вращения внутренней части распределителя n

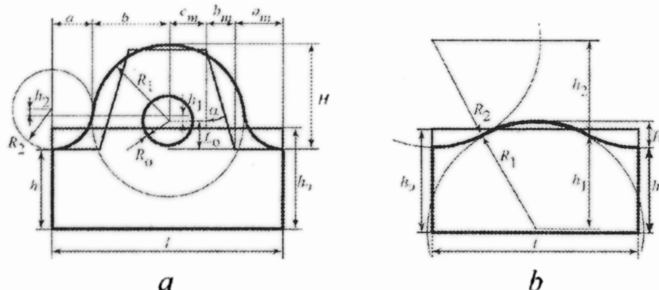


Рис. 6. Регулярный зубцовый элемент круговой (а) и циклоидальной (b) форм

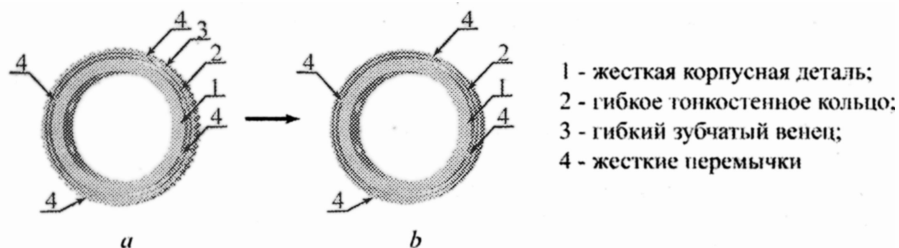


Рис. 7. Гибкое колесо в виде пружинного пакета: а) – деталь натурального макета; б) – модель гладких колец, используемая в расчетах

В процессе деформирования в поперечных сечениях гибкого зубчатого венца возникают изгибающий момент (M), нормальная (N) и поперечная (Q) силы. Так как жесткость зубчатого венца зависит от вида нагрузки, то для каждой нагрузки (M , N , Q) будут иметь место свои значения эквивалентных толщин h_e , которые определяются из условия равенства соответствующих потенциальных энергий отдельного регулярного зубцового элемента венца ($U_{расч}$) и такой же длины элемента гладкой рейки с эквивалентной толщиной ($U_{теор}$).

Последняя определяется по известным аналитическим соотношениям. Вычисление $U_{расч}$ осуществляется методом конечных элементов (МКЭ):

$$U_{расч} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\}. \quad (3)$$

Здесь $[K]$ – матрица жесткости регулярного зубцового элемента; $\{\delta\}$ – столбец его узловых перемещений. Они определяются из решения матричного уравнения МКЭ $[K]\{\delta\} = \{P\}$, где $\{P\}$ – вектор-столбец заданных узловых усилий ($\bar{M} = 1$ в случае изгиба, $\bar{N} = 1$ в случае растяжения или $\bar{Q} = 1$ в случае сдвига). Для различных видов прикладываемой нагрузки ($\bar{M}$, $\bar{N}$ или $\bar{Q}$) задавались различные условия закрепления регулярного элемента гибкого венца, соответствующие его изгибу, растяжению и сдвигу.

Из проведенного численного анализа следует, что основная часть потенциальной энергии регулярного зубцового элемента – это энергия от его изгиба. Поэтому в последующих практических расчетах эквивалентных толщин сдвиг и растяжение венца не учитываются, а эквивалентная толщина вычисляется по известной формуле:

$$h_3 = \sqrt[3]{\frac{6I}{EU_{расч}''}}, \quad (4)$$

где E – модуль Юнга; I – длина регулярного зубцового элемента; $U_{расч}''$ – энергия деформации гладкой рейки при изгибе, вычисленная МКЭ.

Следует отметить, что построенная математическая модель дает возможность проводить расчет эквивалентных толщин венцов с произвольной формой зубьев, не только круговой или циклоидальной (рис. 8).

Для прогнозирования ресурса ВШД и корректных расчетов гибких венцов с круговой и циклоидальной формами зубьев на усталостную прочность необходим расчет максимальных эквивалентных напряжений в зоне концентратора, то есть у ножки зуба. Такой расчет позволяет установить величину коэффициента концентрации напряжений и определить характеристики цикла изменения напряжений в указанной зоне. Эквивалентное напряжение для каждого конечного элемента вычисляется по IV-ой теории (гипотезе) прочности.

На рис. 8 представлен график зависимости максимальных эквивалентных напряжений, возникающих в гладкой рейке с обобщенной эквивалентной толщиной от толщины венца регулярного зубцового элемента по впадине. Приняты следующие обозначения: $\sigma_{экв}^{\max}$ – максимальные эквивалентные напряжения, возникающие в регулярном зубцовом элементе при его единичном изгибе; $\sigma_3^{\max}$ – максимальные напряжения, возникающие в приграничном элементе гладкой рейки эквивалентной толщины h_3 при ее единичном изгибе; $\sigma_{экв тр}^{\max}$ – максимальные эквивалентные напряжения, возникающие в регулярном зубцовом элементе трапецевидной формы при его единичном изгибе.

Проведенный численный анализ максимальных эквивалентных напряжений показывает, что круговая форма зубьев существенно снижает максималь-

ную величину эквивалентных напряжений по сравнению с зубом трапецевидной формы (7 – 9 на рис. 8а).

В качестве дополнительного расчета проводился анализ зависимости эквивалентной толщины для зубцового элемента, имеющего отверстие в верхней части. Центр отверстия совпадал с т. O_1 (рис. 8а). Установлено, что с увеличением радиуса отверстия эквивалентная толщина и максимальные эквивалентные напряжения уменьшаются (рис. 8а). При этом собственная податливость головки зуба возрастает, что приводит к более равномерному распределению нагрузки между зубьями колес.

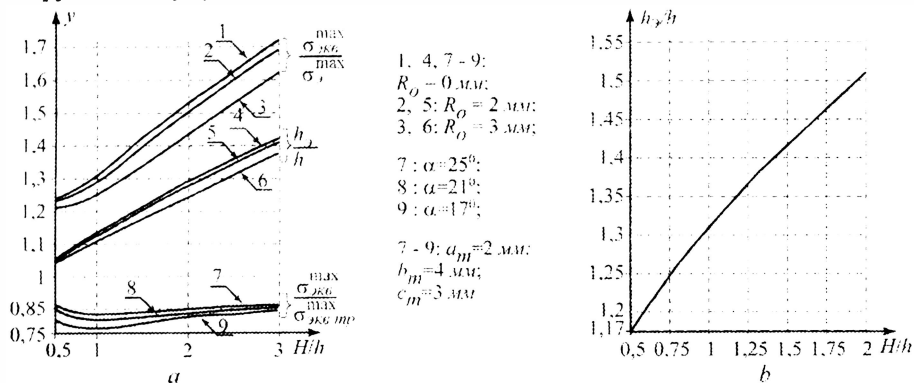


Рис. 8. Зависимость эквивалентной толщины и эквивалентных напряжений зубьев круговой (а) и циклоидальной (б) форм от отношения высоты коронки зуба H к толщине венца по впадине h

При проектировании волновых механизмов центральной задачей является задача расчета сил одностороннего взаимодействия зубьев гибкого и жесткого колес ВШД. Ее решение приводится в той же главе. Оно открывает возможность правильного расчета всех элементов ВШД на статическую и усталостную прочность, определения их жесткостных и динамических характеристик, прогнозируемой кинематической точности и т.п. Принципиальные трудности решения силовой задачи и ее трудоемкость обусловлены не только весьма сложной геометрией сопрягаемых упругих элементов конструкции, но и непрерывно меняющимся односторонним характером их силового взаимодействия.

Реализованный алгоритм решения задачи о контактом взаимодействии зубьев гибкого и жесткого колес построен на последовательном чередовании двух подходов (рис. 1). Вначале на основе численного решения плоской задачи теории упругости определяется эквивалентная толщина гибкого венца с круговыми или циклоидальными зубьями. Затем на основе методов строительной механики определяются деформированные формы гибкого колеса в виде колец пружинного пакета и напряжения в них. После проведения описанного расчета выделяется ансамбль из нескольких сопряженных зубьев колес и решается локальная плоская задача о силовом контакте зубьев ансамбля с зубьями жесткого колеса. Силовые граничные условия на этом этапе задаются из решения задачи

о деформировании гибкого кольца методами строительной механики. Здесь же осуществляется учет и активных сил от поршней-толкателей, и реактивных усилий, возникающих между гибким колесом и односторонними связями, и внутренних силовых факторов в поперечных сечениях колец.

Неизвестные контактные силы $\{Q_i\}$ определяются из решения системы алгебраических уравнений $[q_{ij}]\{Q_i\} = \{\Delta_j^0\} - \{\Delta_j\}$, которая итерационно получается из изначально расширенной системы алгебраических неравенств $[q_{ij}]\{Q_i\} \leq \{\Delta_j^0\} - \{\Delta_j\}$ последовательным исключением (добавлением) строк и столбцов, соответствующих точкам, в которых не выполняются условия одностороннего контакта:

- $\{Q_i\} > 0$ и $\{\Delta_j\} = 0$ – для работающих (нагруженных) связей;
- $\{Q_i\} = 0$ и $\{\Delta_j\} > 0$ – для ненагруженных связей. (5)

После определения $\{Q_i\}$ вычисляются зазоры между узлами контактных пар $\{\Delta_j\}$. Вектор начальных зазоров $\{\Delta_j^0\}$ определяется начальным взаимным положением и геометрией зубьев гибкого и жесткого колес. Элементами матрицы податливости $[q_{ij}]$ для зубьев обоих колес являются проекции на нормали перемещений узлов контактной сетки, расположенных на поверхности регулярного зубцового элемента, от единичных нормальных сил, приложенных в тех же точках. Сетка дискретизации контакта по линии сопряжения смежных зубьев вводится в том случае, если контактные пары не удается создать с помощью только узлов конечно-элементной сетки. Такая сетка может создаваться и с более мелким шагом, величина которого определяется итерационно в процессе решения задачи. В этом случае перемещения узлов сетки дискретизации контакта определяются через перемещения тех узлов сетки МКЭ, между которыми они расположены.

Из проведенного численного анализа следует, что максимальные контактные усилия возникают в месте стыковки окружностей, описывающих контур зуба. В этой точке, несмотря на отсутствие разрыва первой производной и самой функции, имеется разрыв второй производной, что и объясняет полученные результаты.

В четвертой главе приведено описание численного метода определения динамических деформированных форм колец гибкого колеса ВШД, выполненного в виде пружинного пакета (рис. 7), под действием переменных по величине радиальных сил с неподвижными точками их приложения с учетом присоединенных масс рабочего вещества и поршней-толкателей. Представляется, что пружинный пакет, деформируясь в своей плоскости, обеспечивает равномерное распределение нагрузки вдоль зубьев колес.

Замена в расчетах зубчатого венца гладким кольцом с эквивалентной толщиной h , (рис. 7) дает возможность при расчете всех гибких колец пружинного пакета использовать хорошо разработанную теорию плоских круговых колец с учетом условий их сопряжения (стыковки).

Задача об изменении формы колец под нагрузкой решается с использова-

нием дифференциальных уравнений упругих линий нерастяжимых колец. Для каждого из колец пружинного пакета оно имеет вид:

$$EI \left(\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right) = -R^3 \left(\frac{d^2 \mathcal{M}}{d\varphi^2} + \mathcal{M} \right) - R^4 \left(\frac{dp_n}{d\varphi} + p_\varphi \right) \quad (6)$$

где v – окружные перемещения, φ – угловая координата, EI – изгибная жесткость соответствующего кольца, R – радиус его средней линии, $w = -\frac{dv}{d\varphi}$ – ра-

диальные перемещения, $\theta = -\frac{1}{R} \left(v + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right)$ – угол поворота нормали, p_n – ради-

альная распределенная нагрузка, p_φ – тангенциальная распределенная нагрузка, $\mathcal{M}$ – распределенный изгибающий момент.

Условия стыковки колец с помощью жестких перемычек предполагают выполнение следующих ограничений в месте крепления перемычки:

$$v^i(\varphi_f) = v^{i+1}(\varphi_f) + \Delta R_i \theta^i(\varphi_f); \quad w^i(\varphi_f) = w^{i+1}(\varphi_f); \quad \theta^i(\varphi_f) = \theta^{i+1}(\varphi_f), \quad (7)$$

где i – номер кольца; $\Delta R_i = R_{i+1} - R_i$; φ_f – угловая координата точки, в которой крепится перемычка. Если те или иные перемычки являются составными («цилиндр в цилиндр» вдоль радиусов), ограничение, накладываемое на радиальные перемещения, из (7) исключается. Как показывают расчеты, пружинный пакет, кольца которого между собой соединены составными перемычками, имеет существенно меньшую радиальную жесткость по сравнению с аналогичным пакетом, кольца которого соединены жесткими перемычками.

На каждое из колец пружинного пакета действует система из n_i ($i = \overline{1, k}$) пар радиальных сил с неподвижными в окружном направлении точками их приложения. Кольца могут быть закреплены в h_i ($i = \overline{1, k}$) точках:

$$v^i(\varphi_f) = 0; \quad w^i(\varphi_f) = 0; \quad \theta^i(\varphi_f) = 0, \quad (8)$$

где i – номер кольца; k – количество колец в пружинном пакете; φ_f – угловая координата точки, в которой находится заделка.

Таким образом, задача сводится к решению k дифференциальных уравнений вида (6) для каждого кольца пружинного пакета в отдельности с учетом условий (7), (8) стыковки и закрепления колец.

В начальный момент времени кольца пружинного пакета являются неподвижными и имеют недеформированную форму. Таким образом, построенная система замыкается следующими начальными условиями:

$$v(\varphi, t = 0) = w(\varphi, t = 0) = \theta(\varphi, t = 0) = 0.$$

$$\frac{dv}{dt}(\varphi, t = 0) = \frac{dw}{dt}(\varphi, t = 0) = \frac{d\theta}{dt}(\varphi, t = 0) = 0,$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2}(\varphi, t = 0) = \frac{d^2 w}{dt^2}(\varphi, t = 0) = \frac{d^2 \theta}{dt^2}(\varphi, t = 0) = 0. \quad (9)$$

В диссертационной работе описываются два неитерационных алгоритма

расчета нестационарных деформированных форм колец пружинного пакета ВШД с помощью метода конечных элементов и рядов Фурье.

Решение нестационарной динамической задачи деформирования системы из k колец предполагает решение матричного дифференциального уравнения МКЭ:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{P\}, \quad (10)$$

где $[K]$ – матрица жесткости; $[M]$ – матрица масс; $[C]$ – матрица сопротивления (демпфирования); $\{P\}$ – вектор внешней нагрузки; $\{\ddot{q}\}, \{\dot{q}\}, \{q\}$ – векторы обобщенных ускорений, скоростей и перемещений узлов конечных элементов. Следует особо отметить, что учет присоединенных масс рабочего вещества и поршней-толкателей, которые, находясь под давлением, движутся совместно с упругим элементом, связан с соответствующим перестроением матрицы масс $[M]$ системы, а учет одностороннего характера сил взаимодействия поршней-толкателей с венцом гибкого колеса связан с перестроением вектора внешней нагрузки $\{P\}$.

Конечным элементом в рассматриваемой модели является криволинейный стержень – дуга радиуса R с углом, изменяющимся от φ_1 до φ_2 . Вид использованных функций форм определяется видом решаемого дифференциального уравнения (6):

$$N_i = N_i(\varphi, R, C_i) = C_{i1} + C_{i2}\varphi + (C_{i3} + C_{i4}\varphi)\cos\varphi + (C_{i5} + C_{i6}\varphi)\sin\varphi, \quad (11)$$

где $C_i = C_{i1}, \dots, C_{i6}$ – константы, определяемые из граничных условий для каждого конечного элемента. Элементы матрицы жесткости вычисляются по формуле:

$$k_{ij} = \frac{EI}{R^3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{d^3 N_i}{d\varphi^3} + N_i \right) \left(\frac{d^3 N_j}{d\varphi^3} + N_j \right) d\varphi; \quad (i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, 6). \quad (12)$$

Вывод соотношений для вычисления элементов матриц масс и демпфирования приведен в разделе 4.2. Окончательные выражения для их определения имеют вид:

$$m_{ij} = \rho FR \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(N_i N_j + \frac{dN_i}{d\varphi} \frac{dN_j}{d\varphi} \right) d\varphi; \quad c_{ij} = \mu FR \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(N_i N_j + \frac{dN_i}{d\varphi} \frac{dN_j}{d\varphi} \right) d\varphi, \quad (13)$$

где ρ – плотность, μ – коэффициент демпфирования.

Из анализа, проведенного в диссертационной работе, следует, что наиболее рациональным способом учета влияния перемычек с помощью ограничений (7) является использование множителей Лагранжа. Этот метод позволяет учесть связи (ограничения) в рамках классических представлений вариационного исчисления. Согласно концепции метода, экстремум функционала при ограничениях может быть найден, если умножить каждое из ограничений (7) для перемычек на множитель Лагранжа λ_i , прибавить полученные выражения к исходному функционалу и выполнить варьирование по каждой степени свободы и каждому множителю. Такой путь решения задачи упрощает и делает единооб-

разным учет как монолитных, так и составных перемычек.

Условия закрепления колец пружинного пакета (8), являющиеся одновременно ограничениями, также учитываются с помощью множителей Лагранжа. Обычно учет закрепления производится путем непосредственного вычеркивания из матрицы жесткости соответствующих этим условиям столбцов и строк. Также используется метод, основанный на умножении соответствующих диагональных элементов на большое число. Однако такой подход решения в задаче о деформировании колец пружинного пакета неприменим, так как в этом случае из соответствующей расширенной матрицы жесткости будут исключены и элементы, учитывающие влияние перемычек.

Для численного решения системы дифференциальных уравнений (10) в большинстве современных вычислительных комплексов используется метод обобщенного ускорения Ньюмарка. В разработанном автором программном комплексе предпочтение также отдается этому методу, так как в нем при определенных значениях параметров метода автоматически учитывается искусственная вязкость (при значениях параметров метода $\delta > 0,5$ и $\alpha > 0,25(0,5 + \delta)^2$). При этих значениях δ и α метод является безусловно устойчивым, а необходимость учета в системе дифференциальных уравнений (10) матрицы демпфирования отпадает. Рациональность отказа от учета матрицы демпфирования основана на том, что определение коэффициента демпфирования μ является весьма сложной задачей и требует дополнительного вычисления первых низших частот собственных колебаний.

Для проверки достоверности полученных результатов используется метод Вилсона, безусловно устойчивый при значении параметра метода $\alpha \geq 1,37$. При выборе величины шага по времени Δt в случае безусловной устойчивости необходимо руководствоваться лишь принципом, чтобы форма импульсов внешних сил, действующих на кольца пружинного пакета, описывалась с достаточной степенью точности.

Целью анализа является определение зависимости деформированных форм колец пружинного пакета от: частоты изменения внешней радиальной силы ω_r ; наличия и величины присоединенной массы m_n ; значения коэффициента демпфирования μ ; метода решения системы дифференциальных уравнений (методом Вилсона или Ньюмарка) и от параметров этих методов.

Достоверность полученных автором результатов подтверждена их сравнением с результатами, опубликованными в работах других авторов, а также сравнением с результатами, полученными автором с помощью программного комплекса ANSYS Workbench. Дополнительно в разработанном автором программном комплексе для одной из возможных конструкций пружинного пакета реализовано решение задачи с помощью рядов Фурье в квазистатической постановке. Проведен сравнительный анализ полученных результатов и установлена высокая степень их соответствия.

Раздел 4.7 посвящен модели для решения задачи о взаимодействии гибкого и жесткого колес ВШД. Цель решения задачи состоит в определении площади фактического контакта, а также вектора контактных усилий, возникаю-

ших на ней. При решении задачи учитывается, что гибкое кольцо может свободно деформироваться в любом направлении, то есть считается, что оно является незакрепленным. В связи с этим, для устранения перемещений пружинного пакета как жесткого целого под действием симметричной относительно вертикальной оси системы сил, для внешнего кольца пружинного пакета задаются следующие ограничения:

$$u(\varphi = 0) = u(\varphi = \pi); \quad v(\varphi = 0) = 0; \quad v(\varphi = \pi) = 0. \quad (14)$$

Исходными данными являются: вектор начальных зазоров $\{\Delta_j^0\}$; вектор сил, действующих на внешнее кольцо пружинного пакета $\{P_i\}$, $i = \overline{1, N}$; зона возможного контакта – угол α ; угловой шаг между односторонними связями $\Delta\alpha$ (рис. 9). Рассматривается простое нагружение, когда вектор сил может быть представлен в виде: $\{P_i\} = \bar{P} \cdot \{\bar{P}_i\}$, где $\bar{P}_i = \frac{P_i}{\bar{P}}$ – безразмерная сила, $\bar{P}$ – параметр нагружения кусочно-линейной системы.

Для определения вектора неизвестных контактных сил решается система алгебраических уравнений:

$$[q_{ij}]\{Q_i\} = \{\Delta_j^0\} - \{\Delta_j\}, \quad (15)$$

которая итерационно получается из изначально расширенной системы алгебраических неравенств $[q_{ij}]\{Q_i\} \leq \{\Delta_j^0\} - \{\Delta_j\}$ последовательным исключением (добавлением) строк и столбцов, соответствующих точкам, в которых не выполняются условия одностороннего контакта (5).

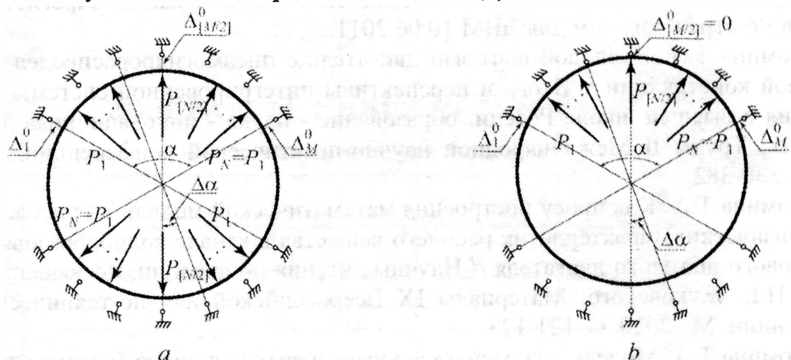


Рис. 9. Схема взаимного положения внешнего кольца пружинного пакета и односторонних связей: двухволновое (а) и одноволновое (б) зацепление

Разработанное программное приложение может быть использовано и для определения сил одностороннего взаимодействия колец ВШД в том случае, когда гибкое колесо представлено в виде пружинного пакета. В этом случае лишь изменяются значения элементов матрицы податливости и вектора грузовых перемещений, которые рассчитываются с помощью решения задачи о расчете деформированных форм гибкого колеса ВШД.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработаны комплекс взаимосвязанных математических моделей для динамических расчетов ВШД и прикладной программный комплекс для их реализации.
2. Проведена верификация математической модели и комплекса прикладных программ, подтверждающая их работоспособность.
3. Проведен анализ влияния: геометрических характеристик пневмораспределителя новой конструкции и скорости его вращения на форму импульсов давлений, действующих на поршни-толкатели, которые деформируют гибкое колесо ВШД; геометрических характеристик зубьев круговой и циклоидальной форм на величину эквивалентных толщин и эквивалентных напряжений в них, а также на характер распределения контактных усилий между зубьями колес.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ:

1. Клеников С.С., Фомина Т.А. Динамическая модель для расчета пружинного пакета волнового шагового двигателя // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение. 2010. №4. С. 23-34.
2. Клеников С.С., Фомина Т.А. Модель волнового шагового двигателя с пневмогидродеформатором // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение. 2011. №2. С. 44-54.
3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2011614657. Расчет физических характеристик рабочего вещества в канале волнообразователя волнового шагового двигателя / Т.А. Фомина. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 10.06.2011.
4. Фомина Т.А. Волновой шаговой двигатель с пневмогидрораспределителем новой конструкции // Итоги и перспективы интегрированной системы образования в высшей школе России: образование - наука - инновационная деятельность: Труды II Международной научно-практической конференции. М., 2011. С. 380-382.
5. Фомина Т.А. К вопросу построения математической модели для исследования физических характеристик рабочего вещества в канале волнообразователя волнового шагового двигателя // Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского: Материалы IX Всероссийской научно-технической конференции. М., 2010. С. 121-123.
6. Фомина Т.А. Модель для расчета эквивалентных толщин зубчатого венца гибкого колеса с круговой формой зуба и распределения в нем эквивалентных напряжений // Известия вузов. Машиностроение. 2011. №6. С. 19-25.
7. Фомина Т.А. Построение математической модели для исследования физических характеристик рабочего вещества в канале волнообразователя волнового шагового двигателя // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение. 2010. №4. С. 98-109.
8. Фомина Т.А. Расчет поршневой группы пневмоволнового двигателя // Гагаринские чтения 2009: Сборник научных работ. М., 2010. С. 246-253.