

Р. 123328

Н. К. Мерцаловъ

Адъюнктъ-профессоръ Императорскаго Техническаго училища.

Прикладная механика.

Лекціи, читанныя на 2-мъ курсѣ механическаго отд.
въ 1903—1904 ак. году.

Съ отдѣльнымъ атласомъ чертежей.

Издано студентомъ В. И. Ясинскимъ.



Типо-литогр. Т-ва И. Н. Кушнеревъ и К^о, Пименовск. ул., с. д.
Москва—1904.

Н. Н. Мерцаловъ

Адъюнктъ-профессоръ Императорскаго Техническаго училища.

Прикладная механика.

Лекціи, читанныя на 2-мъ курсѣ механическаго отд.
въ 1903—1904 ак. году.

ПРОВЕРЕНО
1952

Съ отдѣльнымъ атласомъ чертежей.

Издано студентомъ В. И. Ясинскимъ.

fs



МОСКВА.

Типо-лит. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К^о. Пименовская ул., соб. домъ.
1903.

ВВЕДЕНИЕ.

Прикладная механика, какъ это видно изъ самаго названія, занимается приложеніемъ нашихъ знаній о соотношеніяхъ между силами природы къ изысканію способовъ пользованія этими силами въ нашихъ цѣляхъ. Эти способы пользованія силами и цѣли, имѣющіяся въ виду при этомъ, можно раздѣлить на двѣ группы. Въ одной мы пользуемся извѣстными силами для того, чтобы устранить нежелательное дѣйствіе другихъ силъ. Перекидывая, напр., мостъ черезъ рѣку, мы устраняемъ нежелательное дѣйствіе тяжести; возводя зданіе, устраняемъ нежелательное дѣйствіе температуры и другихъ атмосферическихъ дѣятелей и т. д. Здѣсь наши знанія о молекулярныхъ силахъ сцѣпленія, упругости и т. п. даютъ намъ возможность избѣжать вреднаго для насъ дѣйствія другихъ силъ.

Та же часть прикладной механики, которая занимается изысканіемъ этихъ способовъ устраненія извѣстныхъ дѣйствій внѣшнихъ факторовъ, называется вообще *строительной механикой*.

Другая группа способовъ пользованія силами носитъ гораздо болѣе активный характеръ. Тутъ мы заставляемъ силы производить движеніе въ опредѣленномъ, желательномъ для насъ, направленіи, совершать извѣстную, нужную для насъ работу.

Орудія, при помощи которыхъ мы производимъ эти дѣйствія, называются машинами, и та часть прикладной механики, которая занимается изслѣдованіемъ этой второй группы способовъ пользованія силами, называется *машиностроеніемъ*.

Уже изъ самой сущности задачи, которую мы ставимъ себѣ при такомъ пользованіи силами, вытекаетъ опредѣленіе машины. Однако, это опредѣленіе было дано впервые, какъ это ни странно, только въ концѣ шестидесятыхъ годовъ извѣстнымъ Reuleaux и формулируется такъ:

Машиной называется система тѣлъ, при помощи которыхъ данныя силы производятъ движеніе только въ заранее опредѣлен-

ныхъ направленяхъ, всѣ же другія дѣйствія силъ устраняются соотвѣтственнымъ сопротивленіемъ этой совокупности тѣлъ.

Какъ видимъ, и это опредѣленіе есть собственно описаніе, но такое, которое хорошо формулируетъ сущность рѣшаемой нами при помощи машинъ задачи. Замѣтимъ, что изъ приведеннаго опредѣленія непосредственно вытекаетъ подраздѣленіе науки о машинахъ на соотвѣтственные отдѣлы.

Во-первыхъ, основнымъ требованіемъ является произведеніе заранее опредѣленнаго движенія, а такъ какъ всякое сложное движеніе, какъ извѣстно, можно составить изъ нѣсколькихъ простыхъ, то на первомъ планѣ появляется вопросъ: какой комбинаціей простѣйшихъ движеній мы можемъ воспроизвести требуемое движеніе? Поэтому первымъ и основнымъ отдѣломъ науки машиностроенія будетъ отдѣлъ *кинематическій*, въ которомъ разсматриваются, во-первыхъ, способы воспроизведенія простѣйшихъ движеній, а затѣмъ—различныя ихъ комбинаціи.

Далѣе, силы, производя при помощи машины опредѣленные движенія, совершаютъ нужную для насъ работу. Но эта работа является результатомъ не свободнаго дѣйствія силъ, а принужденнаго. Устраняя нежелательныя для насъ движенія при помощи сопротивленія частей машины, мы должны ожидать извѣстной потери въ дѣйствіи силъ. Слѣдовательно, здѣсь является вопросъ, какимъ образомъ свести эту потерю на *minimum*, т.-е. является вопросъ объ *экономическомъ коэффициентѣ* машины и о вредныхъ сопротивленіяхъ. Рѣшенію этого вопроса посвящается второй отдѣлъ науки о машиностроеніи, носящій обыкновенно названіе *общей теоріи машинъ*, а такъ какъ различныя потери въ дѣйствіяхъ силъ несомнѣнно зависятъ отъ природы самихъ силъ, то этотъ отдѣлъ естественно распадается на группы сообразно съ особыми свойствами вводимыхъ силъ; такимъ образомъ частью этого отдѣла явится, напр., *термодинамика*.

Наконецъ, требованіе устраненія нежелательныхъ дѣйствій силъ порождаетъ вопросъ о достаточной сопротивляемости частей машинъ этимъ, такъ сказать, вреднымъ дѣйствіямъ силъ, и такимъ образомъ является третій отдѣлъ науки машиностроенія: *ученіе о прочности частей машинъ*.

Каждый изъ этихъ отдѣловъ представляетъ одинаковую важность для инженера, но каждый имѣетъ свои особенности для изученія и пользованія выводами,—особенности, на которыхъ я нѣсколько останавлиюсь.

Первый, *кинематическій*, отдѣлъ выдѣлился въ особую науку сравнительно недавно. Извѣстно, что еще Амреге настаивалъ на выдѣленіи изъ механики особой отрасли, занимающейся исключительно изслѣдованіемъ движеній, безъ разсмотрѣнія силъ, ихъ

производящихъ, и указывалъ на важное значеніе этой отрасли для потребностей практической механики. И дѣйствительно, инженеру прежде всего приходится рѣшать вопросъ объ относительныхъ движеніяхъ частей машины, производящихъ въ совокупности желательное движеніе, а для рѣшенія этого вопроса вовсе не нужно принимать во вниманіе, какія силы заставляютъ механизмъ двигаться. Вопросъ этотъ въ весьма большомъ числѣ случаевъ машиностроенія является даже первенствующимъ; такъ, напр., во всѣхъ машинахъ, обрабатывающихъ дерево или металлы, гдѣ требуется куску матеріала придать опредѣленную форму при помощи извѣстнаго инструмента, мы прежде всего должны рѣшить вопросъ объ относительномъ движеніи этого инструмента; именно такомъ, чтобы онъ могъ придать обрабатываемому куску заданную форму. Точно такъ же при устройствѣ ткацкихъ станковъ прежде всего требуется при помощи извѣстной комбинаціи движеній рѣшить сложную задачу объ относительномъ движеніи нитей основы и утка съ цѣлью воспроизведенія даннаго узора ткани; всѣмъ извѣстно, какія остроумныя и въ высшей степени сложныя комбинаціи движеній встрѣчаются, напр., въ новѣйшихъ Жаккардовыхъ машинахъ, работающих съ нѣсколькими челноками. Въ этомъ случаѣ, какъ и многихъ, ему подобныхъ, вопросъ о силахъ, производящихъ движеніе, даже вопросъ объ экономичности, отступаютъ на второй планъ. Легко однако видѣть, что разъ мы опускаемъ на время вопросъ о силахъ и рассматриваемъ только движеніе, наше изслѣдованіе пріобрѣтаетъ чисто геометрическій характеръ, и Амперъ былъ вполне правъ, когда назвалъ эту новую отрасль прикладной механики „геометріей 4-хъ измѣреній“, гдѣ четвертымъ измѣреніемъ является элементъ времени.

Слѣдовательно, первый основной отдѣлъ прикладной механики обладаетъ тѣмъ преимуществомъ, какимъ обладаетъ геометрія въ частности и чистая математика вообще. Этимъ преимуществомъ является наибольшая легкость и доступность для изученія, ибо при этомъ не требуется ни сложныхъ опытовъ, ни кропотливыхъ наблюденій, и строгая доказательность положеній и выводовъ. Далѣе, въ самомъ пользованіи результатами наблюдается полное тождество съ геометріей: подобно тому, какъ въ геометріи мы, обладая нѣкоторой долей воображенія, при помощи комбинаціи извѣстныхъ пространственныхъ соотношеній можемъ создавать новыя формы и а priori заключать о новыхъ соотношеніяхъ, такъ и здѣсь для творчества требуется только воображеніе и способность къ комбинированію, такъ что рѣшеніе кинематическихъ вопросовъ по существу не отличается отъ рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе.

Ошибочнымъ, конечно, являлось бы предположеніе, что рѣшеніе это можно подвести подъ извѣстныя формулы или даже облегчить его введеніемъ разныхъ условныхъ обозначеній для механизмовъ, какъ полагалъ, напр., тотъ же Reuleaux. Обозначенія эти скорѣе даже мѣшаютъ успѣшному ходу творческаго процесса, ибо вмѣсто непосредственной наглядности является отвлеченная условность, а только интуиція и можетъ создать здѣсь что-либо новое. Въ дѣйствительности хорошее воображеніе и способность къ комбинаціямъ встрѣчаются далеко не рѣдко, и потому вовсе не удивительно, что творчество въ этой области машиностроенія развито весьма сильно. Стоитъ только посмотрѣть, какая масса всевозможныхъ механизмовъ для получения различныхъ случаевъ движенія патентуется ежегодно, чтобы убѣдиться въ справедливости сказаннаго. Почему же, однако, не всѣ эти механизмы, а только ничтожно малая часть ихъ вводится потомъ въ дѣйствительную жизнь и пріобрѣтаетъ, такъ сказать, права гражданства? Въ большинствѣ случаевъ эти механизмы бывають вѣдь весьма остроумны съ кинематической точки зрѣнія и тѣмъ не менѣе примѣненія на практикѣ не имѣють.

Отвѣтъ на поставленный нами вопросъ дадутъ намъ другіе отдѣлы науки о машиностроеніи, и, прежде всего, общая теорія машинъ. Механизмъ, совершенный съ точки зрѣнія кинематики, можетъ оказаться на дѣлѣ никуда не годнымъ по своей неэкономичности, и указанія, необходимыя для построенія удовлетворительныхъ съ этой точки зрѣнія механизмовъ, долженъ бы намъ давать второй отдѣлъ машиностроенія.

Однако, здѣсь дѣло обстоитъ гораздо сложнѣе: теперь въ наше изслѣдованіе мы должны ввести вопросъ о силахъ, и задача наша сразу становится труднѣйшей.

Изъ исторіи развитія теоретической механики извѣстно, какъ трудно поддаются изученію даже рудиментарныя силы: такъ, напр., у древнихъ геометрія стояла на очень высокой степени развитія, а тѣмъ не менѣе они не имѣли даже самага отдаленнаго понятія хотя бы о принципѣ инерціи или о принципѣ независимости дѣйствія. Нуженъ былъ необыкновенный геній *Галилея*, чтобы положить начало выясненію этихъ основныхъ принциповъ. *Галилей* изучалъ преимущественно дѣйствія силъ тяжести, что значительно упрощало дѣло въ виду нѣкоторыхъ спеціальныхъ условій этого дѣйствія. Въ машиностроеніи же мы имѣемъ дѣло не съ простымъ дѣйствіемъ тяжести, а съ несравненно болѣе сложными явленіями молекулярныхъ силъ. Изслѣдованіе этихъ силъ и дѣйствій, ими производимыхъ, сопряжено съ очень трудными опытами, да и опыты зачастую мало помогаютъ

дѣлу, такъ какъ въ виду совмѣстности существованія силъ сущность дѣйствія каждой отдѣльной силы ускользаетъ отъ нашего наблюденія, и нужно обладать геніальными способностями, чтобы быть въ состояніи усмотрѣть главное въ явленіи и отвлечься отъ всего частнаго и побочнаго. Въ этомъ обстоятельствѣ и коренится причина такого медленнаго развитія этого отдѣла ученія о машинахъ; потому-то такъ несовершенна въ большинствѣ случаевъ теорія относящихся сюда явленій; такъ, напр., объ одномъ изъ самыхъ важныхъ факторовъ въ вопросѣ объ экономичности механизма, а именно о треніи, мы знаемъ очень мало; мы, напр., до сихъ поръ не можемъ опредѣленно сказать, зависитъ ли треніе твердыхъ тѣлъ отъ относительной ихъ скорости или нѣтъ.

Въ термодинамикѣ, правда, благодаря геніямъ *Mayer'a*, *Clausius'a* и *Carnot*, мы имѣемъ рядъ опредѣленныхъ указаній, которыми долженъ руководствоваться инженеръ при построеніи относящихся сюда машинъ, но практическое выполненіе указанныхъ ими идеальныхъ конструкцій весьма затруднительно именно въ силу весьма малыхъ знаній нашихъ о дѣйствіи молекулярныхъ силъ. Изслѣдованіе *Carnot* появилось въ 1824 г., работа *Mayer'a*— въ 1842 г., однако хоть нѣсколько приблизиться къ теоретическимъ требованіямъ удалось только въ самое послѣднее время благодаря энергіи германскаго инженера *Diesel'я*. Нуженъ былъ многолѣтній упорный трудъ, нужна была большая изобрѣтательность въ конструкціи, чтобы достигнуть полученнаго имъ, хотя въ дѣйствительности и небольшого, приближенія къ научнымъ требованіямъ.

Итакъ, этотъ отдѣлъ механики представляетъ огромныя и неопределимыя трудности какъ для теоретической его разработки, такъ и для пракческаго использованія добытыхъ результатовъ; и только въ немногихъ случаяхъ онъ даетъ намъ вполнѣ опредѣленный отвѣтъ на вопросъ о пригодности того или другого механизма.

Если мы обратимся къ третьему основному отдѣлу ученія о машиностроеніи, къ ученію о прочности частей машинъ, то и здѣсь встрѣтимся съ такими же, если не большими, трудностями. Правда, здѣсь мы имѣемъ дѣло съ опредѣленнымъ классомъ явленій, а именно — съ явленіями упругости; однако явленія эти довольно сложны, и хотя нѣкоторыя предположенія о сущности дѣйствія силъ упругости мы и можемъ сдѣлать, однако въ случаяхъ, представляющихся намъ въ дѣйствительности, мы наталкиваемся часто на такія сложныя комбинаціи этихъ силъ, что теоретически въ нихъ разобраться бываетъ невозможно, и мы бываемъ принуждены прибѣгать въ такихъ случаяхъ къ болѣе

или менѣ произвольнымъ, упрощающимъ дѣло предположеніямъ. Но даже и при такомъ приѣмѣ нахожденія рѣшенія удастся намъ только въ немногихъ, наиболѣе простыхъ и въ дѣйствительности рѣдко имѣющихъ мѣсто случаяхъ. Тѣмъ не менѣе получаемые такимъ образомъ выводы мы примѣняемъ къ сложнымъ явленіямъ, гораздо чаще встрѣчающимся, стараясь поправить не-точности введеніемъ опытныхъ коэффиціентовъ. Такой путь, конечно, мало раціоналенъ, ибо самый видъ соотношенія можетъ вовсе не подходить къ данному случаю, а коэффиціенты эти дѣла совсѣмъ не поправляютъ — поправленная при ихъ помощи формула будетъ выражать соотношенія только для тѣхъ опытовъ, изъ которыхъ эти коэффиціенты выведены, что, понятно, большого интереса представить не можетъ. Обыкновенно руководствуются аналогіями съ механизмами, испытанными уже раньше; но и этотъ путь по весьма понятнымъ причинамъ представляется также мало раціональнымъ. Тѣмъ не менѣе, вслѣдствіе необыкновенныхъ трудностей дѣла приходится мириться съ этими мало научными приѣмами.

Итакъ, намъ представляется теперь вполне понятнымъ, почему только немногіе изъ всѣхъ изобрѣтаемыхъ механизмовъ удерживаются въ дѣйствительности. Вслѣдствіе несовершенствъ общей теоріи машинъ и ученія о достаточной прочности частей механизма нельзя съ полной опредѣленностью заранее сказать въ каждомъ данномъ случаѣ, пригоденъ или нѣтъ тотъ или иной новый механизмъ. Мы еще не обладаемъ достаточнымъ запасомъ свѣдѣній и знаній по части вредныхъ сопротивленій, — запасомъ настолько достаточнымъ, чтобы устранить, по возможности заранее, ихъ дѣйствіе; мы не можемъ еще распоряжаться геометрическими формами, — мы вынуждены *пробовать и испытывать*. Но если дѣло обстоитъ такимъ именно образомъ, то тѣмъ нужнѣе становится для насъ обладаніе возможно болѣе богатымъ запасомъ придуманныхъ механизмовъ, и богатство творчества въ кинематической части является однимъ изъ необходимыхъ условій успѣшной борьбы инженера съ вредными сопротивленіями. Мы будемъ поступать въ этомъ случаѣ такъ, какъ поступаетъ сама природа: она производитъ массу сѣмянъ, но только ничтожно малая часть ихъ выдерживаетъ борьбу съ вредными вліяніями, такъ что необходимымъ условіемъ успѣшности борьбы и служить именно это богатство произведенія.

ЧАСТЬ I.

Общая теорія механизмовъ.

Общія кинематическія свѣдѣнія.

Движеніе всякой неизмѣняемой системы вполне опредѣляется движеніемъ какихъ-либо трехъ точекъ этой системы; зная положеніе этихъ послѣднихъ въ каждый данный моментъ, мы легко опредѣлимъ положеніе любой точки этой системы, такъ какъ положеніе ея относительно трехъ выбранныхъ нами точекъ при данной конфигураціи системы намъ извѣстно вполне.

Если система движется параллельно какой-либо плоскости *) (съ такимъ движеніемъ преимущественно мы имѣемъ дѣло въ кинематикѣ механизмовъ), то какое-либо сѣченіе S (фиг. 1) **) этой системы плоскостью PQ , параллельной направляющей плоскости MN , будетъ во все время этого движенія находиться въ этой сѣкущей плоскости. Тогда для опредѣленія движенія системы намъ достаточно будетъ разсмотрѣть движеніе одного этого сѣченія S въ его плоскости PQ . Такъ какъ, далѣе, положеніе всякой неизмѣняемой системы на плоскости вполне опредѣляется положеніемъ двухъ какихъ-нибудь точекъ ея, то все изслѣдованіе подобнаго движенія сводится, какъ видимъ, къ разсмотрѣнію движенія, какого-либо прямого отрѣзка, движущагося въ данной плоскости. Простѣйшими движеніями такого отрѣзка будутъ: 1) поступательное и прямолинейное, при которомъ всѣ точки этого отрѣзка будутъ перемѣщаться по параллельнымъ прямымъ со скоростями, равными между собою, и 2) вращательное около какой-нибудь неподвижной точки плоскости, — въ этомъ случаѣ точки отрѣзка будутъ описывать концентрическія окружности съ центромъ въ неподвижной точкѣ.

Замѣтимъ, что первый случай можно, съ какой угодно степенью точности, такъ же разсматривать, какъ нѣкоторое вращеніе, если только

*) Направляющая плоскость.

**) См. атласъ, табл. I.

неподвижную точку взять достаточно далеко. Точно такъ же можно сказать, что, если концы отрѣзка принуждены за все время движенія оставаться на двухъ концентрическихъ окружностяхъ, то движеніе представится вращеніемъ отрѣзка около общаго центра этихъ окружностей.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію вообще какого-нибудь движенія подобнаго отрѣзка.

Пусть отрѣзокъ прямой AB движется такъ, что концы его A и B все время принуждены оставаться на кривыхъ MN и PQ (фиг. 2). Если мы рассмотримъ 2 какихъ-нибудь смежныхъ послѣдовательныхъ положенія отрѣзка, положимъ, AB и A_1B_1 , то перемѣщеніе конца A по кривой MN изъ A въ A_1 можно будетъ разсматривать, какъ движеніе его по нѣкоторой окружности, имѣющей съ кривой двѣ общія точки, A и A_1 ; въ предѣлѣ, при безконечно близкихъ другъ къ другу точкахъ A и A_1 , это будетъ окружность, касательная къ кривой MN въ точкѣ A . О точкѣ B можно сказать буквально то же самое,—опять можно принять, что при безконечно маломъ перемѣщеніи отрѣзка AB конецъ его B , подобно концу A , перемѣстится по нѣкоторой окружности, касательной къ PQ , въ точкѣ B . Но изъ анализа мы знаемъ, что центры всѣхъ окружностей, касательныхъ къ кривой MN въ точкѣ A ея, лежатъ на нормали къ этой кривой въ точкѣ A ; то же можно сказать и про точку B . Если мы проведемъ такія двѣ нормали и точку ихъ пересѣченія возьмемъ за центръ окружностей, касательныхъ къ кривымъ MN и PQ соотвѣтственно въ точкахъ A и B , то можно будетъ сказать (съ какой угодно степенью точности), что нашъ отрѣзокъ перешелъ изъ положенія AB въ положеніе A_1B_1 , скользя своими концами по двумъ концентрическимъ окружностямъ (pAA_1) и (pBB_1),—иными словами, вращаясь около точки p . Такимъ образомъ, всякое перемѣщеніе отрѣзка за достаточно малый промежутокъ времени можно разсматривать, какъ вращеніе около нѣкоторой вполне опредѣленной и единственной точки неподвижной плоскости. Эта точка называется *центромъ* или *полюсомъ мгновеннаго вращенія*.

Если мы возьмемъ рядъ послѣдовательныхъ положеній отрѣзка, т.-е. рассмотримъ его движеніе за извѣстный промежутокъ времени, то, руководствуясь вышеприведенными соображеніями, найдемъ рядъ точекъ $p_1, p_2, \dots$, аналогичныхъ точкѣ p ; около этихъ точекъ послѣдовательно вращается нашъ отрѣзокъ AB , а вмѣстѣ съ нимъ и вся та плоская система, съ которою онъ составляетъ одно цѣлое. Непрерывный рядъ этихъ точекъ p_n представить собою нѣкоторую кривую, лежащую въ неподвижной плоскости и называемую *неподвижной поллоидой*.

Скорости различныхъ точекъ подвижной системы въ каждый данный моментъ пропорціональны разстояніямъ ихъ отъ соотвѣтствующаго этому моменту полюса мгновеннаго вращенія. Пусть угловая

скóрость мгновеннаго вращенія системы въ данный моментъ есть ω ; пусть разстоянiе какой-либо точки x отъ соотвѣтствующаго полюса p есть ρ ; тогда, на основанiи предыдущаго: линейная скорость точки x въ данный моментъ равна $\rho \cdot \omega$. На основанiи же предыдущаго радиусъ-векторъ, т.-е. линiя, соединяющая точку x въ ея положенiи въ данный моментъ съ центромъ мгновеннаго вращенiя, *нормальна* къ траекторiи точки x , а перпендикуляръ къ этой линiи, проведенный черезъ точку x , есть касательная къ траекторiи (фиг. 3).

Возьмемъ теперь въ подвижной системѣ не одну точку, а цѣлый рядъ ихъ—цѣлую кривую aa . При движенiи системы эта кривая будетъ занимать различныя положенiя на неподвижной плоскости (фиг. 4). На той же неподвижной плоскости можно представить себѣ новую кривую S_1 , къ которой будетъ постоянно прикасаться наша подвижная кривая aa ; подвижную кривую aa мы назовемъ *огибаемой*, а кривую S_1 —*огибающей*. Разсмотримъ движенiе огибаемой по огибающей. Пусть въ данный моментъ точкой ихъ взаимнаго соприкосновенiя будетъ точка A , а мгновенный центръ вращенiя пусть находится въ p (фиг. 5). Положимъ далѣе, что кривая S (огибаемая), вращаясь въ данный моментъ вмѣстѣ со всей подвижной системой около точки p , обладаетъ въ этотъ моментъ угловою скоростью ω (подъ угловою скоростью подразумѣвается отношенiе безконечно малаго угла поворота системы, $d\alpha$, къ безконечно малому элементу времени dt , въ продолженiе котораго совершился этотъ поворотъ на $d\alpha$; т.-е. $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$).

Теперь, на основанiи извѣстной теоремы механики, вращенiе около точки p замѣняемъ вращенiемъ около точки касанiя A , съ тою же угловою скоростью ω , и параллельнымъ перенесенiемъ вдоль линiи, перпендикулярной къ pA , со скоростью $v = \omega \cdot pA$. Но при такомъ перенесенiи кривая S (огибаемая) должна скользить по кривой S_1 (огибающей), оставаясь съ ней все время въ соприкосновенiи (по самому опредѣленiю огибающей). Слѣдовательно, указанное безконечно-малое перенесенiе должно совершиться въ направленiи AB , т.-е. по касательной къ обѣимъ кривымъ (огибающей и огибаемой), въ ихъ общей точкѣ A . Отсюда слѣдуетъ, что pA , какъ прямая перпендикулярная къ направленiю перенесенiя, а значитъ и къ касательной AB , есть нормаль къ обѣимъ кривымъ въ общей ихъ точкѣ A ; такимъ образомъ получаемъ слѣдующее весьма важное положенiе кинематики: *нормаль къ огибающей и къ огибаемой въ точкѣ ихъ соприкосновенiя всегда проходитъ черезъ центръ мгновеннаго вращенiя*.

Мѣру скольженiя огибаемой по огибающей найти не трудно: вращенiе около точки A скольженiя не даетъ, а при параллельномъ перенесенiи кривая S за время dt передвинется на длину $l = \omega \cdot pA \cdot dt$; эта величина l и будетъ измѣрять собою скольженiе S по S_1 .

Неподвижная полоида, въ свою очередь, можетъ быть разсматриваема, какъ огибающая нѣкоторой кривой, принадлежащей подвижной системѣ. Такъ какъ въ этомъ случаѣ $pA = 0$, то эта огибаемая по своей огибающей не скользитъ,—она только катится по ней, вращаясь въ каждый данный моментъ около соотвѣтствующаго полюса p . Пусть S_1 (фиг. 6) представляетъ неподвижную полоиду, а S —подвижную кривую, катящуюся безъ скольженія по S_1 во время движенія системы. Пусть въ данный моментъ эти кривыя соприкасаются въ точкѣ p —полюсѣ мгновеннаго вращенія для данного момента. Отмѣтимъ на той и на другой кривой рядъ точекъ: 1, 2, 3... на S и 1', 2', 3', ... на S_1 , такихъ, чтобы дуги $p1$, 12 , 23 , ... равнялись соотвѣтственно дугамъ $p1'$, $1'2'$, $2'3'$, ... Тогда можно сказать, что огибаемая S при своемъ каченіи послѣдовательно будетъ совпадать своими точками 1, 2, 3... съ точками 1', 2', 3', ... огибающей. Но точки 1', 2', 3'... служатъ послѣдовательно полюсами мгновеннаго вращенія системы, а поэтому точки 1, 2, 3... суть тѣ точки подвижной системы, которыя при движеніи системы совпадаютъ, каждая въ извѣстный моментъ, съ полюсами вращенія. Наша огибаемая, соединяющая такія точки, носитъ названіе *подвижной полоиды*. Все движеніе системы можно поэтому разсматривать, какъ результатъ каченія подвижной полоиды по неподвижной.

Если обѣ полоиды даны, то построить траекторію какой-либо точки подвижной системы можно такъ: пусть подвижная полоида S_1 (фиг. 7) касается въ данный моментъ неподвижной въ точкѣ p , которая такимъ образомъ служитъ въ данный моментъ мгновеннымъ центромъ вращенія. Пусть теперь подвижная полоида S_1 перекатилась въ новое положеніе S_1' ; такимъ образомъ новымъ центромъ мгновеннаго вращенія теперь служитъ точка p_1 . Пусть въ подвижной системѣ у насъ имѣется нѣкоторая точка, занимавшая положеніе x , когда полюсомъ служила точка p , и занявшая новое положеніе, нѣкоторое x_1 , когда полоида изъ S_1 перекатилась въ S_1' . Это новое положеніе точки x можно легко найти, принимая во вниманіе, что полоиды катились одна по другой безъ скольженія и что дуга, на которую онѣ прокатились, извѣстна—эта дуга есть дуга pp_1 . Спросимъ себя теперь, гдѣ на полоидѣ S_1 лежитъ та точка, которая впоследствии, когда S_1 перешла въ S_1' , совпала съ точкой p_1 ? Очевидно, что такая точка отстоитъ отъ точки p , считая по дугѣ полоиды S_1 , на длину, равную длинѣ дуги pp_1 . Поэтому на подвижной полоидѣ S_1 откладываемъ отъ точки p дугу pp_1' , равную дугѣ pp_1 ; сдѣлать это можно различнымъ образомъ; можно, напр., раздѣлить дугу pp_1 на нѣсколько малыхъ частей и отложить ихъ по подвижной полоидѣ S_1 , начиная отъ точки p . Произведя это отложеніе, получаемъ точку p_1' , которая, стало быть, и есть та точка полоиды, которая впоследствии совпадаетъ съ точкой p_1 полоиды S . Подобнымъ же образомъ находимъ,

что точка полюиды S_1 , совпадавшая раньше съ p , теперь окажется въ p' (дуга $p_1p' = \text{дугѣ } p_1p$).

Точка x отстоитъ отъ точки p на разстояніи xp ; отъ точки p_1' —на разстояніе xp_1' ; разстоянія эти не измѣнились и послѣ перемѣщенія S_1 въ S_1' . Поэтому новое положеніе точки x найдется такъ: изъ центра p' (совпадавшаго раньше съ точкой p) описываемъ дугу радіусомъ $= xp$, а изъ p_1 —радіусомъ xp_1' ; въ пересѣченіи этихъ двухъ дугъ, по опредѣленную сторону отъ p_1p' , и будетъ лежать искомая точка x_1 ,—въ эту именно точку и придетъ точка x послѣ вышеупомянутаго поворота.

Можно построить это новое положеніе еще иначе, построивъ въ p' касательную p_1T_1 къ полюидѣ S_1' и проведя черезъ p_1 линію p_1x_1 подъ угломъ $x_1p_1T_1 = \text{углу } xpT$; для нахожденія точки x_1 придется отложить на этой линіи отъ точки p_1 отрѣзокъ $p_1x_1 = p'_1x$.

Положеніе точки x относительно подвижной полюиды можно, конечно, опредѣлить различными способами; но такъ или иначе всегда легко можно найти рядъ послѣдовательныхъ положеній какой угодно точки подвижной системы, т.-е. траекторію. Въ каждомъ положеніи точки можно также провести касательную къ траекторіи, не проводя самой траекторіи; нужно только помнить, что линія, соединяющая точку съ центромъ мгновеннаго вращенія, есть нормаль къ траекторіи, а перпендикуляръ къ этому вектору, выходящій изъ этой точки, будетъ, слѣдовательно, касательной.

Если, напр., точка x находилась въ A_1 , когда центромъ мгновеннаго вращенія служила точка p_1 , въ A_2 —когда p_2 , ..., то перпендикуляры A_1t_1 , A_2t_2 , A_3t_3 , ... проведенные черезъ точки A_1 , A_2 , A_3 , ... и будутъ касательными къ траекторіи (фиг. 8). Траекторія точки x намѣчена пунктиромъ.

Что же касается до отысканія *подвижной полюиды*, то здѣсь можно поступать согласно самому опредѣленію ея, т.-е. отмѣчать тѣ точки подвижной системы, которыя послѣдовательно совпадаютъ съ центрами мгновеннаго вращенія. Пусть, напр., отрѣзокъ AB (фиг. 9) перемѣщается по кривымъ MN и PQ . Когда этотъ отрѣзокъ былъ въ положеніи A_1B_1 , то центромъ мгновеннаго вращенія служила точка p_1 ; когда же отрѣзокъ перемѣстился въ A_2B_2 , то та точка подвижной системы отрѣзка, которая раньше совпадала съ p_1 и, слѣдовательно, находилась въ разстояніяхъ A_1p_1 отъ конца A_1 и B_1p_1 —отъ B_1 , теперь уже не совпадаетъ, вообще говоря, съ новымъ полюсомъ p_2 , но займетъ на неподвижной плоскости мѣсто, опредѣляемое ея неизмѣнными разстояніями m и n отъ A_1 и B_1 ; она помѣстится теперь въ x_2 . Подобнымъ же образомъ мы найдемъ сколько угодно точекъ подвижной полюиды и будемъ въ состояніи начертить ее на плоскости. Но часто бываетъ лучше поступать другимъ образомъ.

При нахожденіи неподвижной полюиды мы разсматривали, согласно

условіямъ движенія (мы задавались траекторіями двухъ какихъ-либо точекъ), рядъ положеній подвижной системы относительно неподвижной плоскости, т.-е. относительно какой-нибудь совокупности ея точекъ (напр., относительно отръзка какой-нибудь прямой, кривой и т. д.). Пусть подвижная система, къ которой принадлежит какая-нибудь точка x , имѣетъ подвижную полоиду S_1 и неподвижную S (фиг. 10). Пусть въ нѣкоторый моментъ полоиды касаются другъ друга въ P_1 , такъ что P_1 и служитъ центромъ мгновеннаго вращенія. Если CD есть отръзокъ прямой, лежащей въ неподвижной плоскости, то въ данный моментъ положеніе точки x м. б. опредѣлено, напр., разстояніями Cx и Dx . Когда полоида S_1 заняла положеніе S_2 , т.-е. перекатилась на дугу $P_1P = P_1P_2$, гдѣ P есть точка полоиды S_1 , совпадающая теперь съ P_2 , а P_2 —новый полюсъ мгновеннаго вращенія, то точка x заняла новое положеніе x_2 , вполне опредѣленное относительно того же неподвижнаго отръзка CD . Но очевидно, что *то же самое относительное положеніе точки x и отръзка CD* я могъ бы получить, сдѣлавъ полоиду S_1 неподвижной и прокативъ по ней полоиду S до совпаденія P_2 съ P . При этомъ система (S_1, x) остается неподвижной, а система отръзка CD , какъ неразрывно связанная съ полоидой S , будетъ двигаться относительно системы (S_1, x) . Это послѣднее относительное движеніе намъ извѣстно изъ условій движенія (S_1, x) , и, слѣдовательно, нахожденіе полоиды S_1 сведется къ нахожденію *неподвижной* полоиды для движенія CD относительно системы (S_1, x) .

Для примѣра возьмемъ одну изъ самыхъ извѣстныхъ задачъ—задачу о движеніи отръзка постоянной величины— AB , опирающагося концами на стороны угла MON (фиг. 11). Такимъ образомъ даны неподвижныя въ пространствѣ траекторіи двухъ точекъ нашей системы точекъ A и B ; траекторіи эти представляются прямыми OM и ON . Возставляя въ точкахъ A и B перпендикуляры къ OM и ON , въ точкѣ ихъ пересѣченія получаемъ центръ мгновеннаго вращенія P (фиг. 11). Разстояніе его отъ O неизмѣнно, такъ какъ OP всегда служитъ діаметромъ окружности, проходящей чрезъ точки O , A , P , B ; а эта окружность вмѣщаетъ данный уголъ α , опирающійся на отръзокъ постоянной длины AB ; а потому, каково бы ни было положеніе отръзка AB относительно угла α , эта окружность имѣетъ единственный, вполне опредѣленный радіусъ. Такимъ образомъ, *неподвижной* полоидой является *окружность* радіуса OP и центра O (фиг. 12).

Подвижную полоиду можемъ найти, заставляя уголъ MON перемѣщаться относительно AB такъ, чтобы относительное движеніе осталось тѣмъ же; въ этомъ случаѣ стороны α , т.-е. прямая OM и ON , будутъ принуждены постоянно проходить чрезъ неподвижныя точки A и B (ибо теперь мы остановили отръзокъ AB и перемѣщаемъ систему MON). Такимъ образомъ точки A и B явятся *опирающимися* по-

ложеній прямыхъ OM и ON . Но, какъ выше было скизано, нормаль къ огибающей и огибаемой всегда проходитъ черезъ центръ мгновеннаго вращенія; поэтому, если OM есть огибаемая, точка A —огибающая (точкой касанія служитъ та же точка A), то центръ мгновеннаго вращенія будетъ лежать на $\perp$ -рѣ къ OM въ точкѣ A , т.-е. на AC ; по той же причинѣ, онъ долженъ лежать на BD ($\perp$ къ ON въ точкѣ B); такимъ образомъ центръ мгновеннаго вращенія лежитъ въ точкѣ пересѣченія этихъ перпендикуляровъ, въ точкѣ P . Отсюда слѣдуетъ, что векторы, соединяющіе A и B съ центромъ вращенія, при этомъ вращеніи угла всегда перпендикулярны къ его сторонамъ, т.-е. образуютъ между собою постоянный уголъ (равный α или $180^\circ - \alpha$), такъ что геометрическимъ мѣстомъ центровъ вращенія будетъ окружность, проходящая чрезъ A и B и вмѣщающая данный уголъ, т.-е. окружность съ діаметромъ OP .

Такимъ образомъ, подвижной полоидой будетъ окружность вдвое меньшаго радіуса, сравнительно съ неподвижной, и движеніе отръзка AB , а съ нимъ и всей системы, неразрывно съ AB связанной, приводится къ качанію одной окружности внутри другой вдвое большаго радіуса.

Разсмотримъ подробнѣе каченіе такихъ двухъ полоидъ—окружностей, одной по другой. Пусть окружность (OP) есть наша неподвижная полоида и окружность (O_1P), гдѣ $O_1P = \frac{1}{2} OP$, подвижная полоида. Пусть онѣ находятся въ положеніи, указанномъ на фиг. 12. Точка ихъ касанія, точка P , есть мгновенный полюсъ вращенія для взятаго момента. Какая-нибудь точка этой окружности O_1 , точка M_1 , нѣсколько времени передъ тѣмъ совпадала съ однимъ изъ центровъ мгновеннаго вращенія; мѣсто этого центра можно найти, отложивъ по большой окружности дугу PM , равную дугѣ PM_1 , или, проще, проведя черезъ M_1 радіусъ OM . На самомъ дѣлѣ, радіусъ OM отсѣчетъ на окружности O дугу PM , а на O_1 —дугу PM_1 . Уголъ POM измѣряется величиной $\frac{\text{дуга } PM}{PO}$; уголъ M_1OP (тотъ же уголъ POM) измѣряется величиной $\frac{\text{дуга } PM_1}{2PO_1}$; такъ какъ углы равны, то равны и круговыя мѣры ихъ; т.-е. получается равенство

$$\frac{\text{дуга } PM}{PO} = \frac{\text{дуга } PM_1}{2PO_1} \dots\dots\dots (1)$$

Но $PO = 2PO_1$; поэтому равенство (1) приводится къ равенству $\text{дуга } PM = \text{дуга } PM_1$. Точка M занимаетъ на полоидѣ O постоянное мѣсто; значитъ, это одна изъ точекъ *неподвижной* полоиды; положеніе радіуса OM поэтому также постоянно; а такъ какъ точка M_1 принуждена все время находиться на радіусѣ MO , то она не сой-

детъ съ этого радіуса при каченіи окружности O_1 ; другими словами, всякая точка малой окружности при каченіи описываетъ опредѣленный діаметръ большой.

Какая-нибудь точка m (фиг. 13), неразрывно связанная съ окружностью O_1 , опишетъ при каченіи окружностей не прямую, а кривую, уравненіе которой можно найти такъ: пусть O есть неподвижная полоида, O_1 —подвижная; съ этой послѣдней неразрывно связана точка m . Соединяя m съ центромъ O_1 и продолжая линію mO_1 дальше, до пересѣченія съ окружностью O_1 , получаемъ 2 точки пересѣченія этой прямой mO_1 съ окружностью O_1 —точки M_1 и N_1 . На основаніи сказаннаго на предыдущей страницѣ можемъ сказать, что при каченіи полоиды O_1 по O точка M_1 будетъ перемѣщаться по діаметру, чрезъ нее проходящему, т.-е. по діаметру MM_1OP , а точка N_1 —по діаметру NN_1OQ . Оба эти діаметра неподвижны, ибо неподвижна полоида, къ которой они принадлежатъ; кромѣ того, они взаимно перпендикулярны, такъ какъ уголъ M_1ON_1 , какъ опирающійся на діаметръ N_1M_1 , непремѣнно прямой; поэтому естественнѣе всего отнести искомую кривую къ системѣ координатъ, образованной указанными двумя діаметрами MX и NQ . Одинъ изъ нихъ, положимъ MX , примемъ за ось x -овъ, NQ — y -овъ. Примемъ далѣе, что точка m отстоитъ отъ окружности O_1 на a , т.-е. положимъ, что $mN_1 = a$; а діаметръ окружности O_1 обозначимъ черезъ d . Во взятомъ нами положеніи точки m , mk есть x , а kO есть y . Если уголъ O_1N_1O обозначимъ черезъ φ , то изъ треугольниковъ kmN_1 и M_1N_1O имѣемъ:

$$mk = x = mN_1 \cdot \sin \varphi = a \sin \varphi \dots \dots \dots (1)$$

$$\begin{aligned} kO = y &= kN_1 + N_1O = mN_1 \cos \varphi + N_1M_1 \cos \varphi = \\ &= (a + d) \cos \varphi \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Исключаемъ изъ ур—ній (1) и (2) параметръ φ , для чего опредѣляемъ:

$$\sin \varphi = \frac{x}{a} \dots \dots \dots (3)$$

$$\cos \varphi = \frac{y}{a + d} \dots \dots \dots (4)$$

Возводя въ квадратъ эти оба ур—нія (3) и (4) и складывая, находимъ:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a + d)^2} \dots \dots \dots (5)$$

Полученное ур—ніе (5) показываетъ, что точка m описываетъ эллипсъ съ полуосями a и $a + d$, при чемъ главные оси его лягутъ по упомянутымъ діаметрамъ OM и ON ; эллипсъ этотъ будетъ выдаваться изъ окружности O на $CQ = AN = mN_1 = a$.

Какъ было указано выше, движеніе плоской системы за элементъ времени dt сводится къ вращенію около опредѣленной точки—*полюса мгновеннаго вращенія*. Такъ какъ движеніе какой-нибудь точки этой системы будетъ, вообще говоря, криволинейнымъ, то скорость точки будетъ мѣняться и по величинѣ, и по направленію. Если за промежутокъ времени отъ t до $(t + dt)$ точка разсматриваемой системы, двигаясь со скоростью $v = \rho\omega$, пройдетъ (фиг. 14) по своей траекторіи путь

$$AB = v \cdot dt = ds,$$

то въ слѣдующій промежутокъ времени отъ $(t + dt)$ до $(t + 2dt)$ она, измѣнивъ свою скорость и уклонившись отъ первоначальнаго направленія AB , пойдетъ по новому направленію Bu и пройдетъ въ немъ пространство BC . Если изъ точки A (фиг. 15) проведемъ линіи $Ax \parallel AB$ и $Ay \parallel BC$ и соотвѣтственно отложимъ на нихъ $AM = AB$ и $AN = BC$, то, соединивъ M съ N , получимъ отръзокъ MN , характеризующій измѣненіе скорости за промежутокъ времени dt . Частное же $\frac{MN}{dt}$ представитъ ускореніе въ движеніи разсматриваемой точки системы для даннаго момента времени.

Такъ какъ скорость какой-нибудь точки A системы (фиг. 14) есть функція разстоянія ρ этой точки A отъ полюса мгновеннаго вращенія P и мгновенной угловой скорости ω ($v_A = \rho \cdot \omega$), то легко видѣть, что, вообще говоря, *измѣненіе скоростей точекъ плоской системы и по величинѣ, и по направленію зависитъ какъ отъ измѣненія положенія центра мгновеннаго вращенія, такъ и отъ измѣненія угловой скорости вращенія*. Однако, какъ мы вскорѣ увидимъ, для *каждаго момента есть точка системы, не имѣющая ускоренія*, т.-е. въ продолженіе двухъ сосѣднихъ промежутковъ времени—отъ t до $(t + dt)$ и отъ $(t + dt)$ до $(t + 2dt)$ —двигаящаяся *прямолинейно и равномерно*.

Пусть въ продолженіе промежутка времени отъ t до $(t + dt)$ центромъ мгновеннаго вращенія будетъ служить точка P (фиг. 16) и предположимъ, что мы нашли точку g подвижной системы S , не имѣющую въ данный моментъ ускоренія. Выведемъ теперь условія, какимъ должна удовлетворять эта точка g ; они дадутъ намъ отвѣтъ на то, возможно ли вообще существованіе такой точки и если возможно, то существуетъ ли такихъ точекъ только одна или нѣсколько. Обратимся къ разсмотрѣнію фиг. 16. Положимъ, что вращеніе совершается по направленію, указанному стрѣлками съ угловою скоростью ω . Если Pg обозначимъ черезъ r , то за время dt точка g пройдетъ путь $gg_1 = r \cdot \omega \cdot dt$. Черезъ промежутокъ времени dt новымъ полюсомъ мгновеннаго вращенія сдѣлается точка P_1 , и если черезъ u обозначимъ скорость передвиженія центра мгновеннаго вращенія по неподвижной полонидѣ, т.-е. скорость, съ какою мѣняются точки, служащія послѣдовательно полюсами мгновеннаго вра-

щенія, то эта точка P_1 (служащая мгновеннымъ центромъ вращенія въ промежутокъ времени отъ $(t + dt)$ до $(t + 2dt)$) будетъ отстоять отъ точки P на разстояніи

$$PP_1 = u \cdot dt$$

и притомъ въ направленіи касательной къ неподвижной полоидѣ въ точкѣ P — въ направленіи PT . Итакъ, замѣтимъ, что

$$gg_1 = r \cdot \omega \cdot dt, \text{ а } PP_1 = u \cdot dt.$$

Такъ какъ направленіе скорости точки g всегда перпендикулярно къ радіусу-вектору, соединяющему ее съ соотвѣтствующимъ центромъ мгновеннаго вращенія, то прямолинейность движенія, которому должна удовлетворять точка g (по нашему предположенію не имѣющая ускоренія) возможна лишь *при условіи параллельности радіусовъ-векторовъ* Pg и P_1g_1 . Въ самомъ дѣлѣ, если мы предположимъ, что P_1g_1 займетъ положеніе $P_1g'_1$, *непараллельное* Pg , то прямымъ слѣдствіемъ такого предположенія явится измѣненіе первоначальнаго направленія скорости; въ этомъ случаѣ направленіе ея будетъ $g'_1g''_1$, разнящееся отъ первоначальнаго gg_1g_2 ; это заключеніе позволяетъ намъ судить о томъ, въ какую сторону отъ линіи PP_1 — касательной къ полоидѣ — можетъ лежать точка g : *она должна лежать такъ, чтобы наблюдатель, обернувшись спиною къ P_1 — второму положенію центра мгновеннаго вращенія — и смотря на P по направленію P_1P , видѣлъ ее всегда по ту сторону отъ P_1P , въ какую совершается вращеніе.* На чертежѣ 16-мъ точка g удовлетворяетъ этому условію. Но если бы мы предположили, что она находится, напр., въ g_3 (фиг. 17), то сейчасъ мы могли бы обнаружить невозможность и недопустимость такого предположенія: въ самомъ дѣлѣ, при вращеніи около P въ продолженіе промежутка времени отъ t до $(t + dt)$ точка g_3 пошла бы въ такомъ случаѣ по g_3g_4 , перпендикулярно къ Pg_3 , а дальше, за промежутокъ времени отъ $(t + dt)$ до $(t + 2dt)$, по направленію g_4g_5 , перпендикулярно къ радіусу-вектору P_1g_4 (за второй промежутокъ вращеніе совершается уже около центра P_1); но этотъ радіусъ-векторъ P_1g_4 , какъ видно изъ чертежа, перекрещивается съ Pg_3 , а между тѣмъ при нашемъ предположеніи, что точка g_3 не имѣетъ ускоренія, эти два радіуса-вектора должны быть параллельны. Послѣднему условію, при данномъ вращеніи около полюсовъ $P, P_1, \dots$ удовлетворяетъ выбранная нами, согласно вышеизложенному правилу, въ области S точка g . Но одного этого условія еще недостаточно: дѣло въ томъ, что точка g , по нашему предположенію не имѣющая ускоренія идвигающаяся прямолинейно за два безконечно-малые промежутка времени, *должна въ то же время двигаться равномерно*; этого послѣдняго обстоятельства мы не принимали еще во вниманіе. Если точка двигается равномерно, то это значитъ, что приращеніе ско-

рости при переходѣ отъ одного промежутка до другого равно нулю; такимъ образомъ, принимая во вниманіе, что скорость точки g , при вращеніи ея около P , равна $r\omega$, это второе условіе выразимъ равенствомъ

$$d(r \cdot \omega) = 0 \dots \dots \dots (1).$$

Дифференцируя, получаемъ (и r , и ω — обѣ величины переменныя):

$$\omega \cdot dr + r \cdot d\omega = 0,$$

откуда

$$dr = -\frac{r \cdot d\omega}{\omega} \dots \dots \dots (2).$$

Формула (2) показываетъ, что dr — приращеніе радіуса-вектора r — противоположно по знаку $d\omega$ — приращенію угловой скорости, что можно было сказать заранее; на самомъ дѣлѣ при условіи равномерности движенія точки g въ два безконечно малые промежутка времени произведеніе изъ угловой скорости ея (ω) на соотвѣтствующее разстояніе ея отъ полюса мгновеннаго вращенія (на r) есть величина постоянная, откуда вытекаетъ, что съ увеличеніемъ радіуса-вектора должна уменьшаться угловая скорость и наоборотъ; а если такъ, то приращенія этихъ двухъ параметровъ необходимо должны имѣть разные знаки. Обратимся теперь опять къ разсмотрѣнію фигуры 16. Проведемъ $PA \parallel gg_1$; получаемъ $\triangle PAP_1$, прямоугольный при A . Такъ какъ $Pg = r$, $P_1g_1 = r + dr$ (ибо радіусъ-векторъ P_1g_1 смеженъ съ Pg), то $AP_1 = dr$. Выше было указано, что $PP_1 = udt$, а gg_1 , или, что то же, $PA = r \cdot \omega \cdot dt$, а въ такомъ случаѣ имѣемъ возможность написать:

$$AP_1^2 = PP_1^2 - PA^2$$

или

$$(dr)^2 = u^2 \cdot (dt)^2 - r^2 \omega^2 (dt)^2;$$

но въ виду равенства (2) получаемъ:

$$\frac{r^2 (d\omega)^2}{\omega^2} = u^2 \cdot (dt)^2 - r^2 \omega^2 (dt)^2,$$

откуда:

$$r^2 (d\omega)^2 = \omega^2 u^2 (dt)^2 - \omega^4 r^2 (dt)^2.$$

Затѣмъ, дѣля на $(dt)^2$,

$$r^2 \left[\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \right] = \omega^2 u^2,$$

такъ что:

$$r = \frac{\omega \cdot u}{\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2}} \dots \dots \dots (3).$$

Изъ этого выраженія прежде всего видно, что r есть всегда дѣйствительная величина, а поэтому необходимо признать, что предпо-

ложенная нами точка g действительно существуетъ. Знаковъ $\pm$ у корня мы не ставимъ потому, что направленіе, или, вѣрнѣе, расположеніе радіуса-вектора вполнѣ характеризуется направленіемъ вращенія относительно P_1P . Обращаясь къ чертежу (фиг. 16), видимъ, что уголъ PP_1g_1 будетъ острымъ или тупымъ, въ зависимости отъ того, уменьшается или увеличивается радіусъ-векторъ r , т.-е. увеличивается ли или уменьшается угловая скорость ω ; и если проведемъ PN , нормаль къ полоидамъ въ точкѣ касанія ихъ P (это будетъ, значить, перпендикуляръ къ линіи PP_1), то линія Pg будетъ лежать отъ этой нормали въ сторону вращенія, когда угловая скорость увеличивается, и въ противоположную, когда она уменьшается.

Линія Pg составляетъ съ нормалью N уголъ NPg , равный углу APP_1 (углы съ $\perp\perp$ -ными сторонами). Пусть этотъ уголъ NPg равенъ μ . Изъ чертежа видимъ, что

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} \angle APP_1 = \frac{AP_1}{AP} = \frac{dr}{r \cdot \omega \cdot dt}.$$

Поставляя изъ равенства (2) вмѣсто dr его абсолютную величину, получаемъ:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{rd\omega}{\omega r \omega dt},$$

что послѣ сокращенія дастъ:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \dots \dots \dots (4)$$

Замѣтимъ, что уголъ μ всегда острый, такъ какъ треугольникъ PAP_1 прямоуголенъ (уголъ $PAP_1 = 90^\circ$).

Такимъ образомъ, направленіе вектора Pg , на которомъ лежитъ точка g , вполнѣ и единственнымъ образомъ опредѣляется изъ условій движенія системы; то же скажемъ и о величинѣ его r ; а въ такомъ случаѣ заключаемъ, что, действительно, въ каждый данный моментъ существуетъ одна единственная точка системы, не имѣющая ускоренія.

Если теперь вращеніе системы около P , совершающееся съ угловою скоростью ω , замѣнимъ вращеніемъ около g , съ тою же угловою скоростью ω , и параллельнымъ перенесеніемъ вдоль gg_1 (фиг. 16) на величину

$$gg_1 = r \cdot \omega \cdot dt,$$

а вращеніе около P_1 , совершающееся съ угловою скоростью $\omega + d\omega$, вращеніемъ около g_1 съ тою же угловою скоростью и параллельнымъ перенесеніемъ вдоль g_1g_2 на величину

$$g_1g_2 = (\omega + d\omega) \cdot (r + dr) \cdot dt,$$

то все движеніе системы представится такъ: за промежутокъ времени

отъ (t) до $(t + 2dt)$ система переносится равномерно вдоль линіи gg_1g_2 и въ то же время вращается около послѣдовательныхъ положеній точки g на линіи g_1g_2 —отъ точки g до g_1 , по gg_1 , съ угловою скоростью ω , а отъ точки g_1 до g_2 —съ угловою скоростью $\omega + d\omega$; такъ какъ при этомъ параллельныя перенесенія gg_1 и g_1g_2 , какъ равныя (ибо это пространства, проходимыя точкой въ равномерномъ движеніи за одинаковые промежутки времени) и одинаково направлены, для ускоренія какой-нибудь точки системы не даютъ ничего, то все ускореніе выразится, какъ результатъ двухъ послѣдовательныхъ вращеній около нѣкоторой точки системы съ угловыми скоростями ω и $\omega + d\omega$. Полное ускореніе какой-нибудь точки A можно въ такомъ случаѣ выразить, какъ составленное изъ двухъ: центростремительнаго, равнаго $\frac{v^2}{\rho}$ или $\omega^2\rho$, ибо $v = \omega\rho$, и тангенціального, равнаго $\rho \frac{d\omega}{dt}$, и, слѣдовательно, это полное ускореніе j выразится въ видѣ:

$$j = \rho \sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}$$

и, значить, для каждой точки системы выразится величиной, пропорціональной ея разстоянію отъ точки g .

Направленіе этого ускоренія составляетъ съ радіусомъ ρ уголъ gA_1M (фиг. 18); $\triangle A_1LM$ прямоугленъ при L , ибо $A_1A_2 \perp gA_1$, но $AM \parallel A_1A_2$, поэтому $A_1L \perp LM$. Такъ какъ $AA_1 = v$ и $A_1A_2 = v_1$, то отрѣзокъ A_1M и представить по величинѣ и направленію полное ускореніе точки A , A_1L —нормальное, а LM —тангенціальное, такъ что $A_1L = \omega^2\rho$, а $LM = \rho \frac{d\omega}{dt}$. Изъ того же $\triangle A_1LM$ получаемъ

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{LM}{A_1L} = \rho \frac{d\omega}{dt} : \rho \omega^2 = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt},$$

т.-е. направленіе ускоренія для какой-либо точки системы составляетъ съ радіусомъ-векторомъ, соединяющимъ эту точку съ точкой g , уголъ μ , единственный для всѣхъ точекъ системы въ каждый данный моментъ.

Точка g называется *центромъ ускоренія*, по аналогіи съ центромъ мгновеннаго вращенія, подобно тому, какъ центръ мгновеннаго вращенія служитъ для опредѣленія скоростей всѣхъ точекъ системы, такъ и центръ ускоренія служитъ для опредѣленія ускореній всѣхъ точекъ системы.

Отысканіе положенія центра ускоренія также аналогично отысканію положенія центра мгновеннаго вращенія, но при этомъ знаніе одного только направленія ускореній двухъ какихъ-либо точекъ системы еще недостаточно, необходимо еще знать, кромѣ того, величину этихъ ускореній или ихъ отношеніе. Пусть, наприм., даны на-

правленія AN и BN ускореній точекъ A и B (фиг. 19), отношеніе этихъ ускореній, равное m , и требуется для даннаго момента найти центръ ускореній, соотвѣтствующій этому моменту. Пусть это будетъ точка g ; строимъ $\triangle AKg$ и BKN . Такъ какъ радіусы-векторы gA и gB образуютъ съ направленіями ускореній *одинаковые углы* μ , то углы gAN и gBN равны между собою; углы AKg и BKN также равны; значитъ равны и третьи углы треугольниковъ, углы AgB и ANB . Уголъ ANB ,—уголъ между данными направленіями ускореній, намъ извѣстенъ, — пусть онъ равенъ α ; въ такомъ случаѣ равенъ α и уголъ AgB , какъ равный ANB ; значитъ, точка g лежитъ на окружности, проходящей черезъ A и B и вмѣщающей упомянутый уголъ α .

Далѣе, по условію, отношеніе ускоренія точки A къ ускоренію точки B равно m , а по доказанному выше, ускоренія точекъ A и B пропорціональны радіусамъ-векторамъ gA и gB ; въ такомъ случаѣ получаемъ равенство:

$$gA : gB = m,$$

и, слѣдовательно, точка g должна одновременно лежать еще на окружности, описанной на CD , какъ на діаметрѣ, гдѣ C и D суть точки на прямой AB , дѣлящія отръзокъ AB внѣшнимъ и внутреннимъ образомъ въ данномъ отношеніи m . Пересѣченіе этихъ двухъ окружностей дастъ искомую точку g , положеніе которой есть единственное и вполне опредѣленное, ибо вторая точка g_2 устраняется въ силу того, что радіусы-векторы Ag и Bg должны лежать по одну сторону векторовъ AN и BN .

Кромѣ этой единственной точки g , двигающейся за два безконечно малыхъ промежутка времени прямолинейно и равномерно, можно найти безконечно много другихъ точекъ этой системы, двигающихся прямолинейно, хотя, конечно, неравномерно, за тѣ же промежутки времени. Замѣтимъ, что каждая изъ такихъ точекъ, напр., точка M (фиг. 20), будетъ въ данный моментъ въ томъ мѣстѣ своей траекторіи SS_1 , гдѣ два послѣдовательные ея элемента MM_1 и M_1M_2 , совпадая съ касательной TT къ траекторіи въ этой точкѣ M , будутъ имѣть одинаковое направленіе, т.-е. когда онѣ будутъ находиться, какъ обыкновенно говорятъ, въ перегибахъ своихъ траекторій. Въ этомъ случаѣ касательная TT будетъ въ то же время служить и окружностью кривизны траекторіи SS въ точкѣ M , при чемъ радіусъ кривизны траекторіи ρ равенъ безконечности. Такъ какъ центростремительное ускореніе, равное $\frac{v^2}{\rho}$, при этомъ значеніи ρ обращается въ нуль, то очевидно, что точка M , движущаяся въ этомъ мѣстѣ своей траекторіи, будетъ имѣть только тангенціальное ускореніе, и если P есть центръ мгновеннаго вращенія (фиг. 21), а T —точка, на-

ходящаяся въ перегибѣ своей траекторіи, то направленіе ускоренія будетъ $TM \perp TP$.—Если центромъ ускореній для даннаго момента будетъ служить точка g , то, соединивъ ее съ полюсомъ P и проводя PN —нормаль къ полоидамъ (намѣченнымъ пунктиромъ), найдемъ по предыдущему, что линія Tg составитъ съ линіей TM уголъ, равный углу NPg , который выше (стр. 20) мы назвали черезъ μ , слѣдовательно, точка T лежитъ на окружности, проходящей черезъ точки P , g и K , гдѣ точка K есть пересѣченіе нормали PN съ направлениемъ ускоренія TM ; линія PK будетъ служить діаметромъ ея, ибо уголъ $PTK = 90^\circ$. Пусть слѣдующее смежное положеніе центра вращенія есть P_1 ; проводимъ $P_1A \perp Pg$; изъ подобія $\triangle$ -овъ PP_1A и PgK имѣемъ: $Pg : P_1A = PK : PP_1$; но, какъ было выведено выше, $P_1A = Pg \cdot \omega \cdot dt$ (такъ какъ $P_1A = gg_1$ — фиг. 16), а $PP_1 = u \cdot dt$, значитъ, вышенapisанное равенство приметъ видъ:

$$Pg : (Pg \cdot \omega \cdot dt) = PK : (u \cdot dt);$$

послѣ сокращеній получимъ

$$PK = \frac{u}{\omega} \quad (1).$$

Окружность $PgKRP$, представляющая собою геометрическое мѣсто точекъ системы, имѣющихъ только тангенціальное ускореніе, называется поворотнымъ кругомъ, а точка K —полюсомъ поворота. Совершенно аналогичнымъ способомъ находится геометрическое мѣсто точекъ, имѣющихъ въ данный моментъ одни только нормальныя ускоренія.

Съ помощью центра мгновеннаго вращенія легко, какъ мы видѣли, проводить касательныя къ траекторіямъ точекъ. Разсмотримъ теперь, какъ можно отыскивать *центры и круги кривизны траекторіи*.

Извѣстно, что изъ всѣхъ круговъ, касательныхъ къ кривой въ какой-либо точкѣ ея, кругъ, наиболѣе близко подходящій къ кривой, называется кругомъ кривизны. Можно считать, что онъ имѣетъ не одинъ, какъ всѣ другіе касательные круги, а два общихъ элемента съ кривой и, слѣдовательно, радіусъ его измѣряетъ величину взаимнаго отклоненія этихъ элементовъ, т.-е. большую или меньшую кривизну кривой,—чѣмъ больше радіусъ, тѣмъ меньше отклоненіе, и наоборотъ.

Допустимъ, что намъ извѣстны центры кривизны обѣихъ полоидъ O и O_1 (фиг. 22), и пусть дана подвижная кривая S_1 и ея огибающая S . Тогда, какъ извѣстно, общая нормаль этихъ кривыхъ TN , гдѣ T —точка касанія, пройдетъ черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія P , и пусть на ней лежатъ центры кривизны: огибающей S —въ точкѣ A и огибаемой S_1 —въ точкѣ A_1 . Найдемъ зависимость между радіусами кривизны огибающей и огибаемой въ точкѣ ихъ соприкос-

новения T . Пока эти двѣ кривыя касались другъ друга въ точкѣ T , общая нормаль проходила черезъ центры кривизны A и A_1 , точку касанія T и полюсъ мгновеннаго вращенія P . Когда полоиды повернутся на нѣкоторый уголъ и новымъ центромъ мгновеннаго вращенія станетъ точка P_1 , смежная съ P , то, такъ какъ кругъ A_1 съ кривою S_1 имѣетъ два общихъ элемента, такъ же, какъ кругъ A съ кривою S ,—общая нормаль (новая, AN_1) въ новой, смежной съ прежней, точкѣ касанія огибающей и огибаемой пройдетъ опять черезъ тотъ же центръ A , черезъ новое положеніе центра A_1 —точку A_2 , и, наконецъ, черезъ новый центръ мгновеннаго вращенія P_1 . Пусть точкѣ P_1 на подвижной полоидѣ соотвѣтствуетъ точка P'_1 , такъ что при вышеупомянутомъ поворотѣ эти точки P'_1 и P_1 совпадутъ; подвижная полоида повернется при этомъ на уголъ между элементами PP_1 и PP'_1 , т.-е. на уголъ $P_1PP'_1$; назовемъ этотъ уголъ чрезъ γ ; поворотъ полоиды произойдетъ, понятно, вокругъ центра P ; такъ что, называя угловую скорость чрезъ ω , а продолжительность поворота чрезъ dt , получимъ:

$$\gamma = \omega \cdot dt \dots \dots \dots (1)$$

Тому же углу γ равенъ еще уголъ между радіусами OP_1 и $O_1P'_1$. На самомъ дѣлѣ, круги O и O_1 суть круги кривизны полоидѣ, т.-е., какъ мы говорили выше, имѣютъ по два общихъ элемента съ полоидами. Въ точкѣ P совпадали первые два элемента этихъ круговъ, въ точкѣ P_1 совпадутъ другіе два, значитъ, круги кривизны для этихъ точекъ P_1 и P'_1 останутся тѣ же, центръ O останется на мѣстѣ, радіусъ OP_1 замѣститъ прежній OP , и общая нормаль пройдетъ, слѣдовательно, по OP_1M . По этой же нормали долженъ пойти и радіусъ круга O_1 , проходящій черезъ новую точку касанія, т.-е. радіусъ $O_1P'_1$, для чего онъ и долженъ повернуться на $\angle (OP_1, O_1P'_1)$, а такъ какъ уголъ поворота всей системы равенъ γ , то тому же углу γ равенъ и $\angle (OP_1, O_1P'_1)$. Если точку пересѣченія $O_1P'_1$ съ OP_1 назовемъ чрезъ K , то, на основаніи вышесказаннаго, получимъ

$$\angle O_1KM = \gamma.$$

Но уголъ O_1KM , какъ внѣшній уголъ треугольника OO_1K , выражается такъ:

$$\angle O_1KM = \angle OO_1K + \angle O_1OK \dots \dots \dots (2)$$

Если, далѣе, замѣтимъ, что уголъ OO_1R , обозначенный на чертежѣ буквой α , выражается равенствомъ:

$$\angle OO_1K = \alpha = \frac{\text{сегм. } PP'_1}{O_1P} \dots \dots \dots (3)$$

а уголъ O_1OK , или β , чрезъ

$$\angle O_1OK = \beta = \frac{\text{сегм. } PP_1}{OP} \dots \dots \dots (4)$$

и если, кромѣ того, обозначимъ радіусы: OP — черезъ R , O_1P — черезъ R_1 , а дугу PP_1 , равно какъ и равную ей дугу PP_1' черезъ ds , то получимъ:

$$\alpha = \frac{ds}{R_1}, \quad \beta = \frac{ds}{R} \cdot \dots \cdot \dots \cdot (5)$$

въ виду чего равенство (2) приметъ видъ:

$$\angle O_1KM = \gamma = \alpha + \beta = \frac{ds}{R} + \frac{ds}{R_1},$$

иначе:

$$\gamma = ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \cdot \dots \cdot \dots \cdot (6)$$

Разсматривая далѣе круги центровъ A и A_1 , мы, путемъ разсужденій, аналогичныхъ предыдущимъ, убѣдимся, что уголъ между радіусами AP_1 и A_1P_1' , долженствующими совпасть послѣ вращенія, опять равенъ γ . Называя точку пересѣченія этихъ радіусовъ черезъ L , имѣемъ $\angle A_1LN_1 = \gamma$. Подобно предыдущему, находимъ мы:

$$\angle A_1LN_1 = \gamma = \angle LAA_1 + \angle LA_1A = \delta + \epsilon \cdot \dots \cdot (7)$$

За дугу, описанную при этомъ радіусомъ AP , можно принять отрѣзокъ $Pn \perp$ -ра, опущеннаго изъ P на линію AN_1 ; такъ какъ онъ образуетъ съ PP_1 уголъ $\varphi = \angle(OO_1, AA_1)$, то длину его можно положить равной $PP_1 \cdot \cos \varphi = ds \cdot \cos \varphi$ (дѣлая это допущеніе, мы пренебрегаемъ безконечно малыми 2-го порядка) (см. фиг. 23).

Поэтому съ указанной малой ошибкой можно написать, что

$$\delta = \frac{ds \cos \varphi}{AP}, \quad \epsilon = \frac{ds \cdot \cos \varphi}{A_1P} \cdot \dots \cdot \dots \cdot (8)$$

Если разстоянія точки касанія T отъ полюса P мы назовемъ черезъ p , а радіусы AT и A_1T — черезъ ρ и ρ_1 , то найдемъ, что

$$AP = \rho - p, \quad A_1P = \rho_1 + p.$$

Поэтому теперь можемъ написать

$$\delta = \frac{ds \cos \varphi}{\rho - p} \quad \text{и} \quad \epsilon = \frac{ds \cos \varphi}{\rho_1 + p} \cdot \dots \cdot \dots \cdot (9)$$

Въ виду чего ур—ніе (7) переписется теперь такъ:

$$\gamma = ds \cdot \cos \varphi \left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho_1 + p} \right) \cdot \dots \cdot \dots \cdot (10)$$

Соединяя вмѣстѣ равенства (1), (6), (10), находимъ:

$$\gamma = \omega dt = ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) = ds \cos \varphi \left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho_1 + p} \right),$$

что можетъ быть приведено къ виду:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho_1 + p} \right) \cos \varphi = \frac{\omega dt}{ds} = \omega : \frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{u} \dots (11)$$

гдѣ u , какъ всегда, есть скорость перемѣщенія центра мгновеннаго вращенія, равная $\frac{ds}{dt}$. Соотношеніе (11), которое мы въ окончательномъ его видѣ переписываемъ ниже еще разъ, называется *теоремой Савари* и пишется, слѣд., такъ:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho_1 + p} \right) \cos \varphi = \frac{\omega}{u} \dots (12)$$

Теорема *Савари* даетъ возможность строить положеніе центра кривизны огибающей или огибаемой. Дѣйствительно, пусть даны центры кривизны полويدъ O и O_1 и центръ кривизны, положимъ, огибающей— A ; полюсъ мгновеннаго вращенія пусть лежитъ въ P (фиг. 24). Соединяемъ данный центръ A съ полюсомъ P ; возста-
вляемъ къ полученной прямой AP въ точкѣ P перпендикуляръ PN ; соединяемъ далѣе точки A и O и линію AO продолжаемъ даль-
ше, до пересѣченія съ перпендикуляромъ PN въ точкѣ M ; наконецъ, изъ центровъ O и O_1 опускаемъ перпендикуляры Om и O_1n на ли-
нію AP . Тогда изъ подобія $\triangle AOm$ и $\triangle AMP$ имѣемъ:

$$PM : Om = AP : Am \dots (13)$$

Удерживая тѣ же обозначенія, что и прежде, имѣемъ:

$$Om = R \sin \varphi, \quad AP = \rho - p, \quad Am = (\rho - p) - mP = (\rho - p) - R \cos \varphi,$$

такъ что ур—ніе (13) принимаетъ видъ:

$$PM : R \sin \varphi = (\rho - p) : [(\rho - p) - R \cos \varphi],$$

откуда

$$PM = R \sin \varphi \cdot \frac{\rho - p}{(\rho - p) - R \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\frac{1}{R} - \frac{\cos \varphi}{\rho - p}} \dots (14)$$

Допустимъ, что центръ кривизны огибаемой находится въ A_1 ; про-
дѣлываемъ съ нимъ все то же—соединяемъ съ O_1 , продолжаемъ
 O_1A_1 до пересѣченія съ PN , положимъ, въ точкѣ M_1 , и рассматри-
ваемъ $\triangle O_1A_1n$ и $\triangle PA_1M_1$. Аналогично предыдущему имѣемъ:

$$PM_1 : O_1n = PA_1 : A_1n$$

т.-е.

$$PM_1 : R_1 \sin \varphi = (\rho_1 + p) : [R_1 \cos \varphi - (\rho_1 + p)],$$

откуда

$$PM_1 = \frac{R_1 \sin \varphi \cdot (\rho_1 + p)}{R_1 \cos \varphi - (\rho_1 + p)} = \frac{\sin \varphi}{\frac{\cos \varphi}{\rho_1 + p} - \frac{1}{R_1}} \dots (15)$$

Если точка A есть дѣйствительно центръ кривизны огибаемой, то для всей системы этихъ точекъ должна быть справедливой теорема *Савари*, могущая для этого случая быть представленной въ видѣ

$$\frac{1}{R} - \frac{\cos \varphi}{\rho - p} = \frac{\cos \varphi}{\rho_1 + p} - \frac{1}{R_1} \dots \dots \dots (16)$$

а въ такомъ случаѣ изъ сравненія (14) и (15) съ (16) оказывается, что

$$PM = PM_1,$$

т.-е. точки M и M_1 совпадаютъ. Это послѣднее обстоятельство поможетъ намъ разрѣшить поставленную задачу о нахожденіи центра кривизны.

Если намъ даны точки O , O_1 и A —центры кривизны, и требуется найти четвертый— A_1 , то мы поступаемъ такъ: соединяемъ A съ P и съ O и продолжаемъ дальше линіи AP и AO ; изъ нихъ AO продолжаемъ до пересѣченія съ перпендикуляромъ PN въ точкѣ M ; соединяемъ полученную точку M съ центромъ O_1 и въ пересѣченіи линій O_1M съ AP получаемъ искомый четвертый центръ A_1 .

Если вмѣсто какой-либо огибаемой кривой возьмемъ просто точку, то совершенно такимъ же образомъ найдемъ центръ кривизны траекторіи этой точки, при этомъ роль центра A_1 (центра кривизны огибаемой) займетъ, очевидно, сама точка.

Соотношеніе *Савари* позволяетъ также пользоваться поворотнымъ кругомъ для построенія центровъ кривизны, такъ какъ соотношеніе (12) можно представить иначе въ видѣ:

$$\cos \varphi \left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho_1 + p} \right) = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{d} = \frac{1}{2d} + \frac{1}{2d} \dots \dots \dots (17)$$

гдѣ d есть діаметръ поворотнаго круга (см. стр. 23), такимъ образомъ можно примѣнить хотя бы то же построеніе,—только мѣсто величинъ R и R_1 займутъ двѣ равныя величины $2d$ и $2d$.

Замѣтимъ, что если бы подвижная полоида помѣщалась внутри неподвижной, то уголъ поворота за время dt опредѣлялся бы не суммой $ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right)$, а, очевидно, разностью $ds \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right)$, соотвѣтственно чему и въ выраженіи *Савари* вошла бы не сумма обратныхъ величинъ радіусовъ кривизны полоидъ, а разность (фиг. 25).

Итакъ, заканчивая это краткое кинематическое введеніе, мы можемъ сказать, что для составленія понятія о движеніи какой-либо плоской системы, нужно прежде всего отыскать полоиды, пользуясь условіями движенія; по полоидамъ мы не только найдемъ траекторіи любой точки взятой системы, но и будемъ въ состояніи замѣнить любую малую часть этой траекторіи подходящей окружностью, что часто бываетъ весьма важно.

З а д а ч и.

1. Показать, что всякое каченіе окружности по другой окружности можно свести на поступательное движеніе окружности и на вращательное около своего центра. Какъ велики будутъ скорости обоихъ движеній, если радіусъ одной (катящейся) окружности есть r , радіусъ другой, неподвижной — R , а центръ катящейся окружности успѣваетъ дѣлать n оборотовъ въ мин.?

2. Найти, гдѣ будетъ центръ ускоренія для движенія, даннаго въ предыдущей задачѣ. Опредѣлить поворотный кругъ.

3. Прямая катится равномерно по окружности. Найти ускореніе какой-нибудь точки этой прямой при помощи центра ускореній. Опредѣлить центръ кривизны траекторіи точки, связанной съ прямой, если а) точка лежитъ внѣ прямой, и б) если точка находится на самой прямой.

4. Допустимъ, что въ подвижной системѣ имѣется нѣкоторая точка T ; при перемѣщеніи системы точка T будетъ двигаться по своей траекторіи S (фиг. 26). Этотъ случай представляетъ собою частный случай движенія огибаемой по огибающей (стр. 23 и слѣд.); огибаемой является теперь сама точка T траекторія ея, S является огибающей, при чемъ ρ_1 , радіусъ кривизмы огибаемой, обращается въ нуль (какъ рад. крив. для точки, см. стр. 27).

Пусть центръ кривизны траекторіи (огибающей) лежитъ въ A , такъ что $\rho = AT$; пусть затѣмъ O есть поворотный кругъ системы и M — точка пересѣченія радіуса вектора PA съ кругомъ кривизны. Обозначимъ уголъ OPM черезъ φ , діаметръ повор. круга черезъ d , рад. вekt. PT черезъ p . Теорема Савари въ формѣ, данной ур—ніемъ (17), пишется такъ:

$$\cos \varphi \left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho_1 + p} \right) = \frac{1}{d} \dots \dots \dots (17)$$

или послѣ нѣкоторыхъ измѣненій и подстановокъ:

$$\frac{1}{AT - PT} + \frac{1}{PT} = \frac{1}{d \cos \varphi} = \frac{1}{PM} \dots \dots \dots (18')$$

Ур—ніе (18') принимаетъ дальше видъ:

$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{PT} = \frac{1}{PM} \dots \dots \dots (18)$$

что послѣ уничтоженія знаменателей приметъ видъ:

$$PA \cdot PT = PM \cdot AT \dots \dots \dots (19)$$

Повѣрить это соотношеніе на основаніи обычнаго построенія центра кривизны при помощи поворотнаго круга; найти затѣмъ точку M поворотнаго круга, зная положеніе точекъ P, A и T . Обратно, имѣя поворотный кругъ, найти центръ кривизны A при помощи точки M вмѣсто того, чтобы примѣнять построеніе, указанное въ лекціяхъ.

5. Тяжелый дискъ катится подъ уклономъ α къ горизонту. Опредѣлить положеніе центра ускоренія въ любой моментъ и разсмотрѣть ускоренія различныхъ точекъ диска. (Предполагается, что начальной скорости дискъ не имѣлъ.)

6. Показать, что если двѣ точки имѣютъ равныя и параллельно направленные ускоренія, то и всѣ точки плоской системы будутъ имѣть тѣ же ускоренія.

7. Извѣстно, что если мы будемъ искать геометрическое мѣсто точекъ, не имѣющихъ въ данный моментъ *тангенціального ускоренія*, то найдемъ, что такимъ мѣстомъ будетъ кругъ проходящей черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія P и центръ ускоренія G и пересѣкающій поворотный кругъ подъ прямымъ угломъ d . Доказать это.

8. Пусть тотъ же векторъ PT пересѣкаетъ другой кругъ — кругъ точекъ, не имѣющихъ тангенціального ускоренія въ точкѣ N . Доказать, что тангенціальное ускореніе точки равно $TN \cdot \frac{d\omega}{dt}$.

Кинематическія пары.

Согласно общему опредѣленію, всякій механизмъ служить намъ орудіемъ, при помощи котораго мы заставляемъ силы производить только опредѣленные, нужные для насъ, движенія. Отсюда слѣдуетъ, что каждая деталь механизма имѣетъ нѣкоторое вполне опредѣленное движеніе относительно прочихъ деталей, — опредѣленность же эта достигается тѣмъ, что всѣ ненужныя движенія какой-либо части устраняются соотвѣтственнымъ сопротивленіемъ другихъ частей.

Каждая деталь имѣетъ себѣ соотвѣтствующую другую деталь, такъ или иначе опредѣляющую относительное движеніе первой; слѣдовательно, въ механизмѣ мы имѣемъ всегда *парное* сочетаніе деталей и простѣйшимъ механизмомъ будетъ одна пара такихъ деталей, или, какъ говорятъ, кинематическая пара. Если одинъ изъ *элементовъ* такой пары мы сдѣлаемъ неподвижнымъ, то другой будетъ имѣть вполне опредѣленное движеніе въ пространствѣ. Наоборотъ, если это движеніе дано заранее, то по данной формѣ одного элемента можно, вообще говоря, найти форму другого.

Для выполненія своего назначенія — ограничивать движеніе первой, другая деталь, конечно, должна быть съ ней въ постоянномъ соприкосновеніи, и, если, напр., первая деталь имѣетъ форму шара, центръ котораго долженъ описывать опредѣленную кривую, то можемъ построить вторую деталь въ видѣ желоба, огибающаго всѣ положенія шара.

Соприкосновеніе элементовъ пары можетъ происходить или по линіямъ и точкамъ, или по цѣлымъ поверхностямъ, — въ послѣднемъ случаѣ пары наз. *низшими*. При этомъ поверхность соприкосновенія должна, очевидно, обладать тѣмъ свойствомъ, что элементъ ея, переносимый въ направленіи движенія одной детали по другой, долженъ вездѣ вполне совпадать съ поверхностью. Слѣдовательно, начерченная на поверхности кривая должна обладать свойствомъ совмѣстимости ея частей. Такой кривой будетъ винтовая линія постоянного шага, начерченная на кругломъ цилиндрѣ. Низшей парой будетъ, такимъ образомъ, *винтовая пара* или *винтъ и гайка*.

Частными случаями винтовой пары будутъ: *пара вращательная* и *пара поступательная*. Первую можно себѣ представить въ видѣ двухъ цилиндровъ, полного и полаго, находящихся одинъ внутри другого; при этомъ полный цилиндръ имѣетъ закраины или насаженные кольца, не дающія возможности полному цилиндру сдвинуться въ

сторону. Вторую пару, поступательную, можно представить себѣ въ видѣ пустой призмы, скользящей по другой призмѣ, проходящей внутри первой.

Этими тремя парами и исчерпывается область низшихъ кинематическихъ паръ. Если въ такой парѣ обратить движеніе, т.-е. элементъ неподвижный сдѣлать подвижнымъ и наоборотъ, то характеръ движенія отъ этого не измѣнится, т.-е. оно опять будетъ винтовымъ, вращательнымъ или поступательнымъ; траекторіи точекъ опять останутся тѣ же, напр., въ случаѣ винта и гайки опять винтовые линіи того же шага. Такое свойство низшихъ паръ называется *свойствомъ обратимости*.

Высшія пары, очевидно, такимъ свойствомъ не обладаютъ, — точка, неразрывно соединенная съ однимъ элементомъ, при движеніи этого элемента будетъ описывать, вообще говоря, траекторію, отличную отъ той, которую она описала бы, если бы мы соединили ее съ другимъ элементомъ и двигали его, оставляя первый неподвижнымъ.

Кинематическая цѣпь.—Шарнирный четырехугольникъ.

Всякій механизмъ можно разложить на кинематическія пары и обратно: изъ совокупности паръ можно составить механизмъ. Если мы имѣемъ нѣсколько паръ—обозначимъ ихъ элементы цифрами 1, 2, 3, 4, . . . , то, соединяя неразрывно 2 съ 3, 4 съ 5 и т. п., получимъ такъ называемую кинематическую цѣпь. Соединивъ послѣдній изъ этого ряда элементовъ съ элементомъ 1, получимъ *замкнутую цѣпь*, и можно подобрать соединеніе такимъ образомъ, что относительное движеніе каждаго элемента или звена цѣпи (здѣсь подъ словомъ элементъ или звено цѣпи разумѣется *неразрывное* соединеніе, напр., 2 съ 3, 4 съ 5 и т. п.) будетъ вполне опредѣленнымъ.

Если теперь сдѣлаемъ какое-либо звено неподвижнымъ, то движенія всѣхъ другихъ звеньевъ будутъ вполне опредѣленны, и мы получимъ *механизмъ*: какая-нибудь сила при помощи такой замкнутой цѣпи будетъ совершать опредѣленные дѣйствія.

Разсмотримъ сначала механизмы, составленные изъ простѣйшихъ паръ и въ частности изъ паръ вращательныхъ. Соединеніе *трехъ* вращательныхъ паръ, очевидно, не даетъ никакого механизма. Нужно взять четыре такихъ пары, и мы получимъ *шарнирный четырехугольникъ* со стороны *a, b, c* и *d* (фиг. 27). Если какая-либо сторона, напр. *b*, сдѣлана неподвижной, то другія будутъ имѣть вполне опредѣленные движенія; при этомъ звенья *c* и *a* будутъ вращаться около конечныхъ точекъ звена *b* и будутъ носить названіе *кривошиповъ*, если могутъ сдѣлать полный оборотъ, и коромыслъ въ противномъ случаѣ, звено же *d* носить названіе *шатуна*.

Теорема Грасгофа.

Выведемъ условія, выполненіе коихъ необходимо для того, чтобы звено a или звено c могло быть кривошипомъ. Пусть длины звеньевъ расположены слѣд. образомъ (см. фиг. 28):

$$d > b > c > a \dots \dots \dots (1)$$

Дѣлаемъ звено b неподвижнымъ, или, какъ говорятъ, ставимъ механизмъ на звено b . Чтобы звено a могло быть кривошипомъ, мы должны имѣть возможность построить два треугольника, — первый — со сторонами $(a + b)$, c и d и второй — съ сторонами $(b - a)$, c и d (см. фиг. 29 и 30); эти два треугольника, какъ легко видѣть, являются въ тѣ моменты, когда звено a при своемъ вращеніи совпадаетъ разъ съ звеномъ d и второй разъ — съ его продолженіемъ. Для возможности построенія этихъ двухъ треугольниковъ необходимо выполненіе условій; изъ треугольника фиг. 29:

- 1) $a + b < c + d$
- 2) $a + b > d - c,$

и изъ треугольника фиг. 30:

- 3) $b - a < d + c$
- 4) $b - a > d - c.$

Первое изъ этихъ условій

$$a + b < c + d$$

при данномъ выборѣ звеньевъ удовлетворяется само собою.

Второе условіе:

$$a + b > d - c,$$

при взятомъ нами расположеніи звеньевъ удовлетворяется всегда само собою, такъ какъ послѣ перенесенія c въ лѣвую часть неравенства мы получаемъ:

$$a + b + c > d$$

Третье условіе:

$$b - a > d - c,$$

подобно первому, удовлетворяется въ данномъ случаѣ вполнѣ. Четвертое условіе

$$b - a > d - c$$

можетъ быть нѣсколько видоизмѣнено путемъ переноса члена a — вправо и члена c — влѣво, такъ что оно принимаетъ видъ

$$b + c > a + d \dots \dots \dots (2)$$

Это условіе существенно; оно говоритъ, что для того, чтобы звено „ a “ могло быть кривошипомъ (при соблюденіи условія $d > b > c > a$), необходимо, чтобы сумма крайнихъ по величинѣ звеньевъ была меньше суммы среднихъ.

Такимъ образомъ изъ четырехъ условій существеннымъ является только одно—последнее, при выполненіи котораго *наименьшее звено а и будетъ кривошипомъ*.

Легко видѣть, что при соблюденіи условія (1), (т.-е. $d > b > c > a$) звено c кривошипомъ быть не можетъ. Въ самомъ дѣлѣ для c , подобно тому, какъ это мы сдѣлали для a , получаемъ условіе

$$b - c > d - a$$

или

$$a + b > c + d$$

условіе это въ данномъ случаѣ невыполнимо, и поэтому c кривошипомъ быть не можетъ.

Легко видѣть, что если бы мы поставили нашъ механизмъ на звено d , то a могло бы быть кривошипомъ при прежнемъ условіи $b + c > d + a$; звено же c опять не могло бы быть кривошипомъ.

Такъ какъ при соблюденіи условія (2) звено a является кривошипомъ и по отношенію къ b и по отношенію къ d , то обратно,—въ силу обратимости паръ,—если поставимъ механизмъ на a , оба звена b и d явятся кривошипами, если же поставимъ на c , то эти звенья b и d будутъ только коромыслами. Условіе (2) называется *соотношеніемъ Грасюфа*.

Не трудно доказать это соотношеніе подобнымъ же путемъ и для четырехугольника съ другимъ порядкомъ звеньевъ, напр., $d > c > b > a$.

Опредѣленіе скоростей различныхъ точекъ шатуна.

Пусть у насъ имѣется нѣкоторый кривошипный механизмъ, удовлетворяющій условію Грасюфа (фиг. 31): звено AB есть кривошипъ, BC —шатунъ, а CD —коромысло. Въ большей части механизмовъ, работающих на практикѣ, кривошипъ AB вращается въ большей или меньшей степени равномерно, что достигается при помощи присоединенія къ системѣ кривошипа и его вала особыхъ вращающихся вмѣстѣ съ нимъ массъ, такъ наз. „*маховиковъ*“ (подробнѣе мы рассмотримъ этотъ вопросъ во второй части нашего курса).

Такимъ образомъ, мы имѣемъ возможность предположить, что вообще кривошипъ вращается равномерно и его угловая скорость, ω , есть величина постоянная.

Пусть теперь требуется отыскать скорость какой-нибудь точки шатуна N . Для этого находимъ сначала центръ мгновеннаго вращенія системы шатуна BC . Центръ этотъ мы найдемъ, если примемъ во вниманіе, что точка B шатуна движется по дугѣ радіуса AB , а точка C —по дугѣ радіуса CD . По предыдущему, искомый центръ P будетъ лежать въ точкѣ пересѣченія нормалей къ полоидамъ, проведенныхъ изъ точекъ B и C , т.-е. въ точкѣ пересѣченія продолже-

ній радіуса ABP и радіуса DCP . Если теперь угловую скорость вращения шатуна около его центра мгнов. вращения обозначимъ черезъ ω , то, замѣчая, что скорость точки B выражается, съ одной стороны, ур—ніемъ:

$$v_B = AB \cdot \omega,$$

а съ другой:

$$v_B = PB \cdot \theta,$$

можемъ написать соотношеніе

$$AB \cdot \omega = PB \cdot \theta, \quad (1)$$

Откуда находимъ, что угловая скорость θ выразится такъ:

$$\theta = \omega \cdot \frac{AB}{PB} \quad (2)$$

Скорость любой точки N шатуна BC напишется такъ:

$$v_n = PN \cdot \theta$$

или, въ виду ур—нія (2),

$$v_n = \omega \cdot \frac{AB \cdot PN}{PB} \quad (3)$$

Замѣтимъ, что входящее въ составъ ур—нія (3) отношеніе $\frac{PN}{PB}$ есть отношеніе двухъ сторонъ треугольника BPB .

Проведемъ AN_1 параллельно NP до пересѣченія съ продолженіемъ стороны BC въ точкѣ N_1 . Тогда, въ виду подобія треугольниковъ BPB и ABN_1 , имѣемъ:

$$\frac{PN}{PB} = \frac{AN_1}{AB},$$

подставляя это выраженіе въ ур—ніе (3), находимъ:

$$v_n = \omega \cdot \frac{AB \cdot AN_1}{AB},$$

или, послѣ сокращеній,

$$v_n = \omega \cdot AN_1 \quad (4)$$

Такимъ образомъ, скорость любой точки шатуна N выражается произведеніемъ изъ угловой скорости вращения кривошипа, ω , на построенный указаннымъ выше способомъ отрѣзокъ AN_1 .

Легко видѣть, что каждой точкѣ N шатуна найдется одна соотвѣтствующая ей единственная точка N_1 на продолженіи шатуна BC , служащая для опредѣленія длины отрѣзка AN_1 , и, слѣдовательно, для опредѣленія скорости точки N . Всѣ эти точки N_1 будутъ расположены между двумя крайними точками B и C_1 , изъ которыхъ B будетъ соотвѣтствовать самой же точкѣ B , а C_1 —точкѣ C , такъ что

$$v_B = \omega \cdot AB \quad \text{и} \quad v_C = \omega \cdot AC_1,$$

при чемъ, въ виду того, что

$$\frac{BN_1}{BN} = \frac{AB}{BP} = \frac{BC_1}{BC},$$

можемъ сказать, что точка N_1 находится отъ B въ разстояніи BN_1 , представляющимъ собою длину отръзка BN , уменьшенную въ отношеніи $\frac{BC_1}{BC}$.

Итакъ, проводя AC_1 параллельно CD , мы получаемъ отръзокъ BC_1 , который въ такомъ построеніи можетъ съ большими удобствами для насъ замѣнить самый шатунъ BC въ дѣлѣ опредѣленія скоростей различныхъ точекъ этого послѣдняго.

Точно такимъ же образомъ можно показать, что нахожденіе скорости любой точки шатуна K , не лежащей на линіи BC , можетъ быть сведено къ нахожденію точки K_1 въ системѣ отръзка C_1B ; разстоянія этой точки K_1 до точекъ C_1 и B опять будутъ равны разстояніямъ точки K до C и B , уменьшеннымъ въ томъ же отношеніи $\frac{BC_1}{BC}$. Скорость же точки K изобразится такъ:

$$v_k = \omega \cdot AK_1 \dots \dots \dots (5)$$

Поворотный кругъ для системы шатуна найти легко, если мы замѣтимъ, что, прежде всего, онъ проходитъ черезъ полюсъ мгн. вр. P и что, кромѣ того, извѣстны радіусы кривизны траекторій точекъ B и C его; при помощи метода, указаннаго на стр. 28, можно всегда найти на каждомъ изъ векторовъ AP и DP по одной точкѣ поворотнаго круга, который такимъ образомъ и опредѣлится по тремъ этимъ точкамъ. Можно, затѣмъ, путемъ построенія угла μ опредѣлить положеніе центра ускореній G для даннаго момента, но такой пріемъ особенныхъ удобствъ не представляетъ потому, что иногда построеніе выходитъ изъ предѣловъ чертежа, и поэтому приходится прибѣгать въ такихъ случаяхъ къ искусственнымъ пріемамъ, одинъ изъ которыхъ будетъ изложенъ нами ниже.

Разберемъ теперь нѣкоторые частные случаи шарнирнаго четырехугольника.

Если противоположныя звенья между собою равны, то мы получаемъ механизмъ, называемый *параллельнымъ кривошипомъ* (фиг. 32). Если этотъ механизмъ мы поставимъ на звено d или b , то оба звена, a и c , будутъ кривошипами; подобнымъ же образомъ, поставивъ механизмъ на a или c , мы увидимъ, что оба звена, d и b , сдѣлаются кривошипами.

При такомъ же попарномъ равенствѣ звеньевъ можетъ получиться другой механизмъ съ симметричнымъ относительно стойки d расположеніемъ звеньевъ a и c (фиг. 33). Такой механизмъ носитъ названіе *симметричнаго*, или *антипараллельнаго кривошипа*.

Вращеніе кривошиповъ совершается въ первомъ случаѣ въ одну сторону, во второмъ—въ противоположныя.

Положимъ, что въ первомъ случаѣ движущимъ звеномъ будетъ звено a , тогда въ нѣкоторый моментъ звенья AB , BC и CD совпадутъ съ AD (фиг. 34). При дальнѣйшемъ вращеніи звена AB кривошипъ CD , очевидно, можетъ или продолжать вращеніе въ прежнемъ направленіи,—и механизмъ останется параллельнымъ кривошипомъ,—или начать вращеніе въ обратную сторону (фиг. 35), и изъ параллельнаго кривошипа перейдетъ въ симметричный. Слѣдовательно, въ положеніи совмѣщенныхъ звеньевъ механизмъ теряетъ свою сущность свойствъ строгой опредѣленности относительнаго движенія звеньевъ. Такое положеніе наз. *мертвымъ положеніемъ*, и нужна, такъ сказать, посторонняя помощь, чтобы движеніе продолжало носить прежній характеръ. Легко, конечно, видѣть, что и для антипараллельнаго кривошипа положеніе совмѣщенныхъ звеньевъ есть также мертвое положеніе: онъ можетъ перейти въ параллельный кривошипъ. Мы увидимъ далѣе, какъ можно переходить мертвыя положенія; пока продолжимъ разсмотрѣніе дальнѣйшихъ частныхъ случаевъ.

Пусть теперь попарно равны смежныя звенья; поставивъ механизмъ на меньшее изъ нихъ, получимъ *двойной кривошипъ*. Какъ этотъ случай, такъ и предыдущій представляются предѣльными случаями соотношенія *Грасюфа*, именно, когда сумма крайнихъ звеньевъ равна суммѣ среднихъ. Для подобнаго механизма (фиг. 36) имѣются мертвыя положенія, когда движеніе получается отъ большого звена c ; при совмѣщеніи AB , BC , CD съ AD оба совпавшія звена C могутъ вращаться, какъ одно, около центра D , звено же a (подвижное), совпавшее съ неподвижнымъ AD , можетъ остаться неподвижнымъ. Если мы поставимъ механизмъ на C (фиг. 37), то a явится кривошипомъ, другое же звено C —коромысломъ. При движеніи отъ a опять получимъ мертвыя положенія того же характера.

Замѣна вращательной пары поступательной.—Ползунъ.

Гораздо большее значеніе, чѣмъ выше разсмотрѣнные случаи, имѣютъ тѣ частныя виды шарнирнаго четырехугольника, въ которыхъ одна изъ вращательныхъ паръ замѣнена поступательной. Замѣну эту можно представить себѣ происшедшей такъ: допустимъ, что у насъ имѣется нѣкоторый шарнирный четырехугольникъ $ABCD$ (фиг. 38). Замѣнимъ систему коромысла CD системой направляющихъ, представляющихъ собою *душ* двухъ концентричныхъ круговъ KL и MN , имѣющихъ центръ въ точкѣ D (фиг. 39), и круговой же ползушкой CS , по нимъ скользящей. Очевидно, что отъ такой замѣны въ движеніи какъ шатуна BC , такъ и кривошипа AB не измѣнится ничто.

Теперь станемъ переходить къ новымъ видамъ шарнирнаго четырехугольника $ABCD$, въ которыхъ коромысло CD становится все больше и больше, доходя въ предѣлѣ до безконечно большихъ размѣровъ. Направляющія будутъ все болѣе и болѣе выпрямляться, пока, наконецъ, въ предѣлѣ не сдѣлаются прямолинейными (см. фиг. 40 и 41).

Если бы оказалось, что мы стали удалять центръ D въ безконечность по направленію CD , перпендикулярному къ линіи AC (фиг. 42), то въ предѣлѣ средняя линія направляющихъ пройдетъ черезъ самое точку A , и мы тогда получимъ обыкновенный механизмъ кривошипа AB , шатуна BC и ползуна C (фиг. 43 и 44), представляющій собою частный случай механизма, изображеннаго на фигурѣ 41. Понятно, что въ немъ звено a не должно быть больше звена b

$$(AB \leq BC).$$

Такъ какъ этотъ механизмъ одинъ изъ самыхъ употребительныхъ въ машиностроеніи, то на немъ мы остановимся подробнѣе.

Обратимъ звено d въ стойку. Если движеніе происходитъ отъ звена c , *ползуна*, то положенія, въ которыхъ центръ B приходится на линіи AC , будутъ мертвыми положеніями (фиг. 45) и не только въ томъ смыслѣ, что вращеніе кривошипа можетъ измѣнить свой характеръ, но и въ томъ, что сила, дѣйствующая на ползунѣ, вообще не въ состояніи сдвинуть механизмъ съ этого положенія безъ посторонней помощи, такъ какъ тогда слагающая этой силы въ направленіи AC (эта слагающая и является всегда движущей силой) будетъ стремиться лишь сломать звенья b и a . Переходятъ эти мертвые положенія, обыкновенно придавая звену a достаточную массу, инерція которой и увлекаетъ звено a , а съ нимъ и весь механизмъ, въ дальнѣйшее движеніе въ прежнемъ смыслѣ по отношенію къ вращенію a . Можно выбрать эту массу такой, что вращеніе кривошипа будетъ мало отличаться отъ равномернаго; поэтому въ дальнѣйшемъ мы и будемъ принимать въ такомъ механизмѣ, что кривошипъ вращается равномерно *).

Діаграмма отклоненій ползуна.

Разсмотримъ теперь, въ какой связи находятся между собою отклоненія кривошипа и ползуна отъ крайнихъ положеній. Положимъ, что въ тотъ моментъ, когда шипъ или палецъ кривошипа былъ въ мертвой точкѣ B_1 (фиг. 46), ползунъ находился въ точкѣ C_1 ; эта

*) Легко видѣть, что и въ общемъ шарнирномъ 4-угольникѣ съ кривошипнымъ звеномъ мы также имѣемъ мертвые положенія того же характера, что и только что указанныя, когда движущимъ звеномъ является коромысло.

точка отстоитъ отъ B_1 , понятно, на длину шатуна b . Для положенія BA кривошипа находимъ соотвѣтственное положеніе C ползуна ($BC=b$). Проведемъ теперь изъ C_1 линію $C_1E \parallel BC$, а изъ B —линію $BE \parallel B_1B_2$ (гдѣ B_2C_2 —второе мертвое положеніе шатуна). Тогда отклоненіе ползуна отъ первой мертвой точки C_1 , выражающееся отрѣзкомъ C_1C , съ другой стороны, выражается отрѣзкомъ BE , такъ какъ $BE \neq C_1C$. Такъ какъ $C_1E=b=C_1B_1$, то точка E лежитъ на окружности, описанной изъ C_1 радіусомъ $C_1B_1=b$; принимая же во вниманіе, что она лежитъ еще на параллели линіи мертвыхъ точекъ, проведенной черезъ B , можемъ сказать, что отклоненіе можно находить, слѣдовательно, такъ: изъ точки C_1 описываемъ окружность радіусомъ, равнымъ длинѣ шатуна b ; изъ B ,—соотвѣтственнаго положенія пальца кривошипа,—проводимъ параллель линіи мертвыхъ точекъ до пересѣченія ея съ этою окружностью (положимъ, въ точкѣ E),—отрѣзокъ BE этой параллели и будетъ искомымъ отклоненіемъ ползуна отъ его мертваго положенія C_1 .

Совершенно аналогично находимъ въ отрѣзкѣ BK отклоненіе отъ второго крайняго положенія ползуна C_2 . (K есть точка пересѣченія прежней параллели BE съ окружностью центра C_2 и радіуса b .) Точно такъ же можно построить отклоненіе отъ средняго положенія ползуна.

Если отрѣзки BE отложить на соотвѣтствующихъ положеніяхъ кривошипа, принимая за начало точку A , и соединить концы этихъ отрѣзковъ кривой, то получимъ такъ называемую *полярную діаграмму положеній ползуна* (фиг. 47). Можно построить также и другую—прямоугольную—діаграмму, въ которой на оси абсциссъ откладываемъ углы отклоненія кривошипа (α); этими углами измѣряются времена; ординатами же будутъ служить соотвѣтственные отклоненія ползуна (фиг. 48).

Легко видѣть, что движеніе ползуна не симметрично: при поворотѣ кривошипа на 90° отъ положенія B_1A ползунъ не пришелъ еще въ свое среднее положеніе, такъ какъ $EB_3 < B_3K$; наоборотъ, при поворотѣ на 90° отъ AB_2 —ползунъ уже успѣлъ пройти свое среднее положеніе. Несимметричность эта уменьшается съ увеличеніемъ длины шатуна, и при $b = \infty$ окружности EB_1 и KB_1 переходятъ въ прямыя B_1M_1 и B_2M_2 , перпендикулярныя къ B_1AB_2 ; въ этомъ предѣльномъ случаѣ отклоненія ползуна отъ средняго положенія, какъ легко видѣть изъ чертежа, будутъ пропорціональны $\cosinus$ 'амъ угловъ α .

Скорость ползуна.

Найдемъ теперь, какъ выражается скорость ползуна. Центръ мгновеннаго вращенія для движенія шатуна лежитъ, очевидно, на пересѣченіи AB съ CT —нормалью къ AC въ точкѣ C ; пусть это будетъ

точка P (фиг. 49). То построение, которое мы дали для общего случая четырехзвенной цепи, применимо, конечно, и здесь с той разницей, что так как здесь PC всегда перпендикулярно к AC , то и параллель линии PC , проводимая через точку A , обратится в прямую AK , перпендикулярную к AC , и, следовательно, скорость ползуна C выразится произведением из отрезка AK на угловую скорость вращения кривошипа ω . Как видно непосредственно, скорость ползуна будет постоянно меняться, обращаясь в нуль в мертвых положениях. Известными способами можно построить полярную и прямоугольную диаграммы скоростей (фиг. 50 и 51).

Графический способ построения ускорений различных точек шатуна.

Разсмотрим теперь, как выражаются *ускорения* ползуна и различных точек шатуна. Знание этих ускорений особенно важно потому, что оно вполне выясняет нам, каковы будут силы инерции качающихся частей разбираемого нами теперь механизма, шатуна и ползуна. Как в паровых машинах, особенно скороходных, так и в других машинах, имеющих такой же кривошипный механизм, как, например, в лесопилках и т. п., эти силы инерции играют весьма важную роль, и в частных случаях, например, в лесопилках, приходится встречаться и считаться с тем фактом, что давление на палец кривошипа от сил инерции качающихся частей превосходит иногда в несколько раз рабочее усилие. Точно так же в скороходных машинах (паровых) сила инерции частей ее может быть так велика, что все давление на поршень в начале хода идет на преодоление только одних сил инерции, таким образом, в зависимости от этого распределение давлений на палец кривошипа за полный оборот машины будет совершенно иное, чем то, которое имело бы место, если бы эти силы инерции отсутствовали.

На частных примерах не трудно также убедиться, как велико влияние сил инерции качающихся частей на устойчивость машины на ее фундамент, если машина неподвижная, или на движение ее, если имеем дело с паровозом. То же можно сказать и о расчете прочности частей механизма, — этот расчет был бы далеко неполным, если бы мы упустили из виду влияние сил инерции. Приведенные соображения указывают нам, как важно и необходимо иметь ясное представление о действии этих сил.

Приводимое обыкновенно в курсах построение ускорений ползуна, данное *Mohr*'ом, позволяет нам находить ускорения ползуна (а, следовательно, и связанных с ним штока и поршня); по этим

ускореніямъ, зная массы, мы найдемъ и силы инерціи. Что касается вопроса объ ускореніяхъ различныхъ точекъ шатуна, то мы можемъ получить представленіе объ ихъ величинѣ, если въ связи съ упомянутымъ построеніемъ *Mohr*'а воспользуемся извѣстными свойствами центра ускореній. Замѣтимъ, однако, что построение *Mohr*'а около мертвыхъ положеній механизма становится неудобнымъ вслѣдствіе того, что нѣкоторыя вспомогательныя линіи въ этихъ случаяхъ пересѣкаются подъ очень острыми углами. Въ самомъ же мертвомъ положеніи построение это мѣста не имѣетъ совсѣмъ. Поэтому мы даемъ здѣсь другой способъ, основанный на одномъ свойствѣ поворотнаго круга (фиг. 26), если *T* есть точка системы, *SS*—ея траекторія, *A*—центр кривизны траекторіи, *P*—полюсъ мгновеннаго вращенія, *O*—поворотный кругъ и *M*—точка пересѣченія вектора *AT* съ этимъ кругомъ, то существуетъ соотношеніе

$$PT^2 = AT \cdot MT. \dots \dots \dots (1)$$

Это соотношеніе является общимъ и одинаково примѣнимо во всѣхъ случаяхъ, какъ бы ни лежали точки *A* и *T* относительно полюса мгновеннаго вращенія *P* *).

Соотношеніе (1) даетъ намъ удобный способъ нахожденія точки *M* поворотнаго круга при данныхъ *A*, *P* и *T*.

Для этого изъ середины *C* отрѣзка *AT* (фиг. 52, обозначенія тѣ же, что и на фиг. 26) описываемъ дугу радіусомъ *CA*, а изъ самой точки *T* описываемъ дугу радіусомъ *TP*; эти двѣ дуги пересѣкутся въ точкахъ, положимъ, *E* и *H*, при чемъ прямая *EH* будетъ конечно, перпендикулярна линіи центровъ *CT*. Пусть эти двѣ прямая, *EH* и *CT*, пересѣкаются въ точкѣ *M*; тогда мы можемъ сказать, что точка *M* есть *точка пересѣченія поворотнаго круга съ прямой АРТ*.

На самомъ дѣлѣ, соединивъ точки *T* и *E* прямой *TE*, имѣемъ

$$TE^2 = TM \cdot AT,$$

но $TE = TP$, что и приводитъ насъ къ равенству (1), имѣющему мѣсто въ томъ случаѣ, когда *M* есть точка поворотнаго круга. Понятно далѣе, что если *PN* есть нормаль къ полоидамъ, то пересѣченіе *EN* съ *PN* даетъ *полюсъ поворота X*, кругъ же *PMX*, проходящій чрезъ точки *P*, *M* и *X*, будетъ *поворотнымъ кругомъ*.

Замѣтивъ это, перейдемъ къ разсмотрѣнію ускореній ползуна. Пусть намъ данъ обыкновенный кривошипный механизмъ *ABC* (фиг. 53). Какъ было показано выше, скорость ползуна *C* выражается произведеніемъ отрѣзка *AK* на угловую скорость вращенія кривошипа ω . Представимъ себѣ теперь систему отрѣзка *AB*, одинъ конецъ котораго *A*, двигается по *AC*, а другой—*B*, по окружности,

*) Это соотношеніе легко получить изъ равенства (18'), даннаго въ рѣшеніи задачи № 4 (стр. 28), уничтожая дроби и дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ.

описанной изъ C радіусомъ CB . Центръ мгновеннаго вращенія для этого отрѣзка будетъ находиться въ точкѣ K , и если мы будемъ двигать отрѣзокъ AB такъ, что угловая скорость вращенія около полюса K постоянно будетъ равна ω , то скорость точки A будетъ равна $KA \cdot \omega$, т.-е. равна скорости ползуна въ соответствующемъ положеніи и только направлена въ противоположную сторону. Слѣдовательно, ускореніе точки A отрѣзка AB также будетъ равно соответственному ускоренію ползуна и тоже направлено въ противоположную сторону.

Далѣе, поворотный кругъ для системы отрѣзка AB непременно пройдетъ черезъ точки K и A (черезъ K , какъ черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія, а черезъ A , — какъ черезъ точку, имѣющую въ данномъ движеніи одно только тангенціальное ускореніе (см. стр. 23). Пусть этотъ кругъ пересѣкаетъ AC въ точкѣ X (фиг. 54). Такъ какъ $\angle KAX = 90^\circ$, то XK будетъ діаметромъ этого круга, а значить X — полюсомъ поворота. Мы выше приняли, что угловая скорость движенія взятаго отрѣзка AB есть величина постоянная и равна ω ; а въ такомъ случаѣ $\frac{d\omega}{dt}$ обратится въ нуль и, слѣдовательно, *центръ ускоренія для отрѣзка AB , движущагося подобнымъ образомъ, совпадаетъ съ полюсомъ поворота* *). Въ такомъ случаѣ ускореніе точки A равно $AX \cdot \omega^2$ и направлено отъ A къ X ; значить, ускореніе ползуна выражается также чрезъ $AX \cdot \omega^2$ и направлено отъ X къ A .

Точку X найти легко, такъ какъ C есть центръ кривизны траекторіи точки B въ системѣ отрѣзка AB ; поэтому мы можемъ примѣнить указанное на стр. 39 построеніе. Выполняемъ его здѣсь: изъ середины O шатуна BC (см. фиг. 55) радіусомъ OB описываемъ дугу, а изъ B — радіусомъ BK , гдѣ K есть центръ мгновеннаго вращенія, описываемъ другую дугу: пусть онѣ пересѣкаются въ точкахъ E и H . Прямая EH , какъ мы знаемъ, въ пересѣченіи съ AC дастъ искомую точку X (центръ ускореній).

Приведенное построеніе имѣетъ мѣсто при всякомъ положеніи кривошипа AB , и, наприм., въ мертвомъ положеніи роль KB будетъ играть радіусъ кривошипа. Точки E и H получаютъ всегда отчетливо, и если онѣ и будутъ близки одна къ другой, что случится, когда кривошипъ будетъ близокъ къ положенію, перпендикулярному къ линіи мертвыхъ точекъ, то тѣмъ не менѣе прямая EH можетъ быть проведена совершенно точно, такъ какъ она перпендикулярна къ BC .

Построеніе для различныхъ положеній кривошипа ведется очень

*) $tg \mu = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt}$, но $\omega = \text{const.}$, $\frac{d\omega}{dt} = 0$, $tg \mu = 0$, $\mu = 0$ и точка G (см. фиг. 21) совпадетъ съ полюсомъ поворота K , у насъ X .

быстро, особенно если подъ рукою имѣются масштабная линейка и два циркуля,—одинъ изъ нихъ будетъ съ постояннымъ отверстіемъ, равнымъ половинѣ длины шатуна; масштабной линейкой легко находимъ для даннаго положенія кривошипа соотвѣтствующее положеніе шатуна, проводимъ тутъ же его направленіе $КС$, однимъ циркулемъ описываемъ изъ середины O шатуна дугу, другимъ—съ отверстіемъ, равнымъ KB , отмѣчаемъ на этой дугѣ точки E и H ; затѣмъ, приставивъ къ E и H линейку, отмѣчаемъ на $АС$ точку X . Такимъ образомъ мы найдемъ рядъ точекъ X для разныхъ положеній кривошипа, и получаемъ поэтому возможность судить о соотвѣтствующихъ ускореніяхъ ползуна. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію ускореній различныхъ точекъ шатуна.

Положимъ, что для даннаго положенія шатуна точку X мы уже нашли, такъ что XA выражаетъ величину, пропорціональную ускоренію ползуна (фиг. 56). Но ускореніе точки B въ томъ же масштабѣ выражается длиною радіуса AB .

Пусть центръ ускоренія системы шатуна лежитъ гдѣ-либо въ точкѣ G . По свойству центра ускореній, уголъ $ABG =$ углу ACG (пусть онъ равенъ μ); значитъ, уголъ $BGC =$ углу BAC *); кромѣ того, стороны треугольника BGC ,— BG и GC , пропорціональны сторонамъ BA и CA треугольника BAC , такъ какъ и тѣ, и другія пропорціональны ускореніямъ точекъ B и C ; слѣдовательно, треугольники BAC и BGC подобны, а въ такомъ случаѣ BX и BC наклонены другъ къ другу также подъ угломъ μ . (Такъ какъ треугольникъ ABX подобенъ треугольнику GBC , то $\angle ABX = \angle GBC$; прибавляя къ обѣимъ частямъ этого равенства по углу XBG , имѣемъ: $\angle ABG = \mu = \angle XBC$.) Возьмемъ теперь на сторонѣ BC какую-нибудь точку N , въ треугольникѣ ABX ей будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая опредѣленная точка N_1 , такая, что отношеніе $BN : NC$ будетъ равно отношенію $BN_1 : N_1X$. Проще всего это дѣленіе стороны BX на части, пропорціональныя BN и NC , совершится путемъ проведенія линіи $NN_1 \parallel AC$. Соединимъ теперь N съ G и N_1 съ A . Векторъ NG есть величина, пропорціональная ускоренію точки N ; векторъ N_1A есть величина, также, очевидно, пропорціональная ускоренію точки M ($\frac{AB}{GB} = \frac{AN}{GN}$), и выражаетъ это ускореніе въ томъ же масштабѣ, въ какомъ XA и BA выражаютъ ускоренія точекъ C и B . Такъ какъ опять $\triangle BAN_1$ и BNG подобны, такъ какъ, далѣе, двѣ пары ихъ сторонъ: BA и BG , BN_1 и BN , наклонены другъ къ другу подъ угломъ μ , то, по предыдущему, заключаемъ, что векторъ N_1A наклоненъ къ вектору NG также подъ угломъ μ . Слѣдовательно, векторъ N_1A выражаетъ собою и направленіе и ускореніе точки M ; самая же вели-

*) Изъ треугольниковъ BAR и RCg .

чина ускоренія выразится произведеніемъ $N_1A \cdot \omega^2$, при чемъ ускореніе будетъ направлено отъ N_1 къ A .

Итакъ, найти величину и направленіе ускоренія какой-либо точки шатуна въ любомъ его положеніи очень легко. Для этого нужно провести изъ разсматриваемой точки N параллель линіи мертвыхъ точекъ до пересѣченія съ линіей BX въ нѣкоторой точкѣ, положимъ, N_1 ; тогда векторъ N_1A , соединяющій полученную точку пересѣченія N_1 съ центромъ A , даетъ направленіе ускоренія точки N , величина же этого ускоренія выразится произведеніемъ этого вектора AN_1 на квадратъ угловой скорости вращенія кривошипа, ω^2 :

$$j_n = AN_1 \cdot \omega^2.$$

Если шатунъ очень длиненъ, то около линіи мертвыхъ точекъ отрѣзокъ BX получается очень малымъ, и различныя точки N_1 сливаются между собою. Но это указываетъ лишь на то, что и въ дѣйствительности ускоренія различныхъ точекъ шатуна становятся въ такихъ случаяхъ почти одинаковыми какъ по величинѣ, такъ и по направленію.

Отысканіе ускореній различныхъ точекъ шатуна N сводится, такимъ образомъ, всегда къ дѣленію соотвѣствующихъ отрѣзковъ XB въ тѣхъ отношеніяхъ, въ какихъ точки N дѣлятъ длину шатуна.

Пользуясь указаннымъ построеніемъ, легко найти отрѣзокъ XB и въ мертвомъ положеніи механизма; для этого изъ середины O шатуна BC (фиг. 57) засѣкаемъ дугу радіусомъ OB , а изъ B —дугу радіусомъ BA ; пусть точками пересѣченія этихъ двухъ дугъ будутъ точки E и H ; пусть далѣе прямая EH пересѣкаетъ прямую ABC въ точкѣ X . Уже изъ самаго построенія видно, что $AB^2 = EB^2 = BX \cdot BC$ (это слѣдуетъ изъ разсмотрѣнія прямоугольнаго $\triangle BEC$). Отсюда имѣемъ:

$$BX = \frac{AB^2}{BC}, \quad XA = AB + \frac{AB^2}{BC},$$

или, обозначая AB черезъ r , а BC —черезъ l , получаемъ:

$$BX = \frac{r^2}{l}, \quad XA = r + \frac{r^2}{l} = r \left(1 + \frac{r}{l} \right);$$

такимъ образомъ, ускореніе точки C выразится такъ:

$$j_c = \omega^2 r \left(1 + \frac{r}{l} \right).$$

Ускореніе какой-нибудь точки N шатуна найдемъ, раздѣливъ BX на части BN_1 и N_1X , отношеніе коихъ равняется отношенію BN къ NC ; и теперь можемъ сказать, что ускореніе точки N равно $AN_1 \cdot \omega^2$. Указанное дѣленіе производимъ или помощью масштабной линейки, или по обыкновенному способу пропорціональнаго дѣленія.

Когда шатунъ очень длиненъ, то, какъ видно изъ чертежа, окружность радіуса OB очень велика, точка X падаетъ близко отъ точки B , и, слѣдовательно, ускоренія различныхъ точекъ шатуна становятся почти одинаковыми; въ предѣлѣ при безконечно-длинномъ шатунѣ всѣ точки его имѣли бы въ мертвомъ положеніи одно и то же ускореніе, равное $AB \cdot \omega^2$ (точки B и X совпали бы).

Если требуется разсмотрѣть силы инерціи, возникающія при движеніи шатуна, то къ нимъ переходимъ путемъ помноженія ускореній на массы ($f = m \cdot j$), помня при этомъ, что силы инерціи *противоположны* по направленію ускореніямъ. Можно раздѣлить шатунъ на нѣсколько частей и считать, что если эти части взяты сравнительно малыми, то всѣ точки каждой такой части обладают однимъ и тѣмъ же ускореніемъ, равнымъ ускоренію центра тяжести этой части; для нахожденія же ускоренія этого центра тяжести мы должны найти соотвѣтствующую ему точку на отрѣзкѣ BX , и тогда, обозначая разстояніе найденной точки отъ центра A черезъ ρ , найдемъ, что сила инерціи, приходящаяся на долю этой части, равна $m\omega^2\rho$, гдѣ черезъ m мы обозначили массу разсматриваемой части шатуна. Слѣдовательно, дѣло сводится къ тому, что мы дѣлимъ отрѣзокъ BX на такія же части, какъ шатунъ, и считаемъ эти части снабженными массами соотвѣтствующихъ частей шатуна, т.-е. считаемъ, что вся масса шатуна, какъ бы распределѣна по BX и притомъ совершенно такъ же, какъ она распределѣна по длинѣ шатуна.

Положимъ, что намъ нужно найти слагающую дѣйствія силъ инерціи шатуна; пусть направленіе этой слагающей образуетъ уголъ φ съ векторомъ ρ ; тогда слагающая отъ каждой части, на которыя мы разбили весь шатунъ, выразится черезъ $m\omega^2\rho \cdot \cos\varphi$, отъ всего же шатуна получимъ силу $\omega^2 \cdot \Sigma m \cdot \rho \cdot \cos\varphi$. Величина $\rho \cos\varphi$ есть проекція радіуса вектора ρ на данное направленіе; проводя черезъ точку A прямую параллельно данному направленію, можемъ принять ее за ось x -въ, а въ такомъ случаѣ $\rho \cos\varphi$ есть абсцисса x разсматриваемой точки отрѣзка BX . По теоремѣ о центрѣ тяжести имѣемъ:

$$\Sigma m \cdot \rho \cos\varphi = \Sigma mx = M \cdot \bar{x},$$

гдѣ M есть вся масса шатуна, распределѣнная по отрѣзку BX , а $\bar{x}$ —координата центра тяжести этого отрѣзка. Въ свою очередь

$$\bar{x} = \rho_1 \cos\varphi_1,$$

гдѣ ρ_1 и φ_1 относятся къ центру тяжести отрѣзка BX , иначе говоря, $\rho_1 \cos\varphi_1$ есть проекція вектора центра тяжести отрѣзка BX на данное направленіе. Такимъ образомъ искомая слагающая выразится черезъ

$$M \cdot \omega^2 \cdot \rho_1 \cdot \cos\varphi_1.$$

Это выраженіе говоритъ намъ, что слагающая X силъ инерціи будетъ такова, какъ будто бы вся масса шатуна была сосредоточена въ центрѣ тяжести отрѣзка BX , но легко видѣть, что центръ тяжести отрѣзка BX есть ничто иное, какъ точка отрѣзка, соотвѣтствующая центру тяжести шатуна, т.-е. дѣлящая этотъ отрѣзокъ въ томъ же отношеніи, въ какомъ центръ тяжести дѣлитъ длину шатуна. Поэтому для выясненія дѣйствія силъ инерціи шатуна въ какомъ-либо заданномъ направленіи нужно знать его массу, положеніе центра тяжести, затѣмъ найти на отрѣзкѣ BX точку, соотвѣтствующую этому центру тяжести. Разстояніе этой точки отъ центра A дастъ намъ возможность указаннымъ только что способомъ опредѣлить дѣйствіе силъ инерціи въ любомъ данномъ направленіи.

З а д а ч и.

Такъ какъ при данномъ полюсѣ P , точкѣ T и центрѣ кривизны ея траекторіи A является возможнымъ (см. зад. № 4, стр. 28) найти точку M поворотнаго круга, то на основаніи этого рѣшить слѣдующія задачи:

1. Найти поворотный кругъ для системы шатуна въ обыкновенномъ механизмѣ паровой машины при данномъ положеніи кривошипа.
2. Предполагая, что кривошипъ вращается равномерно, найти, при помощи поворотнаго круга, центръ ускоренія шатуна.
3. Въ шарнирномъ четырехугольникѣ найти для какой-либо точки шатуна центръ кривизны траекторіи этой точки.
4. Пара дисковъ съ опредѣленнымъ разстояніемъ между центрами катится съ извѣстной скоростью v по горизонтальной прямой. Диски эти несутъ на себѣ параллельный кривошипъ. Массы какъ кривошиповъ, такъ и шатуна извѣстны. Пренебрегая массами дисковъ, указать, какъ велико будетъ давленіе на прямую отъ системы катящихся дисковъ.
5. Станокъ пильной машины на лѣсопилкѣ приводится въ движеніе обыкновеннымъ кривошипнымъ механизмомъ (паровой машины). Найти, каково будетъ давленіе на палецъ кривошипа въ мертвыхъ положеніяхъ механизма (въ зависимости отъ силъ инерціи, если вѣсъ станка съ пилами равенъ 242 килогр., вѣсъ шатуна—48 килогр., радіусъ кривошипа—0,4 метр. и число оборотовъ (въ минуту)—200.—Сравнить это давленіе съ полезнымъ (рабочимъ), если извѣстно, что для распилки потребна работа въ 5 лош. силъ (1 лош. с.—75 килогр. метр.). Шатунъ предполагается безконечно длиннымъ.

Аналитическое опредѣленіе скорости и ускоренія ползуна.

Займемся теперь аналитическимъ рѣшеніемъ вопроса о движеніи ползуна. Пусть ABC (фиг. 58) есть обыкновенный кривошипный механизмъ. Длина кривошипа AB пусть равна r , шатуна— l ; пусть, да-
лѣе, въ рассматриваемомъ своемъ положеніи кривошипъ AB обра-

зуетъ уголъ α съ линіей мертвыхъ точекъ AC ; ползунъ находится, допустимъ, въ точкѣ C ; точки C_1 и C_2 суть точки, въ которыхъ бываетъ ползунъ при мертвыхъ положеніяхъ механизма. Понятно, что

$$C_1A = l - r, \quad \text{а} \quad C_2A = l + r;$$

разстояніе CC_2 обозначимъ черезъ x ; тогда

$$x = C_2A - CA \dots \dots \dots (1)$$

Опустимъ изъ B перпендикуляръ BH на прямую AC . Тогда получимъ $CA = CH + HA$, что напишется иначе такъ

$$CA = \sqrt{CB^2 - BH^2} + AH,$$

или

$$CA = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + r \cos \alpha.$$

Такъ какъ $C_2A = l + r$, то ур—ніе (1) перепишется теперь такъ:

$$x = l + r - \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \alpha} - r \cos \alpha,$$

или

$$x = l + r(1 - \cos \alpha) - l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \alpha} \dots \dots \dots (2)$$

Отношеніе $\frac{r}{l}$ есть всегда правильная дробь и рѣдко (на практикѣ) превышаетъ $\frac{1}{5}$; поэтому радикаль ур—нія (2) можно разложить въ сходящійся рядъ по биному Ньютона; выполняя это, получаемъ:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \alpha} &= \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \alpha\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \alpha - \frac{1}{8} \frac{r^4}{l^4} \sin^4 \alpha - \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

такъ что ур—ніе (2) приметъ теперь видъ:

$$\begin{aligned} CC_2 = x &= l + r(1 - \cos \alpha) - l \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \sin \alpha \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{l} \sin \alpha \right)^4 - \dots \right] = \\ &= r(1 - \cos \alpha) + \frac{l}{2} \left[\left(\frac{r}{l} \sin \alpha \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{l} \sin \alpha \right)^4 + \dots \right] \dots \dots (4) \end{aligned}$$

Если бы для обратнаго движенія ползуна мы вели счетъ отъ положенія C_1 (фиг. 59), то нашли бы, что

$$y = C_1C = AC - AC_1 = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \alpha} - r \cos \alpha - (l - r),$$

что послѣ преобразованій, ничѣмъ не отличающихся отъ вышеприведенныхъ, приметъ видъ:

$$y = C_1C = r(1 - \cos \alpha) - \frac{l}{2} \left[\left(\frac{r}{l} \sin \alpha \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{l} \sin \alpha \right)^4 + \dots \right] \dots \dots (5)$$

Какъ не трудно убѣдиться непосредственнымъ вычисленіемъ, оба ряда, какъ рядъ (5), такъ и рядъ (4) оказываются быстро-сходящимися, и для *приближеннаго* вычисленія можно пренебречь членами ихъ, начиная со второго, т.-е. съ члена $\frac{1}{4} \left(\frac{r}{l} \sin \alpha \right)^4 \cdot \frac{l}{2}$. Въ такомъ случаѣ величина отклоненія ползуна отъ крайняго положенія, S (наше x или y), выразится такъ:

$$S = r(1 - \cos \alpha) \pm \frac{r^2}{2l} \sin^2 \alpha \dots \dots \dots (6)$$

Какъ извѣстно, скорость $v = \frac{dS}{dt}$, поэтому

$$v = \left(r \sin \alpha \pm \frac{r^2}{l} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \right) \cdot \frac{d\alpha}{dt} \dots \dots \dots (7')$$

(r и l постоянны, мѣняется только S и α); но $\frac{d\alpha}{dt}$ есть ничто иное, какъ угловая скорость вращенія кривошипа, ω_r , поэтому ур—ніе (7') принимаетъ видъ

$$v = \left(r \sin \alpha \pm \frac{r^2}{l} \sin \alpha \cos \alpha \right) \omega_r \dots \dots \dots (7'')$$

откуда

$$v = \left(r \sin \alpha \pm \frac{r^2}{2l} \sin 2\alpha \right) \omega_r, \dots \dots \dots (7)$$

Наконецъ ускореніе ползуна выразится такъ:

$$j = \frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \left(r \cos \alpha \pm \frac{r^2}{l} \cos 2\alpha \right) \cdot \omega_r^2 \dots \dots \dots (8)$$

Выраженіе (8) даетъ намъ возможность опредѣлить приблизительно, какому положенію кривошипа соотвѣтствуетъ *maximum* скорости; какъ извѣстно, *max. v* получится при $\frac{dv}{dt} = 0$, т.-е. при

$$\left(r \cos \alpha \pm \frac{r^2}{l} \cos 2\alpha \right) \cdot \omega_r^2 = 0;$$

сокращая по ω и r (оба отличны отъ нуля), имѣемъ это условіе въ видѣ:

$$\cos \alpha \pm \frac{r}{l} \cos 2\alpha = 0 \dots \dots \dots (9)$$

Вставляя вмѣсто $\cos 2\alpha$ равную ему величину $2\cos^2 \alpha - 1$, получаемъ квадратное относительно $\cos \alpha$ уравненіе, рѣшая которое, находимъ приблизительную величину угла α , соотвѣтствующаго тому положенію кривошипа, при которомъ скорость ползуна достигаетъ своего *maximum'a*.

Формулой (8), дающей приблизительную величину ускоренія, можно воспользоваться для составленія таблицы ускореній при различныхъ углахъ отклоненія кривошипа и съ помощью этой таблицы построить діаграмму ускореній, не пользуясь указаннымъ выше графическимъ приѣмомъ.

Въ томъ случаѣ, когда шатунъ безконечно великъ, $l = \infty$, выраженія какъ скорости, такъ и ускоренія ползуна значительно упрощаются. Выраженія (7) и (8) при $l = \infty$ принимаютъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} v_{\infty} &= r \sin \alpha \cdot \omega_r \\ j_{\infty} &= r \cdot \cos \alpha \cdot \omega_r^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Эти два выраженія показываютъ намъ, что въ указанномъ частномъ случаѣ скорость ползуна будетъ пропорціональна синусу угла отклоненія α , и будетъ выражаться произведеніемъ отрѣзка BX или AK (фиг. 60) на угловую скорость ω_r ; ускореніе же будетъ пропорціонально косинусу угла отклоненія и будетъ представлено произведеніемъ отрѣзка AX (или BK) — на квадратъ угловой скорости. Точка X фигуры 60, являющаяся здѣсь проекціей точки B на прямую AC , вполне соотвѣтствуетъ точкѣ X фигуръ 55 и 56. На самомъ дѣлѣ, если бы мы пожелали въ данномъ случаѣ выполнить построеніе, приведенное выше, для нахожденія точки X , то, по общему правилу, намъ пришлось бы изъ середины O шатуна BC , т.-е. изъ безконечно-далекой точки (ибо $BC = \infty$), описать дугу радіусомъ, равнымъ половинѣ длины шатуна, т.-е. опять безконечно-большимъ радіусомъ. Очевидно, что эта дуга обратится въ прямую ab , проходящую черезъ конецъ шатуна B перпендикулярно къ AC . Затѣмъ радіусомъ BK засѣкаемъ дугу, дающую на дугѣ (въ данномъ случаѣ — прямой) ab точки E и H . Прямая EH совпадаетъ съ прямой ab , такъ что искомая точка X и представитъ собою точку пересѣченія AC съ перпендикуляромъ къ ней — ab . Отсюда видно, что точка X фигуры 56 въ данномъ случаѣ совпадаетъ съ проекціей точки B на прямую AC . На фигурѣ 60 можно видѣть, что въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ отклоненія ползуна отъ средняго положенія выражаются отрѣзками AX , т.-е. величиной $r \cos \alpha$; а въ такомъ случаѣ, въ силу ур—нія (10), можно сказать, что *ускоренія ползуна будутъ пропорціональны отклоненіямъ ея отъ средняго положенія*. Отсюда, въ свою очередь, выходитъ, что если мы въ соотвѣтствующихъ положеніяхъ ползуна составимъ ординаты и на нихъ будемъ откладывать ускоренія (фиг. 61), то концы векторовъ, изображающихъ эти ускоренія, всѣ придутся на одной прямой M_0CM_1 , проходящей черезъ среднее положеніе ползуна — точку C —, и имѣющей крайними ординатами векторы C_0M_0 и C_1M_1 , при чемъ $C_0M_0 = C_1M_1 = \omega_r^2 r$. Такъ какъ $cc_1 = r$, то

$$\operatorname{tg} M_1CC_1 = \operatorname{tg} \varphi = \frac{M_1C_1}{CC_1} = \frac{\omega_r^2 \cdot r}{r} = \omega_r^2.$$

Итакъ, кривая ускореній ползуна, въ случаѣ безконечно-длиннаго шатуна, представляетъ изъ себя прямую, проходящую чрезъ среднее положеніе ползуна и наклоненную къ линіи мертвыхъ точекъ подъ нѣкоторымъ вполне опредѣленнымъ угломъ.

Въ случаѣ конечнаго шатуна кривая ускореній, какъ доказываютъ ближайшія изслѣдованія, оказывается параболой, имѣющей своей осью линію C_0M_0 (фиг. 62).

Крайнія ординаты ея, отрѣзки C_0M_0 и C_1M_1 , будутъ уже не равны, а именно, для одного мертвого положенія, при $\alpha=0$, изъ уравненія (8) получаемъ

$$j_0 = \frac{l-r}{l} \omega_r^2 \cdot r,$$

а для другого, при $\alpha=180^\circ$, имѣемъ

$$j_{180^\circ} = \frac{l+r}{l} \omega_r^2 \cdot r,$$

(и ту, и другую величину беремъ абсолютно, не принимая во вниманіе знака ея). Кривая M_0MM_1 будетъ пересѣкать ось C_0C_1 уже не въ серединѣ отрѣзка C_0C_1 , изображающаго ходъ ползуна, что видно также и изъ того обстоятельства, что *тахитит* скорости ползуна не приходится теперь на его среднее положеніе. Указанная кривая M_0MM_1 даетъ законъ ускореній при движеніи ползуна отъ C_0 къ C_1 ; при движеніи же ползуна отъ C_1 къ C_0 (при слѣдующемъ полуоборотѣ кривошипа) кривая ускореній изобразится кривой, симметричной съ первой относительно оси C_0C_1 (фиг. 63), и поэтому въ положеніи кривошипа AB ускореніе ползуна изобразится отрѣзкомъ Sx , а въ AB_1 —отрѣзкомъ C_2X_2 .

Качающаяся паровая машина.

Познакомившись съ обыкновеннымъ кривошипнымъ механизмомъ, перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію дальнѣйшихъ видоизмѣненій четырехзвенной цѣпи съ поступательной парой.

Если мы поставимъ механизмъ, изображенный на фиг. 44, не на звено d , какъ это сдѣлано тамъ, а на звено b , то получимъ т.-наз. механизмъ качающейся паровой машины (фиг. 64). Звено c будетъ имѣть здѣсь только одно вращательное движеніе около оси C , наглухо соединенной съ звеномъ b и перпендикулярной къ плоскости чертежа. Звено d будетъ участвовать концомъ A во вращеніи кривошипа около оси B и въ то же время скользить по звену c . Если звено C мы выполнимъ въ видѣ цилиндра, могущаго качаться на шипахъ, звено же d снабдимъ поршнемъ, соотвѣтствующимъ этому цилиндру, то и получимъ механизмъ качающейся паровой машины.— Не трудно найти здѣсь скорость поршня.

Центръ мгновеннаго вращенія звена δ находимъ по общему правилу: такъ какъ звено δ постоянно проходитъ съ одной стороны черезъ точку C , такъ что эта точка является *опирающейся* этого звена, то полюсъ P долженъ лежать на перпендикулярѣ PC , возставленномъ къ AC въ точкѣ C ; кромѣ того, полюсъ долженъ лежать на продолженіи радіуса BA , и, значитъ, искомый полюсъ долженъ находиться въ точкѣ пересѣченія линій CP и AB (фиг. 65). Если, далѣе, угловую скорость вращенія около P мы обозначимъ черезъ θ , то найдемъ, что скорость поршня v_c выразится такъ:

$$v_c = PC \cdot \theta \dots \dots \dots (1)$$

Если угловую скорость вращенія кривошипа мы обозначимъ черезъ ω_r , то для скорости точки A можно будетъ написать:

$$v_A = \theta \cdot PA = \omega_r \cdot BA = r \cdot \omega_r \dots \dots \dots (2)$$

Какъ и въ предыдущихъ выводахъ, предполагаемъ, что ω_r есть величина *постоянная*.

Изъ ур—нія (2) находимъ:

$$\theta = \frac{r\omega_r}{PA} \dots \dots \dots (3)$$

въ виду чего ур—ніе (1) приметъ видъ:

$$v_c = \frac{PC}{PA} \cdot r \cdot \omega_r \dots \dots \dots (4)$$

Если теперь изъ точки B мы опустимъ перпендикуляръ BK на продолженіе прямой AC и проведемъ $KE \parallel BA$, то изъ треугольниковъ PAC и BAK получимъ:

$$\frac{PC}{PA} = \frac{BK}{r},$$

такъ что

$$\frac{PC}{PA} \cdot r = BK \dots \dots \dots (5)$$

а поэтому ур—ніе (4) переписется теперь такъ:

$$v_c = \omega_r \cdot BK \dots \dots \dots (6)$$

т.-е. скорость поршня будетъ пропорціональна отръзку BK .

Угловая скорость вращенія около P есть въ то же время угловая скорость качанія цилиндра, геометрическая ось котораго направлена по δ . Эта угловая скорость будетъ уже постоянно мѣняться; на самомъ дѣлѣ, изъ ур—нія (3) имѣемъ

$$\theta = \omega_r \cdot \frac{r}{PA} \dots \dots \dots (7)$$

но изъ треугольниковъ BAK и PAC , ABC и KCE

$$r : PA = AK : AC = BE : BC \dots \dots \dots (8)$$

откуда получаемъ:

$$\dot{\theta} = BE \cdot \frac{\omega_r}{BC} \dots \dots \dots (9)$$

т.-е. угловая скорость качанія цилиндра *пропорціональна отръзку BE*; чтобы затѣмъ показать, что эта скорость будетъ мѣняться, возьмемъ такое положеніе механизма, при которомъ звено *CA* является касательнымъ къ окружности *B₀AB₁* (фиг. 66); пока кривошипъ описываетъ уголъ *B₀BA = α*, цилиндръ поворачивается на уголъ

$$ACB = 90^\circ - \alpha,$$

но на тотъ же уголъ онъ повернется въ обратную сторону при вращеніи кривошипа на уголъ *ABB₁ = 180° - α*. Слѣдовательно, когда кривошипъ поворачивается на уголъ *ABA₁ = 2α*, качаніе цилиндра (въ одну сторону) будетъ быстрое, — въ другую же сторону оно будетъ медленное, — кривошипъ описываетъ при этомъ уголъ *ABA₁*, стягиваемый дугой *AB₁A₁ (= 360° - 2α)*, при чемъ скорость вращенія кривошипа все время остается постоянной, т.-е. кривошипъ вращается равномерно; отношеніе временъ качаній равно отношенію угловъ *B₀BA* и *ABB₁*, т.-е. выразится въ видѣ:

$$\frac{\alpha}{180^\circ - \alpha} = \frac{\arccos \frac{a}{b}}{\pi - \arccos \frac{a}{b}},$$

гдѣ въ виду

$$\cos \alpha = \frac{a}{b}$$

обозначено

$$\alpha = \arccos \frac{a}{b}.$$

Этимъ свойствомъ качаній можно пользоваться въ тѣхъ случаяхъ, когда какому-либо предмету требуется сообщить быстрое движеніе въ одну сторону и медленное—въ другую. Такъ, наприм., въ строгальныхъ машинахъ рѣзецъ долженъ двигаться медленно въ то время, когда онъ беретъ стружку, и быстро,—когда идетъ въ обратную сторону, на холостомъ ходу. Схему механизма, выполняющаго подобное движеніе, можно представить себѣ такъ: кривошипъ *a* (фиг. 67), выполняемый обыкновенно въ видѣ круглой шайбы съ шипомъ, служащимъ пальцемъ кривошипа, несетъ на своемъ пальцѣ вольно сидящій ползунъ, могущій ходить въ прорѣзѣ рычага *M*; этотъ послѣдній качается около *C*, и къ другому его концу прикрѣплена тяга, идущая къ суппорту *M* для рѣзца. При равномерномъ вращеніи кривошипа въ сторону, показанную стрѣлкой, мы получимъ медленное движеніе рѣзца впередъ—рабочій ходъ, и быстрое—назадъ.

Круглый эксцентрикъ.

Механизмъ кривошипа и шатуна, а также качающейся паровой машины можетъ имѣть нѣкоторое видоизмѣненіе съ внѣшней стороны. Дѣло въ томъ, что въ случаѣ, если радіусъ кривошипа очень малъ, сдѣлать палецъ кривошипа должныхъ размѣровъ является труднымъ, а иногда и невозможнымъ. Въ такомъ случаѣ увеличиваютъ діаметръ пальца настолько, что онъ захватываетъ уже ось вращенія кривошипа, и тогда этотъ палецъ выполняется въ видѣ круглой шайбы, насаженной эксцентрично на ось A вращенія кривошипа (фиг. 68). Эксцентриситетъ AB этой шайбы и есть теперь длина кривошипа; шайба наглухо закрѣплена на валу A ; съ внѣшней стороны ее (какъ раньше это было съ пальцемъ кривошипа) охватываетъ хомутъ M , составляющій одно цѣлое съ тягой N , идущей къ ползуну C . Механизмъ этотъ носить названіе механизма *круглаго эксцентрика*, и, какъ видимъ, по существу не отличается отъ обыкновеннаго кривошипнаго механизма.

Случай, когда сдѣлано неподвижнымъ звено „а“.

Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію механизма поставленнаго на звено a , служившее раньше кривошипомъ; звенья b и d являются въ такомъ случаѣ оба кривошипами въ томъ смыслѣ, что оба получаютъ возможность совершать полный оборотъ около точекъ A и B (фиг. 69). Центръ мгновеннаго вращенія для движенія ползуна получится въ пересѣченіи перпендикуляра PA (см. фиг. 70) къ d съ линіей BC ,—пусть это будетъ точка P . Угловая скорость вращенія звена d есть, конечно, угловая скорость вращенія ползуна C около P ; скорость же точки C — v_c можетъ быть выражена двояко: съ одной стороны, $v_c = BC \cdot \omega_B$, гдѣ ω_B есть угловая скорость равномернаго вращенія кривошипа b ; съ другой стороны, $v_c = PC \cdot \theta$, гдѣ θ есть угловая скорость вращенія около P . Поэтому имѣемъ возможность написать $BC \cdot \omega_B = PC \cdot \theta$, откуда

$$\theta = \frac{BC}{PC} \cdot \omega_B \dots \dots \dots (1)$$

Проводимъ $BN \parallel AP$ до пересѣченія съ d въ точкѣ N и $NM \parallel AB$ до пересѣченія съ CB въ точкѣ M ; тогда получаемъ:

$$\frac{BC}{PC} = \frac{NC}{AC} = \frac{CM}{BC},$$

въ виду чего ур—ніе (1) приметъ видъ:

$$\theta = \frac{CM}{BC} \omega_B \dots \dots \dots (2)$$

т.-е. угловая скорость вращенія звена δ выражается величинами, пропорціональными отрѣзкамъ CM . Въ положеніяхъ совмѣщенныхъ звеньевъ, когда b и δ совпадаютъ съ a (фиг. 71), имѣемъ:

$$v_c = BC \cdot \omega_B = AC \cdot \theta \dots \dots \dots (3)$$

откуда получаемъ, что

$$\theta = \omega_B \cdot \frac{BC}{AC},$$

иначе

$$\theta = \omega_B \cdot \frac{b}{b-a} \dots \dots \dots (4)$$

для другого положенія совмѣщенныхъ звеньевъ находимъ аналогично

$$\theta = \omega_B \cdot \frac{b}{b+a} \dots \dots \dots (4)$$

Такимъ образомъ видимъ, что угловая скорость θ не постоянна. Это, впрочемъ, можно обнаружить еще и такъ: представимъ себѣ звено δ въ положеніи, перпендикулярномъ къ AB (фиг. 72), при чемъ вращеніе пусть совершается въ сторону, показанную стрѣлкой; тогда легко видѣть, что при поворотѣ кривошипа на *острый* уголъ CBC_0 звено δ повернется на прямой уголъ; но на тотъ же прямой уголъ оно повернулось и раньше, при поворотѣ кривошипа на *тупой* уголъ C_1BC ; слѣдовательно, пока кривошипъ описываетъ острый уголъ CBC_2 , звено δ вращается быстро и совершаетъ полъ-оборота; вторую же половину оборота оно совершаетъ медленно, и при этомъ кривошипъ повертывается на уголъ $(360^\circ - CBC_2)$. Отношеніе временъ той и другой половинъ оборота равно отношенію $\angle CBC_0 : \angle C_1BC$, или отношенію $\arccos \frac{a}{b} : \left(\pi - \arccos \frac{a}{b} \right)$. Какъ видимъ, получается то же выраженіе, что и для механизма качающейся паровой машины.

Указанною неравномѣрностью вращенія мы опять можемъ воспользоваться для сообщенія рѣзущему инструменту движенія, медленнаго въ одну сторону и быстрого — въ другую. Подобный механизмъ употребляется въ строгальныхъ машинахъ Витворта. Кулачекъ K (фиг. 73), вращающійся около оси B , входитъ въ то же время въ прорѣзъ шайбы T , могущей въ свою очередь вращаться около оси A . Съ другой стороны этой шайбы придѣлана тяга P идущая къ суппорту; палецъ M этой тяги можетъ быть устанавливаемъ на желаемомъ разстояніи отъ A . При равномѣрномъ вращеніи кулачка въ направленіи, указанномъ стрѣлкой, шайба будетъ совершать одну половину оборота быстро, другую — медленно, соотвѣтственно повороту кулачка на уголъ K_2BK_1 или на уголъ, дополнительный ему до 360° . Первое будетъ соотвѣтствовать движенію суппорта назадъ (холостой ходъ, показанный стрѣлкой), второе — впередъ (рабочій ходъ).

Наконецъ, *четвертый механизмъ* изъ кривошипнаго механизма съ поступательной парой получимъ тогда, когда сдѣлаемъ неподвижнымъ звено *c*.

Въ такомъ случаѣ *A* будетъ ходить взадъ и впередъ съ звеномъ *d*, *BC* будетъ качаться около *C* между положеніями *CB₀* и *CB₁*, при которыхъ звено *AB* перпендикулярно къ направленію звена *d*; движущимъ звеномъ является обыкновенно *AB*. Механизмъ этотъ имѣетъ малое примѣненіе (фиг. 74).

Плоская четырехзвенная шарнирная цѣпь съ двумя поступательными парами.

Разсмотрѣвъ механизмъ съ одной поступательной парой, перейдемъ къ тому случаю, когда плоская четырехзвенная цѣпь имѣетъ двѣ поступательныя пары. Въ такомъ случаѣ нужно различать механизмы по тому, *смежныя ли двѣ вращательныя пары обратились въ поступательныя или противоположащія*. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ разсматривать только механизмы перваго рода, какъ наиболѣе важныя.

Если въ шарнирной цѣпи пары *C* и *D* обратились въ поступательныя (фиг. 75), то ничто не мѣшаетъ намъ взять направленія этихъ поступательныхъ движеній проходящими черезъ *B* и *A*. Тогда механизмъ принимаетъ слѣдующій видъ: звено *a* (фиг. 76) имѣетъ попрежнему два шарнира *A* и *B*, звенья *b* и *d* обратились въ ползунки для двухъ неразрывно скрѣпленныхъ стержней, которые представляютъ теперь звено *c*.

Механизмъ этотъ можно поставить на звено *c*; тогда движеніе звена *a* представить собою ничто иное, какъ движеніе неизмѣняемаго отрѣзка внутри опредѣленнаго угла. Каждая точка звена *a*, какъ извѣстно, опишетъ тогда эллипсъ, и механизмъ имѣетъ примѣненіе какъ *эллипсографъ*.

Звено *c* (фиг. 77) выполняется въ видѣ двухъ скрѣпленныхъ подъ прямымъ угломъ стержней, имѣющихъ прорѣзы, въ которыхъ и ходятъ ползуны *d* и *b*. Какая-либо точка *L* звена *a* опишетъ эллипсъ, при чемъ, назвавъ разстояніе точки *L* отъ середины отрѣзка, точки *M*, черезъ *C*, найдемъ, что полуоси этого эллипса будутъ: большая—

$$\left(C + \frac{a}{2}\right) \text{ и меньшая } \left(C - \frac{a}{2}\right).$$

Вторымъ видоизмѣненіемъ разбираемой цѣпи будетъ механизмъ, поставленный на звено *a*. Тогда звенья *b* и *d* будутъ вращаться около *A* и *B*, при чемъ не трудно видѣть, что извѣстному повороту звена *d* соотвѣтствуетъ равный ему поворотъ звена *b* (фиг. 78). Это произойдетъ вслѣдствіе того, что уголъ при *C* остается неизмѣннымъ

и точка C находится на окружности, вмещающей данный угол C , опирающийся на отрезок постоянной длины AB .

Муфта Oldham'a.

Последнее замѣчаніе предыдущаго параграфа приводитъ насъ къ тому заключенію, что при помощи послѣдняго изъ вышеразобранныхъ механизмовъ можно производить вращеніе около какой-либо оси B (фиг. 78) вращеніемъ около другой оси A , при чемъ угловыя скорости этихъ вращеній останутся одинаковыми. Такого рода передача вращенія отъ одного вала другому, ему параллельному, но не совпадающему съ нимъ, выполняется при помощи муфты *Oldham'a*.

Представимъ себѣ на осяхъ B и A , которыя должны быть связаны этой муфтой, двѣ шайбы съ прорѣзами, обращенными другъ къ другу (фиг. 79). Стоитъ теперь ввести въ эти прорѣзы два стержня, скрѣпленныхъ подъ прямымъ угломъ (наглухо), и наша передача будетъ осуществлена, мы получаемъ муфту *Oldham'a*. Стержни эти выполняются не отдѣльно, а въ видѣ отдѣльной третьей шайбы (фиг. 80), имѣющей выступы: (I) съ одной стороны и перпендикулярный къ нему (II) — съ другой. Эта третья шайба вставляется между шайбами A и B такъ, что выступы ея входятъ въ прорѣзы этихъ послѣднихъ. Понятно, что при вращеніи одного вала выступы будутъ скользить въ своихъ вырѣзахъ такъ, что ихъ оси будутъ постоянно проходить черезъ постоянныя по положенію въ пространствѣ точки A и B , такъ что все сводится къ перемѣщенію прямого угла, принужденнаго двигаться такъ, что его стороны постоянно проходятъ черезъ двѣ неподвижныя точки.

Станокъ Leonardo-da-Vinci.

Движеніе средней шайбы въ муфтѣ *Oldham'a* есть, какъ мы говорили, движеніе системы прямого угла, стороны котораго принуждены все время проходить черезъ двѣ неподвижныя точки. Такъ какъ при движеніи отрезка внутри прямого угла каждая точка, неизмѣнно соединенная съ отрезкомъ, описываетъ на плоскости этого прямого угла эллипсъ, то обратно, при движеніи угла и неподвижномъ отрезкѣ, карандашъ, помѣщенный гдѣ-либо *неподвижно*, начертитъ на плоскости прямого угла опять-таки эллипсъ. Слѣдовательно, если къ средней шайбѣ муфты *Oldham'a* приставить рѣзецъ, то онъ обточитъ шайбу по эллипсу.

Этимъ замѣчаніемъ можно воспользоваться для устройства станка для обтачиванія овальныхъ предметовъ; для удобства работы придется лишь видоизмѣнить внѣшнимъ образомъ муфту *Oldham'a*. Сред-

няя шайба представится теперь планшайбой токарного станка, значить, обѣ оси придутся по одну сторону ея. Одну изъ осей выполнимъ въ видѣ кольца, сквозь которое эксцентрично будетъ проходить вторая, сплошная ось; кольцо это вращается въ соотвѣтствующемъ подшипникѣ. Какъ это кольцо, такъ и сплошная ось снабжены кулачками, ходящими въ прорѣзахъ планшайбы; прорѣзы эти замѣняютъ собою прежніе выступы на средней шайбѣ муфты *Oldham'a* и другъ къ другу перпендикулярны. Выполненный такимъ образомъ станокъ носить названіе станка «*Leonardo-da-Vinci*» (фиг. 81).

Здѣсь A есть сплошная ось, вращающаяся въ подшипникахъ K и L ; F есть кольцо (полая ось), могущее вращаться въ подшипникѣ E . Геометрическая ось этого кольца проектируется на вертикальной проекціи въ точку B . AB и есть постоянный отрѣзокъ, теперь неподвижный. Какъ кольцо F , такъ и ось A снабжены кулачками: первое — NN , вторая — MM , входящими въ прорѣзы N_1N_1 и M_1M_1 планшайбы. Прорѣзы эти перпендикулярны другъ другу и расположены, разумѣется, съ задней стороны планшайбы; геометрическія оси ихъ и представляютъ собою прямой уголъ, опирающійся сторонами на неподвижный отрѣзокъ AB .

При вращеніи оси A кольцо F , подобно второй оси въ муфтѣ *Oldham'a*, также приходитъ во вращеніе. Планшайба выполняетъ при этомъ движеніе средней шайбы муфты, и приставленный къ ея внѣшней сторонѣ карандашъ начертитъ на ней эллипсъ и, слѣдовательно, повернутый къ планшайбѣ предметъ можетъ быть обточенъ по эллипсу. Какъ видно изъ чертежей, подшипникъ E , въ которомъ вращается кольцо F , при помощи винтовъ (y, y) можетъ быть нѣсколько передвигаемъ въ направляющихъ (x, x) , это даетъ возможность измѣнять величину отрѣзка AB , при чемъ это измѣненіе измѣняется съ помощью мѣтокъ m и n у праваго винта yz ; мѣтка m (на нижней части подшипника E) — подвижная, мѣтки же n являются неподвижными дѣленіями, что и даетъ намъ возможность получать эллипсы различныхъ эксцентриситетовъ; установивъ, напр., рѣзецъ въ направленіи AB на разстояніяхъ c отъ A и $c-AB$ отъ B , получимъ эллипсъ съ полуосями c и $c-AB$.

Двойной ползунъ.

Третье видоизмѣненіе механизма плоскаго шарнирнаго четырехугольника съ двумя смежными поступательными парами получимъ, если обратимъ въ стойку какое-либо изъ звеньевъ b или d .

Какое изъ нихъ мы сдѣлаемъ неподвижнымъ, это безразлично для кинематическаго характера механизма, — въ обоихъ случаяхъ получится механизмъ одного и того же рода. Обыкновенно оба на-

правленія поступательныхъ паръ, какъ и въ прежнихъ видоизмѣненіяхъ, перпендикулярны другъ къ другу, и въ этомъ случаѣ механизмъ носить названіе *двойного ползуна*.

Звено *a* (фиг. 82) служить кривошипомъ и вращается около оси *A*; звено *b* ползаетъ въ направляющихъ, принадлежащихъ звену *cc*, а это послѣднее ходитъ въ направляющихъ, перпендикулярныхъ къ первымъ и принадлежащихъ неподвижному теперь звену *d*; при этомъ, если кривошипъ *a* вращается равномерно, то движеніе всякой точки звена *c* тождественно съ движеніемъ точки *M*, служащей проекціей центра *B* пальца кривошипа *a* на діаметръ *dd*; движеніе это будетъ такъ наз. *гармоническое*, соотвѣтствующее, какъ видно изъ чертежа, движенію ползуна въ обыкновенномъ кривошипномъ механизмѣ съ бесконечно-длиннымъ шатуномъ. Такимъ образомъ то, что для кривошипнаго механизма было только приблизительнымъ, здѣсь является вполне точнымъ.

Тремя приведенными видоизмѣненіями и исчерпывается четырехзвенная цѣпь съ двумя смежными поступательными парами. Мы не будемъ останавливаться здѣсь на дальнѣйшихъ преобразованіяхъ цѣпи, какъ не имѣющихъ большого практическаго значенія, и намъ остается теперь разобрать вопросъ о тѣхъ положеніяхъ въ нѣкоторыхъ видахъ четырехзвенной цѣпи, когда механизмъ теряетъ свою сущность, т.-е. опредѣленность относительныхъ движеній звеньевъ; эти такъ называемыя мертвыя положенія заставляютъ насъ прибѣгать къ помощи постороннихъ приспособленій, имѣющихъ своею цѣлью возвращеніе механизму опредѣленности движенія его частей.

Переходъ черезъ мертвыя положенія.

Въ обыкновенномъ кривошипномъ механизмѣ паровой машины, гдѣ мертвыя положенія являются дѣйствительно мертвыми, а не только положеніями неопредѣленности движенія, присутствіе большихъ массъ на валу, вращаемымъ кривошипомъ (маховиковъ и пр.), обезпечиваетъ самой инерціей ихъ надлежащій переходъ черезъ мертвыя положенія.

Въ механизмѣ параллельнаго кривошипа для той же цѣли къ имѣющемуся уже параллельному кривошипу присоединяютъ другой, тоже параллельный, кривошипъ, имѣющій мертвыя положенія, отличныя по времени отъ перваго (фиг. 83). Второй кривошипъ, какъ и первый, наглухо соединенъ съ осями *A* и *D*, такъ что эти два кривошипа являются какъ бы соединенными наглухо между собою, какъ и показано на фиг. 83.

Неопредѣленность движенія теперь устранена совершенно: когда кривошипы *AB* и *DC* окажутся въ мертвомъ положеніи, кривошипы

AA_1 и DC_1 не будутъ въ таковомъ и переведутъ первые кривошипны черезъ это мертвое положеніе въ опредѣленномъ направленіи. Такую же роль сыграютъ первые кривошипны, когда вторые окажутся въ мертвомъ положеніи.

Подобное соединеніе двухъ параллельныхъ кривошиповъ примѣняется въ паровозахъ, гдѣ именно такимъ образомъ соединяютъ двѣ пары (или больше) колесъ, лежащихъ съ разныхъ сторонъ.

Въ другихъ случаяхъ устраняютъ неопредѣленность *защипленіемъ*. Сущность этого способа состоитъ въ томъ, что опредѣляютъ движеніе какого-либо звена по отношенію къ другому и пристраиваютъ на этихъ звеньяхъ приспособленія, заставляющія звенья около мертвыхъ положеній продолжать свое прежнее относительное движеніе. Способомъ этимъ можно съ удобствомъ воспользоваться для устранения неопредѣленности движенія въ мертвыхъ положеніяхъ симметричнаго кривошипа.

Пусть у насъ имѣется симметричный кривошипъ $ABCD$ (фиг. 84). Опредѣлимъ движеніе звена BC по AD . Центръ мгновеннаго вращенія для звена BC лежитъ въ точкѣ пересѣченія радіусовъ BA и DC , — допустимъ, въ точкѣ P ; при этомъ имѣемъ: $AB=CD$, $AD=BC$, значитъ, треугольникъ BAD = треугольнику BCD , откуда

$$\angle ABD = \angle CDB,$$

что показываетъ, что $\triangle PBD$ — равнобедренный и $PB=PD$; въ такомъ случаѣ можемъ написать

$$PB - AB = PD - CD, \text{ или } PA = PC,$$

что, наконецъ, даетъ намъ возможность написать, что

$$PD - PC = CD = \text{const},$$

т.-е. $PD - PA = \text{const}$, значитъ, точка P есть одна изъ точекъ, разность разстояній которыхъ до двухъ данныхъ неподвижныхъ точекъ A и D постоянна; геометрическое мѣсто такихъ точекъ есть, какъ извѣстно, гипербола съ фокусами A и D и съ дѣйствительною осью $MN=AB$. Точки M и N служатъ полюсами мгновеннаго вращенія для BC въ обоихъ мертвыхъ положеніяхъ.

Подвижной полюсодой для BC , т.-е. полюсодой движенія AD по отношенію къ BC будетъ также гипербола съ дѣйствительною осью $N_1M_1=CD=AB$.

Въ одномъ мертвомъ положеніи совпадутъ точки N_1 и N гиперболъ, во второмъ — M_1 и M .

Чтобы заставить звено BC въ томъ или другомъ мертвомъ положеніи дѣйствительно вращаться около точекъ N и M и тѣмъ самымъ продолжать двигаться въ прежнемъ смыслѣ, а не измѣнять характера движенія, мы можемъ устроить въ точкахъ N_1 и M_1 звена BC ку-

лачки, а въ точкахъ M и N звена AD соответствующія этимъ кулачкамъ вилки. Теперь понятно, что, когда, напр., кулакъ N_1 совпадетъ съ вилкой N , то при дальнѣйшемъ вращеніи кривошипа AB все въ ту же сторону (указанную на чертежѣ стрѣлкой), стержень BC будетъ вынужденъ повернуться около N , и такъ какъ при этомъ одинъ конецъ его, B , повернется въ прежнемъ направленіи (по стрѣлкѣ), то другой конецъ его C будетъ вынужденъ повернуться въ обратномъ концу B направленіи, т.-е. повернется въ томъ же направленіи, что и передъ тѣмъ (фиг. 85), и, значитъ, симметричный кривошипъ и дальше останется симметричнымъ и направленія вращеній останутся прежними.

Защѣпленіе можно устроить и на звеньяхъ AB и CD . Опредѣляя относительное ихъ движеніе, легко найдемъ, что въ этомъ случаѣ одной полоидой будетъ эллипсъ съ фокусами A и B , а другой—также эллипсъ,—съ фокусами C и D (фиг. 86).

Подобные переходы черезъ мертвыя положенія при помощи защѣпленія употребляются и въ нѣкоторыхъ другихъ частныхъ случаяхъ плоской четырехзвенной кинематической цѣпи. Такъ, напр., если у насъ имѣется кривошипный механизмъ, въ которомъ длина кривошипа равна длинѣ шатуна, то получимъ здѣсь мертвыя положенія и въ томъ случаѣ, когда движеніе происходитъ отъ кривошипа, чего въ общемъ случаѣ механизма кривошипа и шатуна не бываетъ. На самомъ дѣлѣ, когда кривошипъ AB (фиг. 87), вращаясь, придетъ въ положеніе, перпендикулярное къ линіи B_0B_1 , то ось шарнира C ползуна совпадетъ съ осью A , и шатунъ приметъ направленіе такое же, какъ и кривошипъ; при дальнѣйшемъ вращеніи кривошипа шатунъ съ нимъ совпавшій, свободно можетъ вращаться съ нимъ около оси C , теперь совпавшей съ A ; при этомъ ползунъ останется неподвижнымъ, и механизмъ обратится въ простую вращательную пару. Устранить эту неопредѣленность мы можемъ, для чего заставляемъ шатунъ BC и въ мертвыхъ положеніяхъ сохранить характеръ его движенія по отношенію, напр., къ неподвижному звену d .

Полюсъ P мгновеннаго вращенія шатуна найдется обыкновеннымъ способомъ; при этомъ, вслѣдствіе равенства $BC = AB$, имѣемъ также равенство:

$$BC = PB = AB, \quad \text{т.-е.} \quad AP = 2AB,$$

что показываетъ намъ, что неподвижная полоида есть окружность центра A и радіуса $2a = 2 \cdot AB$. Подвижную полоиду найдемъ, сдѣлавъ CB неподвижнымъ,—это будетъ окружность съ центромъ въ B и вдвое меньшимъ радіусомъ.

Движеніе шатуна есть въ данномъ случаѣ движеніе отръзка CD

(гдѣ $BD = BC$ есть продолженіе шатуна) внутри прямого угла CAD . Въ мертвыхъ положеніяхъ полюсами мгновеннаго вращенія шатуна будутъ точки P_0 и P_1 ; заставимъ шатунъ дѣйствительно вращаться около этихъ точекъ, устроивъ въ P_0 и P_1 вилки, а въ точкѣ D шатуна, совпадающей въ мертвыхъ положеніяхъ съ P_0 и P_1 , — кулакъ, могущій сцѣпляться съ этими вилами; тогда неопредѣленность имѣть мѣста не будетъ.

Поставивъ этотъ же механизмъ на AB , увидимъ, что и здѣсь получатся мертвыя положенія того же рода и подобнымъ же образомъ устраняемыя. Здѣсь, когда движущимъ звеномъ является звено b (CB), при равномерномъ его вращеніи около B , звено d будетъ также равномерно вращаться около A , но лишь съ вдвое меньшей угловой скоростью, — въ то время какъ звено b сдѣлаетъ два оборота, звено d сдѣлаетъ только одинъ, причемъ мертвыхъ положеній не будетъ совсѣмъ.

Но въ томъ случаѣ, когда движущимъ звеномъ является звено d , — слѣдовательно, вращеніе около A передается вращенію около B съ вдвое большей угловой скоростью, мы опять получимъ неопредѣленность въ движеніи механизма въ тотъ моментъ, когда ось шарнира C совпадетъ съ осью A ; тутъ ничто не помѣшаетъ звену CB остаться неподвижнымъ, а ползуну вращаться вмѣстѣ съ d около совпавшихъ осей C и A , — механизмъ опять обратится въ простую вращательную пару.

Взявъ опять на продолженіи шатуна въ разстояніи отъ B , равномъ BC , точку D и приладивъ въ ней кулакъ, заставимъ его сцѣпляться въ мертвыхъ положеніяхъ съ вилками, соединенными теперь съ движущимъ звеномъ d . Но можно сдѣлать иначе: можно въ D пристроить такой же ползунъ, какъ и въ C , а звену d придать соотвѣтствующія направляющія, перпендикулярныя къ направляющимъ ползуна C (фиг. 88).

Строго говоря, этотъ послѣдній способъ будетъ уже способомъ перехода черезъ мертвыя положенія прибавленіемъ механизма, имѣющаго другія мертвыя положенія сравнительно съ даннымъ. — Разсмотрѣнный механизмъ употребляется иногда для передачи вращательнаго движенія между параллельными осями при отношеніи скоростей, равномъ $\frac{1}{2}$.

Подобные же способы перехода черезъ мертвыя положенія употребляются и въ тѣхъ, гораздо болѣе рѣдкихъ случаяхъ, когда имѣемъ частные виды четырехзвенной шарнирной цѣпи съ четырьмя равными попарно звеньями (фиг. 89).

Какъ мы уже знаемъ, механизмъ, поставленный на короткое звено, даетъ въ этомъ случаѣ двойной кривошипъ, и если движущимъ звеномъ является большій кривошипъ, то мертвыя положенія имѣютъ мѣсто, когда ось C приходитъ въ C_1 , а B — въ D , или когда C при-

ходить въ C_0 , а B опять въ D ; въ этихъ случаяхъ кривошипъ a свободно можетъ оставаться неподвижнымъ, въ то время, какъ оба звена c будутъ вращаться, какъ одно, около оси d , — такимъ образомъ у насъ получится простая вращательная пара.

Здѣсь точно также можно устранить получающуюся неопредѣленность движенія сдѣлaniemъ въ соотвѣтственныхъ положеніяхъ, напр., звеньевъ AB и CD , для чего нужно отыскать ихъ относительныя полюиды и поступить, какъ раньше.

Если этотъ механизмъ будетъ поставленъ на звено c , то, какъ нетрудно видѣть, мертвыя положенія будутъ въ случаѣ полученія движенія отъ кривошипа a , — звено c явится тогда коромысломъ, — и опять будутъ имѣть тотъ же характеръ.

Кинематическая цѣпь съ пятью шарнирами. — Станокъ Коха и Мюллера.

Предыдущимъ параграфомъ мы закончили изслѣдованіе плоской четырехшарнирной цѣпи; переходя къ изученію цѣпей съ большимъ числомъ шарнировъ, замѣтимъ, что увеличеніе числа ихъ (сверхъ четырехъ) ведетъ къ неопредѣленности движенія механизма.

До сихъ поръ мы представляли себѣ механизмъ поставленнымъ на одно какое-либо звено; далѣе, одно изъ звеньевъ приводилось въ движеніе какой-либо внѣшней силой, и тѣмъ самымъ всѣ остальные звенья приводились въ вполнѣ опредѣленное движеніе. Очевидно, что если мы имѣемъ пять вращательныхъ паръ: A, B, C, D и E (фиг. 90), и поставимъ эту цѣпь, напр., на звено AE , то при вращеніи звена AB звенья BC и CD не будутъ имѣть вполнѣ опредѣленнаго движенія, — оно будетъ зависѣть еще и отъ звена DE ; если звено DE неподвижно, то мы опять получимъ обыкновенную четырехзвенную цѣпь; но мы можемъ это звено DE двигать вполнѣ самостоятельно; тогда звенья BC и CD получаютъ нѣкоторое сложное движеніе, зависящее и отъ движенія AB и отъ движенія DE ; слѣдовательно, въ такой цѣпи можно самостоятельно (конечно, до известной степени), двигать два звена и тогда движеніе двухъ остальныхъ будетъ вполнѣ опредѣленнымъ. Этимъ обстоятельствомъ можно воспользоваться для практическаго выполненія нѣкоторыхъ сложныхъ движеній, требуемыхъ, напр., въ частныхъ случаяхъ обработки металловъ. Мы остановимся здѣсь на одномъ примѣрѣ, встрѣчающемся на практикѣ, — именно на станкѣ Коха и Мюллера,² служащемъ для обтачиванія некруглыхъ предметовъ. Мы уже имѣли дѣло со станкомъ Леонардо-да-Винчи, могущимъ обтачивать по эллипсамъ; станокъ Коха и Мюллера даетъ возможность выполнять не только эллипсы, но и другія циклическія кривыя, получаемыя каченіемъ одной окруж-

ности внѣ или внутри другой. Какъ извѣстно, при такомъ каченіи каждая точка, связанная съ подвижной окружностью, совершитъ оборотъ вмѣстѣ съ центромъ своей окружности около неподвижнаго центра второй и въ то же время повернется нѣсколько разъ около центра своей окружности. Слѣдовательно, если представимъ себѣ нѣкоторую планшайбу, центръ которой будетъ описывать окружность, а планшайба сама въ то же время будетъ повертываться около своего центра, то какой-либо пишущій или рѣжущій инструментъ оставить на планшайбѣ слѣдъ опредѣленной циклической кривой. Первое движеніе планшайбы будетъ круговымъ поступательнымъ, второе—вращательнымъ около своей оси. Выполнить это сложное движеніе можно при помощи пятизвенной цѣпи, гдѣ движеніе будетъ передаваться одновременно отъ двухъ звеньевъ.

Представимъ себѣ опять муфту *Oldham*'а, которая, какъ извѣстно, есть частный случай четырехзвенной цѣпи, и при помощи ея можно отъ оси *A* передать вращеніе параллельной ей оси *B* (см. фиг. 78). Представимъ теперь, что мы придали этому механизму пятую вращательную пару *E* (фиг. 91) и звено *EA* установили неподвижно; тогда, какъ мы выше видѣли, движеніе всего механизма становится въ зависимость отъ движенія звена *BE*; при неподвижномъ звенѣ *BE* мы будемъ имѣть простую муфту *Oldham*'а, но при подвижномъ — движеніе будетъ уже болѣе сложнымъ. Ось шарнира *E* можно устроить совпадающей съ осью шарнира *A*, и тогда *A* можно взять въ видѣ пустотѣлага вала (фиг. 92), связать съ нимъ ползушку, а *E*—въ видѣ полного вала, входящаго внутрь *A*; оба вала получаютъ вращеніе независимо одинъ отъ другого. Если валъ *E* неподвиженъ, и, слѣд., неподвижно и связанное съ нимъ звено *BE*, то, какъ было сказано, получаемъ муфту *Oldham*, а; но если валъ *A* неподвиженъ, а *E*—(звено *BE*) вращается равномерно, тогда направленіе движенія ползушки, связанной съ валомъ *A*, остается неизмѣннымъ, и мы получаемъ механизмъ двойного ползуна; при этомъ *B* будетъ описывать окружность, а ползушка, принадлежащая *B*, будетъ оставаться все время параллельной самой себѣ. Эту ползушку, вольно сидящую на оси *B*, можемъ замѣнить, подобно тому, какъ мы это дѣлали въ муфтѣ *Oldham*'а или станкѣ *Leonardo-da-Vince*, цѣлой планшайбой, имѣющей соотвѣтствующія ползушкѣ направляющія; тогда при неподвижномъ пустотѣломъ валѣ *A* планшайба будетъ перемѣщаться параллельно самой себѣ, а центръ ея опишетъ окружность около геометрической оси *A* и *E*. Но ничто не мѣшаетъ намъ вмѣстѣ съ этимъ вращеніемъ вала *E* или звена *BE* самостоятельно вращать пустотѣлый валъ *A* и, слѣд., связанную съ нимъ ползушку; тогда это послѣднее вращеніе передается планшайбѣ, и она станетъ вращаться около своей неподвижной оси *B*. Такъ какъ характеръ передачи вращенія въ муфтѣ *Oldham*'а нисколько не зависитъ отъ того, гдѣ на-

ходится ось B , то равномерное вращение вала A будет передаваться планшайбѣ равномернымъ же вращениемъ около ея оси. Такимъ образомъ мы можемъ придать планшайбѣ два движенья: круговое равномерно-поступательное — равномернымъ вращениемъ вала E , и равномерно-вращательное — вращениемъ вала A . Такъ какъ мы можемъ по своему произволу выбирать то или другое число оборотовъ какъ для вала A , такъ и для вала E , то тѣмъ самымъ мы заставимъ планшайбу совершить любое число оборотовъ около своего центра въ то время, какъ этотъ послѣдній опишетъ одну окружность около геометрической оси A и E , а это значитъ, что мы помощью такого механизма можемъ воспроизвести *любую* циклическую кривую. — Положимъ, напр., что мы желаемъ какимъ-нибудь пишущимъ орудіемъ оставить на планшайбѣ слѣдъ эллипса. Мы знаемъ, что если какая-нибудь окружность O (фиг. 93) катится по окружности O_1 вдвое меньшаго радиуса, находящейся внутри первой, то неподвижный карандашъ начертитъ на плоскости, принадлежащей окружности O , эллипсъ, видъ котораго будетъ зависѣть отъ положенія карандаша по отношенію къ O_1 . Качение окружности O по O_1 можно представить себѣ составленнымъ изъ кругового поступательнаго движенья (при этомъ центръ O перемѣстится по окружности O_1 по часовой стрѣлкѣ, напр., въ точку O_2), — и вращенія около центра O_2 на уголъ, равный, какъ мы знаемъ, половинѣ угла O_2O_1O ; на самомъ дѣлѣ, точка P перешла теперь въ P_1 и находится, какъ мы знаемъ, на радиусѣ O_2P ; но при параллельномъ перенесеніи всей окружности она перешла бы въ P_2 , гдѣ $O_2P_2 \parallel OP$, и, чтобы привести ее въ надлежащее положеніе, которое имѣло бы мѣсто при дѣйствительномъ каченіи окружности O по O_1 , нужно повернуть окружность O около O_2 на уголъ $P_2O_1P_1$, равный половинѣ угла O_2O_1O , и также по часовой стрѣлкѣ. Отсюда слѣдуетъ, что мы должны вращать оси A и E (фиг. 92) въ одну сторону, но ось E придется вращать съ вдвое большей угловой скоростью, чѣмъ ось A . При такомъ вращеніи карандашъ начертитъ на планшайбѣ эллипсъ. Задаваясь различными окружностями и представляя себѣ качение подобно тому, какъ мы это только что продѣлали, мы всегда можемъ узнать, какъ нужно вращать оси, чтобы получить желаемыя циклическія кривыя. Идея воспроизведенія сложнаго движенья планшайбы при помощи такой пятишарнирной цѣпи и лежитъ въ основѣ механизма *Коха* и *Мюллера*. Устройство его соответствуетъ приведенной выше схемѣ и представлено на фиг. 94.

Въ передней бабкѣ токарнаго станка устраиваются два вала — пустотѣлый A и полный E . Полный валъ соединенъ наглухо съ шипомъ B планшайбы при помощи болтовъ K , но, какъ видно изъ чертежа, шипъ B можетъ быть передвигаемъ перпендикулярно къ плоскости чертежа, такъ что имѣется возможность установить его въ желаемомъ разстояніи отъ геометрической оси A и E . Пустотѣлый

валъ A имѣетъ направляющія mn для ползушки Q (направляющія эти также перпендикулярны къ плоскости чертежа). Ползушка Q имѣетъ кулаки ll , входящіе въ радіальныя направляющія mn планшайбы P . Въ установленномъ станкѣ направленіе направляющихъ mn перпендикулярно къ направленію mn . Сравнивая детальный чертежъ съ схематическимъ (фиг. 92) видимъ, что ползушкѣ при A схематическаго чертежа соотвѣтствуютъ здѣсь направляющія mn , а звену C соотвѣтствуетъ ползушка Q вмѣстѣ съ кулаками ll ; направляющія планшайбы представляютъ ползушку при B схематическаго чертежа. Если представить себѣ шипъ B отодвинутымъ за плоскость чертежа, то это будетъ соотвѣтствовать въ схематическомъ чертежѣ положенію шарнира B , когда онъ находится какъ разъ въ направленіи оси ползушки (фиг. 95).

Разсмотрѣвъ наиболѣе часто встрѣчающіеся механизмы, получаемые изъ вращательныхъ паръ съ параллельными осями, мы теперь перейдемъ къ сочетанію винтовыхъ паръ, представляющихъ общій случай вращательной и поступательной пары, но опять ограничимся разборомъ паръ съ одинаково направленными осями.

Винтовые пары.

Винтовое движеніе, какъ мы знаемъ, есть сочетаніе вращательнаго движенія около нѣкоторой оси и поступательнаго вдоль той же оси; но одно и то же вращательное движеніе, положимъ, происходящее по часовой стрѣлкѣ, можно сочетать съ поступательнымъ двояко: одинъ разъ при одномъ направленіи поступательнаго движенія, другой разъ при противоположномъ, что, въ свою очередь, обуславливаетъ различіе винтовыхъ паръ.

Пусть передъ нами находится винтовая пара; будемъ смотрѣть на нее вдоль ея оси; нарѣзка этой пары можетъ быть такова, что при вращеніи по *часовой стрѣлкѣ* одного элемента относительно другого, остающагося неподвижнымъ, первый будетъ удаляться отъ насъ; такимъ образомъ здѣсь имѣемъ сочетаніе вращательнаго движенія *съ поступательнымъ въ направленіи отъ насъ*; такая нарѣзка, а вмѣстѣ съ ней и вся пара, называется *правой*. Но можно устроить нарѣзку такъ, что элементъ пары, вращаясь опять по часовой стрѣлкѣ, станетъ *приближаться къ намъ*,—въ этомъ случаѣ имѣемъ сочетаніе того же вращательнаго движенія съ поступательнымъ, совершающимся теперь въ другую сторону,—такая нарѣзка называется *лввой*.

Легко видѣть, что, если мы будемъ вращать элементъ пары *противъ* часовой стрѣлки, то въ первомъ случаѣ—въ случаѣ правой пары элементъ будетъ приближаться къ намъ, а во второмъ—удаляться

отъ насъ. При вращеніи элемента по часовой стрѣлкѣ на 360° , онъ, въ случаѣ правой нарѣзки, — удалится отъ насъ на величину h , равную шагу винтовой линіи (разстоянію двухъ сосѣднихъ точекъ винтовой линіи, лежащимъ на одной образующей цилиндра). Изъ самаго закона образованія винтовой линіи на поверхности круглаго цилиндра слѣдуетъ, что, въ случаѣ поворота элемента пары вообще на нѣкоторый уголъ φ , элементъ подвинется вдоль оси цилиндра на величину, равную $\varphi h : 2\pi$ или на ah , гдѣ a есть величина поворота въ частяхъ полнаго оборота.

При томъ же поворотѣ a элементъ лѣвой пары, имѣющей тотъ же шагъ h , подвинется на ту же величину ah , но въ другую сторону (къ намъ); если первую величину ah считать положительной, то вторую можно считать отрицательной. Такимъ образомъ является возможность алгебраически различать правыя и лѣвыя нарѣзки тѣмъ, что у первыхъ будемъ считать шагъ положительнымъ, у вторыхъ — отрицательнымъ; повороты же, какъ это принято вообще, считаются положительными въ направленіи часовой стрѣлки и отрицательными — въ обратную сторону.

Трехзвенная винтовая цѣпь.

Обратимся теперь къ сочетанію винтовыхъ паръ, ограничиваясь простѣйшими. Здѣсь, въ противоположность вращательнымъ и поступательнымъ парамъ, можно составить замкнутую цѣпь изъ паръ, оси которыхъ совпадаютъ, и именно, изъ трехъ паръ. Дѣйствительно, не трудно представить себѣ винтъ a (фиг. 96), на оси котораго имѣется еще какой-нибудь винтъ; гайка b этого послѣдняго имѣетъ на своей внѣшней сторонѣ нарѣзку и служитъ такимъ образомъ въ то же время винтомъ, гайка для котораго c соединена неразрывно съ гайкой для a . Получаемъ такимъ образомъ цѣпь изъ трехъ одноосныхъ винтовыхъ паръ: $A(c, a)$, $B(b, a)$, $C(b, c)$. Разсмотримъ относительныя движенія звеньевъ этой цѣпи.

Повертываемъ a относительно c на α , гдѣ α выражено въ доляхъ π , и пусть b повернется относительно a на β , тогда относительно c оно повернется на $(\alpha + \beta)$, и, если шаги паръ мы назовемъ соотвѣтственно черезъ x , y и z , то найдемъ, что поступательное движеніе a относительно c равно αx , b относительно a равно βy ; слѣд. b относительно c подвинулось на $(\alpha x + \beta y)$; но такъ какъ оно повернулось въ то же время относительно c на $(\alpha + \beta)$, а шагъ этой пары (b, c) есть z , то поступательное перемѣщеніе b выразится въ то же время въ видѣ $z(\alpha + \beta)$, что даетъ намъ возможность написать равенство:

$$\alpha x + \beta y = (\alpha + \beta)z.$$

Отсюда видимъ, что при данныхъ шагахъ, т.-е. для данныхъ вин-

товыхъ паръ, опредѣленному повороту α звена a относительно c соответствуетъ вполне опредѣленное движеніе звена b относительно того же звена c , — другими словами, цѣпь является вполне опредѣленной.

Если механизмъ былъ поставленъ на звено c , то движеніе звена b относительно c является абсолютнымъ и, слѣд., при поворотѣ звена a на α , звено b повернется на

$$\alpha + \beta = \alpha \cdot \frac{x - y}{z - y}$$

и подвинется на

$$(\alpha + \beta)z = \alpha \cdot z \cdot \frac{x - y}{z - y},$$

какъ это видно изъ уравненія, связывающаго α и β .

Если механизмъ поставленъ на звено a , то абсолютнымъ движеніемъ звена b будетъ его движеніе относительно a . У насъ α было поворотомъ звена a относительно c , слѣд. $(-\alpha)$ являлось поворотомъ c относительно a ; поэтому теперь $(-\alpha)$ будетъ выражать абсолютный поворотъ звена c , а β — абсолютный поворотъ звена b , причемъ α и β опять связаны прежнимъ уравненіемъ; оно намъ даетъ

$$\beta = (-\alpha) \cdot \frac{x - z}{y - z},$$

звено c подвинется на $(-\alpha) \cdot x$, а звено b — на $\beta \cdot y$, т.-е. на

$$-\alpha y \cdot \frac{x - z}{y - z}.$$

Точно также при неподвижномъ b имѣемъ абсолютный поворотъ звена a равнымъ $(-\beta)$, а звена c — равнымъ $[-(\alpha + \beta)]$, гдѣ α и β опять связаны приведеннымъ выше уравненіемъ; нетрудно получить теперь передвиженія a и c .

Въ такомъ общемъ видѣ механизмъ этотъ почти не имѣетъ примѣненій. Гораздо чаще встрѣчаются частные случаи этой трехзвенной винтовой цѣпи, когда какая-либо пара обращается въ поступательную или вращательную.

Предположимъ, что пара $C(b, c)$ обратилась въ поступательную пару съ направленіемъ движенія, параллельнымъ общей оси оставшихся винтовъ (фиг. 97). Поставивъ механизмъ на c , мы можемъ вращеніемъ винта a передвигать взадъ и впередъ гайку b второго винта, имѣющую извнѣ направляющія, параллельныя оси винта a (поступательная пара c). Обозначимъ, какъ и прежде, шаги обоихъ винтовъ черезъ x и y ; поворотъ α звена a относительно c теперь будетъ въ то же время и поворотомъ a относительно b , такъ какъ гайка b сама вращаться не можетъ, или, другими словами, (β) , — поворотъ b

относительно a , будетъ теперь равенъ $(-a)$. Такимъ образомъ звено b относительно звена a подвинется на величину $(-ay)$; но звено a подвинется относительно звена c (т.-е. абсолютно) на величину ax , слѣд., гайка b подвинется абсолютно на величину $a(x-y)$.—Это выраженіе могло быть получено изъ найденнаго выше соотношенія:

$$(a+\beta)\zeta = a\zeta \cdot \frac{x-y}{\zeta-y},$$

въ которомъ, примѣнительно къ разсматриваемому случаю пришлось бы положить $\zeta = \infty$ (для поступательной пары); произведеніе же $(a+\beta)\zeta$, обращающееся теперь въ $0 \cdot \infty$ (ибо $(a+\beta)$ теперь равно нулю) попрежнему остается осевымъ перемѣщеніемъ гайки b .

Какъ показываетъ выраженіе $a \cdot (x-y)$, передвиженіе гайки b можетъ быть сдѣлано произвольно малымъ,—стоитъ только шаги обоихъ винтовъ, при одинаковой нарѣзкѣ (правой или лѣвой) сдѣлать мало разнящимся другъ отъ друга. Подобный механизмъ носить названіе *дифференціальной винта*, и имъ можно пользоваться для измѣренія малыхъ отрѣзковъ числомъ оборотовъ винта a , а также и во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ требуется весьма малое передвиженіе. Если теперь видоизмѣнить эту цѣпь тѣмъ, что сдѣлать нарѣзки обоихъ винтовъ противоположными, то передвиженіе гайки будетъ равно $a(x+y)$. Въ такомъ измѣненномъ видѣ этотъ механизмъ употребляется для соединенія вагоновъ (фиг. 98). Здѣсь винты A и B , принадлежащіе звену a , имѣютъ: одинъ (A)—правую нарѣзку, а другой (B)—лѣвую. Гайки O и O_1 для этихъ винтовъ соединяются при помощи крюковъ соотвѣтственно съ однимъ и другимъ вагономъ. Если мы будемъ вращать звено a по часовой стрѣлкѣ (смотря со стороны O_1), то, очевидно, винтъ A будетъ входить въ гайку O , т.-е. гайка O будетъ приближаться къ серединѣ звена a ; гайка O_1 точно также будетъ приближаться къ срединѣ a ; значитъ оба вагона будутъ сдвигаться на величину $(x+y)$ при одномъ оборотѣ звена a .

Второе частное видоизмѣненіе нашей трехзвенной цѣпи получимъ, если сдѣлаемъ пару $A(c,a)$, вращательной, т.-е. одинъ изъ винтовъ a обратимъ въ простой шипъ, вращающійся въ подшипникѣ неподвижнаго звена c (фиг. 99). Въ этомъ случаѣ шагъ $x=0$, и при поворотѣ звена a на a получаемъ поворотъ гайки b въ видѣ

$$a \cdot \frac{y}{y-\zeta},$$

гдѣ y и ζ опять обозначаютъ шаги оставшихся винтовъ; передвиженіе гайки b выразится черезъ

$$a\zeta \cdot \frac{y}{y-\zeta}.$$

Какъ это, такъ и предыдущее выраженія можно получить изъ выраженія

$$(\alpha + \beta)z = \alpha \cdot z \frac{x - y}{z - y},$$

гдѣ придется положить $x = 0$.

Въ противоположность тому, что мы имѣли для предыдущаго случая (дифференціального винта), здѣсь при данномъ оборотѣ α передвиженіе можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ, если шаги x и y будутъ сдѣланы мало разнящимися одинъ отъ другого.

Если теперь пару $A(a, c)$ сдѣлаемъ вращательной, а пару $C(b, c)$ поступательной, то получимъ одно изъ наиболѣе часто встрѣчаемыхъ на практикѣ видоизмѣненій этого механизма (фиг. 100). Здѣсь при поворотѣ винта a на α гайка b будетъ подвигаться въ ту или другую сторону на величину αx , гдѣ x есть шагъ винта; другими словами, одинъ элементъ (a) винтовой пары $B(b, a)$ имѣетъ только вращательное движеніе, другой же (b)—только поступательное.

Описанный механизмъ примѣняется въ параллельныхъ тискахъ и во многихъ машинахъ по обработкѣ металловъ и дерева, тамъ, гдѣ, вообще говоря, равномерное вращательное движеніе желательно преобразовать въ равномерное же и достаточно медленное поступательное, напр., при движеніи суппорта въ такъ-называемыхъ самоточкахъ. Суппортъ въ такихъ случаяхъ имѣетъ гайку, соотвѣтствующую гайкѣ b , звено же a представляетъ шпиндель, снабженный нарезкой и вращающійся въ подшипникахъ, укрѣпленныхъ въ станинѣ (звено — c), самоточки.

Разсмотрѣніемъ этого механизма мы заканчиваемъ разсмотрѣніе винтовыхъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и вообще низшихъ кинематическихъ паръ.

Классификація механизмовъ.

Высшими кинематическими парами, какъ мы знаемъ, будутъ такія, въ которыхъ соприкосновеніе элементовъ происходитъ только по линіямъ или точкамъ. При изслѣдованіи механизмовъ, составленныхъ изъ такихъ паръ, приходится держаться иного порядка изложенія, нежели при разсмотрѣніи низшихъ паръ. Тамъ, въ виду ограниченнаго числа самихъ паръ, можно было до извѣстной степени систематически исчерпать наиболѣе важныя ихъ комбинаціи, здѣсь же, при безграничномъ числѣ какъ самихъ паръ, такъ и ихъ комбинацій, нельзя произвести подобный систематическій обзоръ механизмовъ, какъ возможныхъ сочетаній изъ тѣхъ или другихъ винтовыхъ паръ. Является поэтому необходимость заранѣе положить въ основу изложенія болѣе или менѣе искусственную классификацію механизмовъ. а такъ какъ во всякомъ механизмѣ движеніе какого-либо звена дол-

жно передаваться въ опредѣленномъ видѣ другимъ звеньямъ, то на этомъ основаніи въ основу классификаціи можно положить именно *характеръ* передачи движенія; механизмъ здѣсь разсматривается, какъ преобразователь даннаго движенія въ желаемое для насъ. Преобразование это можетъ заключаться какъ въ измѣненіи направленія движенія, такъ и въ измѣненіи его скорости; при этомъ измѣненные факторы движенія (скорость и направленіе) могутъ оставаться или въ постоянномъ отношеніи съ основными, или въ переменномъ; можно, напримѣръ, передавать вращеніе отъ одной оси къ другой въ сторону, скажемъ, противоположную и съ отношеніемъ скоростей постояннымъ или переменнымъ по извѣстному заранее данному закону.

Далѣе можно различать, происходитъ ли передача при помощи непосредственнаго соприкосновенія двухъ звеньевъ, или при помощи промежуточныхъ звеньевъ. Такъ, напримѣръ, въ кривошипномъ механизмѣ вращательное движеніе кривошипа передается въ видѣ возвратнаго поступательнаго движенія ползуна (т.-е. отношеніе и скоростей и направленій здѣсь переменны), но не непосредственно, а при помощи промежуточнаго звена—шатуна.

Эти признаки характера передачи, т.-е. отношенія факторовъ движенія, а также отсутствіе или существованіе промежуточныхъ звеньевъ и положены въ основу классификаціи англійскаго ученаго Виллиса, коей мы, по примѣру проф. Д. С. Зернова, и будемъ придерживаться въ дальнѣйшемъ изложеніи.

Механизмы раздѣлены Виллисомъ на три класса. Къ *первому* отнесены тѣ, въ которыхъ передача происходитъ *непосредственнымъ соприкосновеніемъ*: ко *второму*—механизмы съ передачей движенія при помощи *промежуточныхъ твердыхъ* и къ *третьему*—*жидкихъ и гибкихъ тѣлъ*.

Каждый классъ дѣлится на 3 отдѣла, сообразно тому, каковы отношенія факторовъ движенія: въ *первомъ отдѣлѣ* отношенія направленій и скоростей—*постоянны*, во *второмъ*—отношеніе скоростей *переменно*, и въ *третьемъ*—*мѣняется и то, и другое отношеніе*.

Согласно такой классификаціи, прежде всего мы обратимся къ механизмамъ, передающимъ движеніе непосредственнымъ соприкосновеніемъ и съ постояннымъ отношеніемъ какъ между направленіями, такъ и между скоростями движеній.

Передача движенія непосредственнымъ прикосновеніемъ.

Отдѣлъ I. Отношенія между скоростями и направленіями постоянны.

Цилиндрическая фрикціонная передача.

Здѣсь важнѣйшими являются механизмы для передачи вращательнаго движенія между двумя какими-либо осями. Разсмотримъ, какъ можно устроить такую передачу въ случаѣ параллельныхъ осей. Пусть имѣются двѣ параллельныя оси A и B (фиг. 101). Пусть, далѣе, система, связанная съ осью A , вращается съ угловой скоростью ω , система же, связанная съ осью B , должна вращаться со скоростью ω_1 ; пусть, наконецъ, отношеніе этихъ скоростей не мѣняется, такъ что

$$\frac{\omega}{\omega_1} = n = \text{const} (1)$$

Вращенія около параллельныхъ осей суть движенія, параллельныя плоскости; поэтому разсмотримъ какое-либо плоское сѣченіе обѣихъ системъ, сдѣланное перпендикулярно къ направленію осей. Предположимъ, что направленія вращеній системъ A и B противоположны, т.-е. вращеніе системы A противъ часовой стрѣлки съ угловой скоростью ω должно передаться системѣ B вращеніемъ по часовой стрѣлкѣ и съ заданной угловой скоростью ω_1 , гдѣ $\omega : \omega_1 = n$, причемъ n заранее дано. Это число n называется *передаточнымъ числомъ*.

Предположимъ, что мы уже устроили систему, удовлетворяющую предъявленнымъ условіямъ, и теперь разсмотримъ, какъ движется система A относительно системы B . Для этого придаемъ обѣимъ системамъ вращательное движеніе около B со скоростью ω_1 , но направленное въ сторону, противоположную дѣйствительному вращенію системы B . Тогда, очевидно, система B придетъ въ покой, а получаемое абсолютное движеніе системы A и дастъ намъ ея движеніе относительно B .

Система A имѣетъ теперь 2 движенія: она вращается около оси B съ угловой скоростью ω_1 , а около оси A —со скоростью ω . Вслѣдствіе перваго изъ этихъ вращеній ось A будетъ описывать около оси B цилиндрическую поверхность и, слѣд., въ плоскомъ сѣченіи—кругъ центра B . Въ каждый данный моментъ оба вращенія—около A и

около B —можно замѣнить однимъ около нѣкоторой промежуточной оси P , положеніе которой относительно прежнихъ осей находится по общимъ правиламъ сложенія вращательныхъ движеній между параллельными осями: точка P будетъ дѣлить разстояніе между A и B на части, обратно пропорціональныя угловымъ скоростямъ, такъ какъ точка P должна удовлетворять соотношенію

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1}{n} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

вращеніе же около этой точки P будетъ, конечно, въ ту же сторону, что и оба составныхъ.

Такъ какъ разстояніе AB между осями не мѣняется, а отношеніе $AP:BP$ есть величина постоянная, какъ это ясно изъ равенства (2), гдѣ n величина постоянная, то и разстояніе точки P (въ плоскости сѣченія) отъ B будетъ постояннымъ:

$$BP = const = AB \frac{\omega}{\omega + \omega_1} = AB \frac{n}{n + 1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

Такимъ образомъ, неподвижной полоидой плоской системы A въ ея движеніи относительно B будетъ окружность центра B и радіуса BP .

Не трудно видѣть, что подвижной полоидой будетъ окружность центра A радіуса AP .

Такимъ образомъ, движеніе системы A относительно B приводится къ каченію одной окружности по другой въ плоскости сѣченія или, — въ пространствѣ, — къ каченію одного цилиндра по другому. Если мы выполнимъ въ дѣйствительности оба цилиндра такъ, чтобы они плотно прикасались другъ къ другу и не могли бы имѣть относительнаго скользянія, то при вращеніи одного изъ нихъ около A съ угловой скоростью ω , мы получимъ вращеніе другого около B

съ угловой скоростью ω_1 , гдѣ ω_1 выразится въ видѣ $\omega_1 = \frac{\omega}{n}$; на са-

момъ дѣлѣ, вслѣдствіе тренія цилиндра A будетъ увлекать за собою цилиндръ B , и, такъ какъ скользянія, по нашему предположенію, нѣтъ, то относительное движеніе цилиндровъ будетъ каченіемъ одного по другому, цилиндры же эти построены именно для даннаго опре-

дѣленнаго отношенія $\frac{\omega}{\omega_1}$. Пользуясь такимъ методомъ, мы можемъ,

слѣдовательно, устроить передачу вращательныхъ движеній съ постояннымъ отношеніемъ скоростей; передачи такого вида называются *цилиндрическими фрикціонными передачами*.

Итакъ, чтобы построить такую передачу между данными осями A и B при опредѣленномъ отношеніи и направленіи скоростей, надо раздѣлить разстояніе AB на части AP и PB , находящіяся между собою въ отношеніи, обратномъ отношенію скоростей, выполнить круг-

лые цилиндры радиусовъ AP и PB , насадить ихъ на оси A и B , устроить плотное соприкосновеніе между ними, для чего потребуется нажатіе ихъ другъ на друга, съ опредѣленнымъ усиліемъ, зависящимъ, конечно, отъ относительнаго тренія матеріаловъ, изъ которыхъ сдѣланы цилиндры; нажатіемъ этимъ мы и устраняемъ относительное скольженіе цилиндровъ.

Въ указанномъ видѣ передача примѣняется довольно часто; но такъ какъ при ея примѣненіи приходится считаться съ нажатіемъ осей другъ къ другу, часто совершенно нежелательнымъ, то эту фрикціонную передачу замѣняютъ зацѣпленіемъ.

Замѣна катящихся цилиндрическихъ поверхностей скользящими.

Представимъ себѣ въ системѣ A (фиг. 102) нѣкоторую цилиндрическую поверхность, профиль которой пусть будетъ MM , а въ системѣ B также цилиндрическую поверхность съ профилемъ NN , находящуюся въ соприкосновеніи съ первой; вращая A , мы при помощи давленія поверхности MM на поверхность NN можемъ заставить вращаться и систему B . Спрашивается теперь, какое соотношеніе должно существовать между этими двумя профилями, чтобы вращеніе около A съ угловой скоростью ω могло передаться B со скоростью ω_1 , при чемъ должно быть выполнено условіе: $\omega : \omega_1 = n$, гдѣ n —данное число.

Система B должна вращаться со скоростью ω_1 ; поэтому, если мы въ какой-нибудь моментъ придадимъ обѣмъ системамъ еще общее вращеніе около оси B со скоростью ω_1 , направленной, однако, въ противоположную сторону, то система B должна придти въ покой; система A , а, слѣд., и профиль MM , въ этотъ моментъ будутъ вращаться около полюса P , находимаго указаннымъ выше способомъ. Но профиль MM , по условію, долженъ находиться въ соприкосновеніи съ профилемъ NN , допустимъ, въ данный моментъ въ точкѣ K ; а такъ какъ, съ другой стороны, система B должна оставаться въ покой, то для того, чтобы при своемъ вращеніи около P этотъ профиль MM не стремился сдвинуть профиля NN , движеніе точки K его въ этотъ моментъ должно происходить *по касательной* къ профилю NN въ той же точкѣ K , а это будетъ выполнено, если нормаль къ обоимъ профилямъ въ точкѣ K будетъ проходить черезъ полюсъ P .

Приведенное разсужденіе остается справедливымъ для всякаго момента; поэтому отсюда вытекаетъ, что профиль NN долженъ служить огибающей профиля MM при движеніи системы A относительно B .

Итакъ, задаваясь какимъ-нибудь профилемъ MM въ системѣ A , для данной опредѣленной передачи мы найдемъ соотвѣтствующій ему, или, какъ говорятъ, *сопряженный* ему профиль въ системѣ B въ видѣ огибающей профиля MM при каченіи полоиды, связанной съ осью A , по полоидѣ, связанной съ B . Устроивъ далѣе цилиндрическія поверхности MM и NN съ направляющими, параллельными осямъ, мы приобрѣтемъ возможность передать вращеніе около оси A вращеніемъ около оси B съ желаемымъ отношеніемъ скоростей. При этомъ вращеніи поверхности MM и NN будутъ находиться въ соприкосновеніи, и общая нормаль ихъ въ точкѣ соприкосновенія пройдетъ черезъ полюсъ P , *вполнѣ и единственно* опредѣляемый на линіи AB для данной передачи.

Относительное движеніе профиля MM по NN при вращеніи обѣихъ системъ будетъ, какъ это мы знаемъ изъ свойствъ огибающихъ и огибаемыхъ, сопровождаться скольженіемъ. Такъ какъ угловая скорость вращенія MM около полюса P для данной передачи при вращеніяхъ въ противоположныя стороны системъ A и B выразится черезъ $(\omega + \omega_1)$, то скорость скольженія въ данный моментъ будетъ равна $p \cdot (\omega + \omega_1)$, гдѣ черезъ p обозначена длина нормали KP .

Не трудно, подобно вышеизложенному, разобрать и тотъ случай, когда вращенія около оси A и B должны оба совершаться въ одну сторону съ сохраненіемъ, по прежнему, постояннаго отношенія между угловыми скоростями: $\omega : \omega_1 = n$, гдѣ n дано.

Положимъ, что $\omega > \omega_1$; тогда полюсъ мгновеннаго вращенія въ движеніи A относительно B найдется по общимъ правиламъ въ точкѣ P на продолженіи линіи AB (въ отрѣзкѣ AB) въ сторону A (фиг. 103), при чемъ разстоянія PA и PB должны удовлетворять соотношенію:

$$PA : PB = \omega : \omega_1.$$

Полоидами будутъ здѣсь опять окружности центровъ A и B и радіусовъ AP и BP ; только одна изъ нихъ, A , будетъ находиться теперь внутри другой, B . Подобно тому, какъ мы это дѣлали въ случаѣ, передачи вращенія въ противоположную сторону, можно представить себѣ два профиля, связанные съ этими полоидами, выполнить по нимъ цилиндрическія поверхности, при помощи которыхъ и осуществится наша передача. Опять, какъ и въ предыдущемъ случаѣ профили должны находиться въ указанномъ соотношеніи, т.-е. одинъ изъ нихъ долженъ представлять собою огибающую положеній второго въ относительномъ движеніи полоиды, принадлежащей первому профилю, по полоидѣ, принадлежащей второму. Разница будетъ здѣсь только въ скорости относительнаго скольженія профилей, и не трудно видѣть, что въ этомъ случаѣ она выразится въ видѣ $p \cdot (\omega - \omega_1)$, гдѣ черезъ p мы попрежнему обозначили отрѣзокъ об-

шей нормали отъ полюса до точки прикосновенія; вторымъ же факторомъ произведенія взята разность $(\omega - \omega_1)$, — разность потому, что относительная скорость вращенія здѣсь равна разности (а въ первомъ случаѣ—суммѣ) угловыхъ скоростей обѣихъ системъ.

Графическое построеніе профиля, сопряженнаго данному.

Разсмотримъ теперь вообще, какъ по данному профилю находится графически профиль, ему сопряженный. Построеніе, какъ это слѣдуетъ изъ приведенныхъ выше соображеній, сводится къ отысканію огибающей по данной огибаемой, и его можно выполнить по нѣсколькимъ методамъ, точнымъ или приближеннымъ; ниже мы приводимъ два очень удобные метода, достаточно точные и несложные; одинъ изъ нихъ предложенъ *Poncelet*, а другой — *Reuleaux*. Основой какъ для того, такъ и для другого служить свойство огибающей имѣть съ огибаемой общую нормаль въ точкѣ соприкосновенія, проходящую черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія.

Способъ Poncelet. Пусть профиль M принадлежитъ полюидѣ O (фиг. 104); вращенія системъ указаны стрѣлками, и вращеніемъ O противъ стрѣлки часовъ требуется передать вращеніе O_1 по стрѣлкѣ. Послѣдовательность точекъ соприкосновенія полюиды O въ движеніи этой системы относительно O_1 будетъ, очевидно, идти по стрѣлкѣ часовъ, т.-е. точками соприкосновенія будутъ послѣдовательно служить, напр., точки 1, 2, 3, 4 и т. д. Соотвѣтствующія имъ точки полюиды O_1 найдемъ, отложивъ дуги:

$$\smile P_2' = \smile P_2, \smile 2'1' = \smile 21, \smile P_3' = \smile P_3, \smile 3'4' = \smile 34$$

и т. д., что мы можемъ сдѣлать достаточно точно циркулемъ, если только дуги возьмемъ достаточно малыми, что и дастъ намъ возможность принимать ихъ за отрѣзки прямыхъ. Опустимъ теперь изъ точекъ (1, 2, 3 ...) нормали на профиль M ; этотъ профиль M мы можемъ разсматривать, какъ огибающую окружностей, описанныхъ изъ точекъ 1, 2, 3 ... радіусами, равными нормалямъ, и, значитъ, касающихся профиля M ; но нормали, опущенныя на искомую огибающую профиля M изъ точекъ 1', 2', 3', ... должны быть равны нормалямъ изъ точекъ 1, 2, 3 ... на M ; слѣдовательно, искомая огибающая представляетъ собою огибающую окружностей, описанныхъ изъ точекъ 1', 2', 3', ... радіусами, равными соотвѣтственнымъ нормалямъ профиля M . Чѣмъ больше мы возьмемъ точекъ 1, 2, 3, ..., а, слѣд., и точекъ 1', 2', 3', ..., т.-е., иными словами, чѣмъ ближе эти точки другъ къ другу, тѣмъ точнѣе можно построить сопряженный профиль, и при достаточномъ числѣ взятыхъ точекъ, а также при пра-

вильности построения нормалей, откладывания равных дугъ, дуги окружностей, описанных изъ центровъ $1', 2', 3'$ и др. какъ бы сольются въ одну непрерывную кривую.

Само собою разумѣется, что для построения безразлично, будутъ ли полоиды окружностями или какими-нибудь другими кривыми.

Огибающую можно вычертить еще по точкамъ: такъ, напр., величина нормали изъ точки I намъ извѣстна; значитъ, извѣстна величина нормали изъ точки I' на искомую огибающую; стоитъ теперь только опредѣлить направлѣніе этой нормали, и мы получимъ одну изъ точекъ огибающей; направлѣніе же мы можемъ получить на основаніи того соображенія, что нормаль изъ точки (I) на M дѣлаетъ съ касательной въ точкѣ (I) такой же уголъ, какой должна дѣлать нормаль изъ точки (I') на искомую огибающую M_1 съ касательной въ точкѣ (I') полоиды O_1 , — обѣ касательныя и обѣ нормали должны совпасть въ тотъ моментъ, когда обѣ полоиды коснутся одна другой въ точкѣ (I, I') .

Способъ Reuleaux, излагаемый ниже, особенно удобенъ для разбираемаго нами теперь случая передачи вращенія *съ постояннымъ отношеніемъ скоростей*, слѣд., при полоидахъ—*окружностяхъ*; огибающая строится здѣсь по точкамъ. Способъ этотъ основанъ на отысканіи мѣста точекъ соприкосновенія профиля M (фиг. 105) съ сопряженнымъ ему профилемъ въ системѣ O_1 при вращеніи обѣихъ системъ, одной около O , другой около O_1 — съ требуемымъ отношеніемъ скоростей, т.-е. при каченіи полоидъ O и O_1 другъ по другу.

Возьмемъ на полоидѣ O какую-нибудь точку X и опустимъ изъ нея на профиль M нормаль XU . Въ тотъ моментъ, когда при вращеніи системъ O и O_1 профиль M коснется точкой Y соотвѣтствующаго ему профиля системы O_1 , нормаль XU , какъ мы знаемъ, пройдетъ черезъ P , т.-е. точка X придетъ въ точку P линіи OO_1 , но точка Y , какъ связанная неразрывно съ системой O , все время будетъ находиться на окружности центра O и радіуса OY , и, слѣд., мы найдемъ положеніе точки Y въ моментъ соприкосновенія профилей на пересѣченіи окружностей: одной—изъ O радіуса OY , и другой—изъ P радіуса XU . Именно въ этой точкѣ пересѣченія этихъ двухъ окружностей, точкѣ (yy_1) , и совпадетъ точка Y профиля M съ соотвѣтствующей ей точкой Y_1 профиля M_1 , сопряженнаго съ M .

Въ свою очередь точка Y_1 будетъ во все время находиться на окружности центра O_1 и радіуса O_1Y_1 ; точкѣ X въ первомъ ея положеніи соотвѣтствуетъ въ системѣ O_1 точка X_1 , отстоящая (считая по полоидѣ O_1) на дугу $PX_1 = \text{дугѣ } PX$; отъ этой точки X_1 искомая точка Y_1 находится на разстояніи, равномъ XU . Поэтому начальное положеніе точки Y_1 , соотвѣтствующее первому положенію точки Y , мы найдемъ въ точкѣ пересѣченія окружностей: одной изъ O_1

радіуса $O_1(yu_1)$, а другой — изъ X_1 радіуса, равнаго XU . Пусть это будетъ точка Y_1 .

Эта точка Y_1 есть одна изъ точекъ искомага профиля M_1 , сопряженнаго заданному M , соответствующая одной изъ точекъ этого послѣдняго — точкѣ Y .

Поступая подобнымъ же образомъ, мы для каждой точки профиля M найдемъ соответствующую ей точку профиля M_1 , да, кромѣ того, опредѣлимъ мѣсто ихъ совпаденія при вращеніи системъ O и O_1 , т.-е. опредѣлимъ геометрическое мѣсто точекъ взаимнаго соприкосновенія профилей при движеніи обѣихъ системъ; это геометрическое мѣсто представится въ видѣ нѣкоторой кривой $(yu_1)P(kk_1)$. Кривая эта носитъ названіе *линии зацепленія*.

Способъ *Reuleaux*, хотя и болѣе сложный, чѣмъ способъ *Poncelet*, даетъ возможность, кромѣ непосредственнаго нахождения точекъ сопряженнаго профиля M_1 , еще найти совокупность послѣдовательныхъ точекъ соприкосновенія обоихъ профилей. Не трудно убѣдиться, что точка соприкосновенія на профилѣ, принадлежащемъ системѣ *ведущей*, будетъ постепенно *удаляться* отъ центра (оси) вращенія этой системы; и, наоборотъ, на профилѣ *ведомой* системы точка прикосновенія будетъ *приближаться* къ центру вращенія системы. Если теперь въ ведущей системѣ мы возьмемъ какой-нибудь произвольный профиль, то, примѣняя къ нему сказанное, получимъ возможность судить о томъ, какая часть взятаго профиля можетъ служить намъ для передачи, — стоитъ лишь при этомъ помнить послѣдовательность точекъ соприкосновенія какъ полоидъ, такъ и профилей.

На практикѣ для этихъ профилей M берутъ по большей части нѣкоторыя опредѣленные кривыя, напр., циклическія, эвольвентныя и др.

Циклическіе профили обладаютъ однимъ весьма любопытнымъ свойствомъ, а именно, — *если для одного профиля взята циклическая кривая, то сопряженнымъ профилемъ будетъ служить также циклическая кривая*. Это есть такъ-называемая *теорема Камуса*, которую мы и докажемъ ниже въ самомъ общемъ видѣ.

Какая-либо *циклическая* кривая есть, какъ мы знаемъ, траекторія точки, связанной съ какой-нибудь окружностью, катящейся по другой окружности. Въ данномъ случаѣ за профиль ведущей системы можно взять циклическую кривую, образованную при каченіи какой-либо окружности по полоидѣ ведущей системы; отыскивая затѣмъ сопряженный профиль въ ведомой системѣ, намъ придется убѣдиться, что этотъ сопряженный профиль окажется также циклической кривой, образованной тою же точкой той же окружности, но при каченіи этой послѣдней уже по второй полоидѣ. Мы обобщимъ эту теорему тѣмъ, что вмѣсто окружностей возьмемъ три какія-нибудь

кривыя. Двѣ изъ нихъ, O и O_1 (фиг. 106), пусть служатъ полоидами двухъ системъ; пусть, далѣе, нѣкоторая третья кривая O_2 катится одинъ разъ по полоидѣ O_1 , другой — по O . Нѣкоторая точка X , связанная съ кривой O_2 , при каченіи O_2 по O , опишетъ въ системѣ полоиды O нѣкоторую опредѣленную кривую; эту кривую — траекторію точки X — мы можемъ построить по способу *Poncelet*, — а именно: отмѣчаемъ на кривой O_2 рядъ точекъ $A, B, \dots$ служащихъ послѣдовательными точками соприкосновенія кривой O_2 при каченіи ея по O ; соединяемъ эти точки съ нашей точкой X ; далѣе на кривой O находимъ точки $A_1, B_1, \dots$, соотвѣтствующія точкамъ $A, B, \dots$, для чего придется отложить дуги: $\smile PA_1$, равную $\smile PA$, $\smile A_1B_1$, равную $\smile AB$, и т. д.; затѣмъ изъ полученныхъ точекъ $A_1, B_1, \dots$, описываемъ окружности радіусами $AX, BX, \dots$ (такъ какъ нормали на траекторію точки X изъ точекъ $A_1, B_1, \dots$ должны быть равны AX, BX); наконецъ, подыскиваемъ огибающую этихъ окружностей, — она и будетъ траекторіей точки.

Но если теперь мы станемъ отыскивать для этой кривой ея огибающую при каченіи O по O_1 , то, какъ и выше, должны будемъ отложить дуги $PA_2, A_2B_2, \dots$, соотвѣтственно равныя дугамъ $BA_1, A_1B_1, \dots$ (эти послѣднія, въ свою очередь, равны дугамъ $PA, AB, \dots$), затѣмъ изъ полученныхъ точекъ $A_2, B_2, \dots$, какъ изъ центровъ, описать окружности радіусами, равными нормалямъ на траекторію изъ точекъ $A_1, B_1, \dots$, т.-е. радіусами AX, BX , и проч., и, наконецъ, вычертить огибающую этихъ окружностей. Очевидно, что построение этой искомой огибающей вполнѣ тождественно съ построеніемъ траекторіи точки X при каченіи O_2 по O .

Слѣдовательно, вообще, если мы имѣемъ въ системѣ O нѣкоторую кривую, какъ траекторію точки X при каченіи кривой O_2 , связанной съ этой точкой, по полоидѣ системы O_1 , то огибающей этой траекторіи при движеніи системы O_1 относительно системы O будетъ траекторія точки X , образованная при каченіи той же кривой O_2 , но уже по полоидѣ, принадлежащей системѣ O . Соотношеніе это носитъ названіе теоремы *Камуса*.

Примѣняя эту теорему къ нашему частному случаю круговыхъ полоидѣ, находимъ, что если въ системѣ O_1 (ведущей) мы взяли за профиль кривую AX (фиг. 107), образованную точкой нѣкоторой окружности O_2 при каченіи ея по O_1 , т.-е. *гипоциклоиду*, то сопряженнымъ ему профилемъ будетъ *эпициклоида* BX , образованная точкой X при каченіи O_2 по O .

Выполненіе на чертежѣ гипо- и эпициклоидъ можетъ быть ведено или по методу *Poncelet*, или же по точкамъ. Чтобы найти, напр., точку гипоциклоиды, соотвѣтствующую прикосновенію окружности O_2 (фиг. 108) съ окружностью O_1 въ точкѣ A первой, откладываемъ, какъ всегда, дугу PA_1 , равную дугѣ PA ; затѣмъ изъ точки A_1 , какъ

изъ центра, описываемъ окружность радіусомъ AX и ищемъ, на какомъ разстояніи отъ центра O_1 будетъ находится точка X въ моментъ соприкосновенія окружностей точками A и A_1 ; такъ какъ въ этотъ моментъ точка A окружности O_2 будетъ имѣть то же значеніе, что теперь точка P , то искомое разстояніе найдемъ, отойдя отъ P по окружности O_2 на дугу PY , равную AX , т.-е. заставляя изъ центра P дугу радіусомъ PY , равнымъ AX . Точка Y находится на такомъ разстояніи отъ центра O_1 , на какомъ, очевидно, будетъ точка X въ моментъ соприкосновенія окружностей точками A и A_1 ; проводя поэтому изъ центра O_1 окружность радіусомъ O_1Y , найдемъ въ пересѣченіи ея съ окружностью, описанною изъ A_1 радіусомъ

$$A_1X_1 = AX,$$

искомую точку X_1 гипоциклоиды; прямая же A_1X_1 будетъ служить нормалью къ гипоциклоидѣ въ этой точкѣ.

Сравнивая это построеніе съ построеніемъ, даннымъ *Reuleaux* для нахожденія *линии зацѣпленія*, видимъ, что точка X_1 будетъ соприкасаться съ соотвѣтствующей точкой сопряженнаго профиля (при вращеніи системъ O и O_1) какъ разъ въ точкѣ Y , что указываетъ намъ на то обстоятельство, что въ *случаѣ циклическаго профиля линіей зацѣпленія будетъ служить сама вспомогательная окружность O_2* .

Совершенно такъ же чертимъ и эпициклоиду, служащую сопряженнымъ профилемъ.

Эвольвентный профиль. Эвольвентой окружности, какъ извѣстно, называется траекторія точки, лежащей на касательной къ окружности при каченіи этой касательной по окружности. Если касательная AB (фиг. 109) катится по окружности O , то точка B описываетъ кривую, называемую *эвольвентой* (линія B_0BB_1). Въ каждый данный моментъ касательная служитъ, конечно, нормалью къ эвольвентѣ, и притомъ, по самому способу образованія кривой, разность между длинами радіусовъ векторовъ эвольвенты P_1B_1 и PB равна дугѣ PP_1 окружности O ; такимъ образомъ длина $PB = \text{дугѣ } PB_0$.

Какую-нибудь другую окружность, concentричную съ первой, касательная пересѣкаетъ всегда подъ однимъ и тѣмъ же угломъ, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться изъ равенства треугольниковъ OPC и OP_1C_1 , и такъ какъ $CP = C_1P_1$, то разность между длинами C_1B_1 и CB равна дугѣ PP_1 . Обратно мы можемъ замѣтить, что если данная кривая имѣетъ нормальми прямыя, пересѣкающія окружность подъ постояннымъ угломъ, то такая кривая служитъ эвольвентой для круга, concentричнаго съ первымъ. Дѣйствительно, прямыя, пересѣкающія окружность подъ постояннымъ угломъ, являются непременно касательными къ окружности, concentричной съ данной, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться изъ чертежа; а, слѣд., всѣ нормали кри-

вой служить касательными къ нѣкоторой окружности. Взявъ какую-нибудь точку B кривой и ея нормаль PB , мы, очевидно, можемъ заставить точку B проходить послѣдовательно всѣ точки кривой, катя нормаль по окружности.

Возьмемъ, переходя къ зацепленію, въ системѣ O_1 окружность O_2 , concentричную съ полоидой O_1 (фиг. 110), а за ведущій профиль возьмемъ эвольвенту окружности O_2 . Нормали къ этой эвольвентѣ пересѣкаютъ полоиду O_1 подѣ однимъ и тѣмъ же угломъ. Въ моментъ соприкосновенія точки B съ соотвѣтствующей точкой профиля нормаль AB должна будетъ пройти черезъ точку P соприкосновенія полоиды, и, слѣдовательно, она совпадаетъ съ касательной PT , проведенной изъ точки P къ окружности O_2 , и такъ какъ это справедливо для какой угодно нормали, то *линіей зацепленія будетъ служить здѣсь касательная изъ P къ окружности O_2* . Отсюда слѣдуетъ, что въ профилѣ, сопряженномъ съ профилемъ BB_0 , нормали къ нему будутъ пересѣкать соотвѣтственную полоиду также подѣ постояннымъ угломъ, равнымъ, конечно, первому; другими словами, этотъ сопряженный профиль будетъ эвольвента окружности, concentричной съ полоидой O и касающейся PT , т.-е. *кривая, образованная точкой E при каченіи касательной PT_1 по окружности O_3* .

Цилиндрическія зубчатые колеса.

Перейдемъ теперь къ дѣйствительному выполненію передачи. Профили цилиндрическихъ тѣлъ, при помощи которыхъ мы устраиваемъ передачу, имѣютъ въ дѣйствительности опредѣленную длину въ радіальномъ направленіи, находясь частью между окружностью полоиды и центромъ, частью—внѣ полоиды. Чтобы устроить непрерывную передачу, придется взять рядъ такихъ цилиндрическихъ тѣлъ съ образующими, параллельными осямъ, и съ профилями, имѣющими найденныя выше соотношенія. Тогда мы получимъ рядъ зубцовъ, принадлежащихъ той и другой системѣ (фиг. 111, 112). Если мы мысленно проведемъ полоиду, принадлежащую системѣ O (въ дѣйствительности, конечно, невыполняемую), то, какъ сказано, она раздѣлитъ каждый зубецъ на двѣ части (въ радіальномъ направленіи): на n_1h_1 и h_1m_1 (фиг. 112); первая изъ нихъ, лежащая внѣ полоиды, называется *головкой* зубца, вторая—*основаніемъ* или *ножкой* зубца. Окружность радіуса Op , гдѣ p —крайняя внѣшняя точка рабочаго профиля, принято называть окружностью *вершинъ*; точно такъ же окружность, проходящую черезъ крайнія внутреннія точки,—окружностью *основаній*. Длина дуги ab измѣряетъ *толщину* зубца.

Очертанія зубцовъ обыкновенно бываютъ симметричны по отношенію къ радіусу, проходящему черезъ середину дуги ab , хотя, соб-

ственно говоря, если движеніе совершается всегда въ одну сторону, по правиламъ, изложеннымъ выше, слѣдуетъ строить только рабочій профиль, напр., $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\epsilon\zeta$, $\eta\xi$, и т. д.; стороны же нерабочія могутъ быть ограничены и другими какими-нибудь кривыми, лишь бы не затруднялась правильная смѣна зубцовъ и правильность зацепленія вообще.

Размѣръ ac , считая по полоидѣ, называется *шириною впадины*. Расстояние между рабочими профилями пары смежныхъ зубцовъ, считая опять по полоидѣ, называется *шагомъ зацепленія*; такъ, напр., дуга $a_1\delta_1$ есть шагъ зацепленія. Шагъ зацепленія у обоихъ колесъ долженъ быть одинаковъ, иначе мы не получимъ непрерывной передачи съ желаемымъ отношеніемъ скоростей.

Какъ не трудно видѣть, δ_1 и δ , a_1 и a , . . . , должны быть соответственными точками обѣихъ полоидъ, а потому дуга ad равна дугѣ $a_1\delta_1$ и т. д.

Назовемъ черезъ z и z_1 соответственно числа зубцовъ той и другой системъ, а радіусы полоидъ черезъ R и R_1 . Тогда, какъ мы знаемъ,

$$R : R_1 = \omega_1 : \omega$$

или

$$R\omega = R_1\omega_1.$$

Если шагъ зацепленія равенъ t , то получаемъ

$$2\pi R = zt$$

и

$$2\pi R_1 = z_1 t$$

откуда

$$\frac{R}{R_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega} \dots \dots \dots (1)$$

называя же числа оборотовъ въ минуту черезъ n и n_1 , имѣемъ:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60},$$

въ виду чего ур—ніе (1) перепишется еще разъ такъ:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{n_1}{n} \dots \dots \dots (2)$$

откуда видно, что числа зубцовъ обратно пропорціональны числамъ оборотовъ.

Размѣры зубцовъ выражаются обыкновенно въ доляхъ шага зацепленія t ; такъ, всю высоту зуба (фиг. 112) берутъ равной $0,7t$, при чемъ высота головки, $n_1 h_1$, берется равной $0,3 t$, а ножки, $h_1 m_1$, — $0,4 t$; толщина зуба берется различно, — въ металлическихъ передачахъ она берется въ $\frac{19}{40} t$, такъ что ширина впадины достигнетъ

$\frac{2t}{40}$ t ; длина b зубца, т.-е. размѣръ его въ осевомъ направленіи, берется различно, въ зависимости отъ разныхъ условій, часто берется равнымъ $2t$ и больше (подробности указаны въ курсѣ деталей машинъ).

Дугу, на которую прокатятся одна по другой полоиды, пока одна пара зубцовъ находится въ зацѣпленіи, принято называть *дугой зацѣпленія*. Очевидно, что *дуга зацѣпленія* должна быть больше шага зацѣпленія, иначе произошло бы, что одна пара зубцовъ уже вышла изъ зацѣпленія, а другая еще не вошла; передача въ этомъ случаѣ не могла бы быть непрерывной.

Для плавности передачи и для уменьшенія изнашиванія зубцовъ выгодно, чтобы одновременно въ зацѣпленіи находилось возможно большее число зубцовъ—требованіе, часто невыполнимое; чтобы судить о достоинствѣ передачи съ этой стороны, нужно умѣть опредѣлять, сколько паръ зубцовъ будутъ находиться одновременно въ зацѣпленіи. Зная профили и шагъ зацѣпленія, не трудно рѣшить эту задачу. Для этого сначала найдемъ, гдѣ началось соприкосновеніе пары зубцовъ, т.-е. гдѣ крайняя точка X профиля на ведомомъ колесѣ (фиг. 113) вступила въ соприкосновеніе съ соотвѣтствующей ей точкой на ведущемъ колесѣ; если линія зацѣпленія уже начерчена, напр., по методу *Reuleaux* (на чертежѣ это линія rPq), то, проводя изъ центра O окружность радіуса OX (окружность вершинъ), въ пересѣченіи ея съ линіей зацѣпленія найдемъ точку X_1 ,—положеніе точки X въ моментъ начала соприкосновенія; замѣчая, кромѣ того, что профиль XP своего положенія относительно полоиды O не мѣняетъ, ибо онъ связанъ съ ней неизмѣнно, заключаемъ, что въ указанный моментъ точка P занимала положеніе p_1 , гдѣ

$$p_1X_1 = PX;$$

итакъ, теперь мы знаемъ, что точка P профиля, приходящаяся на полоидѣ, въ моментъ начала соприкосновенія находилась въ p_1 , а въ такомъ случаѣ дуга p_1P представитъ собою часть дуги зацѣпленія за время прикосновенія пары зубцовъ передъ линіей центровъ O_1O .

Указанную часть дуги зацѣпленія можно, впрочемъ, опредѣлить еще проще, проведя въ точкѣ X профиля PX нормаль Xp къ нему до пересѣченія съ соотвѣтствующей полоидой въ точкѣ p ; эта точка p въ моментъ начала зацѣпленія придется на линіи центровъ въ точкѣ P , потому что въ этотъ моментъ линія Xp , какъ общая нормаль въ точкѣ касанія огибающей и огибаемой, должна пройти черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія, т.-е. черезъ точку P ; какъ мы говорили раньше, точка профиля PX , совпадающая теперь съ P , въ этотъ моментъ придется въ p_1 , а если такъ, то $\triangle PXp = \triangle P_1X_1P$ (по двумъ сторонамъ: $X_1p_1 = XP$, $X_1P = Xp$, и высотѣ изъ X и X_1 на O); значитъ хорды p_1P и Pp равны, а поэтому равны и дуги p_1P и Pp .

Подобнымъ же образомъ найдемъ конецъ зацепленія, проводя изъ O_1 окружность вершинъ для другого колеса O_1 до пересѣченія съ линіей зацепленія въ точкѣ X_1' ; найдемъ также и здѣсь, что за линіей центровъ дугой зацепленія служитъ нѣкоторая опредѣленная дуга Pp_2 , такимъ образомъ, вся дуга зацепленія равна суммѣ дугъ Pp_1 и Pp_2 одной полоиды O_1 т.-е. равна дугѣ p_1p_2 . Теперь можно узнать, сколько разъ шагъ зацепленія содержится въ дугѣ зацепленія; частное и укажетъ намъ, сколько зубцовъ находится одновременно въ соприкосновеніи. Стараются, обыкновенно, достигнуть того, чтобы въ соприкосновеніи было одновременно, по крайней мѣрѣ, *две пары* зубцовъ, т.-е. чтобы дуга зацепленія была не меньше двухъ шаговъ зацепленія.

Циклическое зацепленіе. Мы знаемъ, что въ этомъ случаѣ линіей зацепленія будетъ служить дуга вспомогательной окружности. Вспомогательная окружность O_2 (фиг. 114), можетъ намъ служить, очевидно, только для образованія головки зуба колеса O_1 , давая для него *эпициклоиду*, и ножки зуба колеса O ,—давая *гипоциклоиду*. Чтобы получить головку второго зуба и ножку перваго, беремъ еще одну вспомогательную окружность O_3 , которая при каченіи по O дастъ *эпициклоиду*—профиль головки зуба колеса O , а при каченіи по O_1 ,—*гипоциклоиду*—профиль, служащій, по теоремѣ *Камуса*, профилемъ, сопряженнымъ эпициклоидѣ; по этой гипоциклоидѣ мы и очертимъ ножку зуба колеса O_1 . Колесо O , какъ видно изъ чертежа, ведущее; поэтому соприкосновеніе какой-нибудь пары зубцовъ начинается въ тотъ моментъ, когда профиль ведомаго колеса, PX_1 , вступаетъ своей крайней точкой X_1 на линію зацепленія, т.-е. на окружность O_2 . Проводя поэтому изъ O_1 окружность вершинъ радіусомъ O_1X_1 до пересѣченія съ O_2 передъ линіей центровъ въ точкѣ X_1' , найдемъ, такимъ образомъ, начало соприкосновенія.

Такъ какъ профиль X_1P есть эпициклоида, образованная каченіемъ O_2 по O_1 , то положеніе точки P профиля въ моментъ начала соприкосновенія найдемъ, отложивъ по полоидѣ O_1 дугу Pp_1 , равную дугѣ PX_1' . Дуга Pp_1 есть часть *души* зацепленія до *линии центровъ*, и, какъ видимъ, она равна части *линии зацепленія* до *линии центровъ*.

Подобнымъ же образомъ мы найдемъ конецъ зацепленія въ точкѣ X' окружности O_3 , проведя окружность вершинъ для второго колеса радіусомъ OX до пересѣченія съ окружностью O_3 , а затѣмъ, какъ и выше, опять найдемъ, что часть дуги зацепленія Pp_2 для соприкосновенія за линіей центровъ равна дугѣ PX_1' , такъ что получаемъ, что, *въ случаѣ циклическаго зацепленія дуга зацепленія равна линіи зацепленія*.

При данномъ шагѣ зацепленія, величина котораго, какъ мы говорили уже, обусловливается требованіями прочности на изломъ и

проч., и при данной высотѣ головки зубца (а эта высота, какъ известно, обыкновенно выражается въ доляхъ шага), для плавности зацепленія выгодна возможно большая длина линіи $X_1'PX'$, такъ какъ эта линія равна дугѣ зацепленія; длина же этой линіи будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше радіусы вспомогательныхъ окружностей O_2 и O_3 , какъ это можно легко видѣть непосредственно изъ чертежа. Однако, здѣсь является другое неудобство: мы, на основаніи предыдущаго, знаемъ, что если діаметръ вспомогательной окружности равенъ радіусу полоиды, то гипоциклоида, по которой очерчено основаніе зубца у колеса O (фиг. 115), обращается въ этомъ случаѣ въ прямую линію, совпадающую съ радіусомъ большей окружности, проходящемъ черезъ разсматриваемую точку меньшей; если очертанія зубца будутъ симметричны по отношенію къ радіусу, проходящему черезъ середину толщины зубца, то, какъ это ясно видно изъ самаго чертежа, въ такомъ случаѣ получается *утоненіе* зубца въ его основаніи, что, конечно, вредно отзывается на прочности зубца. Еще большее утоненіе мы получимъ, если возьмемъ *діаметръ вспомогательной окружности больше радіуса начальной*, какъ это можно непосредственно видѣть, вычерчивая для этого случая гипоциклоиду. Кромѣ того, здѣсь является еще одно неудобство: *дѣйствительно работать приходится только очень малой части ножки зубца*.

Чтобы отыскать вообще, какая часть ножки (или головки) одного зубца работаетъ съ соотвѣтствующей головкой (или основаніемъ) другого, поступаемъ такъ: находимъ, какъ раньше, точку X_1' линіи зацепленія, гдѣ начинается соприкосновеніе зубцовъ (фиг. 116) (профили на чертежѣ изображены соприкасающимися на линіи центровъ въ точкѣ P); та точка профиля зубца колеса O , которая соприкасалась съ крайней точкой X_1 сопряженнаго профиля, въ моментъ начала зацепленія, теперь, когда профили касаются другъ друга въ P , занимаетъ, очевидно, положеніе X_2 , гдѣ X_2 есть точка пересѣченія окружности радіуса OX_1' съ профилемъ XPY въ его настоящемъ положеніи. Часть PX_2 профиля и есть та часть ножки зубца X , которая работала со всей головкой зубца X_1 за время отъ начала соприкосновенія въ точкѣ X_1' до соприкосновенія на линіи центровъ въ точкѣ P .

Эта часть, какъ видимъ, тѣмъ меньше, чѣмъ больше радіусъ окружности O_2 ; на части PX_2 , какъ видимъ, сосредоточивается все передаваемое колесомъ O давленіе за время работы передъ линіей центровъ. Поэтому при небольшой длинѣ PX_2 естественно ожидать быстрого изнашиванія (истиранія) зубца въ этой части для тѣхъ передачъ, гдѣ имѣемъ дѣло съ болѣе или менѣе значительными давленіями, какъ это и бываетъ въ большей части случаевъ машиностроенія.

Подобнымъ же образомъ можно найти ту часть профиля у

зубца X_1 колеса O_1 , которая работает съ головкой зубца колеса O , и она также была бы тѣмъ меньше, чѣмъ больше радіусъ вспомогательной окружности O_3 . Отсюда становится понятнымъ, почему въ обыкновенномъ машиностроеніи избѣгаютъ брать діаметръ вспомогательной окружности больше радіуса начальной, внутри которой она должна катиться для образованія профиля.

Въ случаѣ если при выбранномъ шагѣ зацепленія (выборъ его, какъ мы уже указывали, зависитъ обыкновенно отъ условій прочности передачи) дуга зацепленія получается очень короткая, такъ что находится въ соприкосновеніи только пара зубцовъ, наиболѣе рациональнымъ слѣдуетъ признать здѣсь увеличеніе радіусовъ полоидъ, если только ничто не мѣшаетъ намъ увеличить разстояніе между осями передачи. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда приходится дорожить мѣстомъ, какъ, напр., во многихъ грузоподъемныхъ машинахъ, или когда усилія, передаваемые колесами, не особенно значительны, берутъ діаметры вспомогательныхъ окружностей и больше радіусовъ начальныхъ окружностей. Тогда, замѣтивъ, что часть профиля X_2Y (фиг. 117), совершенно не работаетъ, а потому можетъ быть очерчена по любой кривой, лишь бы она не мѣшала свободному движенію вершины X_1 сопряженнаго зубца, можемъ основаніе зубца 2 нѣсколько усилить. Мы сказали, что кривая, по которой можно очертить зубецъ, должна быть такова, чтобы не мѣшала свободному движенію вершины X_1 ; а для этого указанная кривая должна не заходить за геометрическое мѣсто вершинъ X_1 въ движеніи системы O_1 относительно O . Это геометрическое мѣсто легко построить слѣдующимъ образомъ: откладываемъ по обѣимъ полоидамъ O и O_1 дуги: $\cup P_1 = \cup P_1'$, $\cup 12 = \cup 1'2'$, $\cup 23 = \cup 2'3'$ и т. д., затѣмъ изъ точекъ 1, 2, 3.... описываемъ дуги радіусами X_11' , X_12' , X_13'; огибающая этихъ дугъ и будетъ траекторіей точки X_1 въ относительномъ движеніи,—она и будетъ искомымъ геометрическимъ мѣстомъ; легко видѣть, что она должна пройти черезъ точки X_2 и X_1 . Такимъ образомъ точка X_1 за линію X_2X_1 не зайдетъ, а слѣдовательно, начиная отъ точки X_2 , мы имѣемъ возможность вмѣсто крутой кривой профиля, X_2Y , взять любую, болѣе пологую, напр., X_2C , лишь бы она вся лежала внѣ кривой X_2X_1 . Очерчивая теперь зубецъ по кривой X_2C , мы, какъ легко видѣть изъ сравненія усиленнаго такимъ образомъ зубца съ прежнимъ неусиленнымъ, значительно увеличиваемъ его прочность, нисколько въ то же время не рискуя правильностью зацепленія.

Нужно также замѣтить, что иногда бываетъ нежелательнымъ брать вспомогательныя окружности слишкомъ малаго радіуса, потому, что это можетъ повести къ тому, что мы не будемъ въ состояніи выполнить нашу передачу.

Дѣйствительно, пусть намъ требуется устроить передачу съ дан-

нымъ шагомъ зацѣпленія (величина его, какъ мы уже указывали, опредѣляется изъ расчетовъ прочности зубцовъ) и данными полоидами, радіусы которыхъ опредѣлятся изъ величины шага и числа зубцовъ (изъ урн—іа $2\pi R = zt$); обыкновенно знаемъ также и высоту головки зубца, находящуюся, какъ извѣстно, въ опредѣленномъ соотношеніи съ величиною шага, или же задаемся величиной дуги зацѣпленія, всегда не меньшей длины шага зацѣпленія; въ этомъ послѣднемъ случаѣ при выбранныхъ вспомогательныхъ окружностяхъ мы можемъ опредѣлить высоту головки зубца, и именно слѣдующимъ образомъ: откладываемъ на вспомогательныхъ окружностяхъ O_2 и O_3 такія двѣ дуги PK и PK_1 (фиг. 118), чтобы онѣ въ суммѣ дали дугу зацѣпленія и чтобы точка K отъ полоиды O_1 , а точка K_1 отъ полоиды O находились на одинаковомъ разстояніи, если эти разстоянія считать по соотвѣтствующимъ радіусамъ полоидъ O и O_1 ; такимъ образомъ $KX_1 = K_1X$; построивъ теперь дугу K_1Y эпициклоиды каченіемъ O_3 по O , найдемъ, очевидно, положеніе рабочаго профиля зубца ведущаго колеса O въ моментъ конца зацѣпленія; построивъ затѣмъ эпициклоиду KY_1 , опредѣлимъ положеніе профиля зубца ведомаго колеса O_1 въ моментъ начала зацѣпленія. Отрѣзки KX_1 и K_1X будутъ высотами головокъ зубцовъ; зацѣпленіе начнется въ точкѣ K и окончится въ точкѣ K_1 .

Очевидно, что дуга XU , равно какъ и X_1Y_1 , должна быть меньше половины толщины зубца, потому что зубецъ обыкновенно бываетъ симметриченъ относительно радіуса, проведеннаго черезъ середину толщины его, а головка не оканчивается остриемъ, а если бы XU вышло больше половины толщины зубца, что, какъ видно изъ чертежа, можетъ случиться при маломъ радіусѣ окружности O_3 , то заданное зацѣпленіе невозможно было бы выполнить съ такою вспомогательною окружностью. Подобнымъ образомъ можно было бы рѣшить вопросъ при данной высотѣ головки (и данномъ, конечно, шагѣ); въ этомъ случаѣ пришлось бы повѣрить, достаточна ли величина дуги зацѣпленія.

Иногда, хотя и очень рѣдко въ обыкновенномъ машиностроеніи, встрѣчаются случаи *неодинаковой высоты головокъ* на томъ и другомъ колесѣ; въ такихъ случаяхъ намъ даются или высоты зубцовъ (ихъ головокъ), или же даются части дуги зацѣпленія до и послѣ линіи центровъ (каждая, конечно, отдѣльно); рѣшеніе этого вопроса будетъ вестись по вышеприведеннымъ указаніямъ.

Можетъ встрѣтиться и отсутствіе головки на одномъ колесѣ (и, значить, ножки на другомъ), слѣдовательно, профилированіе будетъ ведено здѣсь *при одномъ вспомогательномъ кругѣ* (объ этомъ см. ниже) или несимметричное строеніе зубца; въ каждомъ такомъ отдѣльномъ случаѣ вопросъ о возможности зацѣпленія рѣшить не трудно.

Для полученія возможности зацѣпленія, когда мѣстомъ дорожатъ, а радіусовъ полоидъ увеличить нельзя, является, какъ мы видѣли, необходимость брать вспомогательныя окружности съ діаметрами, большими радіусовъ полоидъ; а въ нѣкоторыхъ грузоподъемныхъ машинахъ встрѣчается даже *предѣльный случай* циклическаго зацѣпленія, а именно случай, когда *вспомогательныя окружности совпадаютъ съ полоидами*; въ этомъ случаѣ профилемъ основанія зубца является *точка самой полоиды* сопряженнымъ же съ нимъ профилемъ, профилемъ головки зубца другого колеса будетъ эпициклоида, образованная этой точкой при каченіи полоиды по другой полоидѣ. При этомъ способѣ профилированія возможнымъ бываетъ осуществленіе зацѣпленія съ весьма малымъ числомъ зубцовъ, доходящимъ, напр., до четырехъ на меньшемъ колесѣ. На чертежѣ (фиг. 119) схематически представлено такое зацѣпленіе. PY_1 есть эпициклоида, образованная точкой окружности O при каченіи ея по O_1 ; PX —эпициклоида, описанная точкой полоиды O_1 при каченіи ея по O ; двѣ эти эпициклоиды и дадутъ профили обѣихъ головокъ у сопряженныхъ зубцовъ; основанія же зубцовъ обратились здѣсь въ *точки* полоидъ. Проводя окружность вершинъ для того и другого колеса, найдемъ линію зацѣпленія K_1PK ; на части KP точка P зубца XC , лежащая на полоидѣ O_1 , работаетъ съ эпициклоидой Y_1P ; далѣе, на части PK_1 ; работаетъ головка PX того же зубца XC съ точкой P зубца Y_1C_1 . Основанія зубцовъ, какъ профили не работающіе, могутъ быть ограничены произвольными кривыми, лишь бы эти кривыя, какъ объ этомъ мы уже говорили выше, не заходили за соотвѣтственныя траекторіи точекъ Y_1 и X , т.-е. не вызывали защемленія зубцовъ. (Какъ мы знаемъ, траекторіи эти суть траекторіи ихъ въ относительномъ движеніи какъ O_1 по O , такъ и O по O_1).

Легко видѣть, что въ такомъ зацѣпленіи будетъ имѣть мѣсто сильное изнашиваніе зубцовъ около точекъ P , такъ какъ за все время зацѣпленія передъ линіей центровъ давленіе на зубецъ колеса O сосредоточивается въ одной (или почти въ одной) точкѣ; то же самое имѣетъ мѣсто для зубца колеса O_1 за время зацѣпленія за линіей центровъ. Благодаря этому обстоятельству зубцы быстро теряютъ правильность своей формы, что и принуждаетъ насъ по возможности избѣгать такихъ зацѣпленій и употреблять ихъ только въ исключительныхъ случаяхъ.

Мало употребительно въ машиностроеніи профилированіе съ *однимъ вспомогательнымъ кругомъ и прямолинейнымъ профилемъ на одномъ колесѣ*. Въ этомъ случаѣ вспомогательная окружность O_3 (фиг. 120) имѣетъ діаметръ PO_1 , равный радіусу полоиды O_1 . Колесо O_1 имѣетъ только рабочее основаніе зубца, которое тогда профилируется, конечно, по радіусу PO_1 ; колесо же O имѣетъ рабочій профиль головки—*эпициклоиду* PX . Проводя окружности вершинъ для колеса O до пересѣ-

ченія съ O_3 , допустимъ, въ точкѣ K_1 , получаемъ линію зацѣпленія PK_1 ; мы видимъ, что въ этомъ случаѣ, при ведущемъ колесѣ O , зацѣпленіе все будетъ происходить за линіей центровъ. Проводя далѣе окружность центра O_1 и радіусъ O_1q_1 до пересѣченія съ профилемъ PY_1 въ точкѣ C , найдемъ рабочую часть PC профиля PY_1 ; осталъная же часть CY_1 работать не будетъ совсѣмъ.

Рѣдко употребляется теперь и такъ называемое *цѣвочное зацѣпленіе*, представляющее частный случай циклическаго. Здѣсь за профиль, обыкновенно на ведомомъ колесѣ принимаютъ окружность нѣкотораго радіуса PK_1 , такъ что зубцы на этомъ колесѣ будутъ представлять собою круглые цилиндры, называемые *цѣвками* (фиг. 121). Профиль на ведущемъ колесѣ O найдется, какъ огибающая окружности PK_1 при каченіи полоиды O_1 по O . При этомъ каченіи точка P —центръ окружности PK_1 , опишетъ эпициклоиду PE , и огибающей будетъ поэтому кривая, параллельная эпициклоидѣ PE и отстоящая отъ нея на разстояніи радіуса PK_1 ; обозначимъ эту кривую черезъ AX .

Линію зацѣпленія мы построимъ обыкновеннымъ пріемомъ; такъ, чтобы найти, гдѣ будетъ имѣть мѣсто соприкосновеніе точки A зубца съ цѣвкой, проводимъ въ точкѣ A зубца нормаль къ его профилю до пересѣченія съ эпициклоидой PE въ точкѣ B , или, иначе говоря, отыскиваемъ на PE такое положеніе центра круга PK_1 , при которомъ послѣдній касается профиля въ точкѣ A ; теперь находимъ дѣйствительное положеніе цѣвки въ моментъ соприкосновенія ея съ точкой A профиля, проведя изъ центра O полоиды окружность радіуса OB до пересѣченія съ полоидой O_1 въ точкѣ B_1 ; дѣйствительное же положеніе точки A въ этотъ моментъ найдемъ, описавъ изъ O окружность радіуса OA до пересѣченія съ окружностью цѣвки въ точкѣ A_1 , которая и будетъ такимъ образомъ одной изъ точекъ линіи зацѣпленія. Дугу зацѣпленія можемъ найти, если проведемъ изъ крайней точки X профиля зубца нормаль къ профилю до пересѣченія ея съ полоидой въ точкѣ K ; тогда PK и будетъ дугою зацѣпленія; эта послѣдняя должна быть больше шага зацѣпленія, сообразно чему и выбираютъ высоту зубца. Зацѣпленіе такого рода употребляется теперь рѣдко; ведущимъ дѣлаютъ зубчатое колесо.

Профилированіе можно выполнить точно или по методу *Poncelet*, или, какъ было указано, по точкамъ.

По методу *Poncelet* построеніе выполняется такъ: пусть имѣются полоиды O и O_1 (фиг. 122),—онѣ опредѣляются изъ условій передачи и изъ расчета прочности зубцовъ; пусть, далѣе, мы уже выбрали вспомогательныя окружности O_2 и O_3 ; какъ мы знаемъ, для полученія при точкѣ P профиля головки зубца у ведущаго колеса O_1 мы должны катить окружность O_2 по O_1 ; не вычерчивая каждый разъ положенія окружности O_2 , мы поступаемъ такъ: намѣчаемъ на O_2 рядъ точекъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ достаточно близкихъ другъ къ другу;

затѣмъ дуги $Ra, a\beta, \beta\gamma, \gamma\delta \dots$ откладываемъ послѣдовательно по полюидѣ O_1 , такъ что получимъ рядъ точекъ $a_1, b_1, c_1, \dots$ такихъ, что дуги $Ra_1, a_1b_1, b_1c_1, \dots$ будутъ соотвѣтственно равны дугамъ $Ra, a\beta, \beta\gamma, \dots$; далѣе, изъ точекъ $a_1, b_1, c_1 \dots$ описываемъ дуги окружностей соотвѣтственно радіусами $Ra, R\beta, R\gamma \dots$ огибающая этихъ окружностей и дастъ намъ искомый профиль PX_1 головки зубца; если точки $a, \beta, \gamma \dots$ выбраны достаточно близко, то дуги сливаются въ одну непрерывную кривую.

Профиль основанія зубца у колеса O найдемъ, отложивъ теперь по полюидѣ O въ ту же сторону дуги равныя $Ra, a\beta, \beta\gamma, \gamma\delta \dots$ и описавъ изъ концовъ $a, b, c \dots$ этихъ дугъ тѣми же радіусами $Ra, R\beta, R\gamma \dots$ окружности, получимъ такимъ образомъ искомый профиль PY .

Взявъ теперь по окружности O_3 въ другую сторону рядъ точекъ $I, II, III, IV, \dots$ откладываемъ на обѣихъ полюидахъ, начиная отъ точки P , въ ту же сторону, гдѣ лежатъ точки $I, II, III, \dots$ дуги, равныя $PI, I-II, II-III, \dots$ и изъ концовъ этихъ дугъ, т.-е. изъ точекъ $1, 2, 3 \dots I_1, 2_1, 3_1 \dots$, описываемъ дуги окружностей радіусами $PI, PII, PIII \dots$ совершенно такъ же, какъ это мы дѣлали для точекъ $a_1, b_1, c_1 \dots$. Такимъ образомъ мы получаемъ профили для головокъ зубцовъ колеса O и для основанія зубцовъ колеса O_1 .

Проводя теперь окружность вершинъ для колеса O , а также для колеса O_1 , найдемъ на окружностяхъ O_3 и O_2 точки K и K_1 —начало и конецъ зацепленія; при этомъ нужно всегда помнить, что на ведущемъ колесѣ точка соприкосновенія удаляется отъ центра, а на ведомомъ приближается къ центру. Ограничивъ профиль въ высоту, въ ту и другую стороны отъ полюиды, откладываемъ на полюидахъ толщину зубца и строимъ симметрично относительно радіуса профиль, ограничивающій зубецъ съ другой стороны; затѣмъ, по шагу зацепленія, вычерчиваемъ и другіе зубцы.

Вычерчиваніе профиля по точкамъ менѣе удобно, но также достаточно просто. Для этого проводимъ черезъ тѣ же точки $a, \beta, \gamma, \dots$ окружности изъ центра O_1 (если хотимъ найти головку профиля зубца O_1 —фиг. 123) и на нихъ находимъ точки профиля, засѣкая соотвѣтственно изъ точекъ $a_1, b_1, c_1, \dots$ дуги окружностей радіусами $Ra, R\beta, R\gamma, \dots$, какъ было указано выше. Такимъ образомъ, получаемъ точки профиля: $A, B, C, \dots$

Указанные способы построенія профилей неудобны, однако, тѣмъ, что требуютъ большой траты времени, поэтому, ради быстроты вычерчиванія, удобнѣе будетъ подобрать одну или двѣ окружности, которыя могли бы съ достаточной точностью замѣнить дугу эпициклоиды или гипоциклоиды. Особенно удобенъ для этого способъ *Unwin'a*, въ которомъ дуга эпициклоиды съ хорошимъ приближеніемъ

замѣняется дугой окружности. Профиль головки зубца у колеса O_1 есть эпициклоида, ограниченная въ высоту окружностью вершинъ; ищемъ теперь такую окружность, которая имѣла бы съ этой эпициклоидой общую точку P и касалась бы ее, кромѣ того, въ точкѣ, лежащей отъ полоиды O_1 на разстояніи, равномъ $\frac{2}{3}$ высоты головки зубца, считая это разстояніе по радіусу полоиды. На этомъ основаніи проводимъ изъ O_1 окружность O_3 , имѣющую радіусъ, меньшій радіуса окружности вершинъ на $\frac{1}{3}$ высоты головки (фиг. 124). Пересѣченіе этой окружности съ вспомогательной окружностью O_2 дасть точку A . Когда при каченіи O_2 по O_1 , точка P окружности O_2 придетъ на окружность O_3 , точка A совпадаетъ съ полоидой O_1 . Слѣдовательно, мы прямо можемъ найти точку N эпициклоиды, отстоящую отъ полоиды O_1 на $\frac{2}{3}$ высоты головки, если отложимъ на полоидѣ O_1 отъ точки P дугу PA_1 , равную PA , и изъ точки A_1 засѣчемъ дугою радіуса PA точку N на окружности O_3 . Теперь остается подыскать окружность, проходящую черезъ P и касающуюся эпициклоиды въ точкѣ N . Такъ какъ NA_1 есть нормаль къ эпициклоидѣ въ точкѣ N , то центръ такой окружности лежитъ гдѣ-либо на этой прямой NA_1 . Теперь мы путемъ пробъ отыскиваемъ на линіи NA_1 центръ (о) окружности, проходящей чрезъ P и N ; этотъ центръ можно было бы найти непосредственно, возставивъ въ срединѣ отрѣзка PN къ нему перпендикуляръ и продолживъ его до пересѣченія съ NA_1 , но упомянутый способъ пробъ на практикѣ оказывается гораздо удобнѣе. Не трудно непосредственно убѣдиться, что дуга PNM этой окружности съ достаточной точностью замѣняетъ эпициклоиду.

Совершенно такимъ же образомъ находимъ приближенную дугу окружности и для основанія зубца: опять ищемъ окружность, имѣющую съ гипоциклоидой общую точку P и, кромѣ того, касающуюся ея въ точкѣ C , лежащей отъ полоиды, считая по радіусу, на разстояніи двухъ третей всей высоты основанія зубца.

Точное вычерчиваніе эпи- и гипоциклоидъ обыкновенно не выполняются,—эти кривыя съ большою степенью приближенія замѣняются дугами круговъ, приведенныхъ въ способъ *Unvin*'а, и этимъ способомъ обыкновенно пользуются всегда для вычерчиванія упомянутыхъ профилей.

Замѣтимъ, наконецъ, что для очертаній другихъ зубцовъ колеса, благодаря ихъ симметріи, найти центры подходящихъ окружностей *Unvin*'а очень легко.

Во многихъ машинахъ, какъ, напр., въ машинахъ для обработки металловъ, часто встрѣчается необходимость имѣть подъ рукою цѣлый рядъ (или серію) колесъ, въ которомъ каждое колесо должно правильно зацѣпляться съ любымъ другимъ колесомъ этого ряда,

что дастъ намъ возможность составлять тѣ или другія комбинаціи зубчатыхъ колесъ, а, слѣд., осуществлять ту или другую передачу. Не трудно видѣть, что въ такомъ случаѣ всѣ вспомогательныя окружности, при помощи которыхъ произведены профили, должны быть одинаковаго радіуса, и кромѣ того шагъ зацепленія также долженъ быть одинаковъ.

Если бы вспомогательныя окружности были не одинаковы, то вышло бы, что какое-либо колесо A , у котораго профили произведены двумя неодинаковыми окружностями, могло бы сцепляться съ колесомъ B , если профили послѣдняго образованы тѣми же окружностями, равно какъ и съ колесомъ C , имѣющимъ профили того же происхожденія; но колеса B и C между собою сцепляться не могли бы, такъ какъ, по предположенію, окружность, производившая профиль головки колеса B (и C), разнится отъ окружности, производившей профиль ножки колеса C (и B), а между тѣмъ для зацепленія B съ C нужно (по теоремѣ *Камуса*), чтобы окружность, производящая профиль головки B , производила своимъ каченіемъ сопряженный профиль основанія у зубца C .

Въ такихъ смѣнныхъ колесахъ за производящую окружность берутъ окружность съ діаметромъ, нѣсколько меньшимъ радіуса меньшаго колеса; это обстоятельство представляетъ, однако, то неудобство, что въ случаѣ работы большихъ колесъ дуга зацепленія остается сравнительно очень малой.

Колеса съ внутреннимъ зацепленіемъ и циклическими профилями профилируются по тѣмъ же правиламъ, что и колеса внѣшняго зацепленія: выбираютъ опять двѣ вспомогательныя окружности, O_2 и O_3 (фиг. 125), и образуютъ каченіемъ O_2 по O основаніе зубца колеса O , а каченіемъ O_2 по O_1 —профиль головки у колеса O_1 . Точно такъ же окружность O_3 дастъ профиль головки у колеса O и основаніе—у колеса O_1 . Само собою разумѣется, что въ этомъ случаѣ точка прикосновенія одновременно удаляется или приближается къ центру на обоихъ профиляхъ. Изъ самаго способа произведенія профилей видно, что здѣсь *ипоциклоида работаетъ съ гипоциклоидой и эпициклоида—съ эпициклоидой*. Линіей зацепленія будутъ попрежнему служить части вспомогательныхъ окружностей, XP и PY , которыя мы находимъ, проводя окружности вершинъ для того и другого колеса; при этомъ всегда нужно помнить послѣдовательность точекъ соприкосновенія вспомогательной окружности при каченіи по полоидамъ, а также и то, что эти точки будутъ послѣдовательными точками соприкосновенія самихъ полоидъ; дуга зацепленія здѣсь такъ же равна линіи зацепленія и такъ же должна быть больше шага зацепленія.

Эвольвентное зацепленіе. Въ эвольвентномъ зацепленіи линіей

защѣпленія, какъ это мы уже видѣли, является прямая, касательная къ вспомогательнымъ окружностямъ. За все время работы давленіе одного зубца на другой постоянно направлено по этой прямой.

Въ практикѣ машиностроенія установилось требованіе вообще устраивать защѣпленіе такъ, чтобы давленіе зубцовъ другъ на друга не отклонялось значительно отъ общей касательной къ полоидамъ. Въ циклическомъ защѣпленіи это требованіе, какъ извѣстно, мы можемъ до извѣстной степени выполнить, взявъ возможно большія вспомогательныя окружности. Здѣсь, въ эвольвентномъ защѣпленіи, требованіе это сводится къ тому, чтобы прямая защѣпленія была наклонена къ касательной къ полоидамъ подъ небольшимъ угломъ; обыкновенно берутъ уголъ въ 15° . При данныхъ полоидахъ выборомъ этого угла вполне опредѣляются вспомогательныя окружности, а слѣдовательно и профили зубцовъ.

Построеніе, такимъ образомъ, выполняется такъ: черезъ точку P (фиг. 126) прикосновенія полоидъ проводимъ прямую $NP N_1$ подъ угломъ въ 75° къ линіи центровъ OO_1 ; далѣе, изъ точекъ O и O_1 опускаемъ на эту прямую перпендикуляры ON и $O_1 N_1$, которые и будутъ радіусами вспомогательныхъ окружностей. Точка P при каченіи касательной PN по окружности ON дастъ профиль зубца колеса O , а при каченіи PN_1 по окружности $O_1 N_1$ — сопряженный ему профиль зубца колеса O_1 . Проведя окружности вершинъ зубцовъ для того и другого колеса, найдемъ начало и конецъ защѣпленія въ пересѣченіяхъ K и H этихъ окружностей съ прямой $NP N_1$. Далѣе находимъ рабочія части профилей, проводя черезъ K окружность радіуса OK до пересѣченія съ профилемъ $kPeC$ въ точкѣ e и окружность радіуса $O_1 H$ до пересѣченія съ профилемъ $K_1 Pe_1 C_1$ въ точки e_1 . Рабочими будутъ части kPe перваго профиля и $k_1 Pe_1$ второго. Остальныя части, какъ мы уже говорили, могутъ быть очерчены произвольными кривыми.

Изъ подобія треугольниковъ ONP и $O_1 NP$ видимъ, что радіусы ON и $O_1 N_1$ вспомогательныхъ окружностей относятся между собою какъ радіусы полоидъ; но для радіусовъ полоидъ PO и PO_1 имѣемъ соотношеніе (обозначая PO черезъ r , а $PO_1 \dots r_1$).

$$\omega r = \omega_1 r_1 \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ ω и ω_1 суть соотвѣтственныя угловыя скорости; обозначая теперь радіусы вспомогательныхъ окружностей черезъ ρ и ρ_1 , гдѣ $ON = \rho$, а $O_1 N_1 = \rho_1$, будемъ имѣть

$$r : r_1 = \rho : \rho_1 = \omega_1 : \omega,$$

такъ что ур—ніе (1) приметъ теперь видъ:

$$\rho \omega = \rho_1 \omega_1 \dots \dots \dots (2)$$

Представимъ себѣ окружности ON и $O_1 N_1$ неразрывно связан-

ными съ полоидами O и O_1 ; вмѣсто того, чтобы катить касательную PN по окружности ON для образованія профиля, мы можемъ вращать эту окружность вмѣстѣ съ системой O , и тогда точка нити, намотанной на окружность ON и натянутой въ направленіи PN , дастъ на этой системѣ очертаніе эвольвентнаго профиля.

Представимъ теперь нить продолженной и намотанной другимъ концомъ на окружности O_1N_1 ; вращаемъ систему O со скоростью ω , а систему O_1 — со скоростью ω_1 ; получаемъ каченіе полоидъ другъ по другу и, кромѣ того, сматываніе (или наматываніе) нити съ окружности ON и наматываніе (или сматываніе) на окружность O_1N_1 ; при этомъ за время t съ окружности ON сматается кусокъ нити длиною въ $\omega \cdot \rho \cdot t$, и, какъ показываетъ ур—ніе (2), столько же наматается на окружность O_1N_1 . Точка этой нити, описывая на системѣ O профиль зубца, описываетъ въ то же время на системѣ O_1 сопряженный ему профиль, и путь ея вдоль нити за время t , равный $\omega \cdot \rho \cdot t$, будетъ частью линіи зацѣпленія за время t ; но за тотъ же промежутокъ времени точка полоиды опишетъ дуги $\omega \cdot r \cdot t$, а такъ какъ $\rho = r \cos \alpha$, гдѣ α есть уголъ наклона $NP N_1$ къ касательной къ полоидамъ TT_1 , равный у насъ 15° , то получаемъ, что часть линіи зацѣпленія за время t равна части дуги зацѣпленія за то же время, умноженной на косинусъ угла между линіей зацѣпленія и касательной къ полоидамъ. То, что справедливо относительно части дуги зацѣпленія за время t , очевидно, будетъ справедливо и для всей дуги зацѣпленія; поэтому, называя черезъ Y длину линіи зацѣпленія, а черезъ S — длину дуги зацѣпленія, можемъ написать:

$$S \cos \alpha = Y \dots \dots \dots (3)$$

Эвольвентный профиль легко вообще вычертить или точно по методу *Poncelet* или по точкамъ; но и здѣсь, ради экономіи во времени, употребляютъ приближенное вычерчиваніе профиля аналогично вычерчиванію циклическихъ профилей. Раздѣляютъ часть высоты зубца (фиг. 127), считая отъ вспомогательной окружности до окружности вершинъ, на три равныя части ($ab = bc = cd = \frac{1}{3} ad$), берутъ одну изъ точекъ дѣленія, отстоящую отъ вспомогательной окружности на разстояніи двухъ такихъ частей, въ данномъ случаѣ это будетъ точка c , и проводятъ изъ нея касательную cT къ вспомогательной окружности. Отрѣзокъ cT дѣлятъ на четыре равныя части, и тогда одна изъ точекъ дѣленія, точка X , отстоящая отъ точки T на одну такую часть, принимается за центръ круга радіуса Xc ; дугою psc этого круга и замѣняютъ эвольвенту. Часть профиля зубца, лежащая внутри вспомогательной окружности (часть pe), можетъ быть очерчена произвольно, лишь бы не было препятствія движенія вершины сопряженнаго зубца.

Эвольвентное зацепленіе имѣетъ ту особенность, что колеса съ эвольвентными зубцами можно нѣсколько отодвинуть одно отъ другого, и зацепленіе все-таки останется правильнымъ, если длина дуги зацепленія остается достаточной. Дѣйствительно, измѣненіе разстоянія между центрами полоидъ имѣло бы своимъ слѣдствіемъ только измѣненіе наклона линіи зацепленія къ линіи центровъ и увеличеніе радіусовъ полоидъ; но такъ какъ вспомогательныя окружности остались тѣ же, то отношеніе между радіусами полоидъ осталось прежнее, а слѣдовательно и передача осталась та же. Подобнаго свойства циклическое зацепленіе не имѣетъ, что и представляетъ преимущество эвольвентнаго зацепленія передъ циклическимъ и особенное его удобство: *эвольвентное зацепленіе не требуетъ особенно точной установки.*

Однако, эвольвентное зацепленіе, въ свою очередь, имѣетъ свою невыгодную сторону, выясненную изъ опытовъ Бахомъ. Въ этомъ зацепленіи зубцы ограничены выпуклыми профилями, значитъ, *приходится работать выпуклой поверхности по выпуклой же*, и, какъ не трудно видѣть, соприкосновеніе въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто на меньшей поверхности (вслѣдствіе упругости матеріала и сминанія поверхностей соприкосновеніе никогда не происходитъ по линіи), не-жели тогда, когда *выпуклая поверхность работаетъ съ вогнутой*, это послѣднее имѣетъ мѣсто именно въ циклическомъ зацепленіи (фиг. 128—129... $\alpha\beta < \gamma\delta$).

Въ этомъ и кроется причина большаго изнашиванія зубцовъ эвольвентнаго зацепленія сравнительно съ циклическимъ при всѣхъ остальныхъ равныхъ условіяхъ.

Опыты Баха надъ деревянными зубьями показываютъ, что эвольвентный профиль постепенно, путемъ истиранія, обращается въ профиль, близкій къ циклическому. На фиг. 130 представленъ одинъ такой зубъ; у него все время работала только одна сторона *AB*, и оказалось, что послѣ нѣкотораго промежутка времени рабочая сторона *AB* приняла форму циклическаго очертанія, а нерабочая—сохранила эвольвентное (пунктиромъ выше *B* указана граница первоначальнаго эвольвентнаго профиля *BA*). Поэтому циклическое зацепленіе слѣдуетъ признать болѣе умѣстнымъ, особенно тамъ, гдѣ имѣетъ мѣсто болѣе или менѣе значительная угловая или окружная скорость колесъ.

Внутреннее эвольвентное зацепленіе не представляетъ для вычерчиванія никакихъ трудностей; вся разница состоитъ въ томъ, что обѣ вспомогательныя окружности будутъ лежать по одну сторону касательной къ полоидамъ (фиг. 131). Начало и конецъ зацепленія,

а также соотвѣтственныя величины рабочихъ частей профилей находятся по общимъ правиламъ.

На основаніи приведенныхъ соображеній не представитъ никакихъ затрудненій вычерчиваніе зацѣпленія зубчатой полосы съ колесомъ. Это зацѣпленіе можетъ быть выполнено или съ циклическимъ профилемъ, или съ эвольвентнымъ. Въ первомъ случаѣ выбираемъ вспомогательныя окружности O_2 и O_3 (фиг. 132) и строимъ циклическіе профили на общихъ основаніяхъ. У зубцовъ полосы профилями будутъ служить простыя циклоиды, образованныя при каченіи вспомогательныхъ окружностей по прямой O_1O_1 , въ которую обратилась здѣсь полоида O_1 .

Иногда (теперь рѣдко) на полость вмѣсто зубцовъ прилаживаютъ цѣвки. Можно устроить въ данномъ случаѣ и эвольвентное зацѣпленіе, для чего, подобно тому, какъ это мы дѣлали раньше, проводимъ прямую PN (фиг. 133) подъ угломъ въ 75° къ линіи центровъ; профилемъ зуба колеса будетъ эвольвента окружности N ; для полосы же соотвѣтствующая вспомогательная окружность слилась съ прямой NP (центръ окружности удалился въ безконечность); поэтому вмѣсто эвольвенты здѣсь будетъ прямая AB , перпендикулярная къ линіи NP , такъ что профили зубчатой полосы получаютъ здѣсь прямолинейное очертаніе.

Заканчивая этимъ вопросъ о цилиндрическихъ колесахъ, замѣтимъ, что въ практикѣ машиностроенія установились нѣкоторыя требованія относительно наименьшаго допустимаго числа зубьевъ. Теоретическое рѣшеніе этого вопроса въ отдѣльныхъ случаяхъ особыхъ трудностей не представляетъ, но, понятно, достаточно полнымъ быть не можетъ, почему здѣсь и приходится руководствоваться данными и правилами практики. Вообще избѣгаютъ брать малое число зубцовъ, и упомянутыя выше передачи съ четырьмя зубцами на маломъ колесѣ встрѣчаются только въ видѣ исключенія въ нѣкоторыхъ небольшихъ грузоподъемныхъ машинахъ. Для передачи съ малой скоростью (въ ручныхъ воротахъ, кранахъ и проч.) не берутъ меньше 11 зубцовъ на меньшемъ колесѣ; въ передачахъ приводныхъ, — отъ паровыхъ машинъ и проч., — не берутъ меньше 24 зубцовъ.

Что касается передаточнаго числа, т.-е. отношенія чиселъ зубцовъ, то вообще нужно замѣтить, что тамъ, гдѣ рѣчь идетъ о передачахъ болѣе или менѣе значительнаго постояннаго усилія, выгодно, чтобы зубцы какъ можно скорѣе приработались другъ къ другу, а это будетъ тогда, когда работать другъ съ другомъ придется однимъ и тѣмъ же зубцамъ. Въ этомъ смыслѣ выгодны передачи $1:1$, $1:2$, $1:3...$; совершенно же невыгодны такія, какъ $11:17$, или, напр., $23:31$ и т. п.

Но если рѣчь идетъ о передачѣ усилія, періодически мѣняющагося, когда, напр., за одинъ оборотъ усиліе будетъ переходить черезъ *maximum* и *minimum*, тогда, очевидно, простыя передачи, каковы, напр., $1:2$, $1:4$..., невыгодны, потому что, въ случаѣ простыхъ отношеній, однимъ и тѣмъ же зубцамъ пришлось бы испытывать постоянно наибольшія усилія, а другимъ—наименьшія. Для болѣе равномернаго изнашиванія зубцовъ, по крайней мѣрѣ, у того колеса, которому передается усиліе, выгоднѣе брать менѣе простыя отношенія; напр., $2:5$, $3:7$ и т. д.

Коническая фрикціонная и зубчатая передача.

Мы изложили вопросъ о передачѣ вращенія между параллельными осями; допустимъ теперь, что требуется передать вращеніе отъ оси A —другой оси B , пересѣкающейся съ первой, положимъ, въ точкѣ O (фиг. 134). Пусть вращеніе около оси A совершается съ угловою скоростью ω , вращеніе же около B должно совершаться съ угловою скоростью ω_1 , причемъ отношеніе $\omega:\omega_1$ есть нѣкоторое постоянное число. Допустимъ, наконецъ, что оба вращенія направлены въ противоположныя стороны.

Разсмотримъ и здѣсь, подобно тому, какъ это мы дѣлали при разборѣ передачи между параллельными осями, движеніе системы A относительно B ; для этого попрежнему придаемъ обѣмъ системамъ скорость вращенія около оси B , равную ω_1 , но направленную въ сторону, противоположную дѣйствительному вращенію около B . Тогда система A будетъ обладать сложнымъ движеніемъ: ось A будетъ вращаться около B съ угловою скоростью ω_1 , а система A будетъ вращаться около оси A со скоростью ω . Въ каждый данный моментъ оба вращенія можно представить замѣненнымъ однимъ, положеніе оси мгновеннаго вращенія и угловая скорость котораго найдутся по извѣстнымъ правиламъ механики.

Замѣтимъ, что вращенія графически обыкновенно представляютъ въ видѣ векторовъ, величина которыхъ даетъ въ извѣстномъ масштабѣ угловыя скорости, а направленіе вращенія опредѣляютъ такимъ образомъ, что наблюдатель, смотря съ конца вектора на его начало видитъ вращеніе совершающимся по часовой стрѣлкѣ. Какъ извѣстно, въ такомъ случаѣ вращенія около пересѣкающихся осей складываются по правилу параллелограмма движенія.

Система A , какъ было уже указано выше, въ каждый данный моментъ участвуетъ въ двухъ вращеніяхъ: во-первыхъ—около оси A , и во-вторыхъ около оси B , направленныхъ въ одну и ту же сторону, такъ какъ вращеніе системы B около ея оси было, по предположенію, направлено въ сторону, противоположную вращенію около A .

Составное вращеніе, замѣняющее въ данный моментъ эти два вращенія, мы найдемъ, если отложимъ отъ точки O (фиг. 135) два вектора OA и OB въ направленіи осей вращенія, представляющіе по своей величинѣ въ заданномъ масштабѣ угловыя скорости ω и ω_1 ; построимъ на нихъ параллелограммъ $OACB$ и проведемъ діагональ его OC ,—она и дастъ намъ направленіе оси и величину угловой скорости составного вращенія.

Уголъ между осями OA и OB предполагается неизмѣннымъ, поэтому ось A , въ движеніи системы A относительно B , опишетъ круглый конусъ. Въ каждый данный моментъ мы можемъ построениемъ параллелограмма опредѣлить положеніе оси OC составного вращенія (оси мгновеннаго вращенія); при этомъ мы всегда имѣемъ соотношеніе:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\sin AOC}{\sin COB} = \text{const} (1)$$

откуда при постоянствѣ угла AOB слѣдуетъ постоянство угла COB ; иными словами, ось мгновеннаго вращенія будетъ лежать на кругломъ конусѣ, описанномъ діагональю OC около оси OB .

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что ось мгновеннаго вращенія въ движеніи системы B относительно A будетъ лежать на конусѣ, описанномъ тою же діагональю OC около OA . Такимъ образомъ движеніе системы A относительно B можно представить каченіемъ (безъ скольженія) второго конуса по первому.

Передачу въ данномъ случаѣ мы можемъ осуществить подобно тому, какъ это мы сдѣлали въ цилиндрической передачѣ, а именно: задавшись направленіями осей и отношеніемъ угловыхъ скоростей (или чиселъ оборотовъ), строимъ на направленіяхъ осей параллелограммъ со сторонами, пропорціональными угловымъ скоростямъ; находимъ діагональ этого параллелограмма и выполняемъ два конуса, одинъ,—описанный этой діагональю около одной оси, и другой,—около другой оси; заставляемъ эти конусы плотно прижиматься другъ къ другу (вершины ихъ должны все время оставаться совпадающими), и тогда, вращая одинъ конусъ съ угловою скоростью ω , получимъ вращеніе другого съ угловою скоростью ω_1 . Возьмемъ какую-либо точку K соприкосновенія этихъ конусовъ (фиг. 136). Разсматривая ее, какъ принадлежащую конусу A , мы выразимъ ея линейную скорость въ видѣ $KE \cdot \omega$, гдѣ $KE \perp$ оси OA ; при отсутствіи скольженія конусовъ другъ по другу ту же скорость должна имѣть точка K , если разсматривать ее, какъ принадлежащую конусу B и предположивъ, что этотъ второй конусъ вращается съ какой-либо угловою скоростью ω' , мы найдемъ равенство

$$KE \cdot \omega = KH \cdot \omega' (2)$$

или

$$\frac{KE}{KH} = \frac{\omega'}{\omega} (3)$$

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ $OЕК$ и $ОКН$, имѣющихъ общую гипотенузу $ОК$, принимая во вниманіе ур—ніе (3), получаемъ:

$$\frac{KE}{KN} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin AOC}{\sin COB} \dots \dots \dots (4)$$

Сравнивая полученное ур—ніе (4) съ ур—ніемъ (1), пишемъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin AOC}{\sin COB}$$

т.-е.

$$\omega' = \omega_1 \dots \dots \dots (5)$$

Иными словами, построивъ конусы около A и около B съ образующей $ОС$ и устранивъ ихъ взаимное скольженіе, мы дѣйствительно получаемъ требуемую передачу; при этомъ угловая скорость одной системы въ ея движеніи относительно другой, выражаемая діагональю $ОС$, будетъ равна

$$\sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega \cdot \omega_1 \cos \alpha}$$

гдѣ α есть уголъ между осями (выраженіе это получаемъ изъ Δ -ка $ОВС$). Обозначивъ черезъ α_1 и α_2 углы діагонали $ОС$ со сторонами $ОВ$ и $ОА$, можемъ ту же угловую скорость представить еще въ видѣ

$$\omega \cdot \cos \alpha_1 + \omega_1 \cos \alpha_2.$$

Для осуществленія передачи можно ограничиться выполненіемъ лишь отрѣзковъ конусовъ, и такая *коническая фрикціонная передача* употребляется (подобно фрикціонной цилиндрической) въ нѣкоторыхъ случаяхъ.

Болѣе употребительна, какъ и въ случаѣ цилиндрической передачи, передача *зубчатая*. Представимъ себѣ шаровую поверхность, описанную изъ точки $О'$ какимъ-либо радіусомъ $О'С'$ (фиг. 137); эта шаровая поверхность пересѣчетъ упомянутые конусы по двумъ окружностямъ; при каченіи конусовъ другъ по другу, окружности, оставаясь на сферѣ, будутъ также катиться другъ по другу; взявъ на сферѣ профиль, связанный съ одной изъ окружностей, можемъ получить сопряженный съ нимъ профиль другой окружности, катя первую окружность по второй и отыскивая на сферѣ огибающую перваго профиля. Какъ и въ цилиндрическихъ колесахъ, можно взять вспомогательныя окружности, которыя своимъ каченіемъ по той и другой окружности конусовъ дадутъ сферическія эпи- и гипоциклоиды; послѣднія будутъ сопряженными профилями головокъ и основаній зубцовъ, а сами зубцы представятся коническими поверхностями, образующія которыхъ будутъ постоянно проходить черезъ точку $О'$, направляющими же для нихъ будутъ служить сферическіе профили.

Не трудно найти горизонтальную и вертикальную проекции профилей зубцовъ; ходъ построения указанъ на чертежѣ. Даны основные конусы, вертикальныя проекціи которыхъ суть $O'S'K'$ и $O'S'M'$. Описываемъ сферу и зъ вершины конусовъ (O', O) радіусомъ, равнымъ $O'S'$, а за вспомогательную окружность для образованія профиля головки на колесѣ $O'S'K'$ беремъ на этой сферѣ окружность, проектирующуюся на вертикальную плоскость въ видѣ прямой $C'N'$,—діаметръ ея будетъ равенъ $C'N'$ и сама она (на половину) начерчена въ совмѣщеніи съ вертикальной плоскостью проекцій. При каченіи этой окружности по окружности $C'K'$ основанія конуса, или, что то же, при каченіи конуса $O'S'N'$ по конусу $O'S'K'$, точка окружности $C'N'$ образуетъ профиль головки, лежащій на сферѣ $K'S'M'$.

Чтобы построить горизонтальную проекцію этой сферической эпициклоиды, положимъ, что конусы, основной и вспомогательный, касаются другъ друга по образующей $OX, O'X'$. Замѣтимъ, что окружность основанія основного конуса проектируется на горизонтальную плоскость проекцій въ натуральную величину. Поэтому беремъ на вспомогательной окружности, начерченной въ натуральную величину на вертикальной плоскости проекцій, рядъ точекъ I, II, III, IV, V, и откладываемъ по горизонтальной проекціи основанія конуса $O'S'K'$ отъ точки X послѣдовательно дуги $XI, I2, 23, \dots$ равныя дугамъ $C'I, I II, II III, \dots$; концы этихъ дугъ будутъ служить горизонтальными проекціями послѣдовательныхъ точекъ соприкосновенія окружностей.

Проведемъ теперь для начального положенія конусовъ черезъ точку IV горизонтальную плоскость; слѣды ея найти легко,—стоитъ изъ точки IV совмѣщенной вспомогательной окружности опустить на прямую $C'N'$ перпендикуляръ IVp и провести черезъ основаніе его p горизонтальную прямую $a'pb'$ —эта послѣдняя прямая и будетъ вертикальнымъ слѣдомъ искомой горизонтальной плоскости; вмѣстѣ съ тѣмъ она будетъ служить вертикальной проекціей окружности, по которой плоскость пересѣкаетъ сферу. Горизонтальную проекцію той же окружности мы найдемъ, опустивъ изъ a' и b' перпендикуляры, при чемъ не слѣдуетъ забывать, что эта окружность будетъ проектироваться на горизонтальную плоскость проекцій въ натуральную величину, въ видѣ окружности *bea*.

Теперь, аналогично тому, что мы имѣли при построении плоскихъ эпициклоидъ, мы можемъ сказать, что въ тотъ моментъ, когда прикосновеніе окружностей будетъ имѣть мѣсто въ точкѣ (4, 4'), точка вспомогательной окружности, прикасавшаяся къ основной въ начальный моментъ, теперь будетъ находиться на горизонтальной окружности ($aeb, a'e'b'$), причемъ разстояніе ея отъ точки (4, 4') дается непосредственно отрезкомъ ($C'IV$). Ищемъ теперь по правиламъ начертательной геометріи проекціи точки, отстоящей отъ другой, данной на извѣстное разстояніе и лежащей на данной горизонтальной окруж-

ности, — схема построения указана справа. Таким образом мы и находим точку (e, e') , которая и будет одной из точек искомой эпициклоиды.

Подобным же образом отыскиваемъ и другія точки, и находимъ такимъ образомъ вертикальную и горизонтальную проекціи профиля головки. Взявъ далѣе на окружности KxS толщину зубца и ширину впадины и повторяя построение, получимъ горизонтальныя и вертикальныя проекціи профили всѣхъ зубцовъ. Сами зубцы, какъ мы уже говорили, будутъ представлять собою коническія поверхности, направляющими для которыхъ будутъ служить найденные сферическіе профили, образующія же будутъ проходить черезъ общую вершину (O, O') конусовъ. Ограничивая зубцы по длинѣ образующихъ другой сферической поверхностью, получимъ полныя поверхности зубцовъ.

Указанное построение на практикѣ однако не примѣняется, и обыкновенно употребляется нижеприводимое, *приблизительное*. Представимъ себѣ, что мы построили еще два конуса KPC и CQM , (фиг. 138) касающіеся нашей сферы по окружностямъ оснований двухъ первыхъ конусовъ (KOC и SOM); конусы эти будутъ имѣть образующую PCQ , перпендикулярную къ образующей соприкосновенія первыхъ. Если сферическіе профили не велики, т.-е., если зубцы не высоки по сравненію съ радіусомъ сферы OC , что вообще имѣетъ мѣсто почти всегда, то можно принять, что эти профили приблизительно совпадаютъ съ поверхностью конусовъ, касающихся сферы по окружностямъ KC и CM . Но поверхности этихъ дополнительныхъ конусовъ KPC и CQM мы можемъ развернуть на плоскости чертежа, — тогда на той же поверхности развернутся и профили, и въ такомъ случаѣ построение этихъ профилей мы можемъ свести на построение профилей у цилиндрическихъ колесъ, знакомое уже намъ, причемъ придется считать, что полоидами будутъ служить окружности Cx и Cy радіусовъ PC и QC (окружности KC и CM , развернутыя теперь на плоскости, будутъ, понятно, дугами этихъ окружностей).

Шагъ, толщина зубца и проч. будутъ, разумѣется, откладываться на окружностяхъ Cx и Cy въ дѣйствительную величину, и все построение, какъ видимъ, значительно упрощается.

Вычертивъ профили, наворачиваемъ ихъ на поверхности дополнительныхъ конусовъ KPC и CQM и строимъ зубцы совершенно такъ же, какъ и въ случаяхъ сферическихъ профилей, ограничивая ихъ однако въ длину не сферической поверхностью, а конической, какъ это видно на чертежѣ, гдѣ слѣва дана часть разрѣза колеса вертикальной плоскостью.

Назовемъ числа зубцовъ у колесъ черезъ z и тогда, аналогично цилиндрическимъ колесамъ, можемъ написать

$$z : z_1 = \omega_1 : \omega = R : R_1,$$

гдѣ черезъ R и R_1 обозначены соотвѣтствующие радіусы окружностей $КС$ и $СМ$. Обозначая далѣе шагъ передачи черезъ t , имѣемъ:

$$zt = 2\pi R, \quad z_1 t = 2\pi R_1.$$

Далѣе изъ чертежа имѣемъ:

$$PC = r = \frac{R}{\cos \alpha_1}, \quad CQ = r_1 = \frac{R_1}{\cos \alpha_2}.$$

Углы β и β_1 секторовъ, въ которые развернутся боковыя поверхности дополнительныхъ конусовъ, опредѣляются условіями

$$r\beta = 2\pi R, \quad r_1\beta_1 = 2\pi R_1$$

Если данъ или выбранъ шагъ зацепленія t , то, задаваясь числомъ зубцовъ, опредѣляемъ радіусы R и R_1 , проводимъ оси OP и OQ , затѣмъ проводимъ параллель оси OP на разстояніи R отъ нея и параллель оси OQ на разстояніи R_1 ; въ точкѣ ихъ пересѣченія и будетъ лежать точка C ; такимъ образомъ опредѣляется линія OC . Впрочемъ, направленіе линіи OC можно найти построеніемъ параллелограмма на осяхъ, какъ это было уже указано выше.

При обычномъ расчетѣ шагъ относится не къ окружности $СК$, какъ это мы принимали выше, а къ средней (по длинѣ зуба) окружности; и въ этомъ случаѣ радіусъ ея опредѣляется непосредственно по числу зубцовъ, а затѣмъ, зная радіусы этихъ среднихъ окружностей для обоихъ колесъ, мы опредѣляемъ направленіе OC проведеніемъ параллелей той и другой оси на разстояніяхъ, равныхъ радіусамъ, а затѣмъ находимъ и точку C , отложивъ отъ точки пересѣченія параллелей половины длины зуба по длинѣ образующей OC . Проведя прямую PCQ перпендикулярно къ OC до пересѣченія съ той и другой осью, получаемъ CP и CQ —длины образующихъ дополнительныхъ конусовъ; далѣе, изъ чертежа или вычисленіемъ опредѣляемъ радіусы R и R_1 , по числу зубцовъ находимъ шагъ зацепленія, отнесенный къ окружностямъ $СК$ и $СМ$, и такимъ образомъ получаемъ всѣ нужные для построенія профилей элементы. Для вычисленія R или R_1 имѣемъ соотношенія:

$$R = \rho + \frac{l}{2} \sin \alpha_1$$

и

$$R_1 = \rho_1 + \frac{l}{2} \sin \alpha_2;$$

далѣе

$$\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 = \rho_1 : \rho_2,$$

и, наконецъ,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

т.-е. углу между осями.

Внутренняя коническая передача не представляет послѣ сказаннаго никакихъ затрудненій; это будетъ передача вращенія между двумя пересѣкающимися осями въ одну и ту же сторону. Въ этомъ случаѣ дѣло сводится къ каченію одного конуса внутри другого (фиг. 139).

Замѣтимъ, наконецъ, что коническая передача употребляется по большей части между осями взаимноперпендикулярными.

Скорость относительнаго скольженія какой-либо точки зуба по другому, очевидно, равна произведенію изъ относительной угловой скорости вращенія на разстояніе этой точки отъ оси мгновеннаго вращенія, т.-е. она выразится такъ:

$$w = p \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos \alpha},$$

гдѣ p есть разстояніе точки отъ оси; та же величина w выразится еще такъ:

$$w = p (\omega \cos \alpha_1 \pm \omega_1 \cos \alpha_2).$$

Положивъ $\alpha = 0$, получимъ формулу для скорости скольженія въ случаѣ цилиндрической передачи:

$$w = p (\omega \pm \omega_1).$$

Знакъ *минусъ* относится къ внутренней передачѣ.

Передача между осями непараллельными и непересѣкающимися.

Пусть одна изъ такихъ осей есть ось A (фиг. 140), а другая—ось B ; положимъ далѣе, что вращеніе около A совершается съ угловою скоростью ω , а около B —со скоростью ω_1 и въ сторону, противоположную первому вращенію; пусть затѣмъ отношеніе $\omega : \omega_1$ есть величина постоянная.

Подобно тому, какъ мы это дѣлали въ предыдущихъ случаяхъ, для рѣшенія этого вопроса рассмотримъ движенія системы B относительно A , для чего даемъ обѣмъ системамъ скорость около оси A , равную ω , но направленную въ обратную сторону. Система A станетъ неподвижна, система же B будетъ заразъ участвовать въ двухъ движеніяхъ: около оси A и около оси B ; это сложное движеніе и будетъ относительнымъ движеніемъ системы B . Какъ это извѣстно изъ теоретической механики, сложеніе двухъ вращательныхъ движеній около осей непараллельныхъ и непересѣкающихся приводитъ къ результирующему вращательному движенію около нѣ-

или, называя углы прямой EC съ осями A и B черезъ α_1 и α_2 , получимъ уравненіе:

$$r_1 \omega \cos \alpha_1 = r_2 \omega_1 \cos \alpha_2 \quad (2)$$

такъ какъ, далѣе, α_1 и α_2 суть вполнѣ опредѣленные величины при данномъ отношеніи угловыхъ скоростей вращенія и, кромѣ того,

$$r_1 + r_2 = r$$

т.-е. нѣкоторой вполнѣ опредѣленной величиной, то r_1 или r_2 опредѣлятся единственнымъ образомъ, такъ что отсюда становится возможнымъ заключить, что точка E есть нѣкоторая вполнѣ опредѣленная точка кратчайшаго разстоянія MN .

Такую замѣну сложнаго движенія однимъ вращательнымъ и однимъ поступательнымъ мы можемъ произвести въ каждый данный моментъ относительнаго движенія системы B ; каждый разъ мы будемъ получать новую ось EC —ось *скольженія—вращенія*. Геометрическимъ мѣстомъ этихъ осей EC будетъ служить, очевидно, поверхность, описанная прямой EC , наклоненной къ оси A подъ опредѣленнымъ угломъ α_1 и находящейся отъ нея на опредѣленномъ разстояніи r_1 . Извѣстно, что такая поверхность будетъ *однополымъ гиперболоидомъ* вращенія съ осью A .

Такимъ образомъ, *аксоидъ* въ движеніи системы B относительно A есть, слѣдовательно, *линейчатый гиперболоидъ вращенія*. Точно также мы найдемъ, что аксоидомъ въ движеніи A относительно B будетъ служить гиперболоидъ, описанный прямой EC при вращеніи ея около оси B . Оба гиперболоида будутъ касаться другъ друга по прямой EC . Выполнивъ матеріально эти два гиперболоида (фиг. 142) и нажавъ ихъ другъ на друга, мы можемъ, вращая одинъ изъ нихъ около A со скоростью ω , получить вращеніе другого около B со скоростью ω_1 , при чемъ отношеніе $\omega : \omega_1$ будетъ даннымъ числомъ. Взявъ отрѣзки этихъ гиперболоидовъ, ограниченные плоскостями, проведенными перпендикулярно къ осямъ черезъ какую-либо точку общей образующей (по которой происходитъ касаніе гиперболоидовъ), можемъ устроить зубчатую передачу, подобно тому, какъ это мы сдѣлали въ коническихъ колесахъ, опять при помощи дополнительныхъ конусовъ; образующими этихъ конусовъ будутъ служить нормали къ поверхностямъ гиперболоидовъ, проведенныя въ точкахъ окружностей оснований отрѣзковъ. Развернувъ конусы, найдемъ соотвѣтствующие профили. Такъ какъ движеніе гиперболоидовъ сопровождается, какъ мы видѣли, взаимнымъ скольженіемъ вдоль линіи соприкосновенія, то подобнаго рода зубчатая передача будетъ сопровождаться бѣльшей потерей на треніе, нежели въ передачахъ цилиндрической и конической; это обстоятельство, а также и трудность выполненія, заставляютъ избѣгать на практикѣ употребленія этой гиперболоиче-

ской передачи, и въ машиностроеніи она, вообще говоря, примѣненія не имѣетъ; въ виду этого больше на ней останавливаться не будемъ. Замѣтимъ только, что передачу между осями непараллельными и непересѣкающимися всегда можно выполнить при помощи двухъ коническихъ передачъ. На самомъ дѣлѣ представимъ себѣ, что посредствующею осью для передачи служить линія кратчайшаго разстоянія MN (фиг. 140); тогда мы устраиваемъ одну передачу между осями NA и MN , а другую—между MN и MB и такимъ образомъ выполнимъ передачу между NA и MB . Можно и не брать линіи MN посредствующею осью, можно за эту ось взять прямую, соединяющую двѣ любыя точки прямыхъ NA и MB ; но передъ всѣми этими передачами передача при помощи линіи кратчайшаго разстоянія имѣетъ то преимущество, что это будетъ коническая передача при осяхъ, наклоненныхъ другъ къ другу подъ *прямымъ* угломъ. Такимъ образомъ мы всегда можемъ обойтись безъ гиперболической передачи.

Менѣе выгодна, а потому и менѣе употребительна замѣна гиперболическаго зацѣпленія такъ называемымъ *винтовымъ*; въ машиностроеніи оно употребляется почти такъ же рѣдко, какъ и гиперболическое. Возьмемъ на линіи кратчайшаго разстоянія между осями, на линіи MN (фиг. 143), какую-нибудь точку E и радіусами ME и EN опишемъ около осей B и A цилиндры PQ и RT ; оба эти цилиндра будутъ касаться другъ друга въ одной точкѣ E . Заставимъ теперь одинъ цилиндръ вращаться со скоростью ω_1 , а другой—со скоростью ω . Если мы будемъ разсматривать движеніе одного цилиндра по отношенію къ другому подобно тому, какъ мы это дѣлали выше при разсмотрѣніи гиперболическихъ колесъ, то можно замѣтить, что это относительное движеніе сопровождается скольженіемъ (какъ и въ случаѣ гиперболоидовъ), направленіе котораго найти легко. Для этого черезъ точку E проводимъ плоскость, параллельную обѣимъ осямъ; плоскость эта будетъ въ то же время касательною плоскостью къ обоимъ цилиндрамъ. Отложимъ въ этой плоскости векторъ EX , пропорціональный произведенію $r_1 \cdot \omega$, гдѣ $r_1 = EN$ (фиг. 143 и 144), направленный противъ окружной скорости цилиндра A въ точкѣ E ; затѣмъ проводимъ векторъ EY , пропорціональный произведенію $r_2 \omega_1$, гдѣ $r_2 = EM$, и направленный по окружной скорости цилиндра B . Діагональ EK параллелограмма, построеннаго на этихъ векторахъ, и дастъ скорость относительнаго скольженія. Эту скорость мы можемъ получить еще иначе, какъ замыкающую сторону YY_0 треугольника EY_0Y , въ которомъ стороны EY и EY_0 пропорціональны окружнымъ скоростямъ цилиндровъ и отложены въ направленіи этихъ скоростей.

Ось относительнаго вращенія будетъ, какъ и прежде, опредѣляться діагональю параллелограмма, построеннаго на векторахъ, про-

порціональныхъ угловымъ скоростямъ системъ и параллельныхъ осямъ A и B . Такъ какъ отношеніе угловыхъ скоростей намъ дано, а направление осей неизмѣнно, то діагональ параллелограмма будетъ и по величинѣ, и по направленію то же, что и въ параллелограммѣ EC (фиг. 141), построенномъ нами при разсмотрѣніи гиперболической передачи; разница будетъ въ томъ, что тамъ, благодаря выбору нѣкоторой опредѣленной въ системѣ точки E , направленіе относительнаго скольженія совпадало съ направлениемъ оси относительнаго вращенія; здѣсь же, при произвольной точкѣ E , такого совпаденія нѣтъ.

Направленіе діагонали EK , лежащее въ плоскости, касательной къ цилиндрамъ, есть направленіе одной изъ касательныхъ, проведенныхъ черезъ точку E къ обоимъ цилиндрамъ; возьмемъ эту діагональ за направленіе касательной къ винтовымъ линіямъ на томъ и на другомъ цилиндрѣ. Такія двѣ винтовыя линіи можно, очевидно, взять принадлежащими поверхностямъ двухъ сопряженныхъ зубцовъ того и другого цилиндра; теперь, слѣдовательно, зубцы будутъ обладать винтовыми поверхностями, дающими въ сѣченіи съ начальными цилиндрами наши винтовыя линіи. Проведя мысленно рядъ винтовыхъ нитокъ на поверхности того и другого цилиндра, получимъ опредѣленное число зубцовъ на томъ и другомъ колесѣ. Такъ какъ скорости точекъ начальныхъ цилиндровъ въ направленіи, перпендикулярномъ къ діагонали EK , равны (по свойству параллелограмма), а прямая EK даетъ направленіе винтовыхъ нитокъ, то разстояніе между рабочими поверхностями двухъ сосѣднихъ зубцовъ, считая по поверхности цилиндровъ и въ направленіи, перпендикулярномъ къ винтовымъ линіямъ, должны быть одинаковыми на томъ и другомъ цилиндрѣ, или, иначе говоря, разстоянія между сосѣдними винтовыми нитями, которыя служатъ направляющими поверхностей зубцовъ, должны быть одинаковы. Разстоянія эти часто называютъ *поперечными шагами* зацепленія. *Окружнымъ шагомъ* называется разстояніе между двумя нитями, если считать по окружности цилиндра; окружные шаги относятся между собою какъ окружныя скорости цилиндровъ.

Если наклонъ винтовыхъ нитокъ къ осямъ цилиндровъ назовемъ черезъ β_1 и β_2 , то уголъ KEX (фиг. 144) будетъ равенъ $\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)$, а уголъ KEY будетъ равенъ $\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right)$, такъ какъ оси соотвѣтственно перпендикулярны къ направленіямъ окружныхъ скоростей. Если цилиндръ развернуть на плоскость, такъ что (1,1) и (2,2) (фиг. 145) представятъ развернутыя окружности основаній, а (1,2) представятъ образующія, то окружный шагъ представится отрѣзкомъ cb , а поперечный—отрѣзкомъ ab ; уголъ abc , очевидно, будетъ равенъ углу ме-

все скольженіе выразится такимъ образомъ черезъ

$$\sqrt{(\omega r_1 \sin \alpha_1 + \omega_1 r_2 \sin \alpha_2)^2 + (\omega r_1 \cos \alpha_1 - \omega_1 r_2 \cos \alpha_2)^2},$$

но по свойству діагонали EC_1 параллелограмма $EX_1C_1Y_1$ имѣемъ

$$\omega \sin \alpha_1 = \omega_1 \sin \alpha_2,$$

и, слѣд., первый членъ (въ скобкахъ) подъ радикаломъ равенъ

$$[\omega \sin \alpha_1 (r_1 + r_2)]^2,$$

т.-е. представляетъ при данной ω и данномъ отношеніи $\omega : \omega_1$ величину вполне опредѣленную и неизмѣняющуюся. Весь радикалъ получить наименьшее значеніе тогда, когда исчезнетъ второй членъ, т.-е. когда

$$(\omega r_1 \cos \alpha_1 - \omega_1 r_2 \cos \alpha_2)^2 = 0,$$

а это будетъ имѣть мѣсто при выполненіи условія

$$\omega r_1 \cos \alpha_1 = \omega_1 r_2 \cos \alpha_2,$$

но этимъ уравненіемъ опредѣлялись именно радіусы r_1 и r_2 горловыхъ круговъ гиперболоидовъ. Поэтому съ точки зрѣнія потери на треніе винтовые колеса въ *общемъ видѣ* менѣе выгодны, нежели когда радіусами ихъ служатъ радіусы горловыхъ круговъ.

Въ виду малаго употребленія винтового зацѣпленія въ машиностроительной практикѣ, больше мы на немъ останавливаться не будемъ, а обратимся теперь къ передачѣ, весьма часто встрѣчающейся на практикѣ, а именно къ *червячной* передачѣ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда требуется устроить передачу между осями не пересѣкающимися, но идущими въ направленіяхъ, перпендикулярныхъ другъ къ другу, вмѣсто одного колеса берутъ винтъ и сцѣпляютъ съ нимъ колесо, сидящее на другой оси; устранивъ возможность поступательнаго движенія винта (посредствомъ шпонки и проч.), даютъ ему вращательное движеніе около его оси; тогда зубцы колеса, входящіе во впадины винтовой нарѣзки, будутъ представлять собою выступы винтовой нарѣзки гайки, соотвѣтствующей винту. Вслѣдствіе вращенія винта гайка должна получить поступательное движеніе вдоль оси винта; скорость этого поступательнаго движенія обратится въ окружную скорость колеса, и послѣднее станетъ вращаться около своей оси (фиг. 147).

Проведемъ сѣченіе черезъ ось винта перпендикулярно къ оси колеса и разсмотримъ движеніе профилей зубцовъ колеса въ этомъ сѣченіи, *предполагая, какъ всегда бываетъ въ этомъ зацѣпленіи, ведущимъ червякъ.*

Проводимъ также мысленно рядъ осевыхъ сѣченій винта; при вращеніи винта около своей оси эти сѣченія будутъ послѣдовательно,

одно за другимъ, совпадать съ плоскостью нашего чертежа; каждое изъ этихъ сѣченій представляетъ въ сущности ничто иное, какъ сѣченіе зубчатыхъ профилей, расположенныхъ вдоль прямой. Принимая теперь во вниманіе, что въ каждомъ изъ этихъ сѣченій профили передвинуты относительно профилей сосѣдняго сѣченія на нѣкоторую величину вдоль оси винта,—по самой сущности винтовой нарѣзки,—мы увидимъ, что послѣдовательное совпаденіе этихъ сѣченій съ плоскостью нашего чертежа равносильно простому передвиженію основного нашего сѣченія винта вдоль его оси, а это, въ свою очередь, равносильно тому, какъ если бы мы заставляли профили зубчатой полосы дѣйствовать на профили зубцовъ колеса, передвигая зубчатую полосу вдоль ея направленія. Слѣдовательно, мы найдемъ какъ профили винта, такъ и профили винтового колеса, въ сѣченіи, перпендикулярномъ оси колеса и проходящемъ черезъ ось винта, если выполнимъ построеніе зацепленія зубчатой полосы съ колесомъ. Теперь, взявъ найденный профиль полосы и зная наклонъ винтовой линіи, образуемъ поверхность нарѣзки на винтѣ движеніемъ даннаго профиля по винтовой линіи, какъ это вообще дѣлается для всякихъ винтовъ.

Что касается зубчатого колеса, то для точнаго выполненія зубцовъ лучше всего сдѣлать фрезъ, имѣющій форму червяка, и этимъ фрезомъ нарѣзать зубцы: при вращеніи фреза около оси острия его ребра будутъ врѣзываться въ тѣло цилиндра, изъ котораго должно быть сдѣлано колесо и который посаженъ на ось, перпендикулярную къ первой, и такимъ образомъ винтовые нарѣзки мало-по-малу оставятъ какъ бы слѣдъ на поверхности цилиндра въ видѣ точныхъ зубцовъ колеса.

Чтобы имѣть на чертежѣ профили поверхности зуба колеса въ различныхъ точкахъ, мы можемъ поступить такимъ образомъ: проводимъ рядъ вспомогательныхъ сѣченій, параллельныхъ главному, которое мы выше рассматривали; тогда отъ поверхности винтовой нарѣзки червяка останутся на каждой изъ плоскостей этихъ сѣченій слѣды опять въ видѣ профилей зубцовъ полосы. Ищемъ далѣе для каждой изъ полосъ сопряженные профили на колесѣ, предполагая полосу движущейся вдоль своего направленія; найденные профили и будутъ профилями поверхностей зубцовъ колеса, лежащими въ проведенныхъ нами сѣченіяхъ.

Возьмемъ для червяка, какъ это часто берутъ на практикѣ, трапециoidalный профиль; тогда въ главномъ сѣченіи мы будемъ имѣть эвольвентное зацепленіе зубчатой полосы съ колесомъ.

На чертежѣ *bkNr* есть профиль червяка; окружность червячнаго колеса и представляетъ собою олоиду плоской системы *O*; прямая *AB*, касательная къ окружности, является олоидой для системы, принадлежащей зубчатой полосѣ.

Въ точкѣ N касанія полоидъ проводимъ прямую, нормальную къ профилю kr , и отыскиваемъ вспомогательную окружность aa , развертывающей которой будетъ служить профиль lq зубцовъ колеса въ этомъ главномъ сѣченіи. Шагъ зацѣпленія получается изъ расчета прочности зубцовъ, подобно тому, какъ мы это имѣли въ другихъ передачахъ. Зная шагъ и помня, что размѣры профилей какъ въ радіальномъ, такъ и въ окружномъ направленіяхъ даются обыкновенно въ частяхъ шага, вычерчиваемъ полные профили зубцовъ, находимъ длины линіи и дуги зацѣпленія, а также опредѣляемъ рабочую часть какъ профиля lq , такъ и профиля kr , пользуясь при этомъ обыкновенными, изложенными выше приѣмами.

Будемъ считать нашъ червякъ однооборотнымъ, — иными словами, шагъ винтовой нарѣзки его будетъ равенъ шагу зацѣпленія. Такъ какъ шагъ зацѣпленія считается вдоль AB , то мы описываемъ прямою AB цилиндрическую поверхность около оси O_1 червяка, на этой поверхности опредѣляемъ винтовую линію bc , имѣющую шагъ, равный шагу зацѣпленія, и беремъ ее за направляющую при образованіи профилемъ $bkNr$ поверхности винтовой нарѣзки. Считая сдѣланное нами сѣченіе за вертикальную проекцію, вычертимъ еще горизонтальную проекцію червяка; въ такомъ случаѣ мы увидимъ, что различныя винтовые линіи, описанныя точками профиля при его движеніи по направляющей bc , изобразятся въ горизонтальной проекціи окружностями, изъ коихъ на чертежѣ показаны лишь тѣ, которыя соотвѣтствуютъ крайнимъ точкамъ p и k и средней N . Проведемъ теперь вертикальное сѣченіе IV , параллельное главному, и найдемъ профили впадины на червякѣ. Такъ какъ сѣченіе это параллельно вертикальной плоскости проекцій, то вертикальная проекція профиля и дастъ намъ его истинный видъ. Находимъ эту проекцію: беремъ произвольную точку x_1 на вертикали, проходящей чрезъ точку пересѣченія плоскости съ среднею окружностью, такъ что точка (x, x_1) будетъ представлять собою точку пересѣченія плоскости IV съ средней винтовой линіей. Проводимъ теперь чрезъ точку x_1 вертикальную проекцію средней винтовой линіи, т.-е. устраиваемъ при x_1 кривую, тождественную съ bc , или же просто строимъ гдѣ-нибудь эту кривую и отыскиваемъ на ней точку x_1 , соотвѣтствующую точкѣ x .

Чтобы найти другія точки профиля, напр., точку, соотвѣтствующую P_v , можемъ провести чрезъ P_v слѣдъ осевого сѣченія винта, т.-е. прямую O_1P_v , продолжить его до пересѣченія съ среднею окружностью въ точкѣ y , найти на вертикальной проекціи средней винтовой линіи, проведенной чрезъ x_1 , точку y_1 , соотвѣтствующую y , и теперь, по свойству образованія винтовой поверхности, можемъ сказать, что точка этой поверхности, представляемая горизонтальной проекціей P_v , находится въ такомъ же разстояніи отъ горизонталь-

ной плоскости, проведенной через (yy_1) , въ какомъ точка p профиля kNr находится отъ прямой ON (движеніемъ этого профиля и образована винтовая поверхность). Проводя поэтому горизонталь y_1y_2 черезъ точку y_1 , находимъ на вертикали, проходящей черезъ P_v , точку P_{v1} , находящуюся въ указанномъ разстояніи отъ y_1y_2 и служащую вертикальной проекціей для P_v .

Подобнымъ же образомъ находимъ проекціи и другихъ точекъ профиля, т.-е. проводимъ черезъ горизонтальную проекцію z какой-либо точки окружность O_1z , которая будетъ служить горизонтальной проекціей винтовой линіи, соотвѣтствующей точкѣ z . Опредѣляемъ далѣе относительное положеніе точки z на образующемъ профилѣ, для чего изъ точки пересѣченія окружности (O_1z) съ (O_1K_1) проводимъ вертикаль до пересѣченія съ профилемъ. Далѣе проводимъ осевое сѣченіе, т.-е. соединяемъ O_1 съ z ; на средней винтовой линіи получаемъ точку y_3 (не показанную на чертежѣ), отыскиваемъ соотвѣтствующую ей вертикальную проекцію и заканчиваемъ построеніе совершенно такъ же, какъ мы это сдѣлали для точки P_v . Теперь беремъ этотъ профиль и отыскиваемъ ему сопряженный по общимъ правиламъ (по методу *Reuleaux*), при чемъ профиль этотъ рассматриваемъ принадлежащимъ зубчатой полосѣ AB , сцѣпляющейся съ колесомъ радіуса ON ; замѣтимъ при этомъ, что такъ какъ профиль впадины уже не будетъ симметричнымъ, то придется отыскивать сопряженные профили отдѣльно какъ для $k_2x_1P_{v1}$, такъ и для S_at_a . Шагъ зацѣпленія остался тотъ же, что и въ главномъ сѣченіи, но ширина впадины, считая по AB , будетъ теперь другая, сообразно чему нѣсколько измѣнится теперь и толщина профиля зуба. Высота зуба въ радіальномъ направленіи можетъ быть опредѣлена изъ того обстоятельства, что зубцы колеса, обыкновенно ограничиваются линіей CD ; разстояніе точки пересѣченія IV съ CD отъ оси O и служить ограниченіемъ профилей въ радіальномъ направленіи для рассматриваемаго сѣченія. Безъ труда находимъ линію зацѣпленія и рабочія части профилей.

Проведя нѣсколько такихъ сѣченій, мы будемъ въ состояніи опредѣлить вполнѣ видъ зубцовъ колеса, равно какъ величины рабочихъ частей для различныхъ сѣченій, т.-е. опредѣлимъ дѣйствіе винта на зубцы колеса; соотвѣтственно этому будемъ имѣть представленіе и о работѣ нарѣзки.

Относительно связи между шагомъ зацѣпленія и шагомъ винта можно сказать, что послѣдній бываетъ или равенъ первому, или вдвое, втрое ... въ n разъ больше его; въ первомъ случаѣ мы имѣемъ однооборотный червякъ, во второмъ—двухъ, трехъ, ... n —оборотный. Если у насъ имѣется однооборотный червякъ, а колесо имѣетъ z зубцовъ, то очевидно, что при одномъ оборотѣ червяка колесо сдѣлаетъ $\frac{1}{z}$ -ую часть оборота, повернувшись на одинъ зубецъ;

при двухъ-оборотномъ червякѣ колесо повернется (за время одного оборота червяка) уже на 2 зубца, т.-е. сдѣлаетъ $\frac{2}{z}$ часть оборота, и вообще повернется на $\frac{n}{z}$ часть оборота при n -оборотномъ червякѣ.

Отсюда видно, что червячная передача можетъ служить для преобразованія быстрого вращательнаго движенія въ медленное. Задавшись передаточнымъ числомъ и выбравъ опредѣленный типъ червяка (одно, двухъ ... оборотный), находимъ число зубцовъ на колесѣ; далѣе изъ расчета прочности опредѣляемъ шагъ зацепленія, а по шагу и числу зубцовъ находимъ радіусъ R колеса, ибо мы имѣемъ

$$zt = 2\pi R.$$

Если червякъ n -оборотный, то шагъ нарѣзки равенъ $n \cdot t$. Выбираемъ уголъ наклона β нарѣзки на среднемъ цилиндрѣ и опредѣляемъ средній радіусъ червяка r (соотвѣтствующій AB на чертежѣ); для этого воспользуемся соотношеніемъ

$$nt = 2\pi r \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Профилируемъ, какъ указано, червякъ и колесо сначала въ главномъ сѣченіи, а затѣмъ, такъ какъ всѣ размѣры червяка извѣстны, находимъ профили зубцовъ колеса и въ другихъ сѣченіяхъ; все это позволитъ намъ составить полное представленіе о работѣ червяка. *Ведущимъ всегда бываетъ червякъ.* При маломъ углу наклона винтовой нарѣзки, меньшемъ, такъ наз. *угла тренія*, колесо не въ состояніи привести червякъ во вращеніе, каковымъ обстоятельствомъ приходится часто пользоваться въ машиностроеніи (напр., при конструированіи подъемныхъ механизмовъ и проч.).

Винтообразныя зубчатые поверхности иногда употребляются и въ простой цилиндрической передачѣ. Представимъ себѣ цилиндръ (аксоидъ), принадлежащій какому-либо изъ колесъ, раздѣленнымъ на двѣ половины плоскостью, перпендикулярной къ оси цилиндра. Оставляя въ этой плоскости профили зубцовъ на мѣстѣ, строимъ винтовые линіи (на той и другой половинѣ) одного и того же шага, но противоположнаго направленія: одна правая, другая лѣвая. Взявъ ихъ за направляющія, описываемъ имѣющимися профилями винтовые поверхности, которыя и будутъ служить теперь зубцами (фиг. 148).

Колесо такого рода можно разсматривать, какъ состоящее изъ ряда тонкихъ дисковъ съ одними и тѣми же зубцами, но только сдвинутыхъ по отношенію другъ къ другу такъ, что соотвѣтствующія точки зубцовъ лежатъ на винтовыхъ линіяхъ.

На чертежѣ 148 изображена половина одного такого зуба въ

проекціи его на среднюю плоскость, а также проекція того же зубца (цѣлаго) на плоскость, перпендикулярную средней (т.-е. проходящую параллельно оси колеса); контуры зубца на этой плоскости представляются винтовыми линіями.

Защѣпленіе выбрано *циклическое* и указана линія защѣпленія $AP A_1$. Ведущимъ предположено разсматриваемое колесо O . Такъ какъ каждое сѣченіе, параллельное средней плоскости, изобразится въ проекціи на эту плоскость въ натуральную величину и такъ какъ каждое такое сѣченіе, какъ мы указали выше, представляетъ собою какъ бы тонкое колесо, тождественное съ среднимъ сѣченіемъ, но только сдвинутое по отношенію къ нему на нѣкоторый уголъ, то ясно, что дуга PA_1 представляетъ въ данный моментъ проекцію на среднюю плоскость линіи соприкосновенія пары сопряженныхъ зубцовъ.

Не трудно видѣть, что въ данный моментъ соприкосновеніе въ средней плоскости дошло уже до полоиды; въ сѣченіи, соотвѣтствующемъ точкѣ A_1 , соприкосновеніе только начинается, въ сѣченіяхъ же, лежащихъ дальше отъ средняго, соприкосновенія еще нѣтъ. При дальнѣйшемъ вращеніи колеса точка соприкосновенія будетъ постепенно удаляться отъ полоиды, дальнѣйшія сѣченія будутъ вступать въ соприкосновеніе; въ нѣкоторый моментъ соприкосновеніе въ среднемъ сѣченіи прекратится, постепенно оно будетъ прекращаться на дальнѣйшихъ, а линія соприкосновенія все будетъ укорачиваться и въ послѣдній моментъ обратится въ точку (съ той и другой стороны).

Для этой пары зубцовъ соприкосновеніе началось также въ точкѣ средняго сѣченія, затѣмъ стала увеличиваться линія соприкосновенія, какъ это не трудно видѣть.

Такимъ образомъ, въ данномъ защѣпленіи мы имѣемъ постепенное увеличеніе, а затѣмъ постепенное же уменьшеніе длины линіи соприкосновенія, между тѣмъ какъ въ простыхъ цилиндрическихъ колесахъ длина линіи соприкосновенія всегда равна длинѣ зубцовъ; это обстоятельство приводитъ насъ къ заключенію того рода, что въ разсматриваемыхъ нами колесахъ съ угловыми зубцами имѣются болѣе выгодныя условія работы, чѣмъ въ простыхъ цилиндрическихъ, такъ какъ зубецъ не сразу подвергается дѣйствию полной нагрузки, а постепенно.

Кромѣ того, если мы черезъ γ обозначимъ уголъ, на который является сдвинутымъ крайнее сѣченіе относительно средняго, а, слѣдовательно, дуга полоиды, соотвѣтствующая этому углу, будетъ равна γR , то не трудно видѣть, что продолжительность защѣпленія пары зубцовъ выразится теперь величиной $(\sigma + \gamma R)$, гдѣ черезъ σ мы обозначили дугу защѣпленія для простыхъ цилиндрическихъ колесъ съ тѣми же профилями. Что касается угла β наклона винтовой линіи,

то онъ связанъ, какъ это можно видѣть изъ чертежа, съ половиною ширины колеса $\frac{b}{2}$ и съ дугой γR соотношеніемъ:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\gamma R}.$$

Выбравъ уголъ γ , получаемъ изъ этого уравненія уголъ β и такимъ образомъ вполне опредѣлимъ видъ зубцовъ.

Изъ чертежа понятно, что если бы въ нашей парѣ колесъ вращеніе совершалось въ другую сторону (ведущимъ было бы колесо O_1), то соприкосновеніе началось бы въ обоихъ крайнихъ сѣченіяхъ и кончилось бы въ среднемъ. Точно такъ же легко видѣть, что соотвѣтствующія винтовые линіи на обоихъ колесахъ противоположны, т.-е. правой винтовой линіи на одномъ колесѣ соотвѣтствуетъ лѣвая на другомъ и обратно.

Коловратныя машины.

Къ числу вопросовъ объ отысканіи сопряженныхъ профилей относятся вопросы о построеніи профилей въ *коловратныхъ* машинахъ. Эти машины предназначаются для перемѣщенія жидкихъ тѣлъ и въ частности употребляются такъ же, какъ вентиляторы. Мы ниже рассмотримъ только одинъ изъ наиболѣе распространенныхъ, а именно, такъ называемый *вентиляторъ Рута*. Онъ состоитъ изъ двухъ крыльевъ, заключенныхъ въ кожухѣ и плотно прилегающихъ какъ къ кожуху, такъ и другъ къ другу (фиг. 149). Оба крыла вращаются съ одинаковою угловою скоростью, но въ обратныя стороны. При этомъ, какъ не трудно видѣть, какая-либо жидкость (или воздухъ) будетъ всасываться въ одинъ конецъ кожуха и нагнетаться въ другой. Полоидами для системъ обоихъ крыльевъ будутъ здѣсь двѣ равныя окружности O_1 и O (фиг. 150). Для профиля выступа крыла *Рута* бралъ часть окружности, описанной изъ нѣкоторой произвольной точки O_2 , лежащей на радіусѣ OP , радіусомъ O_2N , гдѣ точки M и N суть концы дугъ PN и PM , равныхъ каждая $\frac{1}{8}$ части всей окружности O ; такимъ образомъ точки M и N *Рута* взялъ постоянными, и профиль, такимъ образомъ, занимаетъ по полоидѣ четверть ея длины.

Чтобы найти профиль впадины, соотвѣтствующей этому профилю выступа, ищемъ огибающую кривой NKM (дуги окружности) при каченіи полоиды O по O_1 . Беремъ какую-нибудь точку x кривой профиля, проводимъ нормаль къ нему, т.-е. соединяемъ точку x съ центромъ O_2 . Пусть эта прямая пересѣкаетъ полоиду O въ точкѣ P_1 ; откладываемъ теперь по другой полоидѣ, считая отъ точки P , дугу PP_2 , равную дугѣ PP_1 . Далѣе при точкѣ P_2 мы должны построить

векторъ, наклоненный къ окружности полоиды O_1 подъ тѣмъ же угломъ α , что и векторъ xP_1 —къ окружности O . Пусть это будетъ векторъ P_2p . Отложивъ теперь на немъ, считая отъ точки P_2 , длину x_2P_2 , равную xP_1 , получимъ точку x_2 , одну изъ точекъ профиля впадины. Итакъ,

$$\angle x_2P_2y = \alpha = \angle xP_1z,$$

и прямая yP_2T есть касательная къ полоидѣ O_1 въ точкѣ P_2 . Опустимъ теперь изъ точки x_2 перпендикуляръ x_2y на эту касательную yT и, продолживъ его по другую сторону касательной, отложимъ $yx_3 = yx_2$. Соединивъ полученную точку x_3 съ P_2 , находимъ, что

$$\triangle x_2P_2y = \triangle x_3P_2y;$$

значить, имѣемъ:

$$x_3P_2 = x_2P_2 = xP_1,$$

при чемъ отръзокъ x_3P_2 наклоненъ къ касательной въ P_2 подъ тѣмъ же угломъ α , что и xP_1 къ касательной въ P_1 .

Вслѣдствіе равенства полоидъ мы можемъ заключить, что различныя точки x_3 , какъ и различныя x , находятся всѣ на окружности, центръ коей O_3 лежитъ отъ P на такомъ же разстояніи, что и O_2 , и радіусъ которой равенъ радіусу O_2x . Поэтому нахожденіе точекъ профиля впадины сводится къ слѣдующему: проводимъ изъ центра O_3 , гдѣ $PO_3 = PO_2$, окружность того же радіуса, что и NKM ; какою-нибудь точку ея x_3 соединяемъ съ центромъ O_3 , проводимъ въ точку пересѣченія радіуса x_3O_3 съ окружностью O_1 , т.-е. въ точку P_2 , радіусъ O_1P_2 , а изъ x_3 проводимъ параллель ему x_3x_2 и на этой параллели отръзкомъ, равнымъ P_2x_3 , изъ центра P_2 засѣкаемъ точку x_2 , которая и будетъ одной изъ точекъ искомага профиля.

Какъ видно изъ построенія, профиль пересѣчетъ полоиду въ тѣхъ же точкахъ, что и вспомогательныя окружности, т.-е. въ точкахъ, находящихся другъ отъ друга на разстояніи четверти длины полоиды.

Выполнивъ построеніе профиля, сопряженнаго съ профилемъ NKM , чертимъ далѣе профиль выступа въ видѣ окружности, тождественной съ окружностью NKM , и затѣмъ ограничиваемъ соотвѣтственно все крыло, пристраивая еще профиль впадины и выступа. Другое крыло, конечно, будетъ ограничено тождественнымъ контуромъ.

Отд. 2. Отношеніе между скоростями переменнo, — направленіями постоянно.

Некруглыя колеса.

Разсмотримъ теперь передачу вращенія около двухъ параллельныхъ осей съ *переменнымъ* отношеніемъ скоростей. Замѣтимъ, что на прак-

тикѣ передачи эти употребляются рѣдко, а потому мы остановимся на нихъ лишь вкратцѣ.

Допустимъ, что у насъ имѣются двѣ оси (фиг. 151), A и B , въ опредѣленномъ разстояніи другъ отъ друга, и пусть вращеніе около A съ угловою скоростью ω требуется передать вращеніемъ около B съ угловою скоростью ω_1 , при чемъ отношеніе $\frac{\omega}{\omega_1}$ должно быть нѣкоторой функціей, $f(\varphi)$, угла поворота системы A . Вращенія имѣютъ совершаться въ противоположныя стороны.

Опредѣлимъ, какъ и прежде, движеніе системы B относительно A , придавъ обѣмъ системамъ еще общее вращеніе около оси A со скоростью ω ; тогда система A остановится, а система B будетъ имѣть два вращенія, которыя мы въ каждомъ данномъ положеніи оси B при вращеніи около A , замѣняемъ однимъ мгновеннымъ вращеніемъ около оси, лежащей на плоскости AB , параллельной имъ, и, какъ извѣстно, дѣлящей разстояніе AB на части, обратно пропорціональныя ω и ω_1 . Въ плоскомъ сѣченіи, совпадающемъ, напр., съ плоскостью чертежа, оси спроектируются въ точки A и B . Полоиду въ движеніи плоской системы B относительно A мы найдемъ слѣдующимъ образомъ.

Проводимъ черезъ точку A какой-нибудь векторъ APB подъ угломъ φ къ линіи AB , на немъ отъ точки A откладываемъ AB_1 , равное AB , и дѣлимъ AB_1 внутреннимъ образомъ въ отношеніи

$$\frac{PA}{PB_1} = \frac{\omega_1}{\omega} = f(\varphi);$$

при данномъ углу φ величина $f(\varphi)$ будетъ вполне опредѣленной и извѣстной. Такимъ образомъ мы получимъ точку P , которая и будетъ одной изъ точекъ полоиды.

Далѣе нужно найти, какъ обыкновенно, полоиду въ движеніи A относительно B . Такъ какъ разстояніе между осями есть величина постоянная и такъ какъ точка P постоянно должна находиться на AB , то отсюда слѣдуетъ, что два соотвѣтственные радіуса r и r_1 въ суммѣ должны давать AB , т.-е. должны удовлетворять условію

$$r + r_1 = AB.$$

Если вектору $AP = r$ соотвѣтствуетъ въ другой полоидѣ векторъ $BP_1 = r_1$, то углы, образуемые ими съ осью AB , т.-е. углы $P_1BA = \varphi_1$ и $PAB = \varphi$, должны быть таковы, чтобы векторы PA и BP_1 при вращеніи системы A со скоростью ω и системы B со скоростью ω_1 , одновременно могли вступить на линію AB . Это условіе можно выразить такъ: элементарное вращеніе $d\varphi$ за промежутокъ времени dt выразится въ видѣ

$$d\varphi = \omega \cdot dt;$$

для вращенія $d\varphi_1$ имѣемъ аналогично

$$d\varphi_1 = \omega_1 \cdot dt$$

(для того же промежутка времени dt). Эти два соотношенія приводятъ насъ къ ур—нію

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{d\omega_1}{d\varphi} = f(\varphi),$$

откуда находимъ ур—ніе

$$d\varphi_1 = f(\varphi) \cdot d\varphi,$$

опредѣляя изъ котораго φ_1 , получаемъ:

$$\varphi_1 = \int_0^\varphi f(\varphi) d\varphi.$$

Выполнивъ интегрированіе, опредѣлимъ отсюда уголъ φ_1 , соотвѣтствующій данному φ , а этимъ опредѣлится точка полоиды P_1 ,—для полученія ея придется на сторонѣ угла φ_1 отложить отъ точки B отрѣзокъ BP_1 .

Кривыя, построенныя такимъ образомъ, и будутъ полоидами. Не трудно, кромѣ того, убѣдиться, что дуга P_0P_1 равна дугѣ P_0P , и радіусъ векторъ BP_1 дѣлаетъ съ кривою такой же уголъ, какъ и векторъ PA . На самомъ дѣлѣ, на основаніи вышеприведенныхъ соображеній, мы можемъ теперь написать, что

$$\frac{d\varphi}{d\varphi_1} = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{r_1}{r},$$

что даетъ намъ

$$rd\varphi = r_1d\varphi_1 \dots \dots \dots (1)$$

Уголъ вектора BP_1 съ кривою, т.-е. съ касательною къ кривою въ крайней точкѣ вектора, который мы назовемъ черезъ ϕ_1 , опредѣляется изъ условія

$$tg\phi_1 = \frac{r_1d\varphi_1}{dr_1} \dots \dots \dots (2)$$

а уголъ между векторомъ AP и кривою—условіемъ

$$tg\phi = \frac{rd\varphi}{dr} \dots \dots \dots (3)$$

при чемъ если dr_1 положительно, то dr , по построенію кривыхъ, отрицательно, но по абсолютной величинѣ равно dr_1 . Принимая во вниманіе равенство (1), мы получаемъ изъ ур—ній (2) и (3) слѣдующее:

$$tg\psi = tg\phi_1, \dots \dots \dots (4)$$

т.-е.

$$\phi = \phi_1 \dots \dots \dots (5)$$

Далѣе мы имѣемъ для элементовъ дуги ds и ds_1 выраженія:

$$ds = \frac{1}{\sin\phi} \cdot rd\varphi \dots \dots \dots (6)$$

и аналогично

$$ds_1 = \frac{I}{\sin \phi_1} \cdot r_1 d\phi_1; \quad \dots \quad (7)$$

сравнивая которая, въ виду ур—ній (1) и (4), находимъ:

$$ds = ds_1, \quad \dots \quad (8)$$

т.-е. всякій элементъ дуги между двумя безконечно близкими радіусами одной полоиды равенъ элементу дуги другой полоиды, заключенному между соотвѣтственными радіусами другой.

Кривыя будутъ катиться одна по другой *безъ скольженія*, если мы начнемъ вращать систему *A* со скоростью ω , а *B* — со скоростью ω_1 . Здѣсь, однако, далеко не всегда возможно устроить фрикціонную передачу вслѣдствіе того, что кривыя могутъ имѣть угловатые выступы и т. п. формы, при которыхъ нельзя увлечь одну систему другой лишь помощью силы тренія.

Зубчатая передача можетъ быть устроена всегда и устраивается совершенно такъ же, какъ и въ цилиндрическихъ колесахъ: беремъ опять нѣкоторый произвольный профиль въ одной системѣ и находимъ сопряженный ему въ другой, катя одну полоиду по другой, — здѣсь удобнѣе всего примѣнить методъ *Poncelet*, годный, какъ было сказано, для всякихъ полоидъ.

Примѣромъ некруглыхъ колесъ могутъ служить *эллиптическія* колеса. Представимъ себѣ два одинаковыхъ эллипса, посаженныхъ на осяхъ, проходящихъ черезъ ихъ фокусы *F* и *f*₁ (фиг. 152). Разстояніе между осями равно большой оси эллипсовъ:

$$Ff_1 = MN = mn;$$

кромѣ того,

$$PF = Pf \quad \text{и} \quad PF_1 = Pf_1.$$

Не трудно видѣть, что расположенные такимъ образомъ эллипсы, если ихъ вращать около ихъ осей, будутъ катиться одинъ по другому.

Взявъ на одномъ изъ нихъ точку *P*₁, а на другомъ — точку *P*₂ такъ, чтобы дуга *PP*₁ была равна дугѣ *PP*₂, вслѣдствіе тождества эллипсовъ получаемъ:

$$FP_2 = fP_1,$$

а такъ какъ

$$FP_2 + F_1P_2 = 2a = fP_1 + f_1P_1,$$

то и

$$F_1P_2 = f_1P_1,$$

а значитъ

$$f_1P_1 + FP_2 = 2a = Ff_1,$$

Далѣе, линія *TP*₂*T*, касательная въ точкѣ *P*₂, образуетъ съ векторомъ *FP*₂ уголъ *FP*₂*T* = μ такой же, какой образуетъ касательная въ *P*₁, прямая *tP*₁*t*, съ векторомъ *f*₁*P*₁, т.-е. уголъ

$$\angle FP_2T = \mu = \angle f_1P_1t;$$

на самомъ дѣлѣ, въ силу тождественности эллипсовъ, заключаемъ, что углы FP_2T и fP_1t , какъ углы между соотвѣтственно-равными векторами FP_2 и fP_1 и касательными TT и tt , равны между собою; углы же fP_1t и f_1P_1t равны между собою по свойству эллипсовъ;

$$\angle FP_2T = \angle fP_1t = \mu.$$

Такимъ образомъ векторы FP_2 и f_1P_1 суть соотвѣтственные векторы, и взятые эллипсы, прокатившись другъ по другу на дугу PP_2 , равную дугѣ PP_1 , будутъ касаться въ этотъ моментъ точками P_1 и P_2 , которыя одновременно придутъ на линію центровъ Ff_1 ; касательныя же ихъ въ точкахъ P_1 и P_2 сольются въ одну общую касательную. Отношеніе угловыхъ скоростей $\omega_1 : \omega$ равно отношенію $FP : f_1P$ и, очевидно, мѣняется отъ *maxim*’а, когда векторомъ FP будетъ на одно мгновеніе служить отрѣзокъ большой оси FN ,—до *minim*’а, когда роль вектора FP перейдетъ на мгновеніе къ отрѣзку FM . Если эксцентриситетъ эллипса назвать черезъ e , гдѣ

$$e = \frac{c}{a},$$

то *maxim*’а отношенія $\frac{\omega_1}{\omega}$ будетъ равенъ $\frac{a+c}{a-c}$ или $\frac{1+e}{1-e}$, а *minim*’а

$$= \frac{1-e}{1+e}.$$


Отд. 3. Отношеніе между скоростями и направленіями перемѣнно.

Кулаки и эксцентрики.

Въ машиностроеніи имѣетъ очень большое значеніе *преобразованіе вращательнаго движенія въ прямолинейное возвратное* или въ качательное при помощи *кулаковъ* и *эксцентриковъ*.

Пусть нѣкоторый стержень, могущій двигаться вдоль своего направленія (фиг. 153) (наприм., на каточкахъ), опирается концомъ на шайбу, сидящую на оси A .

Положимъ, что направленіе оси стержня встрѣчаетъ ось A и перпендикулярно къ ней.

При равномерномъ вращеніи шайбы (или эксцентрика) полоса будетъ двигаться, пока будутъ возрастать радіусы векторы эксцентрика; при дальнѣйшемъ вращеніи, когда радіусы векторы начнутъ убывать, стержень можетъ остаться на мѣстѣ (если онъ, напр., двигается горизонтально), и для замыканія пары въ этомъ случаѣ придется употребить постороннюю силу, которая всегда прижимала бы стержень къ эксцентрику, т.-е. придется примѣнить такъ-называемое *силовое замыканіе пары*, напр., при помощи нѣкоторой пружины.

Законъ движенія стержня, несомнѣнно, зависитъ отъ формы эксцентрика, и, наоборотъ, для даннаго закона движенія стержня всегда можно опредѣлить форму эксцентрика.

Пусть a есть наименьшій векторъ эксцентрика, а ρ какой-нибудь другой, образующій нѣкоторый уголъ φ съ первымъ. Движеніе стержня мы начнемъ разсматривать, начиная съ того момента, когда съ направленіемъ движенія стержня совпадаетъ наименьшій радіусъ эксцентрика. При поворотѣ эксцентрика на уголъ φ , стержень, очевидно, подвинется на величину x , равную $\rho - a$.

Кривую, ограничивающую эксцентрикъ, мы можемъ выразить уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ, написаннымъ въ видѣ

$$\rho - a = f(\varphi) \dots \dots \dots (1)$$

Мы примемъ *вращеніе эксцентрика равномернымъ*, и въ такомъ случаѣ углы поворота эксцентрика будутъ пропорціональны временамъ, т.-е. мы можемъ времена мѣрить этими углами поворота, а тогда уравненіе

$$\rho - a = f(\varphi) = x \dots \dots \dots (1')$$

дастъ намъ зависимость пути, пройденнаго какой-либо точкой стержня, отъ времени, если за начальный моментъ мы будемъ считать моментъ наибольшаго приближенія этой точки стержня къ центру (или къ оси вращенія) эксцентрика.

Обратно, если намъ данъ законъ движенія стержня въ видѣ

$$x = f(t),$$

то это соотношеніе можетъ быть сейчасъ же преобразовано въ полярное уравненіе для кривой, ограничивающей эксцентрикъ, а именно, въ ур—ніе

$$\rho - a = f(t).$$

Задавшись величиной a , т.-е. наименьшимъ векторомъ эксцентрика, мы опредѣлимъ форму кривой, его ограничивающей.

Пусть, напр., дано, что стержень за время поворота эксцентрика отъ O до π долженъ двигаться равномерно; это значитъ, что пути, проходимые какой-либо точкой стержня, должны быть пропорціональны временамъ, а поэтому ур—ніе кривой, ограничивающей эксцентрикъ, изобразится въ видѣ

$$\rho - a = k \cdot \varphi \dots \dots \dots (2)$$

это ур—ніе представляетъ собою ур—ніе *Архимедовой спирали*. Факторъ пропорціональности k мы опредѣлимъ по величинѣ хода стержня. Пусть ходъ этотъ равенъ h ; тогда при $\varphi = \pi$ имѣемъ:

$$\rho' - a = h = k\pi, \dots \dots \dots (3)$$

откуда

$$k = \frac{h}{\pi},$$

Легко опредѣлить, наприм., форму такого эксцентрика, который заставлялъ бы намъ стержень двигаться впередъ сначала равномерно ускореннымъ движеніемъ, а затѣмъ—равномерно замедленнымъ, такъ что въ результатѣ къ концу хода скорость стержня будетъ равна нулю. Выполнимъ это требованіе.

Пусть попрежнему наименьшій радіусъ эксцентрика равенъ a , ходъ стержня равенъ h ; значить, за четверть оборота эксцентрика стержень долженъ пройти путь $\frac{h}{2}$. При равномерно ускоренномъ движеніи пространства пропорціональны квадратамъ временъ, а поэтому уравненіе кривой эксцентрика имѣетъ видъ

$$\rho - a = k\varphi^2 \dots \dots \dots (5)$$

Факторъ пропорціональности k опредѣлится, какъ и прежде, изъ условія

$$\frac{h}{2} = k \left(\frac{\pi}{2} \right)^2, \dots \dots \dots (6)$$

откуда получаемъ:

$$k = \frac{h}{2} : \frac{\pi^2}{4} = \frac{2h}{\pi^2},$$

и уравненіе (5) получаетъ видъ:

$$\rho - a = 2h \cdot \frac{\varphi^2}{\pi^2} \dots \dots \dots (7)$$

Построеніе кривой можетъ быть ведено совершенно аналогично тому, какъ мы дѣлали въ предыдущемъ примѣрѣ. Дѣлимъ четверть окружности радіуса a (фиг. 155) на n равныхъ частей, а отрезокъ $\frac{h}{2}$ — на n^2 равныхъ частей, проводимъ въ точки дѣленія окружности радіусы и прибавляемъ къ нимъ послѣдовательно:

$$1 \cdot \frac{h}{2n^2}, \quad 4 \cdot \frac{h}{2n^2}, \quad 9 \cdot \frac{h}{2n^2}, \quad \dots$$

дѣлаемъ мы такъ потому, что, какъ извѣстно, при равномерно-ускоренномъ движеніи пространства, проходимыя точкой, считая отъ начального пункта, возрастаютъ пропорціонально квадратамъ временъ. Соединивъ концы векторовъ кривою, получимъ часть очертанія эксцентрика для равноускореннаго движенія стержня.

Для построенія другой части замѣтимъ слѣдующее: если мы проведемъ какой-либо векторъ отъ кривой, а изъ центра O опишемъ окружность радіуса $a + \frac{h}{2}$, то отрезокъ продолженнаго вектора между кривой и окружностью выразится въ функціи $\angle mOA = \varphi$ такъ:

$$mn = \left(a + \frac{h}{2} \right) - \rho,$$

ибо

$$mn = On - Om,$$

а

$$On = a + \frac{h}{2},$$

и Om обозначаемъ черезъ ρ . Принимая во вниманіе ур—ніе (7), можемъ написать:

$$mn = a + \frac{h}{2} - \rho = a + \frac{h}{2} - a - 2h \cdot \frac{\varphi^2}{\pi^2}$$

или

$$mn = \frac{h}{\pi} - \frac{h}{2} \cdot \frac{\varphi^2}{\pi^2}; \dots \dots \dots (8)$$

теперь вмѣсто угла φ (угла mOA) введемъ ему дополнительный, mOB , равный поэтому $90^\circ - \varphi$; обозначимъ его черезъ ψ ; тогда

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi,$$

и ур—ніе (8) приметъ видъ

$$\begin{aligned} mn &= \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)^2}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \left\{ \frac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi^2}{4}} - \frac{\pi\psi}{\frac{\pi^2}{4}} + \frac{\psi^2}{\frac{\pi^2}{4}} \right\} = \\ &= \frac{h}{2} - \frac{h}{2} + \frac{h}{\frac{\pi}{2}} \cdot \psi - \frac{h}{\frac{\pi^2}{4}} \cdot \frac{\psi^2}{2}; \end{aligned}$$

окончательно

$$mn = \frac{h}{\frac{\pi}{2}} \psi - \frac{h}{\frac{\pi^2}{4}} \cdot \frac{\psi^2}{2}, \dots \dots \dots (9)$$

но эта зависимость mn отъ ψ выражаетъ собою зависимость пути отъ времени въ движеніи равноѣрно-замедленномъ, если время считать углами ψ .

Дальнѣйшее построеніе эксцентрика будетъ, очевидно, таково: проводимъ какой-либо векторъ Ok , откладываемъ по другую сторону вектора OB уголъ BOm , равный углу BOk , находимъ отрѣзокъ mn между кривой, раньше начерченной, и окружностью радіуса $\left(a + \frac{h}{2}\right)$ и прибавляемъ этотъ отрѣзокъ къ радіусу Ok той же окружности, т.-е. дѣлаемъ $kl = mn$; точка l , полученная такимъ образомъ, будетъ одной изъ точекъ кривой очертанія эксцентрика.

Тотъ же результатъ получимъ, если составимъ на общихъ основаніяхъ полярное уравненіе кривой для движенія равноѣрно-замедленного. Считая уголъ φ отъ OB , получаемъ для этого случая

$$x = a\varphi - \beta \cdot \frac{\varphi^2}{2} \dots \dots \dots (10)$$

Постоянные α и β опредѣлимъ изъ того условія, что при $\varphi = 0$ скорость стержня должна имѣть нѣкоторую опредѣленную величину, намъ заранее извѣстную; также и при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Скорость стержня выражается такъ

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\varphi} = \alpha - \beta\varphi;$$

а при $\varphi = 0$ имѣемъ $v = \alpha$; но, съ другой стороны, та же скорость напишется въ видѣ $\frac{d\rho}{d\varphi}$, гдѣ ρ берется изъ прежняго уравненія

$$\rho - a = \frac{h}{\pi^2} \cdot \frac{\varphi^2}{2} = \frac{2h}{\pi^2} \cdot \frac{\varphi^2}{4},$$

при чемъ, понятно,

$$v = \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

ибо во второмъ случаѣ углы отсчитываются отъ A . Мы имѣемъ

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{h}{\pi^2} \cdot \varphi \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{h}{\pi} = v = \alpha;$$

значить, получаемъ окончательно:

$$\alpha = \frac{h}{\pi} \dots \dots \dots (11)$$

Постоянное β опредѣлится изъ того условія, что v при $\rho = \frac{\pi}{2}$ должна обращаться въ нуль, т.-е. мы имѣемъ условіе:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0 \dots \dots \dots (12)$$

Откуда находимъ:

$$(\alpha - \beta \cdot \varphi)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

т.-е.

$$\alpha - \beta \cdot \frac{\pi}{2} = 0; \quad \beta = \alpha : \frac{\pi}{2}$$

что, въ виду ур—нія (11), дастъ намъ

$$\beta = \frac{h}{\pi^2} \dots \dots \dots (13)$$

Теперь, въ виду ур—ній (11) и (13), ур—ніе (10) можно переписать такъ:

$$x = \frac{h}{\pi} \cdot \varphi - \frac{h}{\pi^2} \cdot \frac{\varphi^2}{2} \dots \dots \dots (14)$$

Если требуется получить обратное движеніе стержня такого же характера, какъ прямое, то дальше мы очерчиваемъ эксцентрикъ симметричной кривой. — Эксцентрикъ такого рода имѣетъ передъ первымъ то преимущество, что переходъ отъ одного направленія движенія къ противоположному совершается безъ потери въ скорости и поэтому безъ удара (— скорость при концѣ хода равна нулю).

Если эксцентрикъ обладаетъ свойствомъ *постоянной ширины*, то вмѣсто одного ролика можно поставить два, неизмѣнно связанныхъ съ стержнемъ, и между ними помѣстить эксцентрикъ; въ этомъ случаѣ *силовое замыканіе пары* становится ненужнымъ.

Можно также вмѣсто эксцентрика сдѣлать шайбу съ желобкомъ, въ который входилъ бы роликъ отъ стержня. Желобокъ долженъ быть ограниченъ кривыми, параллельными кривой для даннаго закона движенія на радіусъ ролика.

Часто бываетъ, что центръ вращенія эксцентрика не лежитъ на линіи движенія конца стержня; подобный случай схематически представленъ на фиг. 156: здѣсь эксцентрикъ EKC вращается около оси O , между тѣмъ какъ стержень ходитъ въ направленіи NB , черезъ центръ O не проходящемъ. Проводимъ прямую BN (продолженная ось стержня AB) и изъ центра эксцентрика O проводимъ окружность, касательную къ этой прямой BN . Пусть точкой ихъ касанія будетъ точка N . Проведемъ теперь какой-нибудь радіусъ-векторъ эксцентрика MC и изъ точки C касательную CM къ упомянутому выше кругу. Легко видѣть, что когда на линію движенія AB придетъ точка C , то стержень къ этому времени передвинется на разность между длинами касательныхъ CM и BN , при чемъ эксцентрикъ повернется на уголъ NOM .

Если намъ дана зависимость перемѣщенія стержня отъ времени или отъ угловъ поворота эксцентрика, тогда мы опредѣляемъ длины касательныхъ для разныхъ угловъ поворота и безъ труда строимъ кривую эксцентрика такимъ образомъ: дѣлимъ окружность ON на n равныхъ частей, въ точкахъ дѣленія проводимъ касательныя къ этой окружности и, выбравъ наименьшую изъ нихъ, откладываемъ послѣдовательно на остальныхъ отрѣзки, возрастаніе которыхъ соответствуетъ закону движенія, совершенно такъ же, такъ это мы дѣлали для возрастающихъ векторовъ эксцентрика въ случаѣ, когда центръ его лежалъ на линіи движенія.

Во всѣхъ этихъ выводахъ мы предполагали, что стержень опирается на эксцентрикъ своимъ концомъ, т.-е. опирается одной точкой. Въ дѣйствительности на концѣ стержня всегда дѣлаютъ роликъ, которымъ стержень и опирается на эксцентрикъ. Тогда роль конца стержня перейдетъ (въ плоскомъ сѣченіи) къ центру ролика; поэтому эксцентрикъ (фиг. 157) придется ограничить не той кривой AOB , которая удовлетворяетъ данному закону движенія, а кри-

вой kl , съ параллельной и отстоящей отъ нея на величину радіуса ролика.

Не трудно также рѣшить вопросъ о формѣ эксцентрика, который долженъ дѣйствовать на полосу, соединенную со стержнемъ и обыкновенно перпендикулярную къ его длинѣ (фиг. 158). Допустимъ, что центръ эксцентрика находится на продолженіи оси стержня. Такъ какъ направленіе полосы всегда касательно къ эксцентрику и перпендикулярно къ линіи движенія стержня, то мы можемъ получить зависимость OB , — разстоянія центра O отъ полосы KM , — отъ угловъ поворота эксцентрика, т.-е. можемъ получить законъ движенія стержня, если будемъ проводить къ эксцентрику касательныя и опускать на нихъ перпендикуляры изъ точки O .

Какой-нибудь перпендикуляръ OP , соотвѣтствующій вектору OA и образующій уголъ φ съ линіей OB , опредѣлитъ собою удаленіе конца B стержня отъ центра O . Послѣ поворота эксцентрика на уголъ φ , стержень передвинется на величину $OP - OB$. Соединивъ различные концы P перпендикуляровъ, получимъ кривую, выражающую законъ передвиженія стержня.

Обратно, если намъ дана зависимость перемѣщеній отъ угловъ поворота φ эксцентрика, то мы строимъ, какъ въ обыкновенномъ эксцентрикѣ, геометрическое мѣсто точекъ P и къ каждому вектору этого геометрическаго мѣста, въ концѣ его, возставляемъ перпендикуляръ. Огибающая этихъ перпендикуляровъ и дастъ очертанія эксцентрика, дѣйствующаго на полосу и двигающаго стержень согласно данному закону.

Къ числу подобныхъ эксцентриковъ можно отнести *круглый дискъ*, эксцентрично сидящій на оси вращенія O и заключенный въ раму, составляющую одно цѣлое съ стержнемъ (фиг. 159). Очевидно, что такой эксцентрикъ представляетъ изъ себя ничто иное, какъ механизмъ двойного ползуна, въ которомъ кривошипъ имѣетъ длину OC — разстояніе между центромъ диска C и центромъ вращенія O , слѣдовательно, законъ движенія стержня будетъ тотъ же, что и тамъ, т.-е. движеніе будетъ *гармоническое*. Въ этомъ можно убѣдиться, впрочемъ, и изъ прямого разсмотрѣнія движенія диска C . Проведемъ касательную какую-нибудь TT и изъ центра вращенія O опустимъ на нее перпендикуляръ OP . Изъ треугольника PEH , гдѣ H есть точка касанія, а E — точка пересѣченія EH , параллельной OC , съ $\perp$ -омъ OP , получаемъ:

$$OP = OE + EP = r + EH \cos \angle PEH = r + OC \cos \angle POC;$$

обозначивъ разстояніе OC черезъ d , а уголъ $\angle POC$ черезъ φ , находимъ:

$$PO = r + d \cos \varphi.$$

Какъ видимъ, движеніе, дѣйствительно, будетъ гармоническое.

Maximum $PO = r + d$ (при $\varphi = 0$), *minimum* $PO = r - d$ (при $\varphi = \pi$).
Перемѣщеніе стержня выражается формулой вида

$$\Delta = d (1 - \cos \varphi),$$

и поэтому ходъ стержня будетъ равенъ $2d$.

Эксцентрики или кулаки могутъ имѣть также форму цилиндровъ, сръзанныхъ по нѣкоторой кривой, на которую и будетъ опираться и скользить по ней конецъ стержня, могущаго ходить въ направленіи, параллельномъ оси цилиндра (фиг. 160). Легко вычертить, напр., вертикальную проекцію кривой, по которой долженъ быть сръзанъ цилиндръ, если намъ дана зависимость движенія стержня отъ времени. Представимъ себѣ круглый цилиндръ, стоящій на горизонтальной плоскости проекцій (нижнее основаніе предполагаемъ кругомъ, такъ что оно перпендикулярно оси). Дѣлимъ окружность основанія на n равныхъ частей, проводимъ черезъ полученныя точки дѣленія вертикали (образующія) и откладываемъ на нихъ отъ оси проекцій xx ординаты, измѣненіе длины которыхъ зависитъ отъ угловъ, образуемыхъ соотвѣтственными радіусами основаній съ нѣкоторымъ опредѣленнымъ направленіемъ, принятымъ нами за начальное такъ же, какъ перемѣщеніе стержня зависитъ отъ времени.

Можно также развернуть цилиндръ на плоскости, раздѣлить развернутое основаніе на n равныхъ частей и въ точкахъ дѣленія возставить ординаты, пользуясь опять закономъ движенія стержня.

Если, напр., дано, что за поворотъ эксцентрика стержень долженъ двигаться пропорціонально квадратамъ временъ, то мы беремъ какую-нибудь ординату за наименьшую, проще всего, ординату начальной точки, и дальнѣйшія ординаты увеличиваемъ послѣдовательно на $1 \cdot \frac{h}{n^2}$, $4 \cdot \frac{h}{n^2}$, $9 \cdot \frac{h}{n^2}$ и т. д., гдѣ черезъ h обозначенъ ходъ стержня.

Затѣмъ для обратнаго хода стержня, за второй поворотъ эксцентрика, строимъ кривую, требуемую заданными условіями движенія и т. д. Получимъ такимъ образомъ нѣкоторую кривую, которая, будучи наведена на цилиндръ, и покажетъ, какъ долженъ быть сръзанъ цилиндръ для полученія требуемаго движенія.

Можно также на цилиндрѣ сдѣлать каналъ, въ который могъ бы входить роликъ отъ стержня; форма канала опредѣляется, понятно, указаннымъ выше способомъ.

Встрѣчаются эксцентрики и другихъ формъ, напр., коническіе и т. п.; способъ очерчиванія ихъ не представляетъ никакихъ затрудненій и ведется аналогично разсмотрѣннымъ примѣрамъ.

Если стержень, опирающійся на эксцентрикъ, не двигается прямолинейно, а вращается около опредѣленнаго центра, то, по данной зависимости его качаній отъ времени, мы строимъ его положенія O_1E , O_1F , O_1K (фиг. 161), соотвѣтствующія различнымъ угламъ поворота

эксцентрика. Откладывая эти углы отъ нѣкотораго вектора, принятаго за начальный, получаемъ рядъ векторовъ эксцентрика, длина коихъ, очевидно, должна быть равна соотвѣтственно OF , OK ... Такимъ образомъ мы и получимъ очертаніе нужнаго намъ эксцентрика.

Иногда предъявляется требованіе, чтобы на нѣкоторой части своего пути стержень остановился и оставался нѣкоторое время въ покоѣ. Не трудно видѣть, какъ въ этомъ случаѣ долженъ быть очерченъ эксцентрикъ въ соотвѣтственной его части.

Для простаго эксцентрика кривая на этой части обратится въ окружность, описанную изъ центра эксцентрика. Переходъ отъ этой дуги окружности къ дальнѣйшей кривой слѣдуетъ сдѣлать постепеннымъ, подобравъ нѣкоторую переходную кривую.

Передача при помощи промежуточныхъ звеньевъ.

Огд. 1. Отношеніе между скоростями и направленіями постоянно.

Рядовое соединеніе зубчатыхъ колесъ.

Рядовое соединеніе зубчатыхъ колесъ является наиболѣе важнымъ въ практическомъ отношеніи примѣромъ передачи движенія при помощи промежуточныхъ звеньевъ.

Положимъ, что вращеніе отъ одной оси требуется передать другой, при чемъ передаточное число довольно велико. Какъ извѣстно для зубчатой цилиндрической передачи большаго передаточнаго числа не берутъ, а если такое будетъ задано, то передачу разбиваютъ на рядъ передачъ: колесо, сидящее на оси A (фиг. 162) и имѣющее n_1 зубцовъ, зацѣпляютъ съ колесомъ, сидящимъ на оси B и имѣющимъ N_1 зубцовъ; на той же оси B сидитъ колесо съ числомъ n_2 зубцовъ, — оно зацѣпляется съ колесомъ N_2 (гдѣ N_2 — число зубцовъ его) на оси C , на этой же оси C сидитъ еще колесо n_3 , зацѣпляющееся съ N_3 на оси D и т. д.

Положимъ, что движеніе передается отъ колеса A ; тогда ведущими будутъ колеса $n_1, n_2, n_3, \dots$ а ведомыми $N_1, N_2, N_3, \dots$. При z_1 оборотахъ колеса A колесо B совершитъ $\frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ, C совершитъ $\frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ, колесо D — $\frac{n_3}{N_3} \cdot \frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ и т. д. Вообще, число оборотовъ послѣдней оси будетъ равно числу оборотовъ первой (z_1), помноженному на дробь, числитель которой есть произведеніе чиселъ зубцовъ ведущихъ колесъ, а знаменатель — произведеніе чиселъ зубцовъ ведомыхъ колесъ.

Послѣдняя ось будетъ вращаться или въ ту же сторону, что и

первая, или въ обратную,—это зависитъ отъ числа промежуточныхъ передачъ: если мы назовемъ число всѣхъ передачъ черезъ m , то можемъ написать, что число оборотовъ послѣдней оси равно

$$(-1)^m \cdot \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots n_m}{N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \dots N_m} z_1 \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ z_1 есть число оборотовъ первой оси, знакъ же «минусъ» будетъ указывать, что вращеніе послѣдней оси совершается въ сторону, противоположную первой.

Замѣтимъ здѣсь, что если на какой-либо оси сидитъ только одно колесо, сцѣпляющееся съ предшествующимъ и послѣдующимъ колесами, то вліянія на величину передаточнаго числа оно, очевидно, не имѣетъ; на самомъ дѣлѣ, это колесо мы можемъ разсматривать, какъ два одинаковыхъ колеса, посаженныхъ на одну и ту же ось; поэтому въ выраженіи (1) дробь $\frac{n_k}{N_{k-1}}$, соотвѣтствующая этому колесу, будетъ равна единицѣ; колесо это вліяетъ лишь на измѣненіе смысла вращенія.

Такимъ образомъ, разбивая передачу на рядъ передачъ, мы можемъ выполнить какое угодно передаточное число. Въ такъ называемомъ *переборѣ* токарныхъ станковъ мы имѣемъ одинъ изъ простѣйшихъ примѣровъ разбивки передачи.

Ступенчатый шкивъ S , называемый также *конусомъ* (фиг. 163), получающій свое вращеніе отъ фабричнаго вала, сидитъ вольно на шпинделѣ A передней бабки токарнаго станка, на шпинделѣ и вращается обтачиваемый предметъ. Колесо N_2 наглухо, при помощи шпонки, соединено съ осью A и, въ свою очередь, можетъ быть соединяемо при помощи выключателя, не показаннаго на чертежѣ, со шкивомъ S ; малое зубчатое колесо n_1 составляетъ одно цѣлое со шкивомъ S .

Параллельно оси AA въ бабкѣ имѣется другая ось B съ парой зубчатыхъ колесъ N_1 и n_2 . Ось эта можетъ быть, смотря по надобности, удаляема или приближаема къ оси AA , съ этою цѣлью она сдѣлана пустой и сидитъ на оси C , шипы которой, O_1 и O_2 , эксцентричны по отношенію къ оси B . Вращая рукоятку D , насаженную на шипъ O_1 , мы, очевидно, будемъ приближать или удалять ось B отъ оси A .

Если хотятъ, чтобы шпиндель AA вращался быстро, то выключателемъ соединяютъ колесо N_2 со шкивомъ S , удаляютъ вращеніемъ рукоятки D ось B отъ оси A , такъ что колеса N_1 и n_2 перестанутъ сцѣпляться съ колесами n_1 и N_2 ; тогда шпиндель будетъ получать вращеніе непосредственно отъ вала при помощи шкива S .

Если же нужно получить медленное вращеніе шпинделя, то разъединяютъ колесо N_2 и шкивъ S , вращеніемъ рукоятки D заставляютъ

заставить сцепляться съ колесомъ K_3 или колесо K_1 , или колесо K_2 ; этимъ дается возможность сообщить винту суппорта вращеніе въ ту или другую сторону.

Червячное колесо смѣнное, и по числу его зубцовъ, числу винтовыхъ нитокъ на червякѣ E и шагу винта B не трудно опредѣлить шагъ нарезки на обрабатываемомъ предметѣ.

Къ числу рядовыхъ соединеній относятся также различные *счетчики чиселъ оборотовъ*. Такъ, напр., для отсчитыванія единицъ, десятковъ и проч. можно употребить слѣдующее соединеніе: на ось A , непосредственно соединенную такъ или иначе съ той, число оборотовъ которой (за извѣстный промежутокъ времени) мы хотимъ считать, мы насаживаемъ наглухо колесо съ *однимъ* зубцомъ; слѣдующая ось B (фиг. 166) имѣетъ колесо съ 10 впадинами, соотвѣствующими каждой зубцу колеса A . Если на осяхъ A и B посадимъ указатели, ходящіе по циферблатамъ, то указатель, соединенный съ колесомъ A , будетъ, очевидно, показывать *десятыя* части, а указатель B —*единицы* оборотовъ, если циферблаты имѣютъ дѣленія 0, 1, 2, . . . , 8, 9.

Далѣе, на ту же ось B мы можемъ посадить еще колесо съ однимъ зубцомъ, подобное колесу A , а на слѣдующей оси C —колесо съ десятию впадинами; тогда указатель, соединенный съ C , будетъ давать на своемъ циферблатѣ *десятки* оборотовъ и т. д. При такомъ устройствѣ послѣ полного оборота какой-либо оси слѣдующая повернется на $\frac{1}{10}$ оборота.

Другой способъ счета оборотовъ основывается на *относительномъ движеніи двухъ колесъ, оси которыхъ совпадаютъ*.

Червякъ E (фиг. 167) сидитъ на оси B и одновременно зацепляется съ колесами M и N , изъ которыхъ одно, N , сидитъ *вольно* на оси A , а другое, M , съ тою же осью A соединено наглухо. Колесо N на передней сторонѣ имѣетъ два циферблата: внутренній и внѣшній; на внутренній указываетъ стрѣлка K_2 , соединенная съ осью A , а на внѣшній—стрѣлка K_1 , неподвижно укрѣпленная въ станкѣ. Вольно-сидящее колесо N имѣетъ 100 зубцовъ, колесо M —101 зубецъ. При одномъ оборотѣ червяка колесо N повернется на $\frac{1}{100}$ оборота, и, значить, указатель k_1 будетъ указывать на шкалѣ единицы и десятки оборотовъ червяка до 100. За 101 оборотъ червяка колесо N сдѣлаетъ $\left(1 + \frac{1}{100}\right)$ оборота, колесо же M сдѣлаетъ лишь одинъ оборотъ; иными словами, оно отстанетъ отъ колеса N , и указатель k_2 подвинется относительно внутренней скалы на *одно дѣленіе*.

Такимъ образомъ, на внутренней скалѣ будутъ отсчитываться сотни оборотовъ до 10.000.

Переходя къ вопросу о рядовомъ соединеніи для какого-нибудь даннаго передаточнаго числа, можемъ видѣть, что если число это не особенно сложно, то не трудно разбить его всегда на произведение такихъ дробей, чтобы каждая изъ нихъ не превосходила допускаемыхъ на практикѣ передаточныхъ чиселъ, а также, чтобы числители и знаменатели этихъ дробей, выражающіе числа зубцовъ колесъ, не уклонялись ни въ ту, ни въ другую сторону отъ ходовыхъ чиселъ зубцовъ (не были бы меньше 6 или больше 150 и т. д.).

Если требуется выполнить, напр., передачу $\frac{1}{60}$, то, разбивая ее на 2, съ 6-ю зубцами у каждаго изъ ведущихъ колесъ, имѣемъ:

$$\frac{1}{60} = \frac{6 \cdot 6}{2160} = \frac{6}{45} \cdot \frac{6}{48};$$

такимъ образомъ, у большихъ колесъ числа зубцовъ будутъ 40 и 48.

Если передаточное число настолько сложно или если разбить его на нѣсколько дробей по указанному выше способу почему-либо нельзя, то приходится прибѣгнуть къ приближенному способу. Можно, напримѣръ, вмѣсто даннаго передаточнаго числа взять въ нѣкоторыхъ случаяхъ приближенное къ нему, такое, чтобы оно хорошо разлагалось на рядъ болѣе простыхъ дробей. Такимъ образомъ, передача получается приближенной.

Пусть, напр., требуется, чтобы одна стрѣлка показывала часы, а другая—совершала полный оборотъ по циферблату за время обращенія луны, равное 29 дн. 12 час. 44 мин. (приблизительно).

Обращая это число въ часы, получаемъ $\frac{42524}{60}$ часовъ. Слѣдовательно, въ то время, какъ одна стрѣлка (часовая) совершаетъ $\frac{1}{12}$ оборота, другая совершаетъ $\frac{60}{42524}$ оборота; поэтому передаточное число въ данномъ случаѣ равно

$$\frac{60}{42524} : \frac{1}{12} = \frac{720}{42524} = \frac{180}{10631}.$$

Число, стоящее въ знаменателѣ получившейся у насъ дроби, первоначальное, значить, разложеніе на простѣйшія дроби невозможно. Но если вмѣсто 42524 мы возьмемъ число 42525, то получимъ:

$$\frac{720}{42525} = \frac{80}{4725} = \frac{8}{75} \cdot \frac{10}{63}.$$

Такимъ образомъ путемъ пробъ всегда можно подобрать удобныя передачи.

довательныя подходящія дроби суть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, то всякая дробь, заключенная между ними, будетъ болѣе сложной, чѣмъ эти двѣ. То же замѣчаніе относится вообще ко всякимъ двумъ дробямъ, удовлетворяющимъ соотношенію

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}.$$

Дробь $\frac{a+c}{b+d}$, какъ не трудно убѣдиться, находится именно въ такомъ соотношеніи съ дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Такимъ образомъ, если послѣ указаннаго обращенія въ непрерывную дробь и полученія подходящихъ эти послѣднія окажутся неудобными, то, взявъ двѣ подходящія дроби, $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, мы находимъ затѣмъ цѣлый рядъ другихъ подходящихъ дробей, интерполируя сначала между $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, т. - е. составляя дробь $\frac{a+c}{b+d}$, потомъ между этой и каждой изъ дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и т. д.

Перейдемъ теперь къ тому случаю соединеній колесъ, при которомъ оси нѣкоторыхъ колесъ имѣютъ сами движеніе около неподвижной оси.

Представимъ себѣ такое соединеніе: колесо N (фиг. 168), сидящее на оси A , зацѣпляется съ колесомъ n , сидящимъ на оси B ; на той же оси B сидитъ колесо N_1 , зацѣпляющееся съ колесомъ n_1 , вольно сидящимъ на оси A . Ось B сама сидитъ на рычагѣ AB , могущемъ вращаться около A .

Пусть колесо N совершаетъ z оборотовъ; при неподвижномъ рычагѣ колесо n совершило бы z_1 оборотовъ, при чемъ

$$z_1 = \frac{N}{n} \cdot \frac{N_1}{n_1} \cdot z.$$

Если же рычагъ совершаетъ въ то же самое время p оборотовъ въ ту же сторону, что и N , то разсмотрѣніе соотносительныхъ движеній мы можемъ свести опять къ случаю неподвижнаго рычага, если дадимъ всей системѣ скорость вращенія, равную и противоположную скорости рычага; исполнивъ это, имѣемъ

$$z_1 - p = \frac{N}{n} \cdot \frac{N_1}{n_1} (z - p),$$

или иначе

$$z_1 - p = k (z - p),$$

гдѣ k есть передаточное число между колесами N и n_1 .

Точно такъ же, если мы имѣемъ послѣднее колесо n_1 сидящимъ не на первой оси A , а на томъ же рычагѣ AB (фиг. 169), то число оборотовъ этого колеса около его оси опредѣлится изъ того же соотношенія. Дѣйствительно, то обстоятельство, что колесо n_1 участвуетъ вмѣстѣ съ рычагомъ во вращеніи около оси A , можно разсматривать какъ вращеніе колеса около своей оси B со скоростью рычага и параллельное перенесеніе по кругу радіуса AB . Слѣдовательно, число оборотовъ колеса n_1 опредѣлится какъ сумма числа оборотовъ рычага p и числа оборотовъ, происходящаго вслѣдствіе вращенія колеса N относительно рычага, т.-е.

$$z_1 \text{ (кол. } n_1) = p + k(z - p)$$

(параллельное перенесеніе къ вращенію не прибавитъ ничего).

Если между колесами N и n_1 имѣется лишь одно колесо и если колесо N неподвижно, то, такъ какъ $N_1 = n$, мы находимъ:

$$z_1 = p - \frac{N}{n_1} \cdot p,$$

а при $N = n_1$ получимъ

$$z_1 = 0,$$

т.-е. колесо n_1 въ этомъ случаѣ будетъ лишь передвигаться параллельно самому себѣ, что, впрочемъ, въ данномъ случаѣ можно видѣть и прямо: промежуточное колесо, очевидно, нисколько не вліяетъ на отношеніе чиселъ оборотовъ, а заставляетъ лишь колесо n_1 вращаться относительно рычага въ сторону, противоположную его вращенію. Въ такомъ частномъ видѣ механизмъ носитъ названіе *парадокса Ферюссона*.

Если, далѣе, промежуточнаго колеса нѣтъ и если колеса N и n_1 равны (они въ этомъ случаѣ непосредственно сцѣпляются одно съ другимъ), то, очевидно, колесо n_1 совершитъ около своей оси $2p$ оборотовъ при неподвижномъ колесѣ N въ ту же сторону, что и рычагъ. Обратно, если мы заставимъ колесо n_1 перемѣщаться параллельно самому себѣ, то колесо N совершитъ въ то же время $2p$ оборотовъ въ сторону вращенія рычага. Это соображеніе положено въ основу механизма *Уатта*, гдѣ рычагъ K (фиг. 170), качаясь около O , увлекаетъ во вращеніе рычагъ AB ; A есть ось вала, съ которымъ соединено наглухо колесо A . Тяга M берется достаточно длинной для того, чтобы при качаніи коромысла K въ небольшихъ предѣлахъ можно было предположить, что она перемѣщается параллельно самой себѣ, т.-е., иными словами, что колесо B , неизмѣнно соединенное съ этой тягой M , не имѣетъ вращательнаго движенія, а лишь одно поступательное. Легко видѣть, что при качаніи рычага AB , вызываемомъ, какъ было указано, качаніемъ коромысла K , колесо A будетъ вращаться вдвое быстрѣе рычага AB .

Наглядно можемъ представить себѣ дѣйствіе механизма, если возьмемъ два равные круга A и B (фиг. 171) и прокатимъ, положимъ, колесо B по A , положимъ, въ положеніе B . Радиусъ этого колеса BP приметъ теперь положеніе B_1P_2 , причемъ дуга OP будетъ равна OP_2 .

Для того, чтобы этотъ радиусъ BP и при новомъ положеніи B_1 круга B сохранилъ свое направленіе, необходимо теперь повернуть колесо A на уголъ, равный углу $P_2B_1P_1 = 2\varphi$; тогда точка P_2 придетъ въ P_1 и радиусъ BP окажется въ положеніи B_1P_1 , параллельномъ прежнему. Обратно, если при своемъ вращеніи около колеса A колесо B около своей оси B вращенія имѣть не будетъ, то именно съ этой удвоенной угловой скоростью и будетъ вращаться колесо A *).

Если при вращеніи опредѣленнаго предмета, напр. рѣзца въ цилиндро-сверлильныхъ станкахъ, требуется имѣть еще его медленное поступательное передвиженіе, то можно примѣнить рядовое соединеніе, разобранный въ первомъ примѣрѣ. Рѣзцы s, s (фиг. 172) укрѣплены на шайбѣ E , прикрѣпленной болтами къ шайбѣ D , снабженной выступомъ, позволяющимъ ей перемѣщаться вдоль пустотѣлаго вала L , на которомъ имѣется продольный вырѣзъ, въ которомъ и скользятъ этотъ выступъ. Шайба D , кромѣ того, представляетъ собою гайку для винта A , помѣщеннаго внутри этого пустотѣлаго вала L . На этомъ же валу L сидитъ (на шпонкѣ) рычагъ M , несущій на себѣ ось съ колесами n и N_1 ; наглухо съ винтомъ A соединено колесо n_1 ; колесо N наглухо соединено съ станиной. Пустотѣлый валъ L получаетъ вращеніе отъ приводнаго фабричнаго вала и заставляетъ поэтому вращаться и шайбу E съ рѣзцами s, s и рычагъ M съ его колесами. При p оборотахъ рычага винтъ сдѣлаетъ z_1 оборотовъ, гдѣ

$$z_1 = p - \frac{N}{n} \cdot \frac{N_1}{n_1} \cdot p,$$

или

$$z_1 = p \left(1 - \frac{NN_1}{nn_1} \right),$$

и, слѣд., если шагъ винта есть h , то рѣзецъ подвигается на

$$h(z_1 - p)$$

или на

$$- \frac{NN_1}{nn_1} ph.$$

*) Механизмъ этотъ, такъ называемое *планетное колесо Уатта*, былъ примѣненъ имъ для передачи движенія отъ коромысла K паровой машины (фиг. 170) главному валу A ; обыкновеннымъ кривошипнымъ механизмомъ Уаттъ воспользоваться не могъ, такъ какъ этотъ послѣдній механизмъ былъ въ то время патентованъ.

Подобное же сочетаніе зубчатыхъ колесъ можно представить себѣ и для конической передачи—аналогично цилиндрической. Колесо N (фиг. 173) наглухо соединено съ осью A , а колесо n_1 —вольно; колеса n и N_1 вращаются около оси, сидящей на рычагѣ K , который самъ можетъ вращаться около оси A . При неподвижномъ рычагѣ K колесо n_1 , при z оборотахъ колеса N сдѣлаетъ $-\frac{NN_1}{nn_1}z$ оборотовъ, и, слѣдовательно, при p оборотахъ рычага K сдѣлаетъ

$$z_1 = p - \frac{NN_1}{nn_1}(z - p)$$

оборотовъ (передаточное число является здѣсь отрицательнымъ по смыслу передачи вращенія). Приборъ этотъ иногда употребляется въ нѣкоторыхъ прядильныхъ машинахъ.

Механизмъ можно внѣшнимъ образомъ измѣнить: колеса n и N_1 соединить въ одно ($N_1 = n$); колеса N и n_1 дѣлаются равными (фиг. 174); рычагъ K выполненъ въ видѣ цилиндрическаго зубчатаго колеса K , внутри котораго помѣщается ось колеса n . Колесо K сидитъ, конечно, на оси A вольно, точно такъ же, какъ и колесо n_1 . Для симметріи прибавляютъ еще колесо n_2 . Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ: $z + z_1 = 2p$. Измѣняя число оборотовъ колеса K , можно измѣнить и число z_1 .

Отд. 2. Отношеніе скоростей переменнo, —направленій постоянно.

Шарниръ Гука.

Въ порядкѣ послѣдовательности классификаціи Виллиса мы теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію передачи при посредствѣ промежуточныхъ твердыхъ звеньевъ, гдѣ отношеніе скоростей переменнo, а направленій—постоянно. Здѣсь мы остановимся на одномъ изъ наиболѣе употребительныхъ механизмовъ, а именно: на *шарнирѣ Гука*.

Шарниръ Гука представляетъ изъ себя муфту для двухъ валовъ, геометрическія оси которыхъ пересѣкаются въ точкѣ O (фиг. 175). Муфта устраивается въ видѣ двухъ перекладинъ, соединенныхъ крестообразно подъ прямымъ угломъ другъ къ другу; оси перекладинъ пересѣкаются въ той же точкѣ O , въ которой пересѣкаются и оси валовъ; каждая перекладина перпендикулярна къ своему валу:

$$CD \perp OB, \quad EF \perp OA.$$

Концы валовъ снабжены вилами, въ которыя и входятъ, какъ шипы, концы перекладинъ.

Механизмъ, конечно, можетъ быть видоизмѣняемъ съ внѣшней стороны; напр., вмѣсто перекладинъ берутъ иногда шарикъ (фиг. 176),

въ которомъ дѣлають 4 радіальныхъ углубленія; соотвѣтствующіе осямъ этихъ углубленій радіусы лежатъ въ одной плоскости, образуя притомъ 2 діаметра сферы, перпендикулярные другъ другу; центръ этой сферы долженъ лежать въ точкѣ O . Въ упомянутыя углубленія входятъ шипики каждаго изъ валовъ. Сущность дѣйствія остается, конечно, та же, что и прежде.

При вращеніи вала A (фиг. 175) ось перекладины EF будетъ двигаться въ плоскости, перпендикулярной къ оси A , вращаясь около центра O со скоростью вращенія вала A ; точно также перекладина CD во все время вращенія будетъ оставаться въ плоскости, проходящей также черезъ точку O и перпендикулярной къ оси B ; уголъ между плоскостями будетъ равенъ углу между осями. Опишемъ мысленно изъ центра O сферу какого-либо радіуса. Ось каждой изъ перекладинъ будетъ діаметромъ этой сферы. Пусть плоскости движенія этихъ діаметровъ будутъ OC_0H и OC_0KF (фиг. 177). Разсматривать движеніе цѣлыхъ діаметровъ мы не будемъ, мы разсмотримъ движеніе радіусовъ OC_0 и OF_0 , представляющихъ какъ бы половины перекладинъ,—другія половины движутся совершенно такъ же, какъ эти.

Два эти радіуса OC_0 и OF_0 , движутся въ своихъ плоскостяхъ такъ, что *уголъ COF между ними всегда остается прямымъ*, такъ какъ перекладины соединены другъ съ другомъ неизмѣнно подъ прямымъ угломъ.

Начальнымъ положеніемъ радіусовъ условимся считать одно изъ тѣхъ, при которыхъ радіусы OC_0 и OF_0 лежатъ въ плоскости чертежа, перпендикулярной къ плоскости, проходящей чрезъ оси A и B , радіусъ OC_0 въ этотъ моментъ будетъ перпендикуляренъ къ этой послѣдней плоскости (A, B), т.-е. къ обѣимъ осямъ. Пусть теперь этотъ радіусъ OC_0 передвинулся въ своей плоскости OC_0H на уголъ φ и занялъ положеніе OC ; радіусъ OF_0 также передвинется въ своей плоскости OC_0KF_0 на нѣкоторый уголъ ψ , и займетъ нѣкоторое определенное положеніе OF ; при этомъ, какъ было указано, уголъ COF будетъ попрежнему прямой.

Спросимъ себя, каково соотношеніе между этими двумя углами φ и ψ . Для вывода его намъ придется воспользоваться теперь одной изъ основныхъ формулъ сферической тригонометріи, выводъ которой мы ниже и помѣщаемъ.

Пусть изъ точки O , какъ изъ центра, описана сфера радіусомъ, равнымъ единицѣ, и пусть на этой сферѣ лежитъ сферическій треугольникъ ABC (фиг. 178), дуги котораго AB, BC и AC представляютъ собою дуги большихъ круговъ. Положимъ, наконецъ, что двѣ изъ этихъ дугъ, напр., AB и AC , не превышаютъ четверти окружности большого круга, т.-е. меньше $\frac{\pi}{2}$.

Проведемъ радіусы OA , OB и OC и два послѣдніе продолжимъ до пересѣченія въ точкахъ Q и P съ касательными, проведенными въ вершинѣ A къ сторонамъ AB и AC . Касательныя и радіусы пересѣкутся такъ, какъ это изображено на чертежѣ, только въ томъ случаѣ, если дуги AB и AC меньше $\frac{\pi}{2}$. Такъ какъ радіусъ сферы принять за единицу, то, какъ видно непосредственно изъ чертежа:

$$AQ = \operatorname{tg} \angle AOB;$$

если же мы условимся, уголъ AOB и ему подобные измѣрять дугами, ихъ стягивающими, то предыдущее ур—ніе напишется такъ:

$$AQ = \operatorname{tg} \smile AB,$$

или, обозначая $\smile AB$ черезъ c , подобно тому, какъ это дѣлается въ плоской тригонометріи, находимъ:

$$AQ = \operatorname{tg} c$$

Подобнымъ же образомъ мы найдемъ:

$$AP = \operatorname{tg} b$$

$$OQ = \sec c$$

$$OP = \sec b$$

Кромѣ того, на основаніи формулъ плоской тригонометріи, изъ треугольниковъ OPQ и APQ имѣемъ:

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2 OP \cdot OQ \cos a$$

и

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2 AP \cdot AQ \cos A.$$

Сравнивая эти выраженія между собою и съ выведенными выше равенствами, получаемъ:

$$\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2 \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A = \sec^2 b + \sec^2 c - 2 \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a.$$

Замѣняемъ $\sec^2 x$ черезъ $(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ и сокращаемъ:

$$\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2 \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A = 1 + \operatorname{tg}^2 b + 1 + \operatorname{tg}^2 c - 2 \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a,$$

или

$$- 2 \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A = 2 - 2 \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a,$$

или

$$- \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A = 1 - \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a.$$

Замѣняя въ этой формулѣ $\operatorname{tg} x$ черезъ $\frac{\sin x}{\cos x}$, а $\sec x$ черезъ $\frac{1}{\cos x}$ и приводя формулу къ цѣлому виду, получаемъ:

$$- \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\sin c}{\cos c} \cdot \cos A = 1 - \frac{1}{\cos b} \cdot \frac{1}{\cos c} \cdot \cos a,$$

или

$$- \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \cos b \cdot \cos c - \cos a;$$

окончательно:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A.$$

т.-е. *cosinus* стороны равенъ произведенію *cosinus'овъ* двухъ другихъ сторонъ плюсъ произведение *sinus'овъ* тѣхъ же сторонъ на *cosinus* угла между ними.

Въ сферической тригонометріи доказывается затѣмъ, что та же теорема имѣетъ силу для всякаго сферическаго треугольника, какъ велики бы ни были его стороны.

Поэтому можемъ примѣнить ее и къ нашему треугольнику C_0CF (фиг. 177).

Здѣсь придется положить:

$$AB = c = \frac{\pi}{2} + \psi,$$

$$AC = b = \varphi,$$

$$BC = a = \frac{\pi}{2},$$

$$A = \alpha.$$

Тогда получимъ:

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos \varphi \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + \psi \right) + \sin \varphi \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + \psi \right) \cos \alpha,$$

откуда:

$$0 = -\cos \varphi \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot \cos \alpha,$$

или

$$\cos \varphi \cdot \sin \psi = \sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot \cos \alpha;$$

дѣля обѣ части этого ур—нія на $\cos \varphi \cdot \cos \psi$, получаемъ:

$$\frac{\cos \varphi \cdot \sin \psi}{\cos \varphi \cdot \cos \psi} = \frac{\sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot \cos \alpha}{\cos \varphi \cdot \cos \psi},$$

или окончательно

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

при чемъ углы φ и ψ отчитываются здѣсь отъ того начальнаго положенія, при которомъ, какъ мы указывали выше, оба радіуса, OC_0 и OF_0 , находятся въ плоскости, перпендикулярной къ плоскости осей.

Найдя зависимость между углами поворота осей, найдемъ зависимость между угловыми скоростями вращенія этихъ осей, между ω и ω' , гдѣ ω есть угловая скорость вращенія оси B (радіуса OC), а ω_1 —оси A (радіусъ OF). Мы знаемъ, что

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{и} \quad \omega' = \frac{d\psi}{dt} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

Дифференцируя по t ур—ніе (1), находимъ:

$$\frac{1}{\cos^2 \psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \cos \alpha,$$

Тотъ же результатъ получился бы у насъ, если бы къ данной системѣ мы примѣнили соотношение (1). Относя ψ къ валу B , а φ къ A , находимъ для (A, B)

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha;$$

пусть соотвѣтствующій уголъ поворота вала C равенъ φ_1 ; тогда имѣемъ:

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \cos \alpha_1;$$

α есть уголъ между осями A и B , а α_1 — между B и C ; при равенствѣ этихъ угловъ (на что было указано выше) получаемъ:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_1.$$

т.-е.,

$$\varphi = \varphi_1.$$

Теперь предположимъ, что вилки вала B перпендикулярны другъ къ другу (фиг. 180). Валъ C вращаться равномерно не будетъ. На самомъ дѣлѣ, изъ того же соотношенія (1) между валами B и A имѣемъ:

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha;$$

здѣсь ψ попрежнему есть уголъ поворота вала B , а φ — вала A . Для второй пары валовъ B и C , имѣемъ при углѣ φ_1 поворота вала C ,

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \psi \cdot \cos \alpha_1,$$

такъ какъ теперь валъ B по отношенію къ C играетъ ту же роль, что у первой пары A по отношенію къ B . Два послѣднія уравненія даютъ намъ соотношение

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha_1;$$

оно показываетъ намъ, что углы φ и φ_1 одинаковыми быть не могутъ никогда, за исключеніемъ того случая, когда углы α обращаются въ нуль: $\alpha = \alpha_1 = 0$; но въ этомъ послѣднемъ случаѣ всѣ три вала по существу обращаются въ одинъ.

Замѣтимъ, наконецъ, что при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ передача при помощи шарнира Гука становится невозможной.

Отд. 3. Отношеніе скоростей и направленій перемѣнно.

Къ этому классу механизмовъ относятся такъ-называемые *направляющіе* механизмы. Цѣль ихъ — при помощи ряда шарнирныхъ соединений получить прямолинейное движеніе опредѣленной точки механизма. Практическое примѣненіе эти механизмы находятъ себѣ

тамъ, гдѣ почему-либо нежелательно устройство направляющихъ для прямолинейнаго движенія опредѣленной части механизма, подобное тому, какое имѣется въ паровой машинѣ для ползуна. Въ направляющихъ механизмахъ эта прямая получается не вслѣдствіе присутствія призматическихъ направляющихъ, а какъ *траекторія* нѣкоторой опредѣленной точки механизма.

Механизмы, относящіеся сюда, можно раздѣлить на *приближенные* и *точные*. Въ первыхъ прямая замѣняется нѣкоторой кривой траекторіей, близко къ прямой подходящей и не трудно выполняемой; въ другихъ—траекторія будетъ теоретически точной прямой.

Механизмъ Эванса.

Механизмъ Эванса принадлежитъ къ числу *приближенныхъ* направляющихъ механизмовъ и основанъ на томъ, извѣстномъ изъ кинематики, свойствѣ отрѣзка прямой, AB , по которому середина его, точка C (фиг. 181), при скользяніи концовъ A и B по сторонамъ прямого угла BOA описываетъ окружность центра O и радіуса OC .

Если мы возьмемъ довольно длинный стержень AB и поставимъ его подъ небольшимъ угломъ ψ къ линіи OA (фиг. 182), то при перемѣщеніи конца B стержня отъ B къ O и дальше къ B_1 на $OB_1 = OB$ получится очень малое передвиженіе точки A , могущее быть выраженнымъ въ видѣ:

$$AB - AB \cos \psi = a(1 - \cos \psi),$$

гдѣ $a = AB$; передвиженіе конца B въ то же время выразится черезъ $a \sin \psi$, и отношеніе обоихъ перемѣщеній будетъ равно:

$$\frac{a(1 - \cos \psi)}{a \sin \psi} = \frac{2 \sin^2 \frac{\psi}{2}}{2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}.$$

Какъ видимъ, при достаточно маломъ углѣ ψ это отношеніе очень мало, между тѣмъ какъ въ то же самое время передвиженіе конца B , при достаточно длинномъ стержнѣ, можетъ быть достаточно велико.

Если мы соединимъ точку C , середину стержня, съ центромъ O рычагомъ CO , могущимъ вращаться около этой точки O , а конецъ A заставимъ двигаться по прямой OA , то конецъ B опишетъ прямую OB . Такъ какъ перемѣщеніе точки A мало, то вмѣсто малаго отрѣзка прямой AA_0 можно взять дугу круга достаточно большаго радіуса, для чего соединяемъ точку A рычагомъ съ нѣкоторой неподвижной точкой O_1 , находящейся на перпендикулярѣ къ OA_0 , проведенномъ изъ A_0 —средняго положенія точки A ; при этомъ A будетъ описы-

вать малыя дуги круга радіуса O_1A ; точка B будетъ двигаться, собственно говоря, не по прямой OB , а по нѣкоторой кривой, которая можетъ, однако, при соотвѣтственно выбранныхъ a , ψ и радіусѣ O_1A , весьма близко подходить къ этой прямой OB ; во всякомъ случаѣ эта кривая съ этой прямой будетъ имѣть три общія точки: B , O и B_1 , гдѣ BB_1 есть весь размахъ точки B .

Съ геометрической стороны движеніе точки B будетъ движеніемъ одной изъ точекъ прямого отрѣзка AC , опирающагося своими концами на двѣ окружности радіусовъ O_1A и OC .

Разсмотрѣнный приближенный направляющій механизмъ носить названіе механизма *Эванса* и употребляется въ индикаторахъ,—замѣтимъ, что вмѣсто точки C можно взять и другую точку отрѣзка AB ; какъ извѣстно, при движеніи отрѣзка въ углѣ она опишетъ эллипсъ; найдя центръ кривизны эллипса для средняго положенія точки, замѣняемъ дугу эллипса дугою окружности, имѣющей центръ въ центрѣ кривизны.

Параллелограммъ Уатта.

Механизмъ Уатта, также, какъ и механизмъ Эванса, принадлежитъ къ числу *приближенныхъ* направляющихъ механизмовъ. Представимъ себѣ рычагъ OA (фиг. 183) съ шарнирнымъ параллелограммомъ $ABCD$. Пусть рычагъ качается около средняго его положенія OA_0 , отклоняясь въ обѣ стороны на уголъ α . Заставимъ точку B двигаться по прямой, перпендикулярной къ OA_0 и дѣлящей стрѣлку A_0N пополамъ; при этомъ точка C опишетъ нѣкоторую кривую CC_0C_1 ; обратно, если по этой кривой мы будемъ вести точку C , то точка B будетъ двигаться по прямой. Кривую C_1C_0C мы замѣняемъ окружностью, проходящей черезъ точки C , C_0 и C_1 , т.-е. черезъ среднее и два крайнихъ положенія точки C ; центръ этой окружности будетъ лежать на линіи B_0C_0 средняго положенія точекъ B и C .—Соединяемъ теперь рычагомъ точку C съ найденнымъ центромъ O_1 ; теперь при качаніи рычага OA точка B будетъ описывать уже не прямую, а нѣкоторую кривую, которая, однако, при соотвѣтствующемъ выборѣ элементовъ этого механизма, можетъ весьма близко подходить къ прямой. Ходъ точки B , т.-е. отрѣзокъ BB_1 , будетъ, конечно, равенъ отрѣзку AA_1 .

Нетрудно убѣдиться, что мы имѣемъ здѣсь движеніе, съ геометрической точки зрѣнія подобное движенію въ механизмѣ *Эванса*. На самомъ дѣлѣ, продолживъ BC и проводя $OK \parallel CD$, получаемъ

$$OK = CD = const.$$

и

$$CK = DO = const.;$$

следовательно, мы имѣемъ движеніе отрѣзка $СК$ постоянной величины, опирающаго своими концами на окружности радиусовъ O_1C и OK и центровъ O и O_1 ; точка K будетъ описывать дугу K_1K , гдѣ K_1 лежитъ, очевидно, на продолженіи B_0C_0 и соотвѣтствуетъ точкѣ K , когда BC приметъ положеніе B_0C_0 . Обыкновенно ходъ точки B дается заранѣе. Имѣя его, выбираютъ длину рычага OA (часто берутъ $OA = 1,5 BB_1$), и чертятъ дугу AA_0A_1 такъ, чтобы хорда AA_1 равнялась данному ходу; находятъ затѣмъ стрѣлку ея A_0N , дѣлятъ ее пополамъ и проводятъ черезъ точку дѣленія прямую, параллельную AA_1 , которая и будетъ предполагаемой траекторіей точки B ; задаются затѣмъ длинами AB и AD и чертятъ рычагъ и параллелограммъ въ обоихъ крайнихъ положеніяхъ и въ среднемъ (т.-е. $ABCD$, $A_0B_0C_0D_0$ и $A_1B_1C_1D_1$) такъ, конечно, чтобы точка B приходилась на своей прямой. Такимъ образомъ находятъ три соотвѣтствующихъ положенія точки C , т.-е. точки C , C_0 и C_1 , и ищутъ центръ окружности, проходящей черезъ эти три точки. Затѣмъ соединяютъ точку C съ центромъ O_1 при помощи рычага, и тогда, при качаніи рычага AO около центра O , а—рычага O_1C около O_1 , точка B приблизительно будетъ описывать прямую BB_0B_1 .

Замѣтимъ, что если мы соединимъ прямою OB точки O и B и опредѣлимъ точку пересѣченія этой прямой BO съ прямой CD , то точка E также будетъ описывать прямую,—это видно изъ того, что фигуры ODE и OAB всегда остаются подобными другъ другу; на самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ равенство отношеній:

$$DE:AB = DO:OA;$$

значитъ, отношеніе $DE:AB$ есть *const.*; прямая AB и DE всегда между собою параллельны; такимъ образомъ, точки B и E будутъ всегда лежать на одной прямой съ точкой O ; поэтому если B будетъ двигаться по прямой, то, въ виду постоянства отношенія $BO:EO$, точка E будетъ двигаться по прямой, параллельной первой.

Поэтому, найдя такую точку E , можно удалить части AD , AB и BC , оставивъ лишь рычаги OD , O_1C и звено CD ; точка E этого звена и будетъ описывать прямую. Механизмъ будетъ имѣть видъ, изображенный на фиг. 184.

Механизмъ Поселье.

Этотъ механизмъ принадлежитъ къ разряду *точныхъ* направляющихъ механизмовъ и основанъ на такъ называемой *инверсии* или множеніи кривыхъ.

Пусть мы имѣемъ окружность O и точку A (фиг. 185), и нѣкоторый данный по величинѣ отрѣзокъ прямой k . Проводимъ изъ точки A лучъ AL , пересѣкающій окружность O въ точкахъ B и B_1 и ищемъ

на томъ же лучѣ AL такую точку C , чтобы произведение $AB \times AC$ равнялось данной величинѣ k^2 . Оказывается, что геометрическимъ мѣстомъ такихъ точекъ C будетъ нѣкоторая опредѣленная окружность O_1 . Дѣйствительно, подыскавъ еще такую точку C_1 , чтобы произведение $AB_1 \times AC_1$ равнялось опять k^2 , можемъ написать

$$\begin{aligned} AB \times AC &= k^2, \\ AB_1 \times AC_1 &= k^2. \end{aligned}$$

Перемноживъ, имѣемъ:

$$(AB \times AB_1) \cdot (AC \times AC_1) = k^4.$$

Но произведение $(AB_1 \times AB)$ есть величина постоянная, равная AT^2 , гдѣ AT есть касательная къ кругу O изъ точки A , значитъ, произведение $AC \times AC_1$ есть также величина постоянная, что и показываетъ намъ, что точки C и C_1 лежатъ также на окружности, — это и будетъ упомянутая выше окружность O_1 . Не трудно убѣдиться въ томъ, что обѣ общія касательныя къ этимъ двумъ окружностямъ TT_1 и $T_0T'_0$ проходятъ черезъ ту же точку A .

Въ томъ частномъ случаѣ, когда точка A лежитъ на окружности O (фиг. 186), геометрическимъ мѣстомъ точекъ C будетъ прямая, занимающая вполнѣ опредѣленное (при данномъ k) положеніе относительно круга O . Дѣйствительно, если мы проведемъ черезъ A діаметръ AA_1 , возьмемъ на немъ какую-нибудь точку K такъ, чтобы произведение $AA_1 \times AK$ равнялось данной величинѣ, и въ этой точкѣ K возставимъ перпендикуляръ KC къ діаметру AA_1 , то для какой-нибудь точки C этого перпендикуляра, пользуясь подобіемъ треугольниковъ ABA_1 и ACK , можемъ написать:

$$\frac{AC}{AA_1} = \frac{AK}{AB},$$

откуда получаемъ:

$$AK \cdot AA_1 = AC \cdot AB,$$

что и указываетъ намъ, что точка C принадлежитъ искомому геометрическому мѣсту. Такимъ образомъ, съ перемѣщеніемъ точки B по окружности O , точка C будетъ двигаться по нѣкоторой вполнѣ опредѣленной прямой CK . Эта идея и положена въ основу механизма *Поселье*. Здѣсь взять шарнирный ромбъ $BMCN$ (фиг. 187); точки M и N его связаны тягами AM и AN съ неподвижной точкой A , при чемъ эти рычаги AM и AN между собою равны.

Не трудно видѣть, что въ такомъ случаѣ точки A , B и C , при всѣхъ измѣненіяхъ фигуры остаются на одной прямой AC (по свойству ромба діагональ $BC \perp MN$ и дѣлитъ ее пополамъ, а вслѣдствіе равенства $MA = NA$, точка A всегда придется на этомъ же перпендикулярѣ BC).

Окружность изъ M радіуса MC проходитъ черезъ точку B , такъ

какъ $MC = MB$; отсюда слѣдуетъ, что произведение $AB \cdot AC$ есть величина постоянная; дѣйствительно, упомянутая окружность M имѣетъ опредѣленный радіусъ MC , а точка A находится въ опредѣленномъ разстояніи MA отъ центра M этой окружности, и это послѣднее соотношеніе между окружностью M и точкой A имѣетъ мѣсто при всѣхъ положеніяхъ ромба. Такимъ образомъ у насъ имѣется постоянное по величинѣ произведение векторовъ AB и AC .

Заставимъ теперь конецъ одного вектора, B , описывать окружность, проходящую черезъ точку A (сравни съ фиг. 186), тогда конецъ другого, точка C , опишетъ точную прямую. Выбираемъ за центъ этой окружности нѣкоторую точку O такъ, что

$$OB = OA,$$

соединяемъ ее рычагомъ съ точкой B и такимъ образомъ получаемъ направляющій механизмъ, носящій названіе механизма *Поселье* (1864 г.). Если BO не будетъ равно OA , то точка C будетъ описывать дугу нѣкоторой, вполне опредѣленной въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, окружности.

Механизмъ Гарта.

Въ механизмѣ Гарта, являющемся, какъ и механизмъ Поселье, точнымъ направляющимъ механизмомъ, положены въ основу четыре стержня, соединенные шарнирами (фиг. 188); длины ихъ подбираются такъ, чтобы они составляли діагонали и бока равнобокой трапеціи $KPMN$. Возьмемъ на стержнѣ KN какую-нибудь точку A и сдѣлаемъ ее неподвижной, такъ что стержень KN получитъ возможность вращенія около этой точки.

Проводимъ изъ этой точки A линію AE , параллельную NM ; точки пересѣченія ея съ діагоналями KM и PN обозначимъ черезъ B и C . Не трудно видѣть, что фигура $BCMN$ будетъ также равнобокой трапеціей. Точки B и C будутъ вполне опредѣленными точками стержней KM и PN , разъ выбрана точка A ; дѣйствительно, мы имѣемъ:

$$KB = \frac{KA}{KN} \cdot KM \text{ и } PC = \frac{KA}{KN} \cdot PN;$$

выбравъ точку A , мы тѣмъ самымъ задаемся длиною KA , а этимъ въ свою очередь, опредѣляются длины KB и PC , т.-е., точки B и C .

Около трапеціи $BCMN$, какъ равнобокой, можно описать кругъ; пусть онъ пересѣчетъ прямую KN еще въ точкѣ E . Сѣкущія KBM и KNF даютъ соотношенія:

$$KF \cdot KN = KM \cdot KB = const.;$$

откуда слѣдуетъ, что F есть нѣкоторая вполне опредѣленная точка прямой KN . Далѣе, слѣдующія изъ точки A , AC и AE , даютъ:

$$AE \cdot AN = AC \cdot AB = \text{const.},$$

что показываетъ намъ, что, если мы соединимъ точку B рычагомъ съ неподвижной точкой O , такъ что она будетъ описывать дугу окружности радіуса OB , то точка C будетъ описывать или прямую, при $OB = OA$, или окружность. Весь механизмъ будетъ состоять только изъ пяти стержней: KN , KM , PM , PN и OB , при двухъ неподвижныхъ точкахъ: O и A .

КОНЕЦЪ ПЕРВОЙ ЧАСТИ.

ЧАСТЬ II.

Общая теорія машинъ.

Треніе въ машинахъ.

Треніе скользянія (1-го рода).

Общіе законы тренія.

Предметомъ *Общей теоріи машинъ*, какъ было указано въ введеніи къ этому курсу, является изученіе вопроса о выгодности работы данной машины и, въ болѣе широкомъ смыслѣ,—о способахъ наилучшей утилизаціи данныхъ внѣшнихъ силъ; было также сдѣлано указаніе на сложность изученія этого вопроса во всемъ его объемѣ,—сложность, заставившую, напр., изученіе вопроса о полезности термическихъ и гидравлическихъ двигателей выдѣлить въ особый обширный отдѣлъ нашей науки. Въ данномъ случаѣ мы рассмотримъ лишь ту часть «Общей теоріи машинъ», которая трактуетъ о простыхъ машинахъ, а также и объ обыкновенныхъ передаточныхъ механизмахъ.

Во всякомъ механизмѣ сила, приводящая его въ движеніе, дѣйствуетъ не свободно, а при нѣкоторыхъ условіяхъ, ограничивающихъ свободу ея проявленій; обыкновенно мы заставляемъ ее дѣйствовать не по ея направленію, а по нѣкоторому другому, намъ желательному. Такимъ образомъ имѣющаяся у насъ сила можетъ быть разложена на двѣ: одну, дѣйствующую именно въ этомъ желательномъ для насъ направленіи, и другую, къ нему перпендикулярную. Въ пространствѣ данная сила можетъ быть разложена по тремъ осямъ, но это, въ сущности, дѣла не мѣняетъ, ибо для насъ важно лишь то, чтобы послѣ разложенія получились силы, дѣйствующія по желательному для насъ направленію, и силы, ему перпендикулярныя.

Такимъ образомъ можно сказать, что въ нашихъ устройствахъ *свободная дѣйствія силъ нѣтъ*, а есть дѣйствіе, стѣсненное извѣстными условіями, дѣйствіе *несвободное*.

Возьмемъ самый простой и обыденный примѣръ дѣйствія силы на какое-либо тѣло. Пусть тѣло *A* (фиг. 189) лежитъ на нѣкоторой

поверхности MN и пусть на него дѣйствуетъ нѣкоторая сила F , наклонная къ этой поверхности и долженствующая двигать по ней тѣло A . Это желательное для насъ дѣйствіе произведетъ, однако, не вся сила F , а лишь части ея, а именно слагающая ея по направленію движенія, H ; другая же слагающая, V , перпендикулярная къ направленію движенія, уничтожается, какъ говорятъ обыкновенно, сопротивленіемъ поверхности, по которой происходитъ движеніе.

По принципу постоянства работъ, мы, при такомъ разложеніи силы и разсмотрѣніи ея дѣйствія, теоретически говоря, не теряемъ ничего, такъ какъ та работа, которая производится силой H на пути, пройденномъ тѣломъ въ ея направленіи,—значить, работа для насъ желательная,—въ точности будетъ равна работѣ дѣйствующей силы на пути, пройденномъ тѣломъ A въ направленіи дѣйствія силы.

То же самое должно было бы наблюдаться и въ каждомъ механизмѣ вообще; всю ту работу, которую мы затрачиваемъ на одномъ концѣ его, мы должны были бы получить на другомъ. На дѣлѣ однако этого не бываетъ никогда: во время процесса передачи работы однимъ элементомъ механизма другому всегда наблюдается извѣстная потеря ея. Поэтому вполне естественнымъ является введеніе новаго представленія,—представленія о *коэффициентѣ полезнаго дѣйствія* даннаго механизма, т.-е. объ отношеніи работы полезной, дѣйствительно произведенной механизмомъ, къ работѣ, поглощенной имъ, дѣйствительно нами затраченной. Если количество работы, затраченной нами, мы обозначимъ черезъ L , полезной — черезъ L_n , коэф. пол. д.—черезъ η , то между этими тремя величинами существуетъ соотношеніе:

$$\eta = \frac{L_n}{L} \quad (1)$$

Теоретически говоря, этотъ коэффициентъ во всякомъ механизмѣ долженъ быть равенъ единицѣ, въ дѣйствительности же величина коэффициента пол. д. всецѣло зависитъ отъ устройства самаго механизма.

Теперь самъ собою возникаетъ весьма важный и существенный вопросъ: что же понижаетъ въ данномъ механизмѣ коэффициентъ полезнаго дѣйствія, каковъ характеръ факторовъ, вызывающихъ это пониженіе и въ чемъ проявляется ихъ дѣйствіе? Сначала мы рассмотримъ этотъ вопросъ примѣнительно къ простымъ механизмамъ,—къ механизмамъ передаточнымъ.

Легко видѣть, что причиной пониженія коэффициента полезнаго дѣйствія въ этихъ механизмахъ является то обстоятельство, что дѣйствующая сила, по разложеніи своемъ, даетъ слагающую, нормальную къ поверхности взаимнаго скользянія двухъ какихъ-либо работающих вмѣстѣ частей механизма. Какъ мы уже указывали, эту нормальную силу принято въ теоретической механикѣ считать уничто-

жаемой сопротивленіемъ поверхности; на дѣлѣ же эта сила также производитъ свое дѣйствіе, для насъ нежелательное, *вредное*. Объ уничтоженіи этой нормальной силы мы могли бы говорить лишь въ томъ единственномъ случаѣ, если бы можно было сказать, что при взаимномъ скольженіи двухъ тѣлъ не проявляется дѣйствіе никакихъ другихъ постороннихъ силъ, такъ наз. *силъ тренія*. Однако, уже самыя поверхностныя наблюденія показываютъ намъ, что такія постороннія силы, силы *трения*, при скольженіи двухъ тѣлъ существуютъ всегда, разъ только является сила, прижимающая одну деталь къ другой,—всегда въ такихъ случаяхъ замѣчается присутствіе какой-то силы, препятствующей относительному движенію двухъ тѣлъ. Если бы этихъ силъ тренія не было, то принципъ инерціи былъ бы наблюдаемъ нами во всей чистотѣ его; напр., шаръ, лежащій на горизонтальной плоскости, испытавъ толчокъ, пришелъ бы въ движеніе, которое могло бы продолжаться безъ конца (конечно, при соблюденіи нѣкоторыхъ соотвѣтствующихъ условій); на дѣлѣ же треніе заставляетъ его, по истеченіи нѣкотораго промежутка времени, прекратить свое движеніе. Шаръ, какъ тѣло физическое, имѣетъ вѣсъ; сила тяжести сама по себѣ слагающей въ направленіи движенія этого шара, которая могла бы помѣшать движенію и остановить шаръ, не даетъ; но зато она, какъ сила нормальная къ поверхности скольженія, даетъ начало постороннимъ силамъ, дѣйствующимъ уже *по линіи движенія* и притомъ каждый разъ непременно въ направленіи, *противоположномъ направленію дѣйствительнаго движенія тѣла*.

Вслѣдствіе чего, однако, появляются у насъ эти побочныя, вредныя для насъ силы? Мы назвали ихъ вредными потому, что намъ всегда приходится затрачивать нѣкоторую добавочную работу, идущую на преодоленіе тренія, и эта затрачиваемая нами работа, по существу, никогда не можетъ быть намъ возвращена обратно. Если я поднимаю маятникъ, отклоняю его на нѣкоторый уголъ отъ положенія равновѣсія, то на это поднятіе я затрачиваю извѣстную работу, которую, однако, маятникъ можетъ мнѣ возвратитъ на своемъ пути къ первоначальному положенію равновѣсія. При треніи не приходится наблюдать чего-либо подобнаго, — часть работы, расходуемой нами для приведенія въ дѣйствіе механизма, уходитъ здѣсь на что-то совершенно безслѣдно, теряется для насъ; это обстоятельство въ свою очередь естественно вызываетъ вопросъ о коэф-тѣ пол. дѣйствія.

Нужно замѣтить, что, по господствующимъ въ физикѣ воззрѣніямъ, работа не можетъ быть затрачена совершенно безрезультатно,—разъ она гдѣ-либо произведена, она должна непременно сказаться въ чемъ-либо.

Исходя изъ этого положенія, очень многіе физики пытались рѣшить вопросъ о силахъ тренія, но, несмотря на это, до сихъ поръ у насъ нѣтъ хоть сколько-нибудь удовлетворительнаго и цѣльнаго

объясненія, съ одной стороны, того, куда затрачивается эта исчезающая работа, а съ другой стороны—совершенно необъяснимъ самый процессъ затраты ея.

Одна изъ наиболѣе простыхъ попытокъ объяснить явленія тренія принадлежитъ *Poncelet*; она довольно наглядна для случая двухъ тѣлъ, скользящихъ другъ по другу. Въ послѣднее время возникли другія теоріи, также довольно наглядныя для случая относительнаго движенія твердыхъ и жидкихъ тѣлъ, но онѣ еще недостаточно разработаны, и поэтому говорить объ нихъ мы не будемъ.

Poncelet указываетъ, что самыя гладкія и наилучшимъ образомъ полированные поверхности въ сущности остаются всегда шероховатыми, въ чемъ можно убѣдиться непосредственно, хотя бы, напр., при помощи лупы. Всякая поверхность всегда представляетъ изъ себя рядъ неправильныхъ возвышеній, неровностей и т. д. Поверхность двухъ тѣлъ, лежащихъ одно на другомъ, представлена въ разрѣзѣ (въ утрированномъ видѣ) на фиг. 190 и уже при первомъ взглядѣ на этотъ чертежъ становится понятнымъ, что при существованіи усилія, прижимающаго эти детали другъ къ другу, уже просто для того, чтобы сдвинуть одно тѣло по поверхности другого, мы должны потратить нѣкоторую опредѣленную работу. Становится далѣе яснымъ, на что идетъ упомянутая выше часть работы: легко видѣть, что въ данномъ случаѣ она тратится прежде всего на взаимныя деформированія.

Представимъ себѣ въ сильно увеличенномъ видѣ крайній зубецъ *A* поверхности одного тѣла (фиг. 191) и находящій на него зубецъ *B* поверхности другого. Прежде чѣмъ зубецъ *B* пройдетъ надъ зубцомъ *A*, онъ долженъ его деформировать (предполагается, что эти два зубца непременно должны столкнуться одинъ съ другимъ при перемѣщеніи верхняго тѣла справа—налѣво). Если указанные деформации будутъ лежать въ предѣлахъ упругости, то зубья будутъ деформироваться, оказывая при этомъ сопротивленіе передвиженію одного тѣла по другому. Мы допустили здѣсь, что деформации эти лежатъ въ предѣлахъ упругости; въ этомъ случаѣ работа, затраченная нами, будетъ несомнѣнно возвращена; повторится то же самое, что происходитъ при упругомъ сгибаніи бруса, — зубья придутъ въ колебательное движеніе. Упругія колебанія зубьевъ дадутъ въ результатѣ дрожаніе тѣла, вызовутъ соотвѣтствующій условіямъ звукъ (шорохъ, наблюдаемый почти всегда при скользяніи тѣла одного по другому). Итакъ, работа будетъ намъ возвращена; но эта возвращаемая намъ тѣломъ работа совершенно бесполезна для насъ, — воспользоваться ею мы не можемъ, и она цѣликомъ пропадаетъ для насъ, — это *потерянная работа*.

Когда же деформации перейдутъ черезъ предѣлъ упругости, то получаютъ уже остающіяся деформации, и работа, потерянная на

нихъ, также не можетъ быть намъ возвращена. Потеря работы въ этомъ случаѣ можетъ быть нами оцѣнена при помощи самихъ же этихъ деформаций; здѣсь она скажется въ полученіи нѣкотораго количества тепла и проч. Въ общемъ случаѣ, такимъ образомъ, вся работа, затрачиваемая при треніи, съ одной стороны, пойдетъ на упругія колебанія частицъ, а съ другой—на произведеніе остающихся деформаций и на тепловыя явленія.

Соотвѣтственно величинѣ получающихся деформаций на поверхности соприкосновенія въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ выдѣлится свое количество тепла. Почему здѣсь происходитъ именно выдѣленіе тепла, каковъ этотъ тонкій механизмъ перехода въ тепло, — на эти вопросы, при современномъ состояніи науки, отвѣтить нельзя.

Съ одной стороны, можно представить себѣ, что выдѣляемое здѣсь тепло можетъ быть использовано нами въ смыслѣ полученія полезной для насъ работы, т.-е. для перемѣщенія тѣла; но, съ другой стороны, это выдѣленіе тепла очень нежелательно и вредно потому, что оно обусловливаетъ собою облегченіе дальнѣйшихъ деформаций; такъ какъ упругость тѣла и его способность противостоятъ деформациямъ быстро уменьшаются съ возрастаніемъ температуры его *).

Зависимость тренія отъ разныхъ обстоятельствъ впервые была изслѣдована Кулономъ; имъ же были высказаны и законы этого тренія. При помощи довольно примитивныхъ опытовъ онъ ввелъ нѣкоторыя численныя соотношенія, которыя и носятъ обыкновенно названіе «законовъ тренія твердыхъ тѣлъ». Нельзя, однако, забывать, что эти соотношенія только болѣе или менѣе приблизительно выражаютъ дѣйствительную зависимость тренія отъ различныхъ условій.

Опыты Кулона были очень просты: для того чтобы опредѣлить силу тренія, возникшую при движеніи одного тѣла по другому, онъ строганіемъ и шлифовкой придавалъ имъ возможно гладкую поверхность. Затѣмъ опредѣлялъ вѣсъ одного изъ нихъ, движущагося, а также вѣсъ груза, на него накладываемаго, — допустимъ, что сила, прижимающая эти 2 тѣла, одно къ другому, равна P ,—и, наконецъ, находимъ величину той силы X , которую нужно было приложить къ тѣлу въ горизонтальномъ направленіи, чтобы оно двигалось равномерно; эта сила X представляла собою силу натяженія веревки грузомъ X . Веревка перекидывалась черезъ блокъ (фиг. 192); ab —доска изъ одного матеріала,— mn —изъ другого; къ этой послѣдней доскѣ mn наглухо прикрѣпляется ящикъ S для грузовъ; доска ab накрѣпко придѣлывается къ массивной стойкѣ ccc .

Наблюдая явленіе тренія для различныхъ матеріаловъ, Кулонъ нашелъ, что

*) „Горніе“ шиповъ опасно въ томъ отношеніи, что такой „загорѣвшійся“, накаленный шипъ уже оказывается не въ состояніи противостоятъ тому моменту, на который онъ, холодный, былъ рассчитанъ, и поэтому сейчасъ же ломается.

1) *сила тренія пропорціональна слагающей всѣхъ силъ, дѣйствующей нормально къ поверхности скольженія.*

Собственно говоря, Кулонъ выразилъ свое заключеніе немного иначе, а именно, онъ выразился, что *сила тренія пропорціональна вѣсу P движущагося тѣла*, но мы будемъ говорить именно о силахъ слагающихъ-нормальныхъ въ поверхности стыка.

Если эту нормальную слагающую назовемъ черезъ P , а горизонтальную силу, которую нужно приложить къ тѣлу, чтобы его сдвинуть, — значитъ, силу, равную по величинѣ силѣ тренія, — черезъ F , то, по Кулону, между P и F существуетъ соотношеніе:

$$F = fP \dots \dots \dots (2)$$

коэффициентъ пропорціональности f называется *коэффициентомъ тренія* и представляетъ собою число отвлеченное. По Кулону, этотъ коэффициентъ *не зависитъ отъ нормальнаго давленія P , каково бы это послѣднее ни было.*

Производя далѣе опыты съ различными матеріалами, Кулонъ нашелъ, что

2) *Коэффициентъ f зависитъ отъ матеріала трущихся тѣлъ и отъ состоянія трущихся поверхностей* (степени ихъ гладкости и смазки).

Мы должны замѣтить, что случай тренія *сухихъ* тѣлъ нужно строго отличать отъ тренія тѣлъ *смазанныхъ*, какъ такъ присутствіе слоя жидкости на поверхности соприкосновенія трущихся тѣлъ, хотя бы даже въ минимальномъ количествѣ, значительно мѣняетъ явленія тренія; этотъ иногда тончайшій слой жидкости, присутствіе котораго зачастую бываетъ даже трудно замѣтить, тѣмъ не менѣе въ нѣкоторыхъ случаяхъ, какъ, напримѣръ, при какихъ-либо точныхъ изслѣдованіяхъ, можетъ обусловить собою ошибочность результатовъ и выводовъ.

3) *Коэффициентъ тренія покоя больше коэффициента тренія движенія.*

Необходимо условиться, что слѣдуетъ понимать подъ этими двумя терминами, сдѣлать это слѣдуетъ потому, что понятіе тренія нераздѣльно связано съ понятіемъ движенія, треніе подразумѣваетъ наличность движенія, и поэтому сопоставленіе понятія о треніи съ понятіемъ о покоѣ можетъ вызвать недоразумѣніе. Дѣло здѣсь въ томъ, что если твердое тѣло въ продолженіе нѣкотораго времени уже лежало на поверхности другого и если мы желаемъ теперь сдвинуть его съ его мѣста, то, какъ оказывается, въ первый, начальный моментъ движенія для того, чтобы его сдвинуть, нужно употребить усиліе большее, чѣмъ потомъ, когда движеніе уже началось. Въ первый моментъ, когда я только что сдвинулъ тѣло, бывшее до того въ покоѣ, я долженъ приложить къ нему для этого нѣкоторую силу F_1 , и пусть

$$F_1 = f_1 P \dots \dots \dots (3)$$

когда же тѣло начало уже двигаться, то для поддержанія *равномернаго движенія* *) нужна будетъ уже другая сила; пусть

$$F_2 = f_2 P \dots \dots \dots (4)$$

Изъ опытовъ оказывается, что сила F_2 меньше прежней, такъ что можно написать:

$$F_1 > F_2 \dots \dots \dots (5)$$

что въ виду рав. (3) и (4), переписется такъ:

$$f_1 > f_2 \dots \dots \dots (5)$$

Коэффициентъ f_1 и носитъ названіе *коэффициента тренія покоя*, а f_2 — *движенія*.

Затѣмъ Кулонъ вывелъ, что

4) Коэффициентъ тренія f не зависитъ отъ величины поверхности соприкосновенія трущихся тѣлъ, т.-е. сила тренія будетъ всегда выражаться произведеніемъ изъ нормальнаго давленія P на соответствующій коэффициентъ f ; такимъ образомъ, будетъ ли движущееся (скользящее) тѣло опираться на другое по большой поверхности или по малой, сила тренія въ обоихъ случаяхъ будетъ одинакова (приблизительно), если только внѣшнее давленіе въ томъ и другомъ случаяхъ будетъ одно и то же.

Наконецъ, Кулонъ вывелъ, что

5) Коэффициентъ тренія f не зависитъ отъ скорости скольженія одного тѣла по другому.

Посмотримъ теперь, какъ могутъ быть выяснены всѣ законы Кулона при помощи приведеннаго выше нагляднаго представленія *Poncelet*. Возьмемъ первый законъ Кулона. Понятно, что чѣмъ больше будетъ нормальная сила, тѣмъ больше будутъ деформации, испытываемыя тѣломъ, — значитъ, тѣмъ больше будетъ работа, потребная для передвиженія тѣлъ одного по другому, а это и значитъ, что тѣмъ больше будетъ сила тренія.

Второй законъ понятенъ самъ собою, и особыхъ трудностей для объясненія не представляетъ.

Третій законъ также не трудно выяснить совершенно наглядно по *Poncelet*. Въ томъ случаѣ, когда одно тѣло въ продолженіе нѣкотораго времени спокойно лежало на другомъ, оно успѣло своими зубцами въѣсться, войти во впадины другого (на этотъ процессъ, понятно, необходимо нѣкоторое время). Понятно, что чѣмъ больше времени продолжается это соприкосновеніе тѣлъ, тѣмъ больше и глубже (конечно, въ извѣстныхъ предѣлахъ) будетъ совершаться это въѣданіе; очевидно теперь, что, принуждая такое въѣвшееся тѣло сдвинуться,

*) Указывающаго на равенство движущей силы и ей противоположной силы тренія.

мы должны затратить большую работу, чѣмъ тогда, когда мы его уже сдвинули, потому, что въ первомъ случаѣ намъ придется произвести и вызвать деформации большія, чѣмъ во второмъ, когда зубцы будутъ проходить другъ надъ другомъ, не глубоко входя во впадины и мало деформируясь.

Четвертый законъ Кулона уже не вполне соответствуетъ наглядному представленію *Poncelet*. Дѣйствительно, при большихъ поверхностяхъ соприкосновенія деформации зубьевъ, вообще говоря, будутъ меньше, и значитъ, принимая представленіе *Poncelet*, мы должны принять, что коэффициентъ тренія зависитъ отъ величины давленія на единицу площади. Болѣе точныя наблюденія и показываютъ, что дѣйствительно имѣется нѣкоторая зависимость между величиною нормального давленія на единицу площади и коэффициентомъ тренія.

Послѣдній законъ Кулона—*„коэффициентъ тренія не зависитъ отъ скорости движенія“*—опять ведетъ къ нѣкоторымъ разногласіямъ между результатами опытовъ Кулона и послѣдующихъ наблюдателей. Зубцы будутъ деформироваться сообразно ихъ виду: весьма возможно, что скорость деформирования будетъ имѣть здѣсь нѣкоторое вліяніе на коэффициентъ тренія, но авторы, пытавшіеся установить зависимость этого коэффициента отъ скорости скольженія, ни къ какимъ определеннымъ результатамъ не пришли.

При производствѣ опытовъ, сюда относящихся, надо быть въ высшей степени осторожнымъ, надо обращать самое тщательное вниманіе на состояніе трущихся поверхностей, помня, что треніе тѣлъ сухихъ и чѣмъ-либо смазанныхъ есть нѣчто, совершенно отличное одно отъ другого. Если бы при производствѣ опытовъ мы могли ручаться за сухость трущихся поверхностей, то установить зависимость между скоростью скольженія и коэффициентомъ тренія еще было бы возможно; но разъ за эту сухость поручиться нельзя, разъ явленіе тренія происходитъ не во всей чистотѣ его, то становится крайне затруднительнымъ вывести какія-либо заключенія о существованіи указанной зависимости, и поэтому относительно послѣдняго закона мы придерживаемся до сихъ поръ тѣхъ же воззрѣній, что и Кулонъ. Конечно, на практикѣ, какъ мы уже говорили, абсолютно сухихъ тѣлъ не бываетъ, но въ данномъ случаѣ мы хотимъ сказать лишь, что выясненіе вопроса о зависимости коэффициента f отъ скорости возможно лишь тогда, когда поверхности двухъ трущихся тѣлъ смазываются *регулярно*; разъ этой правильности смазки нѣтъ, не можетъ быть, *eo ipso*, и рѣчи о выясненіи вліянія случайнаго слоя жидкости на тотъ или другой полученный нами результатъ. Замѣтимъ здѣсь, что въ дальнѣйшемъ подъ коэффициентомъ тренія будетъ подразумѣваться коэффициентъ тренія какъ бы сухихъ твердыхъ тѣлъ.

Движеніе тѣла по горизонтальной плоскости.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію простѣйшихъ случаевъ равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на какое-либо твердое тѣло. Прежде всего укажемъ на то обстоятельство, что, вводя при разсмотрѣніи условій равновѣсія силы тренія мы тѣмъ самымъ вносимъ въ этотъ вопросъ сложность гораздо большую, чѣмъ какую онъ имѣетъ въ теоретической механикѣ. Предполагая, для простоты, что тѣло A (фиг. 193),двигающееся по горизонтальной плоскости MM подѣйствіемъ силы Q , само по себѣ вѣса не имѣетъ и разлагая эту силу Q въ направленіи движенія, т.-е. по OM , и въ направленіи, перпендикулярномъ къ MM , т.-е. по ON , получаемъ двѣ силы H и N , изъ которыхъ производить и поддерживать движеніе по MM будетъ лишь сила H ; сила же N , нормальная къ поверхности скольженія, обусловитъ собою появленіе силы тренія Nf (гдѣ черезъ f обозначенъ соотвѣтствующій коэффиціентъ тренія), направленной въ сторону, противоположную направленію скорости движенія. Такимъ образомъ принимая во вниманіе, что дѣйствующими силами являются силы H и Nf , можно ясно видѣть, что не всегда при наличности горизонтальной силы H возможно движеніе въ горизонтальномъ же направленіи; для возможности движенія необходимо выполненіе условія

$$H \geq Nf \dots\dots\dots (6).$$

Обозначая коэффиціентъ тренія покоя черезъ f_1 , а движенія — черезъ f_2 , можемъ сказать, что тѣло не начнетъ двигаться до тѣхъ поръ пока удовлетворяется условіе

$$H_1 \leq f_1 N \dots\dots\dots (6').$$

При дальнѣйшемъ увеличеніи H (но при томъ же N), тѣло уже придетъ въ движеніе, послѣ чего, очевидно, силу H можно будетъ нѣсколько уменьшить до нѣкоторой величины H_2 , гдѣ

$$H_2 = f_2 N \dots\dots\dots (6'')$$

и тѣло будетъ двигаться *равномерно*.

Если же горизонтальная сила H останется равной H_1 , то тѣло начнетъ двигаться уже *ускоренно* *).

Обозначивъ уголъ, образуемый силой Q съ нормалью къ плоскости (фиг. 193) черезъ α , мы можемъ написать слѣдующія соотношенія:

$$\left. \begin{aligned} H &= Q \sin \alpha \\ N &= Q \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7):$$

*) Уравненіе его движенія напишется въ этомъ случаѣ такъ:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = H_1 - f_2 N = (f_1 - f_2) N$$

гдѣ черезъ m обозначена масса тѣла A . Изъ этого уравненія можно будетъ сейчасъ же опредѣлить ускореніе и прочія обстоятельства движенія.

вставляя затѣмъ эти значенія H и N въ уравненіе (6), получаемъ:

$$Q \sin \alpha \geq Q \cos \alpha \cdot f \quad (8),$$

что, по сокращеніи на Q , дастъ

$$\sin \alpha \geq \cos \alpha \cdot f,$$

откуда, наконецъ, получаемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha \geq f \quad (9).$$

Полученное условіе (9) говоритъ намъ, что для равновѣсія тѣла A необходимо, чтобы уголъ наклона силы, дѣйствующей на тѣло, къ нормали былъ *меньше* или *равенъ* углу, опредѣляемому условіемъ (9); для того же чтобы тѣло могло двигаться равномерно или ускоренно, необходимо, чтобы указанный уголъ наклона силы къ нормали былъ *равенъ* для *равномернаго движенія* или *больше* для *движенія ускореннаго* угла α , опредѣляемаго изъ уравненія (9).

Уголъ α , опредѣляемый изъ условія

$$\operatorname{tg} \alpha = f$$

будемъ называть *угломъ тренія* и будемъ обозначать его черезъ φ :

$$f = \operatorname{tg} \varphi \quad (10).$$

На основаніи соображеній, приведшихъ насъ къ условіямъ (6') и (6''), заключаемъ, что для того, чтобы сдвинуть тѣло при помощи нѣкоторой силы Q , ее надо наклонить больше, чѣмъ тогда, когда движеніе уже началось: въ первомъ случаѣ необходимо выполненіе условія

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \geq f_1$$

а во второмъ

$$\operatorname{tg} \alpha_2 \geq f_2$$

Это обстоятельство даетъ намъ возможность грубымъ путемъ опредѣлить коэффиціенты тренія двухъ какихъ-либо тѣлъ. Замѣтимъ предварительно, что если мы опишемъ угломъ φ конусъ около оси, то никакая сила Q , лежащая внутри этого конуса, какова бы ни была ея величина, тѣла сдвинуть не можетъ. Указанный конусъ называется *конусомъ тренія* (фиг. 194).

Для того чтобы сдвинуть тѣло, сила Q должна пойти по крайней мѣрѣ по его образующей. Вотъ этимъ послѣднимъ обстоятельствомъ и можно воспользоваться для указаннаго приблизительнаго опредѣленія величины коэффиціента тренія.

Возьмемъ наклонную плоскость MN (фиг. 195) и положимъ на нее параллелепипедъ A , сдѣланный изъ того матеріала, коэффиціентъ тренія котораго по отношенію къ матеріалу плоскости MN мы желаемъ опредѣлить. Теоретически говоря, разъ плоскость MN имѣетъ

нѣкоторый наклонъ къ горизонту NK , тѣло A , положенное на нее, должно съѣхать по ней внизъ. На дѣлѣ, однако, это будетъ наблюдаться не при всякихъ углахъ α , — при нѣкоторыхъ углахъ тѣло A будетъ оставаться въ покоѣ. Чтобы разобраться въ этомъ вопросѣ, замѣтимъ, что вѣсъ P тѣла A , дающій слагающую въ направленіи MN , могущую двигать тѣло, по отношенію къ плоскости скольженія MN является уже боковой силой (фиг. 196), а въ такомъ случаѣ для того чтобы сдвинуть тѣло, она должна быть наклонена къ поверхности скольженія по крайней мѣрѣ подъ угломъ φ ; но, такъ какъ этотъ уголъ наклона силы P къ нормали равенъ углу наклонной плоскости съ горизонтальной, то указанное условіе возможности движенія приводитъ насъ къ заключенію, что для движенія тѣла A по плоскости MN необходимо, чтобы эта плоскость MN была наклонена въ горизонтальной плоскости также по меньшей мѣрѣ подъ угломъ тренія φ .

Легко видѣть, что это послѣднее обстоятельство даетъ намъ возможность приближенно опредѣлять коэффиціентъ тренія f . Для этого на матеріальную плоскость MN (фиг. 195), могущую вращаться около оси N и находящуюся въ данный, начальный моментъ опыта въ горизонтальномъ положеніи, кладемъ тѣло A . Затѣмъ эту плоскость MN начинаемъ вращать около оси N , (поднимая конецъ ея за M), до тѣхъ поръ, пока тѣло A не сдвинется съ мѣста. Въ этотъ моментъ мы прекращаемъ дальнѣйшее вращеніе и измѣряемъ уголъ наклона въ этотъ моментъ; tg этого угла и дастъ намъ величину f_1 — коэффиціентъ покоя. Разъ тѣло начало двигаться, не трудно будетъ убѣдиться, что для поддержанія равномернаго движенія придется конецъ плоскости M нѣсколько опустить, т.-е. уменьшить уголъ наклона α . Мы не будемъ описывать здѣсь самаго прибора, — идея его, какъ видимъ, очень проста, столь же простымъ будетъ и его детальное устройство.

Какъ мы говорили выше, сила тренія всегда направлена противоположно скорости скольженія тѣла въ данный моментъ. Представимъ себѣ теперь въ перспективѣ нѣкоторую горизонтальную плоскость MN (фиг. 197); пусть по ней въ извѣстномъ направленіи xx двигается нѣкоторая матеріальная точка m . Если черезъ Q мы обозначимъ вѣсъ этой массы m , то сила тренія, возникающая при этомъ движеніи, выразится произведеніемъ Qf ; обозначимъ ее буквой F ; направлена она будетъ, какъ мы знаемъ *противоположно скорости v точки*.

Допустимъ теперь, что мы желаемъ сдвинуть эту массу m съ линіи ея движенія по нѣкоторому опредѣленному направленію, напр. по направленію yy , перпендикулярному къ теперешнему xx . Предположимъ, что масса m движется *равномерно*, (случай *ускореннаго* движенія не представляетъ ни особыхъ затрудненій, ни особаго интереса: къ дѣйствующимъ на тѣло силамъ придется лишь прибавить силы

инерціи). Спросимъ себя теперь: какъ велика должна быть сила, дѣйствующая по оси yy , чтобы она могла обусловить то или иное *равномерное движеніе* въ измѣненномъ направленіи?

Для рѣшенія вопроса нужно лишь помнить, что *сила тренія всегда противоположна скорости скольженія въ данный моментъ*. Пусть наша масса m движется со скоростью v_x по направленію xx (фиг. 198), и мы сдвигаемъ ее вбокъ, давая ей скорость v_y , допустимъ, въ направленіи, перпендикулярномъ къ прежнему. Ясно, что въ результатѣ скорость массы въ этотъ моментъ по величинѣ и направленію представится діагональю параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ v_x и v_y ; пусть это будетъ нѣкоторая величина v_R . Наша сила тренія Qf , препятствующая этому измѣненному движенію, будетъ направлена противоположно этой скорости v_R , и теперь ясно, что на долю сопротивленія сдвиженія по оси yy придется не вся сила $Qf (= R)$, а лишь часть ея, R_y , слагающая силы R по оси yy ; изъ чертежа имѣемъ:

$$R_y = Qf \cos \alpha.$$

Величина силы R_y , какъ видимъ, зависитъ отъ угла α , т.-е. отъ того, какъ велика желаемая скорость по оси yy сравнительно съ прежней скоростью по оси xx .

Теперь становится вполне понятнымъ, почему, напр., сравнительно легко перевести ремень, на ходу, съ холостого шкива на рабочій (фиг. 199). Если, какъ это обыкновенно и имѣетъ мѣсто, ремень бѣжитъ очень быстро, такъ что скорость v_x сравнительно съ v_y очень велика, то уголъ α будетъ близокъ къ 90° , и значитъ, усиліе, потребное для движенія ремня и равное, какъ мы вывели выше, $Qf \cos \alpha$, будетъ мало сравнительно съ тѣмъ, какое мы должны были бы употребить для передвиженія покоящагося ремня (натянутаго въ той же степени).

Болѣе подробное и внимательное изслѣдованіе этого вопроса даетъ результаты болѣе сложные по ихъ внѣшнему выраженію; но дѣло здѣсь не въ нихъ, для насъ въ данномъ случаѣ важно лишь уяснить себѣ, почему въ разсмотрѣнномъ случаѣ нужна меньшая сила, чѣмъ это можетъ казаться и казалось. Подобный же случай встрѣчается при проектированіи сложнаго золотника Ридера.

Наклонная плоскость.

Съ точки зрѣнія теоретической механики существуетъ только одно положеніе равновѣсія тѣла, лежащаго на плоскости и подчиненнаго вліянію силы тяжести, а именно, случай, когда тѣло лежитъ на *горизонтальной плоскости*. Въ дѣйствительности же существуетъ цѣлый рядъ положеній равновѣсія тѣла на плоскости—не только при гори-

зонтальномъ положеніи ея, но и при нѣкоторыхъ опредѣленныхъ наклонныхъ къ горизонту.

Пусть нѣкоторое тѣло A (фиг. 200), вѣсъ котораго есть Q , нуждается нѣкоторой *горизонтальной силой* P двигаться вверхъ по плоскости. Случаи силъ, параллельныхъ плоскости, равно какъ направленныхъ какъ-нибудь иначе, могутъ быть въ сущности сведены къ взятому нами.

При отсутствіи силы тренія мы имѣли бы равновѣсіе или равномерное движеніе, если бы обѣ присутствующія здѣсь силы P и Q привелись къ одной равнодѣйствующей R , перпендикулярной къ плоскости скольженія. Въ дѣйствительности же, въ виду появленія новаго фактора — тренія, этого будетъ уже недостаточно. Сравнивая этотъ случай съ случаемъ движенія по горизонтальной плоскости, заключаемъ, что теперь необходимо, чтобы R_1 , новая результирующая всѣхъ работающих теперь силъ была наклонена къ нормальной линіи NN , къ поверхности скольженія, по крайней мѣрѣ подъ угломъ тренія φ . Такимъ образомъ, въ первомъ случаѣ, когда треніе въ расчетъ не принималось, сила P ,двигающая тѣло вверхъ, выражалась въ функціи силы Q и угла наклона плоскости къ горизонту α , такъ:

$$P = Q \operatorname{tg} \alpha (11)$$

Теперь же горизонтальная сила P_1 , могущая еще вызвать и поддержать равномерное движеніе, выразится такъ:

$$P_1 = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) (12)$$

Такимъ образомъ, какъ видимъ, для подъема груза вверхъ требуется въ дѣйствительности приложить силу большую, чѣмъ та, которая нужна въ идеальномъ случаѣ—въ случаѣ отсутствія силъ тренія.

Выведемъ теперь величину коэффиціента полезнаго дѣйствія η . Какъ было указано выше, этотъ коэффиціентъ представляетъ собою отношеніе работы полезной, отданной намъ механизмомъ L_n къ работѣ, затраченной, поглощенной механизмомъ, L ; т.-е.

$$\eta = \frac{L_n}{L} (1)$$

Если бы не было вредныхъ сопротивленій, то возвращенная работа была бы равна работѣ затраченной и поэтому коэффиціентъ η былъ бы равенъ единицѣ. Вслѣдствіе же присутствія вредныхъ сопротивленій—силъ тренія, требуется нѣкоторое увеличеніе силы, приводящей тѣло A въ движеніе. Отсюда вытекаетъ, что отношеніе работъ и будетъ равно отношенію усилій, потребовавшихся для достиженія одного и того же эффекта, что, въ переводѣ на математическій языкъ, выразится такъ:

$$\eta = \frac{P}{P_1}$$

При $\alpha = \varphi \dots P_1 = 0$, при $\alpha < \varphi \dots P_1 < 0$. Такимъ образомъ, плоскость начинаетъ дѣлаться самотормозящей уже при $\alpha = \varphi$; при дальнейшемъ уменьшеніи угла α способность самозатормаживанія возрастаетъ.

Если наклонная плоскость очень крута, то легко видѣть, что для поднятія груза нужно употребить тѣмъ большую силу, чѣмъ больше уголъ α , ибо

$$P_1 = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

и въ предѣлѣ, при $\alpha = 90^\circ - \varphi$, P_1 обращается въ ∞ , т.-е. иными словами, въ этомъ послѣднемъ случаѣ никакая сила P_1 не будетъ въ состояніи совершить подъема груза по плоскости. Въ случаѣ $\alpha = 0$ замѣчаемъ, наоборотъ, что вся работа силы P_1 сведется къ преодолѣнію силы тренія. Коэффициентъ полезнаго дѣйствія въ послѣднемъ случаѣ равенъ нулю:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} 0}{\operatorname{tg}(0 + \varphi)} = 0$$

подъема здѣсь нѣтъ, значитъ, нѣтъ и работы, которую намъ могъ бы возвратить механизмъ, поэтому и ргіогі коэффициентъ η въ этомъ случаѣ долженъ быть равенъ нулю. По той же причинѣ (невозможности подъема) равенъ нулю коэффициентъ η и въ первомъ случаѣ при $\alpha = 90^\circ - \varphi$:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi)}{\operatorname{tg} 90^\circ} = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\infty} = 0.$$

В и н т ь.

Разобранная выше условія движенія или равновѣсія тѣла на наклонной плоскости даютъ намъ сейчасъ же отвѣтъ на вопросъ о коэффициентѣ полезнаго дѣйствія въ винтовыхъ механизмахъ.

Не трудно видѣть, что у винта ABC съ *прямоугольной* нарезкой (фиг. 203) поверхность его ABC можно разсматривать, какъ образованную движеніемъ нѣкоторой прямой AB , остающейся все время *перпендикулярной къ оси винта* OO и скользящей по винтовой линіи. Съ этой точки зрѣнія поверхность винта съ *остроугольной* нарезкой можетъ быть разсматриваема происходящей отъ скользящей по той же винтовой линіи C_1B_1 (фиг. 204) нѣкоторой прямой A_1B_1 , все время остающейся *наклонной къ оси винта* OO .

Первый случай,—случай винта съ *прямоугольной* нарезкой,—тождественъ съ случаемъ наклонной плоскости, разобранномъ нами въ предыдущемъ параграфѣ. Дѣйствительно, взявъ на винтовой линіи точку x , въ которой въ данный моментъ находится движущаяся масса и проведя черезъ нее плоскость, касательную къ винтовой поверх-

ности BAC , мы можемъ разсматривать случай равновѣсія точки, лежащей на этой винтовой поверхности, такъ, какъ если бы эта точка лежала въ упомянутой касательной плоскости. Эта касательная плоскость будетъ заключать въ себѣ какъ касательную TT къ винтовой линіи въ точкѣ x , такъ и образующую винтовой поверхности, соответствующую точкѣ x , т.-е. прямую xx . Такимъ образомъ мы имѣемъ обыкновенный случай наклонной плоскости, разобранный нами выше, а поэтому можно сказать, что если мы желаемъ при помощи нѣкотораго *горизонтальнаго* усилія P , касательнаго къ цилиндрической поверхности, поднять вверхъ по винтовой поверхности нѣкоторый грузъ Q (фиг. 203), то для этой цѣли придется употребить ту же силу P , какую мы употребили бы въ случаѣ *соответствующей наклонной плоскости*, такъ что, обозначивъ уголъ наклона винтовой линіи къ горизонту черезъ α , можемъ сказать, что между величинами P , Q и α существуетъ соотношеніе

$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \quad (12)$$

аналогичное соотношенію (12).

Винтъ можетъ быть *самотормозящимъ* и *несамотормозящимъ*. Если уголъ наклона винтовой линіи *меньше* угла тренія, то винтъ будетъ *самотормозящимъ* для какого угодно груза Q ; если же будетъ наоборотъ, т.-е. если уголъ наклона винтовой линіи будетъ *больше* угла тренія, то винтъ будетъ вывертываться уже при дѣйствіи на него малѣйшаго груза Q .

Коэффициентъ полезнаго дѣйствія будетъ очевидно имѣть тотъ же видъ, что и въ случаѣ наклонной плоскости, т.-е.

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \quad (13)$$

При *самотормозящемъ* винтѣ η во всякомъ случаѣ меньше $1/2$, почему ради увеличенія коэффициента полезнаго дѣйствія приходится отказываться отъ самоторможения.

Такъ просто разсматривается вопросъ о равновѣсіи тѣла на винтовой поверхности въ случаѣ винта съ прямоугольной нарѣзкой.

Въ случаѣ винта съ остроугольной нарѣзкой дѣло будетъ обстоять немного сложнѣе. Въ этомъ случаѣ изслѣдованіе проще всего вести слѣдующимъ образомъ: пусть направляющей винтовой линіей будетъ линія mA_n (фиг. 205), а образующая винтовой поверхности aA наклонена къ горизонтальной плоскости подъ угломъ λ (цилиндръ, на которомъ лежитъ винтовая линія mA_n , предполагается круглымъ и стоящимъ вертикально на горизонтальной плоскости NN). Пусть, далѣе, на этой винтовой поверхности въ точкѣ A лежитъ матеріальная точка μ , вѣсъ которой обозначимъ черезъ Q ; на нее, кромѣ того, пусть дѣйствуетъ какая-нибудь *горизонтальная* сила P , касательная къ поверхности цилиндра K въ этой точкѣ A .

Проводимъ теперь прямую AB , касательную къ винтовой линіи въ точкѣ A , затѣмъ проводимъ AC , продолженіе образующей aA ; точки ихъ пересѣченія съ горизонтальной плоскостью HN обозначимъ черезъ B и C , а углы ихъ съ тою же горизонтальной плоскостью черезъ δ и λ . Если черезъ A проведемъ образующую цилиндра $A\zeta$ и основаніе этой образующей обозначимъ буквой O , такъ что AO перпендикулярно плоскости BOC , то прямая BO будетъ служить проекціей касательной BA на упомянутую плоскость BOC и въ то же время будетъ касаться окружности основанія цилиндра въ точкѣ O ея. Наконецъ, прямая KOC представитъ собою проекцію (на ту же плоскость BOC) образующей винтовой поверхности aA и ея продолженія AC .

Беремъ теперь 3 оси координатъ: ось « ζ » — по образующей цилиндра, проходящей черезъ точку A , т.-е. по прямой OA , ось « y » — по OB , и ось « x » — по OC . Очевидно, что касательная AB лежитъ въ плоскости ζy , а AC — въ плоскости ζx .

При перемѣщеніи точки A по взятой нами винтовой поверхности проявятъ свое дѣйствіе 4 силы;

- 1) всѣхъ точки A , который мы обозначили черезъ Q ;
- 2) влекущая ее по винтовой поверхности горизонтальная сила P ;
- 3) сопротивленіе винтовой поверхности N , направленное, очевидно, перпендикулярно плоскости ABC , и наконецъ,
- 4) сила тренія Nf , направленная противоположно скорости точки A въ этотъ моментъ, т.-е. направленная по AB отъ A къ B .

Напишемъ теперь 3 ур—ія равновѣсія точки A подѣ дѣйствіемъ этихъ 4-хъ силъ, но предварительно разберемъ подробнѣе въ вопросѣ о расположеніи всѣхъ этихъ силъ.

Сила Q направлена по оси « ζ »; горизонтальная сила P направлена параллельно оси « y » и является *окружнымъ усиленіемъ*, дѣйствующимъ по окружности цилиндра, — она лежитъ въ плоскости ζy ; сила Nf направлена по AB , значитъ, лежитъ въ плоскости ζy и образуетъ съ осью oy уголъ δ ; наконецъ, сила N перпендикулярна къ плоскости ABC и уже не лежитъ въ одной плоскости съ силами Q и Nf , какъ это имѣло бы мѣсто въ случаѣ прямоугольной нарѣзки. Обозначимъ углы этой силы N съ осями координатъ ζ , y , x соответственно черезъ α , β и γ . Такъ какъ N перпендикулярна плоскости ABC , то, опустивъ изъ O перпендикуляръ OM на эту плоскость ABC (фиг. 206), найдемъ, что

$$\angle Mo\zeta = \alpha, \angle Moy = \beta, \angle Mox = \gamma.$$

Пишемъ теперь наши уравненія равновѣсія проекцій силъ:

$$1) \text{ на ось } Oy: \quad P - Ncs\beta - Nfcs\delta = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$2) \text{ на ось } O\zeta: \quad Q - Ncs\alpha + Nfsin\delta = 0 \dots\dots\dots (17)$$

3) на ось Ox : на эту ось даетъ проекцію только одна сила N ; эта проекція равна $N \cos\gamma$, и, какъ видимъ, изъ всѣхъ взятыхъ нами силъ

ни одна не можетъ дать ей уравновѣшивающей, а это обстоятельство показываетъ только то, что для равновѣсія точки на винтовой поверхности, кромѣ окружной силы P , нужна еще радіальная сила X , направленная по ox и удовлетворяющая условію

$$Ncs\gamma - X = 0 \dots\dots\dots (18)$$

Эта сила X существуетъ въ дѣйствительности и является въ видѣ *сопротивленія гайки винта радіальному распору*. Какъ видимъ, послѣднее ур—іе (18) для насъ излишне, оно позволяетъ лишь судить о силѣ распора, но для дальнѣйшихъ изслѣдованій не даетъ ничего.

Теперь, пользуясь ур—іями (16) и (17), найдемъ зависимость между P и Q . Исключаемъ, прежде всего, изъ (16) и (17) N , для чего изъ (16) находимъ:

$$N = \frac{P}{\cos\beta + f\cos\delta} \dots\dots\dots (19)$$

и вставляемъ въ (17); находимъ:

$$Q = N \left[csa - fsn\delta \right] = P \frac{csa - fsn\delta}{cs\beta + fcs\delta}$$

такъ что

$$P = Q \frac{cs\beta + fcs\delta}{csa - fsn\delta} \dots\dots\dots (20)$$

Теперь остается исключить углы α и β при помощи угловъ δ и λ ; воспользоваться двумя послѣдними углами удобно потому, что они *характеризуютъ* собою *каждую* остроугольную нарезку. Указанное исключеніе проще всего произвести слѣдующимъ образомъ.

Такъ какъ система координатъ Oxy (фиг. 206) прямоугольна, то имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$OA = OC.tg\lambda = OB.tg\delta \dots\dots\dots (21)$$

Изъ прямоугольныхъ при M треугольниковъ OMA , OMB и OMC получимъ

$$OA = \frac{OM}{cs\alpha}; \quad OB = \frac{OM}{cs\beta}; \quad OC = \frac{OM}{cs\gamma} \dots\dots\dots (22)$$

Такимъ образомъ соотношение (21) принимаетъ видъ:

$$\frac{OM}{cs\alpha} = \frac{OM.tg\lambda}{cs\gamma} = \frac{OM.tg\delta}{cs\beta} \dots\dots\dots (23)$$

откуда

$$cs\beta = csa.tg\delta \dots\dots\dots (23')$$

$$cs\gamma = csa.tg\lambda \dots\dots\dots (23'')$$

Прибавимъ еще къ этимъ двумъ соотношеніямъ тождество

$$cs\alpha = csa \dots\dots\dots (23''')$$

Замѣчая, что всякіе 3 подобнаго рода угла, α , β и γ , какъ это извѣстно изъ аналитической геометріи, обладаютъ свойствомъ

$$cs^2\alpha + cs^2\beta + cs^2\gamma = 1$$

возводимъ въ квадратъ и складываемъ отдѣльно правыя и лѣвыя части соотношеній (23'), (23'') и (23'''). Находимъ:

$$1 = cs^2\alpha [1 + tg^2\lambda + tg^2\delta],$$

откуда

$$cs\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\lambda + tg^2\delta}} \dots \dots \dots (24)$$

а, затѣмъ, въ виду (23'),

$$cs\beta = \frac{tg\delta}{\sqrt{1 + tg^2\lambda + tg^2\delta}} \dots \dots \dots (25)$$

Подставляя теперь изъ (24) и (25) значенія $cosa$ и $cos\beta$ въ формулу (20), находимъ зависимость между P и Q въ видѣ

$$P = Q \frac{\frac{tg\delta}{\sqrt{1 + tg^2\lambda + tg^2\delta}} + fcs\delta}{\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\lambda + tg^2\delta}} - fsn\delta} = Q \cdot \frac{tg\delta + fcs\delta \sqrt{1 + tg^2\lambda + tg^2\delta}}{1 - fsn\delta \sqrt{1 + tg^2\lambda + tg^2\delta}} \dots (26)$$

Повѣрка полученной формулы (26) можетъ быть произведена путемъ примѣненія ея къ винту съ прямоугольной нарѣзкой, гдѣ мы имѣли

$$P = Qtg [\alpha + \varphi] \dots \dots \dots (10)$$

углу α въ формулѣ (26) соотвѣтствуетъ уголъ δ . — Для того, чтобы совершить этотъ переходъ, придется положить въ форм. (26)

$$\lambda = 0 \text{ и } \delta = \alpha;$$

тогда находимъ, что

$$tg\lambda = 0; tg\delta = tg\alpha; cs\delta = cosa$$

и поэтому, дѣлая преобразованія:

$$\sqrt{1 + tg^2\lambda + tg^2\delta} = \sqrt{1 + tg^2\alpha} = sca = \frac{1}{cs\alpha}$$

получаемъ формулу (26) для прямоугольной нарѣзки:

$$P = Q \frac{tg\alpha + fcs\alpha \frac{1}{cs\alpha}}{1 - fsn\alpha \frac{1}{cs\alpha}} = Q \frac{tg\alpha + f}{1 - ftg\alpha} \dots \dots \dots (26')$$

а такъ какъ

$$f = tg\varphi$$

то формула (26) приметъ видъ:

$$P = Q \frac{tg\alpha + tg\varphi}{1 - tg\alpha \cdot tg\varphi} = Qtg [\alpha + \varphi] \dots \dots \dots (12)$$

Нетрудно убѣдиться, что въ винтѣ съ остроугольной нарѣзкой треніе больше, чѣмъ въ винтѣ съ прямоугольной; для этого достаточно будетъ показать, что при одномъ и томъ же Q и углѣ наклона винтовой линіи къ горизонту окружное усиліе P изъ формулы (26) будетъ больше окружнаго усилія P изъ формулы (12). На самомъ дѣлѣ, для полученія окружнаго усилія P въ случаѣ прямоугольной нарѣзки намъ пришлось въ формулѣ (26) положить $\lambda = 0$, въ результатѣ получилось уменьшеніе числителя и увеличеніе знаменателя, т.-е. уменьшеніе дроби Q , и, слѣдовательно, уменьшеніе P , а это и показываетъ, что въ случаѣ остроугольной нарѣзки на перемѣщеніе груза Q требуется бѣльшая затрата работы, бѣльшая сила P , чѣмъ въ случаѣ прямоугольной, и, какъ мы видимъ, колебанія въ величинѣ силы P всецѣло зависятъ отъ угла λ , — съ уменьшеніемъ его уменьшается и величина окружнаго усилія.

Эти заключенія въ свою очередь показываютъ, что если проектируемый винтовой механизмъ предназначается для *передачи движенія*, то винту этого механизма слѣдуетъ непременно давать *прямоугольную нарѣзку*: если же намъ нужно винтъ для *скрѣпленія* двухъ деталей, то необходимо брать *остроугольную нарѣзку*, ибо тогда менѣе вѣроятно развинчиваніе отъ боковыхъ усилій; кромѣ того, въ такомъ винтѣ при одной и той же силѣ предварительной затяжки сила тренія будетъ значительно больше.

К л и н ъ.

Клинъ, также какъ и винтъ, употребляется какъ для перемѣщенія грузовъ такъ и для скрѣпленія деталей.

Простѣйшимъ примѣромъ примѣненія клина можетъ служить расщепливаніе какого-нибудь тѣла A при помощи клина, вдвигаемаго нѣкоторой силой P (фиг. 207). Заставляя расходиться части K и M детали, клинъ въ то же время подвергается дѣйствію реакцій частей K и M , такъ что онъ находится все время подъ дѣйствіемъ трехъ силъ: силы P , вдвигающей его, и двухъ силъ N_1 и N_2 , нормальныхъ къ его гранямъ и противодѣйствующихъ этому вдвиганію.

Пусть, ради удобства чертежа, клинъ вгоняется въ деталь вертикальной силой P , какъ это и представлено на фиг. 207; пусть, далѣе, вертикаль, проведенная черезъ вершину клина C , образуетъ съ его сторонами углы α и β . При отсутствіи силъ тренія мы имѣли бы случай равновѣсія силы P и двухъ силъ N_1 и N_2 . Такъ какъ эти три силы должны взаимно уравновѣшиваться, то силовой многоугольникъ, въ данномъ случаѣ треугольникъ, долженъ быть замкнутымъ. Въ увеличенномъ масштабѣ этотъ треугольникъ представленъ на фиг. 208: здѣсь $AB \parallel N_1$, $BC \parallel N_2$ и $AC \parallel P$; такимъ образомъ въ случаѣ равновѣсія при отсутствіи силъ тренія, при данной силѣ

P (AC), силы N_1 и N_2 опредѣляются отрѣзками AB и BC прямыхъ, проведенныхъ черезъ точки A и C подъ углами $\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2} - \beta\right]$ къ AC . Легко видѣть, что въ углѣ Δ — ка, противоположномъ силѣ P , получается уголъ $[\alpha + \beta]$ равный, какъ видимъ, углу клина.

Переходя теперь къ тому, что имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности, мы должны принять во вниманіе силы тренія, направленныя по поверхности соприкосновенія противоположно скоростямъ скользященія; пусть эти силы будутъ силы fN_1 и fN_2 . Такимъ образомъ результирующія силы, сопротивляющіяся вдвиганію клина, отклонятся теперь отъ нормалей на углы φ въ сторону, противоположную направлению движенія клина. Пусть теперь эти результирующія представляются силами N'_1 и N'_2 . Замѣтимъ здѣсь, что углы отклоненія результирующихъ отъ своихъ нормалей могутъ быть отличны одинъ отъ другого, — тогда, понятно, когда раздвигаемыя части K и M детали выполнены изъ различныхъ матеріаловъ. Этотъ случай, въ сущности, не отличается отъ разбираемаго нами, гдѣ K и M выполнены изъ одинаковаго матеріала, такъ, что мы закончимъ наше изслѣдованіе въ предположеніи, что углы φ одинаковы для обѣихъ частей; переходъ, какъ легко можно будетъ видѣть, совершается крайне просто. Обратимся теперь къ нашему силовому треугольнику ABC (фиг. 208) и введемъ въ разсмотрѣніе силы тренія. Эти силы, какъ мы знаемъ, обусловливаютъ собою отклоненія результирующихъ на уголъ φ ; поэтому новыя результирующія, N'_1 и N'_2 , получимъ, строя на BA и BC , при точкѣ A и C , углы φ , — понятно, внутрь Δ — ка и продолжая другія стороны этихъ угловъ до пересѣченія между собою въ точкѣ E ; получается, такимъ образомъ, новый силовой Δ — къ AEC ; стороны его AE и CE опредѣляютъ собою дѣйствительныя сопротивленія детали N'_1 и N'_2 . Треугольникъ равновѣсія, какъ видимъ, отличенъ отъ прежняго; рассмотримъ его подробнѣе, для чего опредѣлимъ его углы.

Углы EAC и ECA , какъ полученные вычитаніемъ угла φ изъ угловъ BAC и BCA прежняго силового треугольника, очевидно, равны:

$$\angle EAC = \frac{\pi}{2} - \alpha - \varphi, \text{ и } \angle ECA = \frac{\pi}{2} - \beta - \varphi.$$

Уголъ же AEC получимъ, если изъ π вычтемъ извѣстные намъ два угла Δ AEC , т.-е.

$$\angle AEC = \pi - \left[\frac{\pi}{2} - \alpha - \varphi\right] - \left[\frac{\pi}{2} - \beta - \varphi\right] = \alpha + \beta + 2\varphi.$$

Теперь мы можемъ вывести зависимость между силами P , N'_1 , и N'_2 . Пишемъ:

$$\frac{N'_1}{P} = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} - \beta - \varphi\right]}{\sin[\alpha + \beta + 2\varphi]} = \frac{\cos[\beta + \varphi]}{\sin[\alpha + \beta + 2\varphi]} \dots (27)$$

Подобнымъ же образомъ находимъ

$$\frac{N'_2}{P} = \frac{cs [\alpha + \varphi]}{sn [\alpha + \beta + 2\varphi]} \dots \dots \dots (28)$$

Два эти выраженія, (27) и (28), даютъ намъ возможность опредѣлить результирующія силы сопротивленія, силы N'_1 N'_2 ; нормальныя же силы сопротивленія, N_1 и N_2 , получимъ, помноживъ N'_1 и N'_2 на $\cos\varphi$. Точно такъ же эти два ур-ія, (27) и (28) даютъ возможность по даннымъ реакціямъ N'_1 и N'_2 опредѣлить движущую силу P .

Выяснимъ теперь условія, при которыхъ клинъ можетъ быть самотормозящимъ, т.-е. когда онъ, будучи введенъ въ деталь, уже не можетъ быть вытѣсненъ ею назадъ.

Если силы реакціи стремятся выбить его вверхъ, то теперь этому будутъ препятствовать силы тренія, *помоая на этотъ разъ усилію P удерживать клинъ въ детали.*

Спрашивается, какъ велико должно быть теперь это усиліе P ?

Такъ какъ въ силовомъ треугольникѣ ABC (фиг. 208) углы теперь придется откладывать наружу, то въ формулахъ (27) и (28) придется измѣнить теперь знаки у φ , и обѣ формулы дадутъ намъ

$$P = N'_1 \frac{sn [\alpha + \beta - 2\varphi]}{cs [\beta - \varphi]} = N'_2 \frac{sn [\alpha + \beta - 2\varphi]}{cs [\alpha - \varphi]} \dots \dots \dots (29)$$

Въ случаѣ, если клинъ обладаетъ свойствомъ самоторможенія, для удержанія его на мѣстѣ не должно требоваться никакого усилія, т.-е. для такого клина сила P , опредѣляемая изъ уравненія (29) должна быть равна нулю, т.-е. должно быть:

$$N'_1 \frac{sn [\alpha + \beta - 2\varphi]}{cs [\beta - \varphi]} = N'_2 \frac{sn [\alpha + \beta - 2\varphi]}{cs [\alpha - \varphi]} = 0$$

что приводится къ условію

$$sn [\alpha + \beta - 2\varphi] = 0$$

дающему

$$\alpha + \beta - 2\varphi = 0$$

откуда, наконецъ, находимъ условіе, необходимое для самоторможенія клина:

$$\alpha + \beta = 2\varphi \dots \dots \dots (30)$$

Если же существуетъ зависимость:

$$\alpha + \beta < 2\varphi \dots \dots \dots (31)$$

то P получаетъ отрицательное значеніе.

Формула (30) говоритъ намъ, что если уголъ клина въ точности будетъ равенъ двойному углу тренія φ , то для удержанія его въ детали не нужно прилагать никакой силы ($P=0$). Если же мы умень-

шимъ уголъ клина настолько, что онъ будетъ меньше 2φ , то сила P получится отрицательной, т.-е. клинъ не только будетъ удерживаться въ детали самъ, но для того, чтобы вытащить его оттуда, придется употребить еще нѣкоторую силу, — онъ не можетъ быть вытѣсненъ оттуда никакими боковыми усилями N .

Скрѣпленія клиньями въ машиностроеніи употребляются довольно часто, напр., въ головкахъ шатуновъ и проч.

Примѣромъ клинчатого механизма является такъ наз. *клинчатый прессъ*. Въ такомъ простомъ видѣ, въ какомъ мы разбираемъ его ниже, онъ въ машиностроеніи не употребляется, такъ что можно было бы совершенно не касаться этого механизма, но мы тѣмъ не менѣе разберемъ его, съ цѣлью показать на этомъ простомъ примѣрѣ, какъ удобнѣе всего вести изслѣдованіе подобныхъ вопросовъ.

Идею устройства этого механизма легко уяснить себѣ изъ фиг. 209: усилие P гонитъ внизъ клинъ K , — скользящій одной своей стороной по гладко-обстроганной поверхности стойки S ; а другой — выпирающій вбокъ наискось срѣзанный съ одной стороны стержень AB , опирающійся на стойку EC и несущій на себѣ доску H ; между этой доской и стѣнкой станины T помѣщается сжимаемый предметъ. Усилие P , въ концѣ концовъ, вызываетъ нѣкоторое сжимающее усилие Q , и мы теперь зададимся цѣлью найти зависимость между усилями P и Q .

Такъ какъ этотъ механизмъ представляетъ изъ себя соединеніе двухъ клинчатыхъ механизмовъ, то по отношенію къ нему могутъ быть примѣнены формулы клина: а именно, зависимость между внѣшнимъ усиломъ P и сопротивленіемъ стержня N'_2 , на основаніи формулы (28), напишется въ видѣ

$$P = N'_2 \frac{\operatorname{sn} [\beta + 2\varphi]}{\operatorname{cs}\varphi} \dots \dots \dots (32)$$

эту формулу мы получили изъ формулы (28), положивъ въ ней $\alpha = 0$, т.-е. предположивъ, что стѣнка станины вертикальна.

Въ случаѣ, если матеріалы стержня AB и стѣнки S будутъ различны, то различными будутъ и углы тренія. Допустимъ, что φ_1 — уголъ тренія для клина и стѣны и φ — для клина и стержня, тогда формула (32) приметъ видъ

$$P = N'_2 \frac{\operatorname{sn} [\beta + \varphi + \varphi_1]}{\operatorname{cs}\varphi_1} *) \dots \dots \dots (33)$$

Далѣе мы видимъ, что для стержня AB съ его доской дѣйствующей силой является сила n_2 , равная силѣ N'_2 и противоположно ей направленная. Такъ какъ стержень AB , перемѣщаясь вправо, прину-

*) Формулу (33) можно получить и изъ разсмотрѣнія силового треугольника фиг. 210.

жденъ въ то же время скользить по стойкѣ D , оказывая на нее давленіе по вертикали внизъ, то къ силамъ n_2 и Q (гдѣ Q — сопротивление предмета сжиганію), присоединится еще сопротивление стойки R ; уголъ тренія мы обозначили здѣсь черезъ φ_2 . Составляемъ теперь изъ этихъ силъ силовой треугольникъ (фиг. 211), изъ котораго затѣмъ получаемъ:

$$n_2 = Q \frac{\sin [90^\circ + \varphi_2]}{\sin [90^\circ - (\beta + \varphi + \varphi_2)]} = Q \frac{\cos \varphi_2}{\cos [\beta + \varphi + \varphi_2]} \dots (34)$$

Ур-ія (33) и (34), въ виду равенства $n_2 = N_2'$, даютъ зависимость между P и Q .

$$P = Q \frac{\sin [\beta + \varphi + \varphi_2] \cdot \cos \varphi_2}{\cos [\beta + \varphi + \varphi_2] \cdot \cos \varphi_1} \dots (35)$$

Если бы матеріалы стоекъ S и CE оказались одинаковыми, равно какъ матеріалы клина и стержня, то углы φ_1 и φ_2 были бы одинаковыми и формула (35) приняла бы видъ

$$P = Q \operatorname{tg} [\beta + \varphi + \varphi_1] \dots (36)$$

А если бы оказалось, что матеріалъ всѣхъ деталей S , K , AB и EC — одинаковъ, то оказались бы одинаковыми и углы φ и φ_1 и тогда формула (37) приняла бы видъ:

$$P = Q \operatorname{tg} [\beta + 2\varphi] \dots (37)$$

выраженіе, вполне аналогичное тому, какое мы имѣли для наклонной плоскости, разница въ томъ, что тамъ подъ знакомъ tg имѣлся одинъ уголъ φ , а здѣсь онъ взятъ два раза; происходитъ это отъ того, что въ рассматриваемомъ механизмѣ имѣется одно лишнее скольженіе, которое и обусловило собою появленіе одного лишняго угла.

Что касается *коэффициента полезнаго дѣйствія*, то его можно подсчитать такъ: при отсутствіи силъ тренія (т.-е. при $\varphi = 0$) зависимость между P_1 и Q имѣла бы видъ

$$P_1 = Q \operatorname{tg} \beta \dots (38)$$

при наличности же силъ тренія имѣемъ формулу (37). Поэтому коэфф. полезнаго дѣйствія выразится въ видѣ частнаго $\frac{P_1}{P}$, иначе:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} [\beta + 2\varphi]} \dots (39)$$

какъ видимъ, онъ здѣсь *меньше*, чѣмъ для наклонной плоскости.

Формула (37) показываетъ, что чѣмъ меньше уголъ β клина, тѣмъ меньше усиліе P , необходимое для полученія опредѣленнаго сжимающаго усилія Q ; но параллельно съ уменьшеніемъ угла β убываетъ и

коэфф. пол. дѣйствія η ; обстоятельство это становится вполне понятнымъ, если мы примемъ во вниманіе, что, при опредѣленномъ перемѣщеніи клина внизъ, стержень AB подвинется вбокъ тѣмъ меньше, чѣмъ меньше уголъ клина.

Зубчатые колеса.

Положимъ, что у насъ имѣются два цилиндрическихъ колеса O и O_1 (фиг. 212), находящихся между собою въ извѣстномъ зацѣплении (циклическомъ или эвольвентномъ); линия зацѣпления, допустимъ, намъ также извѣстна,—пусть это будетъ кривая mKm_1 . Ведущимъ колесомъ, пусть будетъ верхнее и пусть по окружности его дѣйствуетъ окружное усилие P^*).

Одновременно въ зацѣплении можетъ находиться, вообще говоря, нѣсколько паръ зубцовъ, но для простоты разсужденія мы предположимъ, что въ данный моментъ работаетъ *только одна* пара, т.-е., что сопротивление вращенію оказываетъ *лишь одинъ* зубецъ *ведомая* колеса, а преодолеваетъ это сопротивление также *только одинъ* зубецъ *ведущая*. Это сопротивление или, точнѣе, давленіе сопротивляющагося зуба всегда направлено *по нормали* къ поверхности; въ данномъ случаѣ эта нормаль будетъ общою нормалью къ обѣимъ касающимся другъ другу поверхностямъ, проходящею черезъ точку ихъ соприкосновенія.

Такъ какъ профили зубцовъ ограничиваются сопряженными кривыми, то такая нормаль въ точкѣ соприкосновенія зубьевъ пройдетъ какъ извѣстно, черезъ точку соприкосновенія полюидъ—черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія K . Такимъ образомъ заключаемъ, что упомянутое сопротивление направлено по линіи, соединяющей полюсъ мгновеннаго вращенія K съ точкой теперешняго касанія профилей A .

При вращеніи зубчатыхъ колесъ, какъ извѣстно изъ «Общей теоріи механизмовъ» (см. стр. 72), относительное движеніе сопряженныхъ профилей неизбѣжно сопровождается скольженіемъ, благодаря которому, слѣдовательно, и появляется сила тренія, отклоняющая результирующую сопротивления на уголъ тренія φ отъ нормали KAN ; пусть эта результирующая изображается силой R . Обратно, все давленіе на ведомый зубъ равно R и направлено прямо-противоположно силѣ R .

Обозначимъ уголъ нормали AK съ касательной TK , т.-е. уголъ AKT , черезъ α , коэффициентъ тренія—черезъ f , а уголъ тренія—че-

*) Если данъ вращающій моментъ M , то окружное усилие опредѣляется обычнымъ способомъ изъ формулы: $M = P \cdot r$.

резъ φ . Далѣе, длину AK обозначимъ черезъ p , а радіусъ полоиды ведущаго колеса—черезъ r .

Для дѣйствующихъ здѣсь силъ P , N и Nf уравненіе моментовъ относительно центра D имѣетъ видъ:

$$Pr = N \cdot AB + Nf \cdot AC \dots\dots\dots (40)$$

такъ какъ

$$AB = CO = r \cos \alpha \text{ и } AC = AK - CK = p - r \sin \alpha$$

то въ виду этихъ равенствъ уравненіе (40) принимаетъ видъ

$$P \cdot r = N r \cos \alpha + Nf(p - r \sin \alpha)$$

откуда:

$$N = \frac{P}{\cos \alpha + f \left[\frac{p}{r} - \sin \alpha \right]} \dots\dots\dots (41)$$

такъ что сила тренія, Nf , выразится такъ:

$$Nf = \frac{Pf}{\cos \alpha + f \left[\frac{p}{r} - \sin \alpha \right]} \dots\dots\dots (42)$$

На фиг. 212 отмѣченъ одинъ изъ моментовъ зацѣпленія *передъ* линіей центровъ. Если же зацѣпленіе будетъ уже *за* линіей центровъ, то, какъ это легко видѣть, сдѣлавъ соотвѣтственный чертежъ (фиг. 213), найдемъ:

$$N = \frac{P}{\cos \alpha + f \left[\frac{p}{r} + \sin \alpha \right]} \dots\dots\dots (43)$$

и

$$Nf = \frac{Pf}{\cos \alpha + f \left[\frac{p}{r} + \sin \alpha \right]} \dots\dots\dots (44)$$

Поэтому формулы (42) и (44) можно соединять въ одну, написавъ:

$$Nf = \frac{Pf}{\cos \alpha + f \left[\frac{p}{r} \mp \sin \alpha \right]} \dots\dots\dots (45)$$

Такъ какъ p , сравнительно съ r , очень мало, то дробью $\frac{p}{r}$ можно пренебречь, и тогда формула (45) приметъ видъ:

$$Nf = \frac{Pf}{\cos \alpha \mp f \sin \alpha} \dots\dots\dots (46)$$

или послѣ умноженія числителя и знаменателя на $\cos \varphi$ и замѣны коэффиціента f , равнымъ ему $\tan \varphi$ получимъ:

$$Nf = \frac{Pf \cos \varphi}{\cos [\alpha \pm \varphi]} \dots\dots\dots (46)$$

Формулу (46) легко получить, строя параллелограмъ на окружномъ усилии P , взятомъ перпендикулярно линіи центровъ и полной реакціи R ; за направленіе діагонали беремъ направленіе линіи центровъ OO_1 (фиг. 214). Имѣя въ виду, что

$$P = RS = Rcs[\alpha + \varphi]$$

и

$$N = Rcs\varphi$$

имѣемъ

$$N = \frac{Pcs\varphi}{cs[\alpha + \varphi]}$$

послѣ помноженія обѣихъ частей на f получаемъ форм. (46). Легко видѣть, что мы разбираемъ здѣсь тотъ частный случай соприкосновенія зубцовъ, когда точка A ихъ касанія совпадаетъ съ полюсомъ K ; тогда, понятно, $p = 0$, и формула (42) принимаетъ послѣ извѣстныхъ упрощеній видъ (46).

Имѣя въ виду подсчитать работу тренія зубцовъ за извѣстный промежутокъ времени и зная силу тренія Nf , мы должны теперь опредѣлить путь, пройденный точкой приложенія этой силы за тотъ же промежутокъ времени.

Въ данномъ случаѣ треніе обусловлено наличностью *относительнаго скольженія* одного зубца по другому; поэтому нужно знать скорость этого скольженія и величину его за элементъ времени dt . Чтобы разрѣшить эту задачу, примемъ во вниманіе, что движеніе зубцовъ можетъ быть воспроизведено каченіемъ одной полоиды по другой; въ каждый отдѣльный моментъ будетъ при этомъ имѣть мѣсто вращеніе около полюса мгновеннаго вращенія K со скоростью, равной суммѣ угловыхъ скоростей колесъ, ω_1 и ω_2 , т.-е. со скоростью $(\omega_1 + \omega_2)$. Далѣе, чтобы получить линейную скорость относительнаго движенія точки A , нужно помножить указанную угловую скорость $(\omega_1 + \omega_2)$ на разстояніе точки A отъ мгновеннаго полюса K , и слѣдовательно скорость относительнаго скольженія точки A изобразится произведеніемъ $p[\omega_1 + \omega_2]$, такъ что точка A за время dt пройдетъ путь

$$s = p[\omega_1 + \omega_2] dt \dots \dots \dots (47)$$

Таковъ путь, пройденный точкой A въ направленіи силы Nf , на нее дѣйствующей. Поэтому элементарная работа силы тренія Nf въ виду уравненій (46) и (47) выразится такъ:

$$dL = Nf.s = \frac{Pfcs\varphi}{cs[\alpha + \varphi]} p[\omega_1 + \omega_2] dt \dots \dots \dots (48)$$

Отсюда можно исключить dt , предположивъ, что колеса вращаются равномерно. Дѣйствительно, въ такомъ случаѣ время можно будетъ измѣрять дугами, проходимыми по той или другой полоидѣ

за одно и то же время. Пусть длина дуги полоидъ, пройденная за время dt , есть ds ; тогда имѣемъ:

$$ds = r_1 \omega_1 dt$$

$$ds = r_2 \omega_2 dt$$

гдѣ r_1 и r_2 суть радіусы полоидъ. Отсюда:

$$\omega_1 dt = \frac{1}{r_1} ds$$

$$\omega_2 dt = \frac{1}{r_2} ds$$

такъ что

$$[\omega_1 + \omega_2] dt = \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] ds \dots \dots \dots (49)$$

въ виду чего уравненіе (48) перепишется такъ:

$$dL = \frac{P f p c s \varphi}{c s [\alpha + \varphi]} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] ds \dots \dots \dots (50)$$

Такова работа тренія зубцовъ за то время, пока полоиды прокатятся одна по другой на дугу ds . Стоитъ теперь подсчитать всю эту работу за всю дугу зацѣпленія, т.-е. начиная съ того момента, когда зубцы вошли въ зацѣпленіе, до того, когда они вышли, и мы получимъ искомый результатъ. Можно было бы подсчитать эту работу, начавъ съ крайней точки дуги зацѣпленія m до полюса K , а затѣмъ начиная отъ K до другой крайней точки m_1 ; результатъ, понятно, получился бы тотъ же, что и прежде.

Прежде чѣмъ идти дальше, необходимо сдѣлать нѣкоторыя существенныя указанія относительно метода изслѣдованія, приведшаго насъ къ уравненію (50). Дѣло въ томъ, что въ основаніи всѣхъ полученныхъ выше выводовъ лежитъ предположеніе, не оправдываемое на дѣлѣ и, слѣдовательно, ложное, а именно: при выводѣ уравненія (50) было предположено, что нормальное сопротивленіе *одного* зубца обуславливаетъ собою существованіе какъ окружного усилія P , такъ и осевого S . Оба усилія, P и S , имѣются налицо во всякой парѣ сцѣпляющихся зубчатыхъ колесъ, но въ соприкосновеніи находится обыкновенно не одна пара зубцовъ, а двѣ или нѣсколько; поэтому является своевременнымъ вопросъ, какъ же въ дѣйствительности распределяется это окружное усиліе между соприкасающимися парами зубьевъ? Вопросъ этотъ, къ сожалѣнію, до сихъ поръ остается открытымъ; къ разрѣшенію его можно было бы подойти при помощи теоріи упругости, руководствуясь такими соображеніями.

Если въ зацѣпленіи находится одна пара зубьевъ, то, какъ мы видѣли, дѣло сводится къ построенію нѣкотораго опредѣленнаго па-

раллелограма силъ. Но пусть въ зацѣпленіе вступили двѣ пары. Спрашивается, какъ распредѣлится теперь все давленіе между ними? Все распредѣленіе давленія въ данномъ случаѣ зависитъ отъ измѣненія формы зубьевъ подѣ дѣйствіемъ испытываемаго ими давленія. Если бы случилось, что одинъ зубецъ первой пары оказался болѣе слабымъ, чѣмъ другой (что могло бы имѣть мѣсто, если бы, напр., онъ былъ сдѣланъ изъ болѣе податливаго матеріала), то въ результатѣ вышло бы, что этотъ одинъ зубецъ первой пары поддался бы сравнительно легко, и все давленіе оказалось бы цѣликомъ сосредоточеннымъ только на одномъ зубцѣ второй пары; если же, наоборотъ, первый зубецъ былъ бы менѣе податливъ, то онъ воспринялъ бы на себя большее давленіе, чѣмъ другой. Значитъ, распредѣленіе давленія зависитъ отъ того, насколько велико измѣненіе формы одного зуба сравнительно съ другимъ. Изслѣдовать же вопросъ объ этомъ измѣненіи формы, можно было бы, исходя изъ того соображенія, что каждый зубецъ, подвергаясь нормальному давленію, долженъ въ извѣстной мѣрѣ сгибаться. Принимая теперь всѣ эти нормальныя давленія на зубцы за неизвѣстныя, мы могли бы въ функціи ихъ выразить всѣ деформаціи зубьевъ, что въ свою очередь дало бы намъ возможность вывести распредѣленіе давленій.

Однако дѣло обстоитъ гораздо сложнѣе въ томъ смыслѣ, что здѣсь имѣется налицо не только изгибъ зубьевъ, какъ балокъ, ущемленныхъ съ одного конца, но и смятіе ихъ. И вотъ подсчетъ этихъ сложныхъ деформацій, — деформацій изгиба и смятія, — представляется настолько сложнымъ и труднымъ, что при современномъ состояніи науки рѣшеніе его въ окончательной формѣ невозможно.

Обратимся теперь опять къ формулѣ (50), при чемъ, пользуясь формулой (46), перепишемъ ее такъ:

$$dL = \frac{Pfp}{cs\alpha + f.sn\alpha} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] ds. (51)$$

Эта формула даетъ намъ выраженіе работы тренія за то время, пока полоиды перекатываются одна по другой на дугу ds , и мы должны подсчитать ее за все время зацѣпленія этой пары сопряженныхъ зубьевъ. Произвести этотъ подсчетъ было бы легко, если бы мы знали зависимость между всѣми переменными величинами, входящими въ составъ формулы (51), а именно между α , p и s : α есть уголъ нормали къ профилямъ съ общей касательной къ полоидамъ, — при перемѣщеніи точки соприкосновенія зубьевъ по линіи зацѣпленія этотъ уголъ мѣняется; измѣняется въ то же время p — длина нормали, считаемаго отъ точки касанія A до полюса и мгновеннаго вращенія K ; мѣняется, наконецъ, s — дуга переката полоидъ.

Такимъ образомъ въ дифференціальное уравненіе (51) входятъ

три переменныя α , p и s , и двѣ изъ нихъ, напр., α и p , необходимо выразить въ функціи третьей — s , ибо, только зная эту зависимость, мы и можемъ приступить къ интегрированію уравненія (51). Однако мы встрѣчаемся здѣсь съ новыми затрудненіями, уравненіе (51) можетъ быть проинтегрировано далеко не всегда, зависимость между α , p и s , простая для эвольвентнаго зацепленія, является уже болѣе сложной въ случаѣ циклическаго, и, наконецъ, ея совсѣмъ нельзя имѣть, если данъ вообще какой-нибудь произвольный профиль, а слѣдовательно, и какая-нибудь линія зацепленія. Мы разберемъ ниже только случай эвольвентнаго зацепленія.

Замѣтимъ, что выраженіе (51) можно нѣсколько упростить, допустивъ малую неточность: дѣло въ томъ, что уголъ α , вообще говоря, малъ, коэффициентъ f также малъ, поэтому произведеніемъ $f \cdot \sin \alpha$ можно пренебречь. Уголъ α дѣлается малымъ во избѣжаніе излишняго давленія на подшипники; дѣйствительно, разлагая реакцію R колеса O_1 на O въ направленіи линіи центровъ и перпендикулярно, видимъ, что это давленіе S , равное $P \cdot \operatorname{tg} [a + \varphi]$ —(фиг. 215), при одномъ и томъ же P возрастаетъ съ увеличеніемъ угла α , а между тѣмъ, вообще говоря, оно производитъ совершенно нежелательное для насъ дѣйствіе, заставляя шипъ сильнѣе прижиматься къ подшипнику и вызывая тѣмъ самымъ лишнюю потерю работы на преодоленіе возникающаго здѣсь тренія. Обыкновенно полоиды берутся достаточно большими сравнительно съ размѣрами зубцовъ, и уголъ выходитъ, вообще говоря, малымъ.

Такимъ образомъ, отбрасывая въ знаменателѣ выраженія (51) величину $f \cdot \sin \alpha$, дадимъ ему видъ:

$$dL = Pf \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] \frac{p}{\cos \alpha} ds \dots \dots \dots (51)$$

Переходя затѣмъ къ интегралу, при чемъ взять его придется въ предѣлахъ $(0, s)$ находимъ:

$$L = Pf \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] \int_0^s \frac{p}{\cos \alpha} ds \dots \dots \dots (52)$$

Въ случаѣ эвольвентнаго зацепленія линія зацепленія есть нѣкоторая прямая, имѣющая въ данной системѣ вполне определенное и постоянное положеніе; такимъ образомъ нормаль p въ этомъ случаѣ будетъ все время наклонена къ касательной подъ однимъ и тѣмъ же угломъ α , и, слѣдовательно, для эвольвентнаго зацепленія $\cos \alpha$ будетъ постоянной величиной. Далѣе извѣстно, что въ случаѣ эвольвентнаго зацепленія длина линіи зацепленія равна произведенію дуги зацепленія, пройденной за это время, на $\cos \alpha$, т.-е. вообще говоря, имѣется зависимость:

$$p = s \cdot \cos \alpha$$

въ виду чего интеграль выраженія (52) преобразуется такъ:

$$\int_0^s \frac{p}{csa} ds = \int_0^s s ds = \frac{s^2}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (54)$$

и выраженіе (52) приметъ видъ:

$$L = Pf \left[\frac{1}{r_1} + \frac{r}{r_2} \right] \frac{s^2}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (55)$$

Такова работа тренія въ эвольвентномъ зацѣпленіи. Чтобы разсмотрѣть процентную потерю, надо отнести полученную выше работу къ единицѣ длины дуги зацѣпленія; тогда найдемъ, что работа тренія на единицѣ дуги зацѣпленія будетъ равна

$$l = \frac{L}{s}$$

и въ виду формулы (55) выразится такъ:

$$l = \frac{s}{2} P \cdot f \cdot \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (56)$$

Если въ зацѣпленіи находится не одна пара зубьевъ, то можно положить (конечно, приблизительно), что все давленіе распредѣляется равномерно между всѣми парами зубьевъ, находящимися въ зацѣпленіи, и тогда въ выраженіи работы тренія для одной пары вмѣсто P стояло бы $\frac{P}{n}$; далѣе, для полученія относительной потери на работу тренія всѣхъ зубцовъ пришлось бы суммировать всѣ эти n частныхъ работъ, что въ результатѣ опять привело бы насъ къ формулѣ (56).

Выраженіе (56) можно представить въ нѣсколько измѣненномъ видѣ, использовавъ зависимость между числами зубцовъ z_1 и z_2 , радиусами r_1 и r_2 и шагомъ t :

$$z_1 t = 2 \pi r_1$$

$$z_2 t = 2 \pi r_2$$

откуда находимъ:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2\pi}{t} \left[\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right] \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (57)$$

и, такъ какъ s есть величина, кратная t

$$s = n \cdot t \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (58)$$

то выраженіе (56) въ виду (57) и (58) приметъ видъ:

$$l = \frac{nt}{2} f P \frac{2\pi}{t} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right]$$

или, по сокращеніи

$$l = \pi \cdot n \cdot f \cdot P \left[\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right] \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (59)$$

Слѣдуетъ помнить, что полученная формула относится *только къ случаю эвольвентнаго зацепленія*; къ этому же случаю относятся всѣ другія подобныя формулы, приводимыя въ справочникахъ.

Въ случаѣ циклическаго зацепленія выраженіе для l будетъ имѣть другой видъ, ибо въ этомъ случаѣ α есть величина переменная—радіусъ-векторъ AK при скользяніи зубцовъ одного по другому, постоянно мѣняетъ свой наклонъ. Въ этомъ случаѣ подсчетъ работы тренія можетъ быть произведенъ иначе, а именно вмѣсто того чтобы употреблять аналитическій методъ вычисленія интеграла уравненія (52), выгоднѣе употребить графическій пріемъ, состоящій въ слѣдующемъ: уравненіе (50) имѣетъ видъ:

$$dL = \frac{f \cdot P \cdot cs\varphi}{cs[\alpha + \varphi]} p \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] ds. \quad \dots \dots \dots (50)$$

Въ извѣстномъ масштабѣ мы можемъ имѣть на чертежѣ какъ величину P , такъ и величину нормальнаго давленія $N = \frac{Pcs\varphi}{cs[\alpha + \varphi]}$ (фиг. 216); дѣйствительно величина P намъ извѣстна; также будутъ извѣстными для каждаго отдѣльнаго случая какъ длина нормали p , такъ и уголъ наклона ея α . Отложивъ въ извѣстномъ масштабѣ окружное усиліе KP и построивъ α и φ , находимъ въ томъ же масштабѣ равнодѣйствующую R , равную $\frac{P}{cs[\alpha + \varphi]}$, затѣмъ нормальную N , равную $\frac{Pcs\varphi}{cs[\alpha + \varphi]}$; помножая на f , гдѣ f —коэфф. тренія (число отвлеченное), находимъ величину произведенія $\frac{Pfcs\varphi}{cs[\alpha + \varphi]}$ (для даннаго момента) *). Нетрудно также найти величину произведенія $p \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ отдѣльно для каждаго момента: r_1 и r_2 , радіусы полонидъ, суть величины постоянныя, p можетъ быть опредѣлено по чертежу. Опредѣливъ это, опять отвлеченное, число $p \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ или $\left(\frac{p}{r_1} + \frac{p}{r_2} \right)$, составляемъ теперь все произведеніе, стоящее въ формулѣ (50) передъ ds , т.-е. величину

$$fP \frac{cs\varphi}{cs[\alpha + \varphi]} p \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] \dots \dots \dots (58)$$

Представлено оно будетъ нѣкоторымъ отрѣзкомъ, который слѣдуетъ взять въ томъ же масштабѣ, что и на фиг. 216. Если такъ, то теперь уже безъ всякихъ упрощеній и предположеній можно графически найти величину интеграла уравненія (50), для чего беремъ прямоугольную систему координатъ x o y (фиг. 217) и на оси абсциссъ Ox

*) На фиг. 216 это произведеніе выразится, очевидно, отрѣзкомъ KK' .

условимся откладывать доли дуги зацепленія, а ординатами будемъ считать отрѣзки, представляющіе въ томъ или другомъ масштабѣ величины коэффиціента передъ ds въ (50), который мы теперь сумѣемъ вычислить для любого момента. Откладываемъ такимъ образомъ по Ox , начиная, положимъ, отъ точки O , длину всей дуги зацепленія, напр., въ cm . и дѣлимъ ее на рядъ небольшихъ равныхъ частей, положимъ на m ; каждой изъ точекъ дѣленія соотвѣтствуетъ своя величина нормали p и свой уголъ α , а поэтому и своя величина выраженія (58).

Теперь въ каждой изъ точекъ дѣленія возставляемъ ординаты и на каждой откладываемъ соотвѣтственные величины (58) въ опредѣленномъ масштабѣ (напр., $1\text{ кг.} = 1\text{ cm.}$); такимъ образомъ получаемъ рядъ точекъ $a, b, c, \dots, v, w$ и соединяя ихъ непрерывной кривой, получаемъ нѣкоторую площадь $awto$, ограниченную крайними ординатами Oa и tw , осью абсциссъ и кривою $ab \dots vw$. Площадь эта и даетъ намъ въ опредѣленномъ масштабѣ (напр., въ $\text{кг.} \times \text{cm}$) величину интеграла выраженія (52), т.-е. величину работы тренія въ данномъ зацепленіи. Что упомянутая площадь дѣйствительно выразить собою значеніе этого интеграла, видно изъ того, что элементарная площадь dF , ограниченная нѣкоторой кривой, осью абсциссъ и двумя смежными ординатами y и $(y + dy)$, какъ извѣстно изъ анализа, выражается произведеніемъ ydx , а въ нашемъ случаѣ, гдѣ абсциссами служатъ части дуги зацепленія s , $dF = yds$, но ордината y есть не что иное, какъ выраженіе (58), стоящее передъ ds , въ выраженіи (51), поэтому эта величина dF и представляетъ собою элементъ интеграла, подлежащаго нашему вычисленію, сумма же этихъ элементарныхъ площадей, дающая всю площадь, ограниченную извѣстнымъ образомъ, и представитъ собою интегралъ указаннаго уравненія.

Далѣе можно вычислить потерю работы на треніе, приходящуюся на единицу длины дуги зацепленія; сдѣлать это удобнѣе всего путемъ опредѣленія площади фиг. 217 при помощи планиметра Амслера или какого-нибудь другого интеграла и построенія равновеликаго съ этой фигурой прямоугольника, основаніе котораго равно s ; высота его и дастъ намъ величину той силы тренія, которая, работая за все время зацепленія одна, произвела бы ту же работу, что и всѣ частичныя силы тренія, мѣняющіяся во времени по величинѣ.

Разсмотрѣнный графическій методъ имѣетъ передъ аналитическимъ еще то преимущество, что позволяетъ намъ видѣть, какіе элементы сопряженныхъ зубьевъ работаютъ больше, какіе меньше. Пусть для какого-нибудь зацепленія мы построили кривую MN (фиг. 218), аналогичную кривой aw фигуры 217. Эта кривая MN показываетъ намъ, какъ вся работа тренія распредѣляется по всей дугѣ зацепленія s . Мы видимъ, что на одинаковыхъ по величинѣ частяхъ дуги зацеп-

плена работа трения выражается различно,—одному и тому же элементу ds дуги зацепления соответствуют различныя элементарныя площади I и II, смотря по тому, въ какой части дуги зацепления мы выделяемъ элементъ ds . Далѣе, каждому элементу ds соответствуетъ одинъ единственный и вполне определенный участокъ поверхности сопряженныхъ профилей, находящихся въ данный моментъ въ соприкосновеніи; его можно легко найти по чертежу; легко видѣть, что это въ свою очередь, позволить намъ составить себѣ полное представленіе о томъ, какія части профилей будутъ изнашиваться болѣе, какія—менѣе. Такое графическое изслѣдованіе трения въ зацепленіи слѣдовало выполнять при проектированіи каждой серьезной зубчатой передачи.

Чтобы еще яснѣе представить себѣ распредѣленіе работы трения по участкамъ профиля, нужно принять во вниманіе, что мы брали выше определенную часть *дуги зацепления* и говорили, что на ея долю приходится нѣкоторая определенная работа; далѣе слѣдуетъ указать, что этой взятой нами части дуги зацепления соответствуетъ своя определенная дуга *профиля*, и можетъ оказаться, что на одномъ профилѣ эта послѣдняя дуга будетъ больше, на другомъ — меньше: тому профилю, который скользитъ больше, соответствуетъ и большая длина дуги его, приходящаяся на одинъ и тотъ же элементъ ds , а это и дастъ намъ возможность опредѣлить, что на единицу длины профиля, взятую въ какомъ-нибудь определенномъ мѣстѣ, приходится такая-то работа и т. д.

Подобнаго рода изслѣдованія важны для насъ въ томъ отношеніи, что дѣлаютъ возможнымъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ принятіе мѣръ противъ излишняго изнашиванія; даже болѣе,—въ нѣкоторыхъ случаяхъ, они являются прямо необходимыми, напр., въ тѣхъ, когда отъ правильности работы зубцовъ зависитъ правильность работы самой машины, какъ это имѣетъ, напр., мѣсто въ горныхъ желѣзныхъ дорогахъ. Составленные указаннымъ способомъ діаграммы распредѣленія работы трения покажутъ намъ, гдѣ и въ какой мѣрѣ придется или измѣнить, или же составить и подобрать профили зубьевъ такъ, чтобы работа была распредѣлена возможно равномерно.

Трение въ подшипникахъ и шипахъ.

Пусть какой-нибудь шипъ, цилиндрической или конической (или же пята), нагруженный извѣстнымъ грузомъ (собственнымъ вѣсомъ вала, вѣсомъ сидящихъ на немъ деталей и т. д.) работаетъ въ соотвѣтствующей опорѣ. При построении опоръ стараются выполнять ихъ такъ, чтобы опорная поверхность была симметричною относительно результирующей силы. Пусть подшипникъ нашего шипа по-

строены именно такъ и пусть намъ извѣстна величина этой результирующей силы ея. Это давленіе ея распредѣлится нѣкоторымъ определеннымъ образомъ по всей поверхности соприкосновенія. Законъ этого распредѣленія мы должны знать для каждаго даннаго случая отдѣльно, ибо только тогда мы и будемъ въ состояніи вычислить какъ силу тренія, такъ и ея моментъ и работу. Но, къ сожалѣнію, мы не можемъ рѣшить этого вопроса, какими бы остроумными гипотезами мы при этомъ ни задавались. Принимать, что въ подшипникахъ мы имѣемъ треніе исключительно сухихъ и твердыхъ тѣлъ, мы не въ правѣ, такъ какъ, строго говоря, явленія тренія сухихъ твердыхъ тѣлъ на практикѣ встрѣтить нельзя. Далѣе, даже при теоритическомъ изслѣдованіи тренія сухихъ твердыхъ тѣлъ мы не имѣемъ возможности опредѣлить и вывести законъ распредѣленія давленій, а тѣмъ самымъ лишены возможности знать что-либо о треніи въ данномъ мѣстѣ подшипника; можно, конечно, дѣлать нѣкоторыя произвольныя гипотезы, болѣе или менѣе вѣроятныя, но точнаго рѣшенія вопроса мы не имѣемъ.

Всѣ эти гипотезы можно раабить на два главные класса; къ первому можно отнести тѣ изъ нихъ, которыя принимаютъ равномерное распредѣленіе давленія по всей поверхности соприкосновенія; ко второму относятся тѣ, которыя принимаютъ неравномерное распредѣленіе давленія, напр., такое, что по мѣрѣ истиранія поверхностей шипа и подшипника шипъ постепенно погружается въ подшипникъ, но соприкосновеніе попрежнему происходитъ по всей опорной поверхности; отсюда, какъ мы увидимъ ниже, можно вывести законъ распредѣленія давленій.

Разсмотримъ одну изъ гипотезъ второго класса, принимающую, что въ томъ случаѣ, когда сила P придавливаетъ шипъ къ подшипнику, изнашивание подшипника по направленію дѣйствія этой силы идетъ равномерно, — шипъ начинаетъ погружаться по направленію силы P , и это погруженіе для всѣхъ точекъ опорной поверхности будетъ одно и то же.

Пусть шипъ находится подъ дѣйствіемъ вертикальной силы P (фиг. 219); эта сила P разобьется на рядъ элементарныхъ давленій n которыя мы считаемъ дѣйствующими перпендикулярно къ элементамъ поверхности соприкосновенія ds , такъ что всѣ ихъ направленія сходятся въ центрѣ шипа O . Пусть AB есть предыдущее очертаніе опорной поверхности, $A_1 B_1$ — послѣдующее; мы видимъ, что по направленію нормали Od сточился кусокъ cd , а по направленію дѣйствія силы P — кусокъ de . Спрашивается, чему пропорціонально это погруженіе de ?

Сила тренія пропорціональна давленію, равно какъ и работа изнашивания. Обозначимъ давленіе на единицу площади соприкосновенія черезъ p ; тогда имѣющая здѣсь мѣсто сила тренія выразится про-

изведеніемъ fr . Пусть dO , радіусъ шипа, равенъ ρ (въ случаѣ пяти величиной ρ мы обозначаемъ разстояніе центра элемента ds отъ геометрической оси вращенія); тогда находимъ, что моментъ силы тренія будетъ равенъ $f\rho r$ и слѣдовательно, *работа тренія будетъ пропорціональна величинѣ $f\rho r$* *).

Работа тренія пойдетъ частью на нагрѣваніе, частью на изнашиваніе, вообще же говоря, можно положить, что это изнашиваніе будетъ пропорціонально работѣ тренія. Основываясь на этомъ и зная, что изнашиваніе въ направленіи силы n , обусловливающей силу тренія fr , выражается отрѣзкомъ cd , мы можемъ сказать, что величина этого отрѣзка пропорціональна работѣ тренія. Въ виду же указанной выше пропорціональности между работой силы тренія и величиной $f\rho r$ —моментомъ силы тренія, мы можемъ написать слѣдующее равенство, внося, конечно, нѣкоторый коэффициентъ пропорціональности μ :

$$cd = \mu \cdot f\rho r \dots \dots \dots (59)$$

(μ есть число постоянное).

Интересующее же насъ погруженіе шипа въ направленіи силы P выражается отрѣзкомъ de , который можно выразить въ функціи отрѣзка dc , замѣтивъ, что криволинейный треугольникъ dce можно считать (приблизительно) за прямолинейный и прямоугольный съ прямымъ угломъ c . Тогда, обозначивъ уголъ между n и P черезъ φ , такъ что $\angle cde = \varphi$, можемъ написать, что

$$de = \frac{cd}{\cos \varphi}$$

что въ виду уравненія (59) можетъ быть переписано такъ:

$$de = \frac{\mu \cdot f \cdot \rho \cdot r}{\cos \varphi} \dots \dots \dots (60)$$

но такъ какъ разбираемая нами гипотеза принимаетъ, что во всѣхъ точки шипа погружаются одинаково, то слѣдуетъ положить $de = \text{const}$, т.-е.

$$\frac{\mu \cdot f \cdot \rho \cdot r}{\cos \varphi} = \text{const.} \dots \dots \dots (61)$$

μ и f мы считаемъ величинами постоянными, благодаря чему формулу (61) можно нѣсколько упростить, включивъ μ и f въ составъ самого const ., т.-е. положить количество $\frac{\text{const}}{\mu \cdot f}$ равнымъ новой по-

*) Пусть сила F вращаетъ тѣло съ угловой скоростью ω , гдѣ $\omega = \text{const}$. Если моментъ этой силы обозначимъ черезъ M , то работа при этомъ вращеніи, совершаемая силой F , выразится произведеніемъ $M\omega$; такимъ образомъ работа силы будетъ пропорціональна ея моменту.

стоянной, положимъ, a , и тогда формула (61) приметъ видъ

$$\frac{p \cdot \rho}{\cos \varphi} = a \dots \dots \dots (61)$$

или

$$p\rho = a \cos \varphi \dots \dots \dots (62)$$

Эта формула даетъ возможность вывести распредѣленіе давленія для *всякихъ шиповъ*, но мы ограничимся лишь случаемъ *цилиндрическаго* шипа; радіусъ его ρ будетъ теперь величиной *постоянной*. Мы предположили, что нашъ шипъ вращается равномерно; это значить, что въ каждый данный моментъ имѣеть мѣсто равновѣсіе между всѣми дѣйствующими силами; поэтому, проектируя каждое изъ частичныхъ давленій n на направленіе силы P и суммируя эти проекціи, мы должны въ суммѣ получить какъ разъ P . Продѣлаемъ этотъ подсчетъ.

Давленіе на единицу площади опорной поверхности мы называли черезъ p . Выдѣлимъ на этой опорной поверхности элементъ ея, ограниченный двумя элементами окружностей основанія ds (фиг. 220) и двумя образующими, проходящими черезъ конечныя точки элементовъ ds . Площадь этого элемента, очевидно, напишется такъ:

$$dF = l \cdot ds$$

гдѣ $l = kn$ — длинѣ шипа; если центральный уголъ, соотвѣтствующій дугѣ ds , назовемъ черезъ $d\varphi$, то можемъ написать, что

$$ds = \rho d\varphi$$

поэтому площадь элемента, dF , перепишется такимъ образомъ:

$$dF = l \cdot \rho \cdot d\varphi$$

и, слѣдовательно, все давленіе на элементъ dF , которое мы обозначимъ черезъ q изобразится въ видѣ

$$q = p \cdot l \rho d\varphi \dots \dots \dots (63)$$

но такъ какъ въ силу равенства (62)

$$p\rho = a \cos \varphi$$

то выраженіе (63) приметъ видъ:

$$q = a l \cos \varphi d\varphi \dots \dots \dots (63)$$

Проектируя это давленіе на направленіе P и замѣчая, что уголъ между направленіями силъ n и P равенъ φ , можемъ написать:

$$n p \cdot q = q \cdot \cos \varphi = a l \cos^2 \varphi d\varphi \dots \dots \dots (64)$$

Сумма всѣхъ такихъ проекцій, отнесенная къ полукружности основанія цилиндра, т.-е. взятая въ предѣлахъ отъ $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$ до $\left[+\frac{\pi}{2}\right]$,

должна дать P , т.-е. должно быть:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} alcs^2\varphi d\varphi = P \dots \dots \dots (65)$$

Такъ какъ a и l суть величины постоянныя, а $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 2 \int_0^{+\frac{\pi}{2}}$ то уравненіе (65) переписется такъ:

$$a \cdot l \cdot 2 \int_0^{+\frac{\pi}{2}} cs^2\varphi d\varphi = P \dots \dots \dots (66)$$

интегрируя получимъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cs^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \left[\varphi + \sin\varphi \cos\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4},$$

слѣдовательно уравненіе (66) преобразуется такъ:

$$al \frac{\pi}{2} = P$$

откуда можемъ опредѣлить нашу постоянную a :

$$a = \frac{2 \cdot P}{\pi \cdot l} \dots \dots \dots (67)$$

Зная же a , сейчасъ же по (62) опредѣлимъ давленіе въ любой точкѣ шипа: изъ (62) имѣемъ

$$p\rho = acs\varphi$$

что въ виду (67) даетъ:

$$p\rho = \frac{2 P cs\varphi}{\pi l}$$

такъ что давленіе p на единицу площади элемента, которому соответствуетъ центральный уголъ φ , выражается по рассматриваемой гипотезѣ такъ:

$$p = \frac{2 P cs\varphi}{\rho \pi l} \dots \dots \dots (68)$$

Таковъ законъ распредѣленія давленій по этой гипотезѣ. Разъ мы его нашли, мы сейчасъ же сумѣемъ найти какъ силу тренія, равную fp , такъ и работу тренія въ данномъ мѣстѣ, равную $fpds$; для полученія же всей работы, уходящей на преодоленіе тренія, интегрируемъ выраженіе $fpds$ по всей полуокружности основанія цилиндра; вычисленія производить здѣсь не станемъ. Что касается момента

діусы векторы ρ , а ординатами—соотвѣтственные давленія p , изображится равнобокой гиперболой MN , отнесенной къ асимптотамъ $O\alpha$ и $O\beta$, а въ такомъ случаѣ выходитъ, съ одной стороны, что съ увеличеніемъ діаметра пяты давленіе у краевъ ея будетъ все меньше и меньше; съ другой стороны въ центрѣ пяты давленіе должно достигать безконечно большихъ размѣровъ. Въ дѣйствительности увеличеніе давленія въ центрѣ такихъ размѣровъ не имѣетъ; но такъ какъ все-таки въ центрѣ пяты давленіе гораздо больше, чѣмъ у краевъ, то отвергнуть приведенную гипотезу цѣликомъ нельзя, мы должны признать ее приблизительной и лишь отчасти выясняющей сущность имѣющихся здѣсь мѣсто явленій.

Отличительной чертой какъ этой гипотезы, такъ и многихъ другихъ, подобно ей разбирающихъ вопросъ о треніи шипа въ подшипникѣ, является умалчиваніе о томъ, что въ дѣйствительности ни одинъ шипъ не идетъ безъ смазки, — поэтому для того, чтобы результаты теоріи могли быть примѣняемы на дѣлѣ, непременно слѣдуетъ принять во вниманіе наличность еще одного фактора—*вліянія смазки*. Путемъ опытовъ установлено, что при хорошей и правильной смазкѣ между поверхностями шипа и подшипника всегда имѣется тонкій слой смазывающаго вещества, удерживаемый силами молекулярнаго взаимодействія; такимъ образомъ, шипъ какъ бы катается въ маслѣ. Точнѣе, можно обрисовать имѣющее здѣсь мѣсто явленіе такъ: какъ на поверхности шипа, такъ и подшипника имѣются довольно прочно приставшіе къ нимъ два слоя масла; такимъ образомъ при вращеніи шипа этотъ послѣдній будетъ увлекать за собою свой слой смазки, т.-е. будетъ заставлятъ его скользить по слою, приставшему къ поверхности подшипника; такимъ образомъ, на дѣлѣ имѣетъ мѣсто явленіе *трения жидкихъ тѣлъ*, а такъ какъ треніе жидкихъ тѣлъ значительно меньше тренія твердыхъ, то отсюда становится яснымъ какъ уменьшеніе момента, потребнаго для вращенія смазываемыхъ шиповъ сравнительно съ несмазываемыми, такъ и необходимость устройства хорошей смазки — вообще.

Толщина упомянутыхъ слоевъ зависитъ, между прочимъ, и отъ давленія на единицу опорной поверхности шипа. Можетъ поэтому случиться, что въ томъ мѣстѣ, гдѣ это давленіе дѣлается достаточно большимъ, смазка сейчасъ же вытѣснится, и, слѣдовательно, обнаружится явленіе тренія уже твердыхъ тѣлъ; это треніе сейчасъ же вызоветъ сильнѣйшее нагрѣваніе шипа, накаливаніе его и, наконецъ, изломъ,—все это можетъ быть дѣломъ нѣсколькихъ мгновеній. Стало быть, опасность заключается въ возможности вытѣсненія смазки, за чѣмъ можетъ послѣдовать треніе сухихъ тѣлъ, и это обстоятельство служить раціональнымъ объясненіемъ того, почему для однихъ матеріаловъ допускаются большія давленія на единицу поверхности, а для другихъ — малыя. На самомъ дѣлѣ, если структура матеріаловъ

ходило извѣстныхъ границъ, чтобы количество тепла, выдѣляющееся при треніи, а значитъ и самая работа тренія, приходящаяся на единицу опорной поверхности, не превышала нѣкоторой опредѣленной величины. Мы поступаемъ здѣсь такъ: беремъ среднее давленіе на единицу опорной поверхности; оно выражается у насъ черезъ $\frac{P}{l \cdot d}$ или черезъ k , для полученія средней силы тренія множимъ k на нѣкоторый *опытный коэффициентъ* μ ; находимъ, такимъ образомъ, среднюю силу тренія, μk ; моментъ этой силы, при радіусѣ шипа r , равенъ $\mu k r$ *). Работа силы выражается, какъ мы знаемъ, произведеніемъ изъ момента на угловую скорость **); въ данномъ случаѣ угловая скорость

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$$

гдѣ n — число оборотовъ шипа въ минуту; поэтому средняя работа тренія выразится произведеніемъ

$$l_f = \mu k r \frac{\pi \cdot n}{30}$$

и эта величина не должна быть больше нѣкоторой L_f допускаемой опытомъ:

$$\frac{\pi}{30} \mu \cdot k \cdot r \cdot n \leq L_f \dots \dots \dots (71)$$

Величину L_f различные авторы даютъ различно; *Radinger*, напр., принимаетъ ее въ 1 кгр — мтр.; другіе — больше. Что же касается до μ , то руководствуются средними числами, берутъ, напр., $\mu = 0,1$; $0,05$; ...

При расчетѣ сначала задаются величинами L_f , k и μ , а затѣмъ уже подбираютъ подходящія значенія для d и l .

Въ заключеніе этого параграфа упомянемъ, что среди многихъ теорій, разрабатывающихъ вопросы о треніи шиповъ въ присутствіи

*) Такъ какъ

$$k = \frac{P}{ld}$$

то моментъ $\mu r k = M_f$ будетъ выражаться такъ:

$$M_f = \frac{\mu P r}{ld}$$

Вообще говоря, этотъ моментъ можно положить равнымъ произведенію изъ Pr на нѣкоторый опытный коэффициентъ γ , такъ что $M_f = \gamma Pr$. Во многихъ руководствахъ указывается, что этотъ коэффициентъ $\gamma = \frac{4}{\pi} f$, но такъ какъ эта гипотеза нисколько не рациональнѣе другихъ, то въ случаѣ, если бы мы хотѣли воспользоваться формулой $M_f = \gamma Pr$, лучше всего воспользоваться подходящимъ коэффициентомъ γ , взятымъ изъ опыта.

**) См. примѣчаніе стр. 183.

смазки, слѣдуетъ отмѣтить весьма важныя изслѣдованія *Петрова*, трактующія вопросъ о треніи жидкихъ слоевъ, а также замѣчательныя изслѣдованія *Жуковскаго*, затрагивающія самыя тонкія области гидродинамики,—*Жуковский* разбираетъ вопросъ о существованіи жидкаго слоя на поверхности шиповъ и вообще трущихся поверхностей.

Треніе каченія (2-го рода).

Коэффициентъ тренія.

Если у насъ имѣется какое-нибудь круглое тѣло, лежащее на горизонтальной плоскости, то для каченія его нужно приложить къ нему нѣкоторую пару, которая могла бы его повертывать, и эта пара должна дѣйствовать на цилиндръ во все время его каченія. Теоретически слѣдовало бы ожидать, что присутствіе этой постоянно дѣйствующей на тѣло пары силъ повлечетъ за собою *ускоренное движеніе*, на практикѣ, однако, подобная пара можетъ при нѣкоторой определенной величинѣ поддерживать равномерное движеніе,—стало быть, при движеніи нашего тѣла возникаетъ нѣкоторая другая пара, равная и противоположная первой и ее уравнивающая (въ случаѣ равномернаго движенія).

Явленіе это, обыкновенно, стараются объяснить такъ: въ виду того, что матеріалы какъ цилиндра *C*, такъ и плоскости *AB*, по которой происходитъ каченіе, сжимаемы, то цилиндръ, налегши на плоскость (фиг. 224), отчасти деформируется самъ, отчасти деформируетъ плоскость, онъ самъ нѣсколько сплющится, а на плоскости образуетъ нѣкоторое углубленіе. Теперь казалось бы вполне естественнымъ предположить, что въ виду полной симметріи деформированнаго тѣла, равнодѣйствующая всѣхъ силъ упругости, вызванныхъ здѣсь, пройдетъ черезъ ось цилиндра, совпадетъ съ плоскостью симметріи, и поэтому, въ сущности, не будетъ въ состояніи повліять на замедленіе движенія цилиндра. Въ виду же того, что на дѣлѣ имѣетъ мѣсто замедленіе движенія, слѣдуетъ заключить, что здѣсь появляется пара, противодѣйствующая каченію, и если, мы примемъ, что въ тѣла *P* дѣйствуетъ по оси симметріи (что совершенно справедливо), а равнодѣйствующая *R* силъ сопротивленія не совпадаетъ съ вертикальной плоскостью симметріи, а отходитъ отъ нея впередъ, по направленію движенія, то станетъ вполне понятнымъ, что сила *P* и вертикальная слагающая силы *R* могутъ образовать пару, которая будетъ въ состояніи уравнивать внѣшнюю пару или вообще противодѣйствовать каченію.

Такимъ образомъ приведенное объясненіе основывается на пред-

положеніи, что *результатирующая всѣхъ силъ сопротивленія опорной поверхности не проходитъ черезъ геометрическую середину дуги соприкосновенія*, т.-е. черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія. Очевидно, что это объясненіе, въ сущности, представляетъ собою лишь перефразировку этого явленія, оно говоритъ намъ, что дѣло можно объяснить отклоненіемъ равнодѣйствующей, но не говоритъ, почему происходитъ такое странное отклоненіе.

Болѣе раціональныя указанія на сущность явленія даетъ *Рейнольдъ*. Этотъ изслѣдователь задался цѣлью доказать, что *трѣніе каченія* можетъ быть сведено на *трѣніе скольженія*. Хотя *Рейнольдъ* не пришелъ въ своихъ изслѣдованіяхъ къ какимъ-либо ошутительнымъ результатамъ, но тѣмъ не менѣе изысканія его вполне заслуживаютъ вниманія. *Рейнольдъ* рассуждалъ такъ: допустимъ, что у насъ имѣется какое-нибудь круглое тѣло, лежащее на горизонтальной плоскости, такъ какъ матеріалы ихъ абсолютною твердостью не отличаются, то въ мѣстѣ соприкосновенія поверхности деформируются, и, какъ это нетрудно видѣть, частицы каждой поверхности, приходящіяся на этихъ деформированныхъ участкахъ, должны испытывать нѣкоторыя перемѣщенія одна относительно другой, а именно, можно предположить, что поверхность нашего круглаго тѣла, допустимъ, цилиндра, въ мѣстѣ соприкосновенія испытаетъ сжатіе, а плоскость — растяженіе; дѣйствительно, поверхность цилиндра *C* (фиг. 225) до момента соприкосновенія была вполне цилиндрической, въ продолженіе же соприкосновенія участокъ ея, допустимъ *acb*, нѣсколько сплющивается, переходитъ въ *adb*, значитъ на протяженіи всего участка *adb* частицы *сблизились*, ибо $adb < acb$; вслѣдствіе чего произошло сжатіе, подобнымъ же образомъ нетрудно сообразить, что на участкѣ *acb* плоскости *AB*, перешедшемъ въ *adb*, имѣетъ мѣсто *растяженіе*, такъ какъ $adb > acb$ и, значитъ, частицы раздвинулись.

Пусть въ рассматриваемый моментъ цилиндръ *лежитъ на плоскости неподвижно*, — это значитъ, что между силами упругости существуетъ равновѣсіе. Пусть теперь нѣкоторая пара выводитъ его изъ положенія покоя и заставляетъ катиться; ясно, что тогда начнутъ подвергаться деформированію все новые и новые участки поверхностей какъ цилиндра, такъ и плоскости: одновременно съ этимъ частицы участковъ, испытывавшихъ до того деформации, а теперь одинъ за другимъ возвращающихся къ своему первоначальному состоянію, теперь станутъ возвращаться на свои прежнія мѣста, такъ что въ концѣ концовъ работа упругихъ деформаций не отыметъ отъ расходуемой нами на поддержаніе каченія работы ничего, и, слѣдовательно, такимъ образомъ объяснить явленія нельзя было бы, если бы здѣсь не имѣлъ мѣста фактъ, впервые подмѣченный *Рейнольдомъ* и весьма удачно использованный имъ для своихъ цѣлей. Дѣло въ томъ, что кусокъ *ти* поверхности цилиндра, выйдя изъ соприкосновенія съ плоскостью,

непремѣнно долженъ *удлиниться*, ибо во время соприкосновенія онъ былъ *сжатъ*, съ другой стороны лежавшій во время соприкосновенія вмѣстѣ съ нимъ кусокъ *тн* плоскости, выйдя изъ соприкосновенія, непремѣнно *сожмется*, ибо онъ былъ *растянутъ*, значитъ, какъ только при каченіи цилиндра наступитъ такой моментъ, когда элементы *тн* поверхностей выйдутъ изъ соприкосновенія, то плоскость и цилиндръ одновременно будутъ стремиться принять свою прежнюю форму, а именно, кусокъ *тн* цилиндра будетъ *растягиваться*, а кусокъ *тн* плоскости будетъ *сжиматься*, и, слѣдовательно, каждые два такихъ элемента будутъ *скользить* одинъ относительно другого. Буквально, то же самое придется сказать вообще относительно всѣхъ другихъ элементовъ, находящихся въ данный моментъ въ соприкосновеніи.

Что касается элементовъ, подлежащихъ точкѣ *b*, то они, входя въ соприкосновеніе, должны одни сокращаться, другіе—расширяться, что въ результатѣ опять ведетъ къ относительному скользянію ихъ одного по другому.

Заключеніе очевидно: разъ имѣетъ мѣсто такого рода скользяніе, то на преодоленіе сопротивленія этому скользянію непремѣнно нужно затратить извѣстную работу, и поэтому намъ и придется доставить тѣлу эту работу, или же тѣло само отыметъ ее отъ той работы, которую мы сообщаемъ ему извнѣ. Такимъ образомъ, тѣло сопротивляется каченію потому, что при каченіи появляются силы тренія, на возмѣщеніе работы которыхъ и должна пойти или вся работа приложенной извнѣ къ тѣлу пары или только ея часть. Резюмируя все изложенное, можемъ сказать, что *трата работы на каченіе тѣла обусловливается скользяніемъ элементовъ поверхности одного тѣла по поверхности другого*.

Мысль эта въ сущности вѣрна и могла бы привести къ плодотворнымъ результатамъ, если бы аналитическая обработка ея не была сопряжена съ такими трудностями, обойти которыхъ при современномъ состояніи науки не удалось никому.

Такимъ образомъ, съ большою достовѣрностью можно утверждать, что явленіе *трения каченія* или «трения 2-го рода», сводится, въ сущности, къ явленію *трения скольженія* или «трения 1-го рода»; но какъ при этомъ распределяется давленіе, какъ велика работа трения на томъ или другомъ участкѣ, все это намъ совершенно неизвѣстно.

Въ дальнѣйшемъ мы *условно* будемъ пользоваться прежнимъ представленіемъ, а именно: будемъ предполагать, что существуетъ нѣкоторый противодѣйствующій каченію моментъ, обусловленный наличностью трения, и что на преодоленіе его, при равномерномъ движеніи тѣла, и идетъ моментъ внѣшнихъ силъ.

Мы примемъ, что моментъ *M* этой пары сопротивленія пропорціоналенъ нагрузкѣ *P*

$$M = m \cdot P \dots \dots \dots (72)$$

Введеніе этого коэффиціента m мы должны оговорить, замѣтивъ, что, строго говоря, мы не можемъ особенно настаивать на правильности уравненія (72),—не можемъ сказать, что моментъ M пропорціоналенъ непремѣнно первой степени груза, P ,—онъ быть можетъ, пропорціоналенъ какой-нибудь другой; быть можетъ зависимость эта выражается вообще какъ-нибудь иначе. Не зная этого, мы, однако, условно примемъ уравненіе (72).

Коэффиціентъ m , называемый *коэффиціентомъ тренія 2-го рода*, долженъ быть, такимъ образомъ, числомъ именованнымъ и выразиться въ *линейныхъ* единицахъ (mm , или cm .) *). Величину этого коэффиціента—этого *плеча тренія*, можно было-бы найти опытнымъ путемъ, наблюдая измѣненія потребной для каченія работы въ зависимости отъ измѣненія величины нагрузки на катящееся тѣло, и если бы мы пожелали сформулировать простѣйшую изъ задачъ этого рода, то могли бы сдѣлать это такъ: имѣется нѣсколько валиковъ одного діаметра, лежащихъ на горизонтальной плоскости; на нихъ лежитъ платформа, нагруженная опредѣленнымъ грузомъ; спрашивается, какъ велика должна быть сила, нужная для перемѣщенія платформы? Задача эта уже съ незапамятныхъ временъ находила себѣ примѣненіе въ случаяхъ перемѣщенія тяжестей съ мѣста на мѣсто; давно уже было извѣстно, что, устраивая перемѣщенія грузовъ именно такимъ образомъ, можно малыми силами перемѣщать весьма большіе грузы.

Какъ это обстоятельство, такъ и спеціальныя опыты показываютъ, что треніе каченія значительно меньше тренія скольженія; это становится вполне понятнымъ, если мы обратимъ вниманіе на то, что, хотя при каченіи мы имѣемъ въ сущности то же *скольженіе*, но за то *только относительное*, деформаціи получаютъ здѣсь гораздо меньшими, чѣмъ при скольженіи, причина чему лежитъ въ малости относительнаго измѣненія единицы длины, поэтому на эти деформаціи и работы требуется много меньше, чѣмъ при такомъ же перемѣщеніи, но при помощи лишь простаго скольженія. Указанія *Рейнольда* помогаютъ намъ совершенно ясно представить себѣ причину этой разницы треній.

Мы должны здѣсь оговориться, что треніе каченія мы сравниваемъ съ треніемъ скольженія *сухихъ* тѣлъ; въ случаѣ скольженія *смазанныхъ* поверхностей нельзя уже будетъ сказать, что треніе каченія меньше тренія скольженія. Не останавливаясь, однако, долѣе на этихъ общихъ разсужденіяхъ, мы вернемся къ сформулированной выше задачѣ и постараемся разсмотрѣть ее подробнѣе.

*) Коэффиціентъ тренія 1-го рода есть число *отвлеченное*.

Каченіе телѣжекъ.

Пусть грузъ Q (фиг. 226) лежитъ на платформѣ AB , и эта платформа за данный промежутокъ времени dt перемѣстилась подѣ дѣйствіемъ внѣшней горизонтальной силы P на длину dx . На это перемѣщеніе мы затратили извѣстную работу, а именно: работу

$$L_p = P \cdot dx$$

эта работа ушла на преодоленіе сопротивленія каченію. Обозначимъ коэффициентъ тренія каченія для катка и плоскости xu черезъ m_1 , а для катка и платформы—черезъ m_2 ; тогда, согласно формулѣ (72), моментъ сопротивленія каченію катковъ по плоскости xu выразится черезъ

$$M_1 = m_1 Q$$

а моментъ сопротивленія при относительномъ каченіи (плоскости AB по каткамъ) черезъ

$$M_2 = m_2 Q$$

такимъ образомъ для поворачиванія катковъ придется употребить моментъ $M = M_1 + M_2$ т. е.:

$$M = [m_1 + m_2] Q \dots \dots \dots (73)$$

Какъ извѣстно, работа момента M выражается произведеніемъ момента M на угловую скорость ω ; подсчитаемъ эту работу.

Если за центръ мгновеннаго вращенія мы возьмемъ точку p и угловую скорость этого вращенія обозначимъ черезъ ω , то точка a за время dt пройдетъ путь $\omega \cdot 2r \cdot dt$; это перемѣщеніе, съ другой стороны, равно dx , т. е.

$$dx = \omega \cdot 2r \cdot dt \dots \dots \dots (74)$$

Если угловая скорость равна ω , то работа момента M въ единицу времени выразится $M\omega$, а за время dt черезъ $M \cdot \omega \cdot dt$; та же работа выражается еще черезъ $P \cdot dx$, почему можно написать:

$$P dx = M \omega \cdot dt \dots \dots \dots (75)$$

что, въ виду (74), перепишется такъ:

$$P \cdot \omega \cdot 2r \cdot dt = M \omega dt \dots \dots \dots (76)$$

Послѣ сокращеній, имѣемъ:

$$P \cdot 2r = M = [m_1 + m_2] Q \dots \dots \dots (77)$$

откуда получимъ величину нужной для перемѣщенія силы P :

$$P = \frac{[m_1 + m_2] Q}{2r} \dots \dots \dots (78)$$

Изъ подобныхъ опытовъ найденъ цѣлый рядъ коэффиціентовъ m для различныхъ случаевъ каченія.

Если мы пожелаемъ принять во вниманіе вѣсъ катковъ K , то, замѣтивъ, что это равносильно замѣнѣ груза Q грузомъ $(K + Q)$, при составленіи момента M можемъ написать, что теперь

$$M'_1 = m_1 [K + Q]$$

$$M'_2 = m_2 Q$$

$$M' = m_1 [K + Q] + m_2 Q \dots \dots \dots (73')$$

$$P' \cdot 2r = m_1 [K + Q] + m_2 Q \dots \dots \dots (77')$$

и, наконецъ,

$$P' = \frac{m_1 [K + Q] + m_2 Q}{2r} \dots \dots \dots (78').$$

Разсмотримъ еще одну задачу, сходную съ разобранной выше и находящую себѣ обширное примѣненіе на практикѣ, — задачу о катаніи телѣжекъ. Пусть у насъ имѣется телѣжка CD (фиг. 227) на колесахъ, опирающаяся, стало быть, на оси ихъ; пусть она нагружена грузомъ Q . Если эта телѣжка подъ дѣйствіемъ горизонтальной силы P прошла пространство dx , то, значитъ, на перемѣщеніе ея пошла работа $P \cdot dx$. Работа эта ушла на преодоленіе имѣющагося здѣсь тренія при каченіи колесъ по плоскости xy и тренія скольженія при вращеніи шиповъ осей въ своихъ подшипникахъ. Замѣчая, какъ и прежде, что полюсами мгновеннаго вращенія будутъ служить точки α , β , — точки касанія колесъ съ плоскостью и обозначая уголъ поворота около центра α , соотвѣтствующій долевному перемѣщенію dx , черезъ $d\varphi$, а радіусъ колеса черезъ r , найдемъ прежде всего, что

$$dx = r d\varphi$$

такъ что извнѣ затраченная работа L выражается такъ:

$$L = P \cdot r d\varphi \dots \dots \dots (79)$$

Легко видѣть, что работа на треніе каченія выразится черезъ $mQd\varphi$ *). Что касается силы тренія въ шипахъ, то мы введемъ ее здѣсь суммарно, т.-е. какъ произведеніе всей нагрузки Q на коэффиціентъ тренія f ; поэтому сила тренія въ шипахъ выразится произведеніемъ Qf ; моментъ же ея — черезъ $Qf\rho$, гдѣ черезъ ρ обозначенъ радіусъ шипа. Такъ какъ угловое перемѣщеніе шипа равно $d\varphi$, то работа тренія равна $Qf\rho d\varphi$, а ур-іе равенства работъ принимаетъ видъ:

$$Prd\varphi = mQd\varphi + Qf\rho d\varphi \dots \dots \dots (80)$$

*) Если угловая скорость равна ω , то $d\varphi = \omega dt$; работа момента M за то же время dt выразится черезъ $M\omega dt = Md\varphi$

или, послѣ сокращеній,

$$Pr = mQ + fpQ \dots \dots \dots (81)$$

такъ что величина силы P , потребной для движенія телѣжки, выражается ур-іемъ:

$$P = \frac{m + f \cdot \rho}{r} Q \dots \dots \dots (82)$$

Однородность членовъ, стоящихъ въ числитель дробі выраженія (82), соблюдена, такъ какъ m и ρ суть количества именованныя, а f —число отвлеченное.

Подобные расчеты въ машиностроеніи приходится дѣлать довольно часто, напр., въ телѣжкахъ крановъ, въ турбинахъ и пр., гдѣ нѣкоторый дискъ сажается на рядъ каточковъ, располагаемыхъ по его окружности, и эти каточки катаются затѣмъ по пристраиваемымъ для этого рельсамъ.

Ременная и канатная передача.

Ременная передача.

До сихъ поръ мы не касались вопроса о деформацияхъ, происходящихъ при томъ или другомъ способѣ воздѣйствія силы на деталь; теперь же мы рассмотримъ классъ явленій, гдѣ, въ противоположность прежнимъ случаямъ, деформаци такъ велики, что поглощаютъ нѣкоторую, хотя и небольшую, часть работы, и этого нельзя избѣгнуть по самой природѣ явленія,—мы подразумѣваемъ здѣсь явленіе *трѣнія между твердыми и гибкими тѣлами*. При точныхъ расчетахъ, которыхъ, однако, мы здѣсь приводить не будемъ, эту потерю приходится принимать во вниманіе; здѣсь мы только упомянемъ о ней, и въ дальнѣйшемъ будемъ считать наши гибкія тѣла, ремни и канаты, настолько гибкими, что работой, поглощаемой ими на деформированіе можно пренебречь.

Пусть ремень RR (фиг. 228) огибаетъ *неподвижный блокъ* L ; на концахъ его подвѣшены грузы P_1 и P_2 . Не слѣдуетъ думать, что равновѣсіе системы ремня съ грузами будетъ имѣть мѣсто лишь при равенствѣ грузовъ P_1 и P_2 . Опытъ показываетъ, что можно, не нарушая равновѣсія, увеличивать нагрузку ремня съ одной стороны, увеличивая, напр., грузъ P_1 , и скольженіе ремня поэтому неподвижному блоку начнется лишь тогда, когда избытокъ груза P_1 надъ P_2 достигнетъ нѣкоторой опредѣленной величины. Въ дальнѣйшемъ мы и будемъ разсматривать этотъ *начальный моментъ скольженія* или, иными словами, *последній изъ моментовъ равновѣсія*.

Если бы нашъ блокъ былъ *подвижнымъ*, то то при равенствѣ грузовъ, мы могли бы, вращая блокъ, поднять одинъ изъ грузовъ, поло-

жимъ, P_2 ; но если мы станемъ на этотъ грузъ P_2 накладывать добавочные грузы, то подниманіе этого увеличиваемаго груза будетъ все замедляться, пока, наконецъ, мы не дойдемъ до такого груза $P_2 + q$, что, при продолжающемся вращеніи блока, онъ уже подниматься не будетъ.

Такимъ образомъ, въ этотъ моментъ ремень будетъ нагруженъ грузами P_2 и $P_2 + q$; допустимъ, что площадь поперечнаго сѣченія ремня равна F ; обозначимъ затѣмъ грузъ $P_2 + q$ одной буквой P_1 . Тогда, обозначая напряженія ремня черезъ σ_1 и σ_2 , можемъ написать:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{F}; \sigma_2 = \frac{P_2}{F} \dots \dots \dots (83)$$

Въ виду того, что $P_1 > P_2$ заключаемъ, что и $\sigma_1 > \sigma_2$. Эта разница напряженій обусловливается, какъ это легко показать, присутствіемъ силъ тренія между ремнемъ и ободомъ шкива.

На самомъ дѣлѣ рассмотримъ какой-нибудь элементъ mn ремня (фиг. 229), соприкасающійся со шкивомъ. Длину его обозначимъ черезъ $d\delta$, а центральный уголъ, ему соотвѣтствующій, — черезъ $d\varphi$. Обозначимъ натяженіе на одномъ концѣ его m черезъ x ; тогда, принимая во вниманіе, что натяженіе возрастаетъ отъ S_1 до S_2 непрерывно*), мы можемъ обозначить натяженіе на концѣ n черезъ $x + dx$. Направленія силъ какъ x , такъ и $x + dx$ совпадаютъ съ направленіями касательныхъ къ окружности шкива, проведенныхъ въ точкахъ m и n . Складываемъ теперь эти натяженія по правилу параллелограмма, перенося ихъ въ точку пересѣченія касательныхъ C . Получаемъ такимъ образомъ равнодѣйствующую CD , которая и представитъ собою давленіе со стороны элемента $d\delta$ на шкивъ въ этомъ мѣстѣ. При малой разности величинъ x и $x + dx$ можно принять, что эта результирующая пойдетъ по CO , т.-е. по направленію къ центру O . Мы замѣчаемъ, что уголъ $CBD =$ углу mOn , т.-е. $d\varphi$. Въ виду незначительной разности между длинами отрѣзковъ $CB = x + dx$ и $BD = x$, $\triangle CBD$ можно считать равнобедреннымъ, а по малости угла $d\varphi$ отрѣзокъ CD можно принять совпадающимъ съ дугой, описанной изъ центра B радіусомъ $BD = x$. Тогда получимъ, что

$$CD = BD \cdot d\varphi = x d\varphi \dots \dots \dots (84)$$

Такимъ образомъ давленіе со стороны элемента ремня $d\delta$ на шкивъ выражается величиной $x \cdot d\varphi$; эта сила, вызывая въ свою очередь силу тренія $fx d\varphi$, обусловливаетъ собою сопротивленіе сдвигенію элемента $d\delta$ даже при неравенствѣ силъ на концахъ его; но въ случаѣ, если ремень движется по неподвижному блоку равномерно, очевидно,

*) Натяженія ремня S_1 и S_2 являются противодѣйствіями силамъ P_1 и P_2 , такъ что очевидно $P_1 = S_1$ и $P_2 = S_2$.

имѣетъ мѣсто уравновѣшиваніе силы тренія $fxd\varphi$ разницей натяженій dx ; поэтому при равномерномъ скольженіи ремня по блоку имѣетъ мѣсто ур-іе

$$dx = fxd\varphi \dots \dots \dots (85)$$

Раздѣляя переменныя, и интегрируя, получаемъ:

$$\frac{dx}{x} = f \cdot d\varphi \dots \dots \dots (86)$$

$$\lg_e x = f\varphi + c$$

такъ что

$$x = e^{f\varphi} \cdot e^c \dots \dots \dots (88)$$

а полагая $e^c = x_0$, находимъ

$$x = x_0 e^{f\varphi} \dots \dots \dots (89)$$

Такова зависимость между натяженіемъ x_0 ремня въ начальной точкѣ дуги обхвата $M^*)$ и натяженіемъ x въ произвольной точкѣ N (фиг. 230). Очевидно, что, такъ какъ углы обхвата φ мы отсчитываемъ отъ той точки M , гдѣ ремень соприкасается впервые съ блокомъ и гдѣ, согласно предыдущему, натяженіе равно S_2 , то $x_0 = S_2$ и тогда формула (89) приметъ видъ

$$x = S_2 \cdot e^{f\varphi} \dots \dots \dots (90)$$

Обозначивъ всю дугу обхвата черезъ φ_1 и замѣчая, что $x_{\varphi_1} = S_1$, найдемъ, что зависимость между натяженіями S_1 и S_2 ремня выразится уравненіемъ

$$S_1 = S_2 e^{f\varphi_1} \dots \dots \dots (91)$$

Такъ какъ показательная функція $e^{f\varphi_1}$ есть функція возрастающая и притомъ весьма быстро сравнительно съ возрастаніемъ аргумента $f\varphi_1$, то отсюда слѣдуетъ, что сдѣлавъ φ_1 достаточно большимъ, т.-е. обвивъ канатъ или ремень вокругъ неподвижнаго блока или цилиндра нѣсколько разъ, придется при малой силѣ S_2 съ одной стороны употребить очень большую S_1 —съ другой для того, чтобы сдвинуть канатъ. Этимъ, напр., объясняется тотъ фактъ, что, обмотавъ валъ ремнемъ нѣсколько разъ, мы можемъ совершенно безопасно повѣсить на одномъ концѣ его грузъ, совершенно не придерживая другого, оставляя его висѣть совершенно свободно: здѣсь небольшая сила вѣса свободного конца ремня при помощи тренія удерживаетъ извѣстный грузъ на другомъ.

Итакъ, пусть ремень, охватывающій блокъ, находится въ равновѣсіи; натяженія свѣшивающихся концовъ его обозначимъ попрежнему

*) Въ формулѣ (88) мы положили, что $e^c = x_0$. Не трудно видѣть изъ чертежа (230), что точка M соотвѣтствуетъ значенію $\varphi = 0$, отсюда изъ (88) получаемъ, что натяженіе въ этой точкѣ $x_0 = e^{f \cdot 0} \cdot e^c = 1 \cdot e^c = e^c$.

черезъ S_1 и S_2 , при чемъ зависимость между ними выражается ур-іемъ (91), такъ что $S_1 > S_2$ *). Если бы мы, удерживая конецъ ремня B (фиг. 231), пожелали повернуть блокъ по стрѣлкѣ, то намъ пришлось бы употребить для этого нѣкоторое усиліе, которое очень просто выражается въ функціи S_1 и S_2 : если въ точкѣ D блока его удерживаетъ отъ вращенія сила S_1 а въ точкѣ C — сила S_2 , то понятно, что для поворота блока по стрѣлкѣ придется къ окружности его приложить усиліе $S_1 - S_2$, и при этомъ блокъ *только что начнетъ вращаться въ сторону, противоположную направленію силы S_1 , или же это будетъ послѣдній моментъ равновѣсія*. Точно такъ же, если блокъ увлекаетъ за собою ремень, и если натяженія концовъ ремня равны S_1 и S_2 , то эти величины связаны соотношеніемъ

$$S_1 = S_2 \cdot e^{f\varphi}$$

если ремень *совсѣмъ не скользитъ по блоку*, такъ какъ именно тогда онъ и находится на блокѣ въ относительномъ равновѣсіи; окружное же усиліе на блокѣ выразится опять разностью $S_1 - S_2$ и можетъ быть опредѣлено въ функціи того или другого. Гдѣ будетъ наибольшее, а гдѣ — наименьшее напряженія, легко всегда видѣть, если только разсмотримъ, какъ стремится двинуться относительно блока ремень.

Итакъ, окружное усиліе P выражается въ функціи S_1 и S_2 такъ:

$$P = S_1 - S_2 = S_2 [e^{f\varphi} - 1] \dots \dots \dots (92)$$

Предположимъ теперь, что ремень увлекается блокомъ и имѣетъ ту же скорость, что и блокъ; при большихъ скрестяхъ вращеній придется принять во вниманіе еще одинъ факторъ — *центробѣжную силу*; такъ какъ эта послѣдняя всегда направлена отъ центра къ периферіи, то она будетъ уменьшать нормальныя давленія ремня на блокѣ, такъ что въ наши вычисленія слѣдуетъ ввести теперь уже не силу $x \cdot d\varphi$, а силу $x \cdot d\varphi$ минусъ центробѣжная сила элемента $d\delta$.

Пусть масса элемента $d\delta$ ремня равна m , скорость его — v , радіусъ шкива — r ; тогда центробѣжная сила этого элемента, R , выразится такъ:

$$R = \frac{m \cdot v^2}{r} \dots \dots \dots (93)$$

Пусть вѣсъ погонной единицы ремня равенъ q ; если ускореніе силы тяжести мы обозначимъ черезъ g , то масса той же единицы выразится черезъ $\frac{q}{g}$, и, слѣдовательно, масса m всего элемента, длина ко-
его равна $d\delta$, выразится формулой

$$m = \frac{q}{g} \cdot d\delta \dots \dots \dots (94)$$

*) Въ дальнѣйшемъ, ради простоты формулъ, будемъ считать площадь сѣченія ремня равной единицѣ.

или, въ виду того, что $d\delta = r \cdot d\varphi$,

$$m = \frac{q}{g} r d\varphi \dots \dots \dots (94)$$

Подставляя это значеніе m въ формулу (93) получаемъ выраженіе для центробѣжной силы R

$$R = \frac{1}{r} \cdot \frac{q}{g} \cdot r \cdot d\varphi \cdot v^2 \dots \dots \dots (95)$$

или, послѣ сокращеній,

$$R = \frac{qv^2}{g} d\varphi \dots \dots \dots (96)$$

на такую именно величину уменьшится теперь нормальная сила $x \cdot d\varphi$, прижимающая элементъ $d\delta$ къ шкиву, такъ что ур—ніе (85) переписывается такъ:

$$dx = f \left[x d\varphi - \frac{qv^2}{g} \cdot d\varphi \right] \dots \dots \dots (97)$$

или:

$$dx = \left[x - \frac{qv^2}{g} \right] f d\varphi \dots \dots \dots (98)$$

Такъ какъ величины q , v и g постоянны, то это ур—ніе интегрируется подобно (85); дѣлаемъ подстановку

$$x - \frac{q \cdot v^2}{g} = z \dots \dots \dots (99)$$

такъ что $dx = dz$, и ур—ніе (98) приведетъ къ виду

$$dz = z \cdot f \cdot d\varphi \dots \dots \dots (100)$$

откуда

$$\frac{dz}{z} = f \cdot d\varphi \dots \dots \dots (101)$$

Интеграль этого ур—нія мы нашли выше: онъ имѣетъ видъ (91) и переписывается такъ:

$$Z_1 = Z_2 e^{f\varphi_1} \dots \dots \dots (102)$$

гдѣ, въ виду (99) величины Z_1 и Z_2 связаны съ величинами S_1 и S_2 соотношеніями:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= S_1 - \frac{q}{g} v^2 \\ Z_2 &= S_2 - \frac{q}{g} v^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (103)$$

такъ что уравненіе (102) приметъ окончательно видъ

$$S_1 - \frac{q}{g} v^2 = \left[S_2 - \frac{q}{g} v^2 \right] e^{f\varphi_1} \dots \dots \dots (104)$$

На основаніи этой формулы легко опредѣлить окружное усилие P въ функціи S_1 .

Изъ формулы (104) имѣемъ:

$$S_2 = \left[S_1 - \frac{q}{g} v^2 \right] e^{-f\varphi_1} + \frac{q}{g} v^2 \dots \dots \dots (105)$$

Такъ какъ $P = S_1 - S_2$, то, въ виду формулы (105), — имѣемъ:

$$P = S_1 - S_2 = S_1 - \left[S_1 - \frac{q}{g} v^2 \right] e^{-f\varphi_1} - \frac{q}{g} v^2$$

откуда находимъ:

$$P = \left[S_1 - \frac{q}{g} v^2 \right] \left[1 - e^{-f\varphi_1} \right] \dots \dots \dots (106)$$

Какъ видимъ, окружное усилие P зависитъ также и отъ величины центробѣжной силы.

Формула (106) показываетъ, что при $S_1 - \frac{q}{g} v^2 = 0$, т.-е. при

$$S_1 = \frac{q}{g} v^2 \dots \dots \dots (107)$$

P , т.-е. окружное усилие равно нулю.

Ур—ніе (107) даетъ намъ возможность опредѣлить ту скорость ремня, при которой прекращается передача работы; мы имѣемъ

$$v = \sqrt{\frac{S_1 g}{q}} \dots \dots \dots (108)$$

понятно, что для каждаго S_1 мы получимъ свою величину для v ; выборъ же величинъ S_1 обусловливается выборомъ площади сѣченія ремня и выборомъ допускаемаго напряженія; выбравъ S_1 , мы при помощи формулы (108) опредѣлимъ то v , при которомъ получается *мінімум* работы, могущій быть даже нулемъ. Казалось бы, что большія скорости вообще не выгодны, ибо чѣмъ больше v , тѣмъ меньше P (изъ 106); казалось бы также, что самый выгодный случай представляетъ случай $v = 0$; — тогда P получаетъ наибольшее значеніе. Легче всего разобратся въ этомъ вопросѣ, замѣтивъ, что для насъ важно не то, какъ будетъ велико окружное усилие на томъ или другомъ шкивѣ, обусловливающее лишь размѣры шкива; для насъ въ *данномъ случаѣ* весь интересъ представляетъ та работа, которую можетъ передать ремень. Поэтому является вопросъ: какъ велика та скорость, при которой количество передаваемой работы достигаетъ *максимума*?

Если окружное усилие — P , а окружная скорость — v , то, какъ извѣстно, передаваемая работа выражается такъ:

$$L = P \cdot v \dots \dots \dots (109)$$

гдѣ черезъ L выражена работа. Въ виду уравненія (106) ур—ніе (109) приметъ видъ:

$$L = \left[S_1 - \frac{q}{g} v^2 \right] \cdot \left[1 - e^{-f\varphi_1} \right] \cdot v \cdot \dots \dots \dots (110)$$

Максимум работы получится при выполненіи условія

$$\frac{dL}{dv} = 0$$

Дифференцируя (110) по v , находимъ:

$$S_1 - \frac{2q}{g} v^2 = 0 \dots \dots \dots (111)$$

такъ что наивыгоднѣйшая, въ смыслѣ количества передаваемой работы, скорость ремня v выразится формулой

$$v = \sqrt{\frac{S_1 g}{3 \cdot q}} \dots \dots \dots (112)$$

Если мы не желаемъ перегружать ремень, т.-е. брать S_1 больше допускаемаго, то, задаваясь S_1 , найдемъ сейчасъ же изъ (112) наиболѣе выгодную для дѣла скорость.

Соединяя (109) и (112), получимъ выраженіе максимальной работы, могущей быть переданной съ одного вала на другой помощью даннаго ремня и шкивовъ:

$$L_{max.} = P \cdot v = \left[1 - e^{-f\varphi_1} \right] \cdot \left[S_1 - \frac{q}{g} \cdot \frac{S_1 g}{3q} \sqrt{\frac{S_1 g}{3q}} \right]$$

что, послѣ необходимыхъ сокращеній, дастъ окончательно:

$$L_{max.} = \frac{2}{3} S_1 \left[1 - e^{-f\varphi_1} \right] \sqrt{\frac{S_1 \cdot g}{3q}} \dots \dots \dots (113)$$

Скорость v , вычисленная при помощи формулы (112), выходитъ, при ходовыхъ величинахъ S_1 и q , довольно большой; во всякомъ случаѣ она значительно выше тѣхъ, какія имѣются обыкновенно на практикѣ, такъ что можно сказать, что на практикѣ ремень не утилизируется вполнѣ никогда; обыкновенно говорятъ, что допускать большія скорости въ ременной передачѣ нельзя потому, что при этомъ будутъ бить шкивы,—во-первыхъ, а во-вторыхъ, предполагается, что малѣйшее уклоненіе ремня повлечетъ, при большой его скорости, сходъ его со шкива. Легко показать несостоятельность послѣдняго замѣчанія,—для этого придется разсмотрѣть эффектъ удара по ремню.

Пусть въ какой-нибудь точкѣ x бѣгушаго ремня мы дали ему ударъ перпендикулярно къ оси его (фиг. 232); понятно, что импульсъ этого удара сообщится сосѣднимъ частицамъ со скоростью распро-

страненія колебаній въ ремнѣ. Получившаяся волна пойдетъ въ обѣ стороны отъ мѣста удара x ; та волна, которая пойдетъ по направле- нію, противоположному направленію скорости ремня, въ случаѣ ра- венства скоростей ремня и распространенія въ немъ колебаній, останется въ пространствѣ неподвижной, — она какъ бы застынетъ на мѣстѣ.

Такимъ образомъ, если мы дадимъ нашему ремню скорость, равную скорости, распространенія колебаній въ этой упругой средѣ, и если во время движенія мы дадимъ ремню въ какомъ-нибудь мѣстѣ x тол- чокъ, то ремень во все время движенія будетъ идти такъ, какъ будто бы въ x ему представилась нѣкоторая твердая преграда M , — нѣчто въ родѣ блока или цилиндра. Такимъ образомъ, въ случаѣ указаннаго равенства скоростей ремень дѣлается какъ бы поддаю- щимся всякимъ деформациямъ извнѣ, и, если въ точкѣ его x мы под- ведемъ къ нему, напр., блокъ M , то ремень охотно будетъ его обѣ- гать, не пытаясь соскользнуть и обойти это препятствіе.

Такова причина, почему ремни при большихъ скоростяхъ рабо- таютъ плавно; мы видимъ, что въ этомъ случаѣ они принимаютъ нѣ- которое устойчивое положеніе равновѣсія.

Всѣ эти теоретическіе выводы вполне оправдались на опытахъ *Radinger'a*, устроившаго подобную передачу (съ большими скоростями) въ очень большихъ размѣрахъ; передача эта работала вполне исправно въ продолженіе нѣсколькихъ лѣтъ. — Такимъ образомъ, принимая во вниманіе устойчивость ремня при большихъ скоростяхъ, съ этой точки зрѣнія не слѣдуетъ опасаться давать ремню скорость, прибли- жающуюся къ максимальной, опредѣляемой по формулѣ (112).

Если скорость распространенія колебаній въ ремнѣ будетъ больше, чѣмъ скорость хода ремня, то вызванная ударомъ волна будетъ ме- дленно, со скоростью, равной разности упомянутыхъ скоростей, пере- двигаться навстрѣчу движенію.

До сихъ поръ мы принимали, что ремень плотно прилегаетъ къ шкиву и по всей дугѣ обхвата идетъ съ окружной скоростью шкива. Оказывается, что на дѣлѣ это не такъ: ремень, за время обхода шкива, имѣетъ еще нѣкоторое относительное движеніе скольженія по шкиву *).

Пусть ремень обхватываетъ два шкива, O_1 и O_2 (фиг. 233). Мы имѣемъ здѣсь разность натяженій въ различныхъ частяхъ ремня, а въ такомъ случаѣ ремень будетъ вытягиваться различно: больше — тамъ, гдѣ натяженіе его больше, т.-е. въ части его съ натяженіемъ S_1 , и меньше — въ части съ натяженіемъ S_2 . Очевидно поэтому, что вытяжка ремня будетъ различна: каждая единица длины, — допу-

*) Н. Е. Жуковскому удалось показать это при помощи очень простого прибора.

стимъ, kl , — переходя отъ A къ B и дальше къ C , будетъ получать различныя удлинёнія — въ части A , она, положимъ, удлинится на lm , а въ точкѣ C — уже меньше, именно на ln , а, слѣдовательно, выходитъ, что единица длины, удлинившаяся до размѣровъ km , на пути отъ A къ C сократится, получивъ размѣръ kn , и это сокращёніе произойдетъ въ сторону, *обратную движенію блока*, такъ что здѣсь ремень будетъ отставать отъ шкива и, слѣдовательно, будетъ имѣть движеніе относительно шкива въ сторону, *обратную движенію шкива*.

Ближайшее разсмотрѣніе вопроса показываетъ, что не скользить лишь нѣкоторая часть ремня; но о томъ, какова длина дуги, на которой это скольженіе не имѣетъ мѣста, гдѣ располагается эта дуга, мы говорить здѣсь не будемъ. Замѣтимъ лишь тотъ фактъ, что прилегание ремня къ шкиву имѣетъ мѣсто лишь на нѣкоторой дугѣ, — части всей дуги обхвата, дальше же, на остальной части дуги обхвата, происходитъ скольженіе.

Прослѣдимъ теперь, какъ работаетъ ремень, обходя второй шкивъ O_2 ; идя по направленію движенія ремня, мы замѣчаемъ, что на нѣкоторой части дуги обхвата второго блока ремень и блокъ опять будутъ идти вмѣстѣ, при чемъ натяженіе ремня остается равнымъ S_2 ; затѣмъ, на протяженіи дуги обхвата, это натяженіе S_2 измѣняется, достигая величины S_1 ; а въ такомъ случаѣ, какъ и прежде, легко убѣдиться, что ремень начнетъ растягиваться, и, слѣдовательно, *опережать шкивъ*, т.-е. здѣсь опять получается скольженіе по шкиву, но уже въ сторону движенія; *шкивъ будетъ отставать отъ ремня, что дастъ намъ потерю въ передачѣ*; дѣйствительно, окружныя скорости шкивовъ оказываются различными, ведущій шкивъ идетъ *быстрѣе* ведомаго, что, конечно, и обуславливаетъ собою потерю работы; эту потерю можно оцѣнить въ среднихъ числахъ, но мы не будемъ вдаваться здѣсь въ подробности; — интересующіеся могутъ найти ихъ въ брошюрѣ Н. Е. Жуковскаго «*О скольженіи ремней по шкиву*»; ниже мы коснемся еще вопроса о потерѣ скорости, обуславливаемой этимъ скольженіемъ, и выяснимъ, что, дѣйствительно, ведущій шкивъ идетъ съ одною скоростью, соотвѣтствующею натяженію S_1 , а ведомый — съ другою, соотвѣтствующею S_2 .

Пусть единица длины у ведущей части ремня, гдѣ натяженіе равно S_1 , обратилась въ $1 + e_1$, а у ведомаго, при S_2 , въ $1 + e_2$. Предполагая, что оба шкива вращаются равномерно, можемъ вывести такое заключеніе, что какая-нибудь точка ремня на ведущемъ шкивѣ проходитъ пространство $(1 + e_1)$ въ то же самое время въ какое на ведомомъ она проходитъ $(1 + e_2)$; иначе можно выразить это такъ: удлинёніе единицы длины до размѣровъ $1 + e_1$ происходитъ на ведущемъ шкиву въ то же самое время, въ какое на ведомомъ происходитъ удлинёніе той же единицы до размѣровъ $1 + e_2$. Такимъ

образомъ несомнѣнно, что отношеніе удлиненій $1 + e_1$ къ $1 + e_2$ равно отношенію окружныхъ скоростей шкивовъ:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1 + e_1}{1 + e_2} \dots \dots \dots (114)$$

Слѣдовательно потеря скорости на второмъ шкивѣ можетъ быть оцѣнена такъ: изъ (114) имѣемъ

$$\frac{v_1 - v_2}{v_1} = \frac{e_1 - e_2}{1 + e_1} \dots \dots \dots (115)$$

такъ какъ e_1 очень мало, то имъ можно пренебречь, и тогда уравненіе (115) перепишется такъ:

$$\frac{v_1 - v_2}{v_1} = e_1 - e_2 \dots \dots \dots (116)$$

Разность $e_1 - e_2$ легко выразить въ функціи коэффиціента упругости ремня E и размѣровъ его сѣченія; если площадь сѣченія обозначимъ черезъ F , то можно будетъ написать:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{S_1}{E \cdot F} \\ e_2 &= \frac{S_2}{E \cdot F} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (117)$$

въ виду чего ур—ніе (116) перепишется такъ:

$$\frac{v_1 - v_2}{v_1} = \frac{1}{E \cdot F} [S_1 - S_2] \dots \dots \dots (118)$$

Такъ какъ $S_1 - S_2$ есть не что иное, какъ окружное усиліе, которое мы обозначили черезъ P , то уравненіе (118) перепишется окончательно такъ:

$$\frac{v_1 - v_2}{v_1} = \frac{P}{E \cdot F} \dots \dots \dots (119)$$

Уравненіе (119) говоритъ намъ, что потеря скорости тѣмъ больше, чѣмъ больше окружное усиліе P .

Если между числами оборотовъ требуется соблюсти строгое соотвѣтствіе, то придется непремѣнно принять во вниманіе упомянутое скольженіе. Такъ какъ

$$v_1 = \omega_1 r_1 \quad \text{и} \quad v_2 = \omega_2 r_2 \dots \dots \dots (120)$$

то, въ случаѣ равенства v_1 и v_2

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

или

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \dots \dots \dots (121)$$

т.-е. угловыя скорости шкивовъ будутъ обратно пропорціональны радіусамъ.

Такъ какъ въ ременной передачѣ равенства $v_1 = v_2$ не существуетъ, то въ ней угловыя скорости уже не будутъ обратно пропорціональны радіусамъ, и при точномъ расчетѣ придется принять во вниманіе, насколько v_2 меньше v_1 , и для полученія требуемаго соотношенія придется поправить радіусы шкивовъ, — задавшись однимъ, опредѣлить другой по поправленной формулѣ.

Канатная передача.

Канатная передача ничѣмъ въ сущности отъ ременной не отличается, такъ что все вышесказанное можетъ быть цѣликомъ примѣнено и къ канатамъ. Вся разниа состоитъ, пожалуй, въ томъ, что канаты пускаются въ работу болѣе длинными и это обстоятельство не можетъ не остаться безъ вліянія на характеръ предварительнаго натяженія. Надѣвъ ремень на шкивы, приходится затѣмъ еще натягивать его при помощи специальныхъ приспособленій, чтобы вызвать въ немъ нѣкоторое опредѣленное натяженіе S . Приводя, затѣмъ всю эту систему въ движеніе, мы, какъ извѣстно, въ различныхъ частяхъ ремня получимъ разныя натяженія: S_1 и S_2 ; въ одной части ремня натяженіе возрастетъ съ S до S_1 , а въ другой — уменьшится до S_2 ; принимая приблизительно, что сумма натяженія осталась прежней, равной, слѣдовательно $2 S$, можемъ написать

$$S_1 + S_2 = 2 S,$$

откуда и опредѣляется предварительно натяженіе ремня

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2}.$$

Если ремень длиненъ и блоки разставлены одинъ отъ другого далеко, то ремень въ большей или меньшей мѣрѣ провиснетъ, и можетъ казаться (при соотвѣтствующихъ условіяхъ), что собственнымъ его вѣсомъ въ немъ можетъ быть вызвано такое сильное натяженіе, что предшествующее сшивкѣ натягиваніе его можетъ или совсѣмъ не понадобиться, или же если и понадобится, то только лишь въ малой степени. Все это примѣняется, однако, лишь въ канатной передачѣ въ виду того, что *ремни длинными въ дѣло не пускаются никогда — поэтому передъ сшивкой ихъ приходится всегда натягивать.*

Такимъ образомъ въ канатной передачѣ, гдѣ употребляются всегда болѣе или менѣе длинные канаты, такой канатъ можно просто положить на блоки и сила его вѣса и обусловить собою необходимыя натяженія.

Величина натяженія каната зависитъ, какъ извѣстно, отъ стрѣлы провѣса его. Всякій провисшій канатъ можно разсматривать какъ матеріальную цѣпную линію. Припомнимъ здѣсь нѣкоторыя свойства ея. Пусть LMN (фиг. 234) будетъ цѣпная линія, $Mo = h$ — ея параметръ, а ось xx — директриса. Возьмемъ на ней какую-нибудь точку P и проведемъ въ ней касательную PT . Обозначимъ далѣе длину дуги MP черезъ l , натяженіе нити въ точкѣ M — вершинѣ цѣпной линіи — черезъ σ , а въ точкѣ P — черезъ S , и, наконецъ, черезъ q — вѣсъ погонной единицы длины нити; тогда, какъ извѣстно, существуетъ зависимость

$$S = y \cdot q \cdot \dots \dots \dots (122)$$

т.-е. натяженіе нити въ любой точкѣ цѣпной линіи равно вѣсу куска той же нити, длина коего равна разстоянію этой точки до директрисы xx . Такимъ образомъ натяженіе σ въ вершинѣ M выразится такъ:

$$\sigma = h \cdot q \cdot \dots \dots \dots (123)$$

Далѣе мы имѣемъ уравненія:

$$y = \frac{h}{2} \left[e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right] \cdot \dots \dots \dots (124)$$

$$\text{— } MP = l = \frac{h}{2} \left[e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right] \cdot \dots \dots \dots (125)$$

$$y^2 = h^2 + l^2 \cdot \dots \dots \dots (126)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{l}{h} = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right] = \sqrt{\left[\frac{y}{h} \right]^2 - 1} \cdot \dots \dots (127)$$

Уравненія (122—127) даютъ возможность рѣшить всѣ вопросы относительно канатной передачи.

Такъ какъ, равнодѣйствующее натяженіе S , вообще говоря, мало отличается отъ горизонтальной составляющей его σ , опредѣляемой по (123) *), то удобнѣе всего за эти натяженія принять именно натяженія σ . Если теперь натяженіе *ведущаго* конца назовемъ черезъ S_1 , а ведомаго — S_2 , **) то можно составить два ур-ія для параметровъ h_1 и h_2 обѣихъ цѣпныхъ линій (т.-е. одной для ведущей, а другой для ведомой части):

$$S_1 = h_1 \cdot q; \quad S_2 = h_2 \cdot q,$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{S_1}{q} \\ h_2 &= \frac{S_2}{q} \end{aligned} \right\} \cdot \dots \dots \dots (128)$$

*) Цѣпныя линіи на практикѣ бываютъ очень пологими.

**) Ихъ можно опредѣлить, пользуясь уравненіями (104 и 106), гдѣ P предполагается заданнымъ.

Имѣя h_1 и h_2 можемъ вычертить схему нашей передачи: для этого по одному изъ параметровъ, положимъ h_1 , строимъ цѣпную линію LMN (фиг. 235); для того же, чтобы найти положенія канатныхъ дисковъ A и B , строимъ отдѣльно въ томъ же масштабѣ $\triangle ABC$, гдѣ BC есть разность высотъ центровъ, а AC — разстояніе между тѣми же центрами по горизонтали (этимъ двумя величинами мы обыкновенно задаемся въ началѣ расчета); очевидно, $\triangle ABC$ прямоуголенъ при C . Вычеркиваемъ далѣе изъ центровъ A и B окружности дисковъ и накладываемъ полученную фигуру ($\triangle ABC$ съ кругами A и B) на нашу цѣпную линію LMN такъ, чтобы оба диска коснулись цѣпной линіи LMN и въ то же время AC была горизонтальной, т.-е. параллельной директрисѣ цѣпной линіи LMN . Затѣмъ вычерчиваемъ, опять сначала отдѣльно, цѣпную линію для ведомаго конца, т.-е. съ параметромъ h_2 и затѣмъ ищемъ путемъ пробъ такое положеніе ея, при которомъ она касалась бы обоихъ дисковъ A и B , а директриса ея была бы параллельна директрисѣ h_1 или прямой AC .

Для рѣшенія вопроса о томъ, гдѣ слѣдуетъ помѣстить ведущій, гдѣ ведомый, конечно, прежде всего нужно сообразоваться съ мѣстными условіями (слѣдуетъ принять во вниманіе, что канатъ долженъ висѣть *свободно*), затѣмъ, въ виду уравненій (114), слѣдуетъ располагать передачу такъ, чтобы уголъ *обхвата* выходилъ *возможно больше*, а для этого, какъ это не трудно сообразить, *ведущій конецъ слѣдуетъ пустить внизу, а ведомый—вверху*. Фигуры 236 и 237 въ достаточной мѣрѣ наглядно поясняютъ зависимость между углами обхвата и мѣстомъ расположенія ведущей части каната; углы β и β_0 , схемы, удовлетворяющей приведенному выше правилу, выходятъ значительно больше угловъ α и α_0 схемы, правилу этому не удовлетворяющей.

Въ заключеніе этого параграфа слѣдуетъ упомянуть объ одномъ обстоятельстве, котораго до сихъ поръ мы во вниманіе не принимали. Мы вездѣ предполагали, что какъ канаты, такъ и ремни, съ которыми мы имѣемъ дѣло, совершенно гибки и на ихъ деформированіе въ этомъ смыслѣ затрачивать работы не надо. Тонкіе ремни, пожалуй, можно еще считать совершенно гибкими, но въ случаѣ канатовъ, особенно достаточно толстыхъ, такое предположеніе мѣста не имѣетъ.

Такимъ образомъ въ канатной передачѣ является еще одинъ источникъ потери работы—сопротивленіе каната измѣненію его формы; легко видѣть, что въ силу своей жесткости канатъ не будетъ такъ плотно прижиматься къ блоку въ той его части, гдѣ натяженіе меньше, т.-е. *въ ведомой*, какъ тамъ, гдѣ это натяженіе больше, т.-е. *въ ведущей*. Въ части ab , которая, при совершенно гибкомъ канатѣ, должна уже лежать на блоку (фиг. 238), и которая, при жесткомъ канатѣ, еще блока не касается, сгибанію каната мѣшаетъ его жест-

кость; такъ какъ канатъ состоитъ изъ ряда переплетенныхъ нитей, то при его сгибаніи въ мѣстахъ соприкосновенія нитей возникаетъ треніе ихъ между собою, затѣмъ сдавливаніе и растягиваніе, — на эти именно деформациі и уходитъ часть работы, въ гибкомъ ремнѣ этихъ вредныхъ сопротивленій нѣтъ, чѣмъ и обусловливается его податливость. — Эффектъ жесткости состоитъ въ томъ, что присутствіе ея обусловливаетъ какъ бы появленіе нѣкотораго придатка къ плечамъ силъ дѣйствующихъ и окружности блока.

Пусть ведущая часть каната впервые касается блока въ точкѣ B , а ведомая сходится съ него — въ A . Натяженія ихъ обозначимъ черезъ S_1 и S_2 , гдѣ $S_1 > S_2$. Такъ какъ сгибаніе каната происходитъ тѣмъ энергичнѣе, чѣмъ больше его натяженіе, то въ ведомой части канатъ будетъ отходить отъ блока дальше, чѣмъ въ ведущей; поэтому, обозначивъ упомянутые придатки плечъ силъ S_1 и S_2 черезъ λ_1 и λ_2 , при чемъ $\lambda_2 > \lambda_1$, получимъ ур-іе моментовъ (относительно центра o) всѣхъ дѣйствующихъ силъ S_1 , S_2 и P , въ видѣ:

$$S_1 [r_1 + \lambda_1] - S_2 [r + \lambda_2] - Pr = 0 \dots \dots \dots (129)$$

Уравненіе это показываетъ, что жесткость каната обусловливаетъ собою потерю момента $S_2 \lambda_2 - S_1 \lambda_1$ потеря же въ работѣ будетъ равна $[S_2 \lambda_2 - S_1 \lambda_1] \omega$.

Если бы жесткость не проявляла своего дѣйствія, то канатъ могъ бы передать работу $M\omega$ или $P \cdot r \cdot \omega$: теперь онъ передаетъ меньше, и потеря работы въ доляхъ всей работы $Pr\omega$, могущей быть переданной канатомъ, выражается дробью

$$\theta = \frac{S_2 \lambda_2 - S_1 \lambda_1}{Pr} \dots \dots \dots (130)$$

Потерю эту можно было бы опредѣлить, если бы мы знали величину придатковъ λ_1 и λ_2 . Но, кромѣ формулы *Вейсбаха*,

$$\lambda = \left[a + \beta \cdot \frac{r}{S} \right] d^2 \dots \dots \dots (131)$$

гдѣ a и β — нѣкоторые постоянные коэффиціенты, r и d — радіусъ блока и діаметръ каната, а S — натяженіе каната въ данномъ мѣстѣ, у насъ не имѣется почти никакихъ сюда относящихся формулъ. Такъ какъ формула *Вейсбаха* была выведена изъ очень грубыхъ и неточныхъ опытовъ, къ тому же не провѣренныхъ, такъ какъ со временъ *Вейсбаха* этимъ вопросомъ не занимался никто, то нельзя утверждать, чтобы упомянутые придатки плеча выражались именно этой формулой, — ее слѣдуетъ считать лишь приблизительной, и въ подобныхъ случаяхъ лучше всего пользоваться указаніями и данными опыта, полученными отъ существующихъ передачъ *).

*) Нѣкоторые авторы пытались разобраться въ этомъ вопросѣ, допуская иногда самыя крайнія предположенія; такъ, напр., предполагали, что канатъ сти-

Исслѣдованіе работы паровыхъ машинъ.

Индикаторы.

Индикаторная діаграмма.

Если мы имѣемъ нѣкоторое механическое сооруженіе, составленное изъ ряда соединенныхъ между собою паръ, поступательныхъ, вращательныхъ и проч., и если на одномъ концѣ этой цѣпи изъ паръ дѣйствуетъ нѣкоторая сила, долженствующая быть переданной дальше въ той или другой формѣ, то по мѣрѣ удаленія отъ этого конца цѣпи по пути передачи будетъ встрѣчаться все больше и больше вредныхъ сопротивленій, такъ что на другой конецъ цѣпи *придетъ лишь часть движущей силы*, и эта часть и можетъ быть использована затѣмъ такъ, какъ это нужно для насъ. Если бы мы знали количество работы какъ при началѣ этого перехода, такъ и въ концѣ его, то разность этихъ двухъ работъ показала бы намъ, какая часть всей работы поглощается вредными сопротивленіями въ передаточномъ механизмѣ двигателя и пропадаетъ, слѣдовательно, совершенно безплодно для насъ. Измѣреніе непосредственной работы силы, дѣйствующей въ двигателѣ, производится особенно просто, когда движущей силой является тѣло газообразное, ибо въ этомъ случаѣ мы можемъ измѣрить именно то, что даетъ эту работу.

Обыкновенно это газообразное тѣло вводится въ цилиндръ подъ поршень и гонитъ его въ ту или другую сторону; затѣмъ движеніе поршня, при помощи кривошипнаго механизма, даетъ равномерное круговое вращеніе, при чемъ эта равномерность, въ большинствѣ случаевъ прямо необходимая для нашихъ работъ, обеспечивается введеніемъ различныхъ вспомогательныхъ механизмовъ и частей, каковы, напр., маховыя колеса, центробѣжные регуляторы и т. д.

Если бы намъ удалось прослѣдить, какъ мѣняется давленіе пара или же вообще газообразнаго тѣла, работающаго въ данной машинѣ за промежутокъ времени, въ который поршень переходитъ отъ одного крайняго положенія къ другому, то задача наша могла бы считаться рѣшенной.

Пусть у насъ имѣется паровая машина, такъ что упомянутымъ газообразнымъ тѣломъ въ данномъ случаѣ будетъ паръ. Въ виду того, что паръ держится подъ давленіемъ большимъ атмосфернаго, то поэтому, входя подъ поршень, онъ заставляетъ его перемѣститься.

бается такъ, какъ если бы каждая нить его представляла собою гибкій брусъ или стержень. Однако и эти предположенія не подвинули нисколько впередъ рѣшенія указаннаго вопроса, и данныя этими изслѣдователями формулы никакого предпочтенія передъ Вейсбаховской въ сущности не заслуживаютъ.

Впускъ пара подъ поршень, вообще говоря, производится не за весь ходъ поршня, — на опредѣленной части этого хода впускъ прекращается, и дальше, вплоть до конца хода поршня, паръ работаетъ расширеніемъ, производя работу на счетъ имѣющагося въ немъ самомъ запаса энергіи.

Пристроимъ къ нашему цилиндру A (фиг. 239) прямоугольную систему координатъ $pO\lambda$, гдѣ абсциссы будутъ пропорціональны величинамъ отклоненій поршня, а ординаты изобразятъ въ опредѣленномъ масштабѣ давленія пара на поршень. Эта система даетъ намъ возможность вычертить кривую давленій пара на поршень въ различные моменты его хода. Пусть въ началѣ хода, у точки m , происходитъ впускъ пара, такъ что давленіе въ котлѣ и подъ поршнемъ будетъ одно и то же *), — поэтому за весь періодъ впуска, до точки, положимъ, n , оно будетъ величиной *постоянной*; легко видѣть, что соотвѣтствующая этой части хода часть кривой давленій представится отрѣзкомъ ab прямой, параллельной оси абсциссъ $O\lambda$ и отстоящей отъ нея на разстояніи p , — равномъ давленію пара въ котлѣ.

На извѣстной части хода, за точкой n , впускъ пара прекращается, — паръ начинаетъ расширяться на счетъ имѣющагося въ немъ запаса энергіи, почему упругость его начинаетъ убывать, и это обстоятельство на кривой давленій скажется въ томъ, что, начиная съ точки b , она начнетъ падать и это паденіе будетъ продолжаться вплоть до начального момента періода выпуска пара, что имѣетъ мѣсто въ концѣ хода поршня; съ этого момента поршень получаетъ обратное движеніе, благодаря чему паръ начнетъ уходить изъ цилиндра, и давленіе подъ поршнемъ съ этого момента будетъ уже постояннымъ равнымъ, напимѣръ, атмосферному; давленіе это будетъ держаться на одной приблизительно высотѣ до тѣхъ поръ, пока поршень не перейдетъ снова въ крайне лѣвое положеніе. Въ нашей системѣ координатъ эти послѣдніе процессы изобразятся, во-первыхъ, нѣкоторой вполне опредѣленной кривой bcd , которая покажетъ намъ ходъ давленія пара (убываніе давленія) при его расширеніи, и, во-вторыхъ, отрѣзкомъ прямой de , параллельной оси λ и иллюстрирующей постоянство внѣшняго, напр., атмосфернаго, давленія за періодъ обратнаго хода поршня.

Наконецъ, поршень доходитъ до своего крайняго лѣваго положенія m ; какъ только онъ достигаетъ его, сейчасъ же прекращается сообщеніе съ внѣшнимъ пространствомъ и начинается впускъ пара подъ поршень, вслѣдствіе чего давленіе подъ поршнемъ мгновенно поднимается до той же величины p , съ которой мы начали построеніе діаграммы; этому мгновенному подъему давленія будетъ отвѣчать на нашей діаграммѣ появленіе замыкающаго ее отрѣзка прямой ea , пер-

*) Въ дѣйствительности давленіе въ котлѣ всегда больше.

пендикулярнаго къ de . Ясно, что отрѣзокъ ea непременно дойдетъ до точки a , заканчиваясь въ ней. Если поршень не ограничится однимъ этимъ ходомъ, а станетъ продолжать свое движеніе взадъ и впередъ, то получающіяся при этомъ діаграммы будутъ, *ceteris paribus*, повторять другъ друга и поэтому налагается одна на другую.

Въ дѣйствительности машины нашихъ угловатыхъ діаграммъ не даютъ,—на дѣлѣ впускъ пара при b прекращается не сразу, равно какъ не сразу начинается выпускъ его при d и впускъ свѣжаго при e *); на діаграммѣ все это отзывается притупленіемъ угловъ при b , d и e и появленіемъ плавности переходовъ однѣхъ частей діаграммы въ другія. Дѣйствительныя діаграммы имѣютъ приблизительно видъ діаграммы, изображенной на фиг. 240.

Такимъ образомъ діаграмма эта представляетъ собою послѣдовательный рядъ отрѣзковъ прямыхъ и кривыхъ линій, рядъ замкнутый и ограничивающій извѣстную площадь. Эта, какъ называемая «*рабочая діаграмма*» машины позволяетъ намъ составить себѣ по виду ея полное представленіе о томъ, что дѣлается съ паромъ въ цилиндрѣ въ каждый данный моментъ, и, кромѣ того, что важнѣе всего, позволяетъ измѣрить ту работу, которую за одинъ ходъ поршня произвелъ паръ (при своемъ дѣйствіи на одну сторону поршня); для этой цѣли мы сдѣлаемъ маленькое отступленіе, гдѣ, между прочимъ, выяснится удобство примѣненія подобной системы координатъ въ случаяхъ, схожихъ съ настоящимъ.

Пусть въ подобной же системѣ координатъ (p, λ) у насъ имѣется отрѣзокъ нѣкоторой опредѣленной кривой AB (фиг. 241), вмѣстѣ съ обѣими крайними ординатами, AA_1 и BB_1 , и осью абсциссъ, Ol , ограничивающій нѣкоторую площадь ABB_1A_1A . Если мы выдѣлимъ элементъ этой площади $CDD_1C_1 = dF$, то, какъ извѣстно, можемъ написать:

$$dF = y \cdot dx = p_c d\lambda$$

въ силу чего вся площадь ABB_1A_1A выразится интеграломъ;

$$\text{пл. } AB_1 = \int_{OA_1}^{OB_1} y \cdot dx = \int_{OA_1}^{OB_1} p d\lambda$$

Замѣчая теперь, что площадь dF выражается произведеніемъ нѣкотораго давленія p_c на элементъ длины $d\lambda$, заключаемъ, что произведеніе $p_c d\lambda$ выразить собою работу, затраченную газомъ на перемѣщеніе поршня изъ C_1 въ D_1 , т. е. на длину $d\lambda (=dx)$, а въ такомъ случаѣ

*) При приближеніи поршня къ точкѣ m (которой на діаграммѣ соотвѣтствуетъ точка e) выпускъ пара въ опредѣленный моментъ, на извѣстномъ разстояніи поршня отъ точки прекращается, а такъ какъ поршень продолжаетъ двигаться все еще въ прежнемъ направленіи, то оставшійся подъ поршнемъ паръ начнетъ сжиматься, образуя, такимъ образомъ для поршня нѣчто въ родѣ упругой подушки. Значеніе ея см. стр. 214 и 215.

вся площадь AB_1 , выражаемая интеграломъ $\int_{OA_1}^{OB_1} p \cdot d\lambda$, представить собою всю работу, затраченную паромъ на перемѣщеніе поршня изъ A_1 въ B_1 .

Діаграммы могутъ быть построены въ различныхъ масштабахъ; можно, напр., принять 1 ст. по оси ординатъ за 1 кгр., а 1 ст. по оси абсциссъ за 0,5 мтр., если бы оказалось, напр., что площадь AB_1 равна 40 ст.², то въ единицахъ работы это выразилось бы такъ: $40 \text{ ст.}^2 = 40 \cdot (1 \text{ ст.}) \cdot (1 \text{ ст.}) = (\text{въ принятомъ масштабѣ}) 40 \cdot 1 \text{ кгр.} \cdot 0,5 \text{ мтр.} = 20 \text{ кгр.} \cdot \text{мтр.}$

Легко видѣть теперь, что, дѣйствительно, построенная въ этой системѣ рабочая діаграмма даетъ намъ возможность вычислить работу пара за одинъ ходъ поршня. Пусть у насъ имѣется такая рабочая діаграмма ad (фиг. 242). Приводимъ крайнія ординаты aa_1 и dd_1 . На основаніи предыдущаго заключаемъ, что работа пара, при движеніи поршня отъ одного крайняго положенія a_1 , до другого — d_1 , выразится площадью $a_1abdd_1a_1$, эта работа производимая паромъ на пути a_1d_1 поршня, будетъ положительной, такъ какъ каждый элементъ интеграла, выражающаго эту площадь, будетъ положительнымъ: p — положительно всегда, а λ здѣсь, во время движенія поршня отъ a_1 къ d_1 , возрастаетъ, вслѣдствіе чего $d\lambda > 0$.

При движеніи поршня отъ d_1 къ a_1 , т. е. назадъ, работа пара при его выпускѣ выразится площадью $d_1dea_1d_1$ и эта работа въ нашемъ смыслѣ должна быть названа отрицательной, такъ какъ здѣсь λ убываетъ, почему $d\lambda < 0$.

Такимъ образомъ, при перемѣщеніи поршня отъ a_1 до d_1 , работа пара выразится площадью $a_1add_1a_1$, а отъ d_1 до a_1 — площадью dd_1a_1ed : первая изъ этихъ площадей даетъ работу, приобретаемую нами отъ пара въ продолженіе одного хода поршня; вторая — затрачиваемую за слѣдующій ходъ нами, такъ какъ вполне понятно, что для того, чтобы изъ d_1 поршень вернуть въ a_1 нужно въ данномъ случаѣ затратить именно эту вторую работу, и затратить ее придется уже намъ, такъ какъ изъ d_1 въ a_1 поршень перейти самъ не можетъ. Теперь ясно, что *получаемая нами работа выразится площадью, ограниченной кривою діаграммы, т. е. площадью діаграммы $abcdea$.*

Таковъ этотъ простой способъ, дающій намъ возможность, путемъ измѣренія площадей извѣстнымъ образомъ получаемыхъ діаграммъ, измѣрять работу, совершаемую газообразнымъ тѣломъ въ нашей машинѣ. Мы вскорѣ увидимъ, что не менѣе простъ также принципъ, на которомъ основано устройство инструментовъ, позволяющихъ вычерчивать эти діаграммы прямо у самого парового цилиндра.

Слѣдуетъ сдѣлать еще одно замѣчаніе относительно полученія вѣтви bcd діаграммы. Мы говорили, что впускъ пара совершается только на части пути поршня. Спрашивается, отчего же мы не впускаемъ

пара до крайней правой точки хода поршня, т. е. въ продолженіе всего хода поршня? Отвѣтъ на это былъ данъ уже Уаттомъ, сообразившимъ, что въ такомъ случаѣ при послѣдующемъ затѣмъ выпускѣ пара (во время обратнаго хода поршня) намъ пришлось бы выпускать наружу, въ атмосферу, паръ *высокаго* давленія, что, разумѣется, было бы совершенно не экономично, между тѣмъ какъ, прекративъ въ извѣстный моментъ впускъ, мы можемъ съ значительной выгодой для насъ использовать большую часть энергіи имѣющагося въ цилиндрѣ при *b* пара, дать ему возможность расшириться, понизивъ свое давленіе до размѣровъ давленія внѣшняго, напр., атмосфернаго, — и только тогда выпустить его наружу. Такимъ образомъ, прекращеніе впуска на извѣстной части хода поршня вызывается, главнымъ образомъ, экономическими требованіями; конечно, при этомъ, какъ легко видѣть, рабочая площадь діаграммы будетъ значительно меньше той, которая получилась бы, если бы впускъ продолжался за весь ходъ поршня, но за то будетъ соблюдена значительная экономія, ибо пару много меньше, чѣмъ въ противномъ случаѣ.

При желаніи получить отъ машины возможно большую работу пришлось бы кончать впускъ пара не въ точкѣ *b*, а значительно позднѣе, но въ такомъ случаѣ паръ не успѣлъ бы къ моменту начала выпуска расшириться настолько, чтобы имѣть давленіе не выше атмосфернаго, результатомъ чего и была бы непроизводительная трата имѣющагося запаса энергіи. Однако, все-таки, когда мы принуждены время отъ времени мѣнять работоспособность машины, то это достигается путемъ присоединенія къ ней механизма, который позволялъ бы намъ прекращать впускъ пара, — производить такъ называемую *отсѣчку* пара, — гдѣ угодно.

Замѣтимъ, что въ діаграммахъ, получаемыхъ съ машинъ, часть діаграммы отъ *d* до *e* не представляетъ прямой, параллельной оси абсциссъ, — она представляетъ нѣкоторую кривую, близко подходящую къ нашей прямой и имѣющую наклонъ въ сторону *a*₁, такъ что давленіе подъ поршнемъ за періодъ выпуска будетъ постепенно понижаться до той точки, гдѣ мы прекращаемъ выпускъ пара. Мы уже упоминали выше, что такое прекращеніе выпуска ведетъ къ образованію какъ бы буфера, упругой паровой подушки, которая имѣетъ здѣсь большое значеніе и вліяніе на плавность хода машины, такъ какъ поможетъ машинѣ избѣжать толчка при слѣдующемъ затѣмъ при впускѣ пара, — она восприметъ на себя дѣйствіе тѣхъ силъ инерціи, которыми обладаютъ при своемъ движеніи массы поршня и соединенныхъ съ нимъ частей, и сдѣлаетъ ихъ безопасными для машины: такимъ образомъ такое прекращеніе выпуска, произведенное въ надлежащій моментъ, приводитъ механизмъ въ надлежащее положеніе въ томъ смыслѣ, что дѣлаетъ его вполне готовымъ къ возвратному ходу подъ обратнымъ давленіемъ. Значеніе этого буфера для

машины станетъ особенно яснымъ, если мы примемъ во вниманіе, что даже при самой тщательной обработкѣ наиболѣе плотно пригнанные вращательныя пары (напр. въ ползунныхъ болтахъ) черезъ нѣкоторое время превращаются въ нѣчто, подобное изображенному на фиг. 243; упомянутый же паровой буферъ помогаетъ шипу *A* перемѣститься въ своемъ гнѣздѣ *B* изъ положенія *I* въ положеніе *II* въ достаточной мѣрѣ плавно, между тѣмъ какъ безъ буфера получился бы внезапный скачокъ шипа изъ положенія *I* въ положеніе *II* и, конечно, сильный толчокъ, опасный для цѣлости машины и поэтому совершенно нежелательный.

Діаграмма свободныхъ усилій.

Такъ какъ обыкновенно работаютъ обѣ стороны поршня, то для каждой изъ нихъ можно вычертить діаграмму и обѣ эти діаграммы нанести на одну и ту же систему координатъ *rho*; ихъ можно считать вполне одинаковыми, а послѣ перенесенія на одну и ту же плоскость координатъ и къ одной и той же системѣ координатъ, и вполне симметричными. Такія двѣ діаграммы представлены у насъ на фиг. 244.

Итакъ, пусть поршень находится подъ давленіемъ пара съ обѣихъ сторонъ; въ виду того, что эти давленія направлены противоположно другъ къ другу и, вообще говоря, другъ другу не равны, давая такимъ образомъ нѣкоторое *результирующее свободное* давленіе, то теперь слѣдуетъ прослѣдить, какъ распредѣляются эти свободныя давленія и какъ они находятся по даннымъ діаграммамъ *).

Пусть діаграмма для лѣвой стороны поршня будетъ *ABMRCNUA*, а для правой—*DKMYENSXD*. Пусть, далѣе, въ рассматриваемый моментъ поршень находится въ положеніи, соотвѣтствующемъ точкѣ *B* діаграммы *A*. Поршень идетъ направо; діаграммы показываютъ, что по лѣвую сторону его работаетъ *расширяющійся* паръ, величина давленія котораго опредѣляется отрѣзкомъ *BP*; по правую же сторону продолжается еще выпускъ, и давленіе съ этой стороны, противоположное первому, выражается отрѣзкомъ *NP*; такимъ образомъ *свободное* давленіе на нѣкоторую единицу площади поршня будетъ выражено отрѣзкомъ *BN*, и направлено оно будетъ *слѣва направо* ($\Rightarrow$),—мы обозначили его толстой чертой. Разсуждая, такимъ образомъ, легко сообразить, что въ точкѣ *R* свободное давленіе равно *RS* ($\Rightarrow$), въ *M* равно *ML* ($\Rightarrow$), въ *W* равно *WV* ($\Leftarrow$), въ *K*—*KN* ($\Leftarrow$) и т. д. Вообще для того, чтобы по данной діаграммѣ сразу разобраться въ

*) Эти результирующія свободныя давленія, передаваясь черезъ поршень штоку и т. д., и обуславливаютъ собою величину работы, которую можно получить отъ машины.

этихъ свободныхъ давленійхъ, въ ихъ величинѣ и направленіи, слѣдуетъ для каждаго даннаго положенія поршня сообразить его направление движенія и взять отрѣзокъ соотвѣтствующей этому положенію ординаты между тѣми вѣтвями діаграммъ, которыя соотвѣтствуютъ этому направленію движенія поршня. На фигурахъ 245 и 246 составная діаграмма *ADCE* расчленена такъ, что на фиг. 245 приведены заразъ тѣ двѣ вѣтви сложной діаграммы, которыя соотвѣтствуютъ движенію поршня вправо ($\Rightarrow$), и на фиг. 246 двѣ вѣтви, соотвѣтствующія движенію влево ($\Leftarrow$). Если теперь мы поставимъ на кривыхъ діаграммы (фиг. 244) стрѣлки по смыслу движенія поршня (см. фиг. 245 и 246), то замѣтимъ, что отрѣзки, дающіе свободныя давленія, суть отрѣзки ординатъ, заключенные между кривыми *съ одинаковымъ направленіемъ стрѣлокъ*. Такимъ образомъ, задавшись сложной діаграммой *AD* (фиг. 244), слѣдуетъ, ради удобства и быстроты опредѣленія свободныхъ давленій при любомъ положеніи поршня, отмѣтить стрѣлками по смыслу движенія вѣтви діаграммъ, соотвѣтствующія одному и тому же ходу поршня; тогда отрѣзки ординатъ, заключенные между соотвѣтственными кривыми, дадутъ соотвѣтствующія величины свободныхъ давленій.

Слѣдя за измѣненіемъ свободнаго давленія въ различныхъ точкахъ, мы замѣтимъ, что въ точкахъ *X* и *У*, гдѣ пересѣкаются кривыя съ одинаково направленными стрѣлками, *свободнаго давленія не будетъ совсѣмъ* (упомянутые отрѣзки обращаются въ точки) и въ моменты перехода черезъ соотвѣтствующія этимъ точкамъ положенія поршень будетъ идти *только въ силу инерціи*. Если поршень, двигаясь вправо, переходитъ черезъ точку *X* и продолжаетъ двигаться дальше, то, какъ это намъ показываетъ діаграмма (фиг. 244), начиная съ точки *X*, появляются давленія, *противодѣйствующія движенію поршня*; давленія эти, по мѣрѣ приближенія поршня къ крайнему правому положенію, все возрастаютъ, достигая своего предѣльнаго значенія въ моментъ достиженія поршнемъ точки *С*; въ этотъ моментъ величина этого предѣльнаго значенія равна *CD*. Область этихъ противодѣйствующихъ движенію поршня давленій заштрихована горизонтальными штрихами (фиг. 247). Давленія эти обусловливаютъ собою затиханіе силъ инерціи, что иногда, какъ, напр., въ скороходныхъ машинахъ, бываетъ очень важно *).

На фиг. 247 мы приводимъ діаграмму свободныхъ давленій на поршень при его движеніи слѣва направо. Область свободныхъ давленій, помогающихъ этому движенію поршня, заштрихована вертикальными линіями, противодѣйствующихъ — горизонтальными. Для

*) Въ машинахъ этого рода начало впуска и прекращеніе выпуска приходится устраивать раньше, чѣмъ въ машинахъ другихъ типовъ, — при этомъ имѣется въ виду необходимость противодѣйствія указаннымъ силамъ инерціи. Сжатіе иногда приходится доводить почти до давленія въ котлѣ.

обратного хода получится такая же діаграмма, но только симметрично расположенная.

Картину распредѣленія давленій въ различные моменты слѣдуетъ дополнить введеніемъ силъ инерціи; съ этою цѣлью придется вычислить массы поршня, штока, ползуна и шатуна, затѣмъ опредѣлить ихъ ускоренія (для каждаго момента отдѣльно), при чемъ, какъ извѣстно, ускоренія поршня, штока и ползуна будутъ все время направлены по оси цилиндра въ ту или другую сторону — въ зависимости отъ направленія движенія, а ускоренія шатуна по величинѣ и направленію можно найти по способамъ, указываемымъ въ курсахъ теоріи механизмовъ. Найденныя величины дадутъ намъ представленіе о силахъ инерціи ($f = m \cdot j$) для каждаго момента отдѣльно, а, стало быть, и о томъ давленіи со стороны этихъ силъ, которое будетъ имѣться въ системѣ помимо давленія пара.

Допустимъ, что всѣ эти давленія мы уже подсчитали, такъ что имѣемъ теперь возможность наносить ихъ въ извѣстномъ масштабѣ на нашу систему координатъ. Разсуждаемъ далѣе такъ: въ началѣ движенія, когда поршень находится, положимъ, у A (фиг. 248), всѣ подвижныя части машины требуютъ нѣкотораго опредѣленнаго усилія для сообщенія имъ нѣкотораго ускоренія; на это потребуется и уйдетъ часть свободного давленія, приходящаяся на долю этой точки. Пусть эта часть есть AK ,—ее придется отнять отъ отрѣзка AE , такъ что въ началѣ хода всего свободного давленія будетъ лишь KE . Пусть затѣмъ скорости качающихся и другихъ частей механизма достигаютъ своего *maximum'a* въ нѣкоторой точкѣ Z , здѣсь ускореніе будетъ равно нулю, а свободное давленіе въ этотъ моментъ будетъ имѣть величину, нормальную для этого момента (вычитать изъ свободного давленія не придется ничего). Далѣе скорости начинаютъ убывать, ускоренія становятся отрицательными, и поскольку раньше приходилось затрачивать извѣстную работу на сообщеніе ихъ машинѣ, постольку теперь эти ускоренія затраты на вызваніе ихъ не требуютъ,—наоборотъ, теперь *силы инерціи станутъ способствовать движенію*, будучи направлены въ сторону этого движенія.

Давленія со стороны силъ инерціи мы отнимали отъ имѣющихся свободныхъ давленій, пока находились въ области свободныхъ давленій, лежащей влѣво отъ Z ; переходя же вправо, мы ихъ прибавляемъ къ свободнымъ давленіямъ, принимая при этомъ во вниманіе знакъ ихъ; такимъ образомъ мы и получили теперь дѣйствительную, исправленную на дѣйствіе силъ инерціи діаграмму свободныхъ усилій (истинныхъ). Это—діаграмма $KZFXEK$.

Легко теперь выяснитъ себѣ окончательно значеніе упоминавшагося выше парового буфера. Очевидно, что, если бы свободныя давленія пара, помогающія движенію (т.-е. направленные въ ту же сторону, въ какую движется поршень въ этотъ моментъ), имѣлись

также и за точкой X , то, замѣчая что за той же точкой X давленія со стороны силъ инерціи также помогаютъ этому движенію, мы получили бы въ результатѣ одновременнаго дѣйствія этихъ двухъ факторовъ *суммирование* ихъ эффектовъ, такъ что въ этомъ случаѣ въ области, лежащей вправо отъ X , дѣйствительныя свободныя давленія, какъ слагающіяся изъ свободныхъ давленій и давленій отъ силъ инерціи, по мѣрѣ приближенія поршня къ точкѣ B , все болѣе и болѣе возрастали, — они достигли бы *maxim'а* и неминуемо вызвали бы, въ моментъ перемены хода, сильнѣйшій толчокъ. Въ силу же существованія въ этой области не положительныхъ, а отрицательныхъ давленій со стороны пара, давленія со стороны силъ инерціи придется отъ нихъ уже отнимать, что, разумѣется, поведетъ къ *убыванію* дѣйствительныхъ давленій, а при соотвѣтственномъ, раціональномъ устройствѣ парораспредѣляющаго аппарата, можетъ довести ихъ даже до нуля.

Замѣтимъ, что величина рабочей площади діаграммы останется та же: что мы теряемъ слѣва отъ Z , то наверстаемъ справа.

Устройство индикатора.

На очереди стоитъ теперь вопросъ, какъ опытнымъ путемъ слѣдить за ходомъ измѣненія давленія при движеніи поршня въ цилиндрѣ построенной уже машины? Принципъ инструмента, служащаго для этого и носящаго названіе *индикатора*, во всѣхъ видоизмѣненіяхъ этого послѣдняго остается одинъ и тотъ же и состоитъ въ слѣдующемъ:

Если съ внутренней полостью парового цилиндра имѣть сообщеніе другой цилиндрикъ съ поршенькомъ, при этомъ такъ, что часть полости цилиндра, въ которой въ данное время работаетъ паръ, можетъ сообщаться съ пространствомъ подъ поршенькомъ индикатора, то это тѣмъ самымъ дастъ намъ возможность слѣдить за ходомъ давленія въ паровомъ цилиндрѣ; поршенекъ удерживается пружиной, позволяющей ему, въ зависимости отъ измѣненія давленія пара, дѣлать большія или меньшія перемѣщенія вверхъ или внизъ. Схема устройства индикатора будетъ, такимъ образомъ, крайне несложна и состоитъ въ слѣдующемъ: черезъ трубку A (фиг. 249) паръ изъ парового цилиндра проходитъ внутрь цилиндра B подъ поршенекъ C индикатора и гонитъ его вверхъ; этому препятствуетъ однако пружина D , такъ что поршенекъ можетъ двигаться вверхъ и внизъ лишь въ нѣкоторыхъ предѣлахъ. Имѣя пружину D , можно всегда опытнымъ путемъ опредѣлить заранее, какое усиліе нужно для сокращенія пружины на опредѣленную данную величину.

Такимъ образомъ, если поршень подвинется на извѣстную вели-

чину верхъ, то настолько же сократится пружина; а такъ какъ въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ для сокращенія пружины на опредѣленную величину нужно употребить нѣкоторое также вполне опредѣленное усиліе, то по сокращеніямъ пружины, обнаруживаемымъ перемѣщеніями конца штока *E*, можно судить объ измѣненіи давленій на поршенекъ; отмѣчая послѣдовательныя положенія конца *E* во времени, мы будемъ въ состояніи слѣдить за ходомъ давленія уже въ *паровомъ цилиндрѣ*. Отмѣтку показаній конца *E* по отдѣльнымъ моментамъ проще всего дѣлать, водя передъ концомъ *E*, снабженнымъ какимъ-либо пишущимъ орудіемъ листъ бумаги, — на этомъ листѣ карандашъ *E* и вычертитъ кривую давленій. Движеніе бумаги, конечно, не можетъ быть какимъ попало, — оно должно быть опредѣленнымъ образомъ связано съ движеніемъ поршня въ цилиндрѣ; это необходимо для того, чтобы на діаграммѣ была дана и видна зависимость между перемѣщеніемъ поршня и давленіемъ на него.

Все различіе въ устройствѣ индикаторовъ различныхъ типовъ заключаются только въ мелочахъ, относящихся къ перемѣщенію бумаги и карандаша.

Обыкновенно бумага, на которой имѣетъ быть вычерчена діаграмма давленій, наворачивается на цилиндръ, который затѣмъ приводится во вращеніе то въ ту, то въ другую сторону. На особый шкивокъ, насаживаемый у основанія этого цилиндра, можетъ навиваться веревка, одинъ конецъ которой прикрѣпляется къ этому шкиву, а другой — къ ползуну; а для того, чтобы эта веревка была всегда натянута, цилиндръ снабжается пружиной, свернутой въ спираль; какъ въ часовомъ барабанѣ она закрѣплена въ такомъ положеніи, что позволяетъ веревкѣ при прямомъ ходѣ вращать цилиндръ и тѣмъ самымъ закручивать ее, а затѣмъ, при обратномъ ходѣ, развертываясь, заставляетъ цилиндръ повернуться назадъ настолько же, насколько его повернула до того веревка, въ то же время цилиндръ заставляетъ веревку опять навиваться на шкивокъ.

Веревку цилиндрика проще всего соединить съ ползуномъ машины; но такъ какъ ходъ его можетъ быть очень великъ (1 mtr. и больше), то необходимо устроить приспособленіе, которое давало бы возможность получать движеніе ползуна въ уменьшенномъ масштабѣ. Можно, напр., на конецъ вала посадить маленькую шайбочку и къ ней придѣлать маленькій кривошипъ, за который и зацѣпить затѣмъ конецъ веревки. Подобное же движеніе можно получить еще, напр., при помощи такого приспособленія: на стержнѣ *O* (фиг. 250), приведенномъ къ специальному кронштейну у рамы машины, какъ на оси можетъ вращаться стержень *AB* съ двумя прорѣзами по длинѣ его, *ab* и *cd*; вдоль прорѣза *ab* можетъ ходить взадъ и впередъ палецъ *K*, ввернутый въ штокъ *P*, а въ прорѣзѣ *cd* можетъ ходить палецъ *L*, ввернутый въ стержень *XU*, который можетъ ползать въ

неподвижныхъ направляющихъ e и f ; понятно теперь, что стержень XU будетъ въ точности воспроизводить движеніе поршневого штока M въ масштабѣ, даваемомъ отношеніемъ $\frac{OL}{OK}$. Къ крючку U можно прикрѣпить конецъ веревки индикатора.

Не менѣе простъ служащій для той же цѣли приборъ фирмы *Dreyer, Rosenkranz & Droop (Hannover.)* Этотъ уменьшитель состоитъ изъ блочка (фиг. 251), снабженнаго сильной спиральной пружиной E , дѣйствующей здѣсь такъ же, какъ подобная ей спиральная пружина въ барабанѣ индикатора; блочекъ приводится во вращеніе посредствомъ шнурка, зацѣпляемаго при помощи кольца p за крючекъ у ползуна. Ось вращенія этого блочка укрѣпляется на рамкѣ V , при помощи винта M прикрѣпляемой къ стойкѣ индикатора T ; на той же оси сидитъ накрѣпко соединенный съ блочкомъ R еще одинъ меньшій блочекъ L , на который уже и навивается шнуръ, идущій къ барабану индикатора.— Дѣйствіе прибора въ поясненіяхъ не нуждается.

Не останавливаясь далѣе на конструкціяхъ этихъ «уменьшителей» положимъ, что цилиндръ индикатора съ наведенной на немъ бумагой тѣмъ или инымъ способомъ поставленъ въ возможность слѣдить за движеніемъ поршня машины. Остается теперь заставить конецъ штока индикатора съ прикрѣпленнымъ къ нему карандашомъ двигаться вдоль образующихъ цилиндра. Къ самому концу штока карандашъ не прикрѣпляется, а вводится сюда для полученія того же прямолинейнаго и вертикальнаго движенія направляющій механизмъ,—въ виду деликатности инструмента примѣненіе ползусекъ вообще здѣсь нежелательно. Чаше другихъ употребляется въ индикаторахъ различныхъ системъ направляющій механизмъ *Эванса*, представляющій собою, какъ это уже извѣстно изъ «*Теоріи механизмовъ*», простую четырехзвенную цѣпь, (см. фиг. 182, табл. 10). Конецъ B описываетъ нѣкоторую кривую, очень близко подходящую къ прямой OB . Этотъ механизмъ прикрѣпляется къ индикатору, такъ что полная схема прибора будетъ такова (см. фиг. 252): χ есть цилиндръ съ бумагой, на которой конецъ B рычага AB , снабженный, напр., карандашомъ, вычерчиваетъ діаграмму; вращается онъ на оси xx при помощи веревки l , охватывающей блочекъ, посаженный внизу цилиндра. Веревка l при посредствѣ уменьшителя заставляеть цилиндръ въ точности воспроизводить въ уменьшенномъ масштабѣ движеніе поршня. $BCAO_1O$ есть направляющій механизмъ *Эванса*, присоединенный къ системѣ индикаторнаго парового цилиндрика посредствомъ рычага EF , сочлененнаго съ штокомъ поршенька при посредствѣ шарового шарнира F . Точка E прикрѣпленія рычажка EF , а равно и длина его EF , подбираются такъ, чтобы перемѣщенія конца F повторялись въ опредѣленномъ увеличенномъ масштабѣ концомъ B стержня BA . Съ этою цѣлью

длину рычажка EF нужно подобрать такъ, чтобы удовлетворялась пропорція

$$EF:AO_1 = BE:BA$$

и, кромѣ того, чтобы точки B, F и O_1 лежали на одной прямой.

Разъ эти два условія будутъ удовлетворены, то, въ виду того, что при всѣхъ положеніяхъ поршенька, будетъ сохранено подобіе треугольниковъ BEF и BAO_1 , конецъ B стержня AB будетъ повторять движенія точки F въ опредѣленномъ масштабѣ. Обыкновенно этотъ масштаб берется равнымъ $\frac{4}{1}$, такъ что величина отношенія $BE:AB$ равна $\frac{3}{4}$.

Поступающіе въ продажу индикаторы заранѣе, на фабрикѣ, изготовляющей ихъ, калибруются: къ каждому отдѣльному индикатору прилагается масштабная линейка, иначе наз. «индикаторной», которая и даетъ, путемъ измѣренія ординатъ, соотвѣтствующія имъ величины давленій.

На дѣлѣ измѣренія помощью индикатора производятся такъ: привинчиваемъ его къ машинѣ, при чемъ помощью трубки T будетъ установлено непосредственное сообщеніе внутренней полости цилиндра (по одну сторону поршня) съ пространствомъ подъ поршенькомъ, прогрѣваемъ его, во избѣжаніе могущей имѣть мѣсто конденсаціи пара (передъ этимъ подогрѣваніемъ пишущій приборъ отводится отъ цилиндра z), прикрѣпляемъ затѣмъ конецъ шнура къ ползуну (прямо или при посредствѣ уменьшителя) и пускаемъ машину въ ходъ,—барабанъ начнетъ поворачиваться то въ одну, то въ другую сторону, и подведенный къ нему пишущій приборъ вычертитъ рядъ діаграммъ, подобныхъ діаграммѣ на фиг. 240; всѣ эти діаграммы, при правильномъ ходѣ и правильной работѣ машины, должны въ точности повторять другъ друга, т. е. покрывать и налагаться одна на другую цѣликомъ. Получивъ такую діаграмму, закрываютъ паровпускной клапанъ, разобщаютъ барабанъ съ ползуномъ и снимаютъ листокъ съ діаграммой.

Одинъ изъ наиболѣе простыхъ и распространенныхъ индикаторовъ, индикаторъ *Rosenkranz*'а, вычерченъ на фиг. 253.

Динамометры.

Тормазъ Прони.

По предыдущему, для измѣренія работы пара слѣдуетъ измѣрить построенную въ извѣстномъ масштабѣ площадь индикаторной діаграммы: это измѣреніе мы производимъ при помощи *планиметра Амслера* или какимъ-нибудь инымъ способомъ. Такимъ образомъ мы получимъ величину *индикаторной* работы машины,—работы, отдавае-

мой паромъ поршню. Работа эта, однако, *всеюда* меньше той, которую можно получить съ машиннаго вала. Объясняется это обстоятельство тѣмъ, что на пути передачи этой индикаторной работы вала встрѣчается цѣлый рядъ вредныхъ сопротивленій, каковы, напр., треніе поршня о стѣнки цилиндра, штока въ сальникѣ, ползуна въ направляющихъ и проч.; на преодоленіе всѣхъ этихъ вредныхъ сопротивленій уходитъ часть индикаторной работы, и притомъ часть довольно большая. Поэтому, естественно, является вопросъ о способахъ и средствахъ измѣренія этой дошедшей до вала работы,—только количествомъ этой *эффективной* работы и можетъ быть оцѣнена степень совершенства той или другой машины. Если эффективная работа, по сравненію съ индикаторной, мала, то это указываетъ, что въ передающемъ работу механизмѣ имѣетъ мѣсто сильное треніе, а значитъ, и изнашивание, и нагрѣваніе; все это не можетъ не отозваться значительнымъ уменьшеніемъ продолжительности работы машины.

Итакъ, нужно изыскать способъ измѣренія работы, могущей быть полученной съ вала,—какъ мы ее выше назвали, *эффективной*, работы.

Старѣйшимъ приборомъ, при помощи котораго можно разрѣшить интересующую насъ задачу и который не потерялъ своего значенія и до сихъ поръ, слѣдуетъ признать *нажимъ* или *тормазъ Прони*. Устройство этого прибора такъ же просто, какъ проста идея, положенная въ его основаніе. Устройство его таково: на валъ *A* (фиг. 254) машины сажается наглухо, помощью шпонки, шайба *B*, которая затѣмъ зажимается между двумя деревянными плашками *C, C*, соединенными между собою при помощи стягивающихъ болтовъ *S, S*.

Если, затянувъ гайки болтовъ *S, S*, мы зажмемъ шайбу между этими плашками и такимъ образомъ, установимъ тѣсное соприкосновеніе между плашками и шайбой, то вся эта система, будучи представлена сама себѣ, начнетъ вращаться вмѣстѣ съ валомъ *A*. Если же мы станемъ препятствовать этому вращенію, удерживая плашки при помощи рычага *D*, то тѣмъ самымъ мы возбудимъ силы тренія, работа коихъ сейчасъ же скажется въ нагрѣваніи плашекъ. Противодействовать этому нагрѣванію можно путемъ охлажденія трущихся частей токомъ холодной воды, для чего въ плашкахъ просверливается каналъ *k*.

Измѣреніе эффективной работы при помощи этого тормоза производится слѣдующимъ образомъ: остановивъ машину и отцѣпивъ отъ нея станки, мы накладываемъ на шайбу тормозъ, затягиваемъ болты *S, S* и нагружаемъ нѣкоторымъ грузомъ *P* подвѣшенную къ рычагу *D* чашку *p*; затѣмъ пускаемъ машину, уже только съ надѣтымъ на нее тормозомъ въ ходъ, заставляемъ ее работать точно такъ же, какъ она работала, приводя въ движеніе станки, т.-е. добиваемся того, чтобы оставалось прежнимъ и давленіе пара въ цилиндрѣ, и число оборотовъ и т. д.; тогда, въ случаѣ равновѣсія рычага (если онъ,

иными словами, при вращеніи вала A , остается все время въ горизонтальномъ положеніи), слѣдуетъ, что вся та работа, которая раньше уходила къ станкамъ, теперь можетъ считаться цѣликомъ переведенной въ работу тренія. Если, напр., до наложенія тормоза наша машина, будучи соединена со станками, дѣлала опредѣленное число оборотовъ (въ минуту, напр.), то, понятно, безъ тормоза и безъ станковъ она станетъ дѣлать число оборотовъ, во много разъ большее; накладывая же тормазъ, затягивая болѣе или менѣе его болты и накладывая тотъ или другой грузъ P на чашку, можно добиться того, что машина будетъ идти теперь такъ же, какъ она шла со станками; въ этотъ моментъ рычагъ съ грузомъ P будетъ стоять горизонтально, а это покажетъ, что моментъ силъ тренія будетъ въ точности равенъ моменту груза P и работа машины, которая расходовалась до того на вращеніе станковъ, теперь цѣликомъ переходитъ въ работу тренія.

Подсчетъ эффективной работы при помощи тормоза Прони основывается на слѣдующихъ простыхъ соображеніяхъ: пусть при упомянутомъ горизонтальномъ положеніи рычага, т.-е. при его равновѣсіи, нагрузка чашки p была равна P ; если длину рычага D обозначимъ черезъ l (это будетъ разстояніе по горизонтали между центромъ вала A и точкой привѣса чашки p), то моментъ груза P , уравнивающий моментъ силъ тренія, будетъ равенъ $P.l$. Подсчитаемъ теперь этотъ моментъ силъ тренія; если каждую частичную силу тренія, дѣйствующую касательно къ окружности шайбы B , обозначимъ буквой f съ какимъ-нибудь индексомъ (по мѣсту участка, гдѣ она дѣйствуетъ), напр., черезъ f_n , то, замѣчая, что всѣ эти частичныя силы дѣйствуютъ на плечѣ, равномъ радіусу шайбы B , можемъ сказать, что полный моментъ тренія, какъ составленный изъ моментовъ отдѣльныхъ силъ тренія, выразится суммой $\sum f_n r$ или, въ виду того, что r есть const.,

$$M_{тр} = r \sum f_n.$$

Но далѣе, замѣчая, что эта сумма всѣхъ элементарныхъ силъ тренія есть не что иное, какъ само *окружное усиліе* R , т.-е. что

$$\sum f_n = R$$

заключаемъ, что моментъ всѣхъ силъ тренія равенъ

$$M_{тр} = r . R.$$

Этотъ моментъ долженъ, какъ мы говорили, быть равенъ моменту груза P , т.-е. должно существовать равенство

$$R . r = P . l \dots\dots\dots (132)$$

откуда опредѣляется окружное усиліе:

$$R = \frac{l}{r} P \dots\dots\dots (133)$$

Зная же окружное усилие, легко определить эффективную работу L_e . Пусть число оборотов вала въ минуту есть n ; очевидно, что въ одну секунду каждая частичная сила f_n будетъ работать на пути $\frac{2\pi \cdot r \cdot n}{60}$ совершивъ при этомъ работу:

$$l = \frac{2 \pi r n}{60} \cdot f_n$$

Такимъ образомъ полная работа всѣхъ силъ тренія, или, что одно и то же, эффективная работа, будетъ равна Σl , т.-е.

$$L_e = \sum \frac{2\pi r \cdot n}{60} f_n = \frac{2\pi \cdot r \cdot n}{60} \sum f_n$$

что, на основаніи предыдущаго, приметъ видъ:

$$L_e = \frac{2\pi r \cdot n}{60} R \dots\dots\dots (134)$$

подставивъ вмѣсто R , равную ему величину изъ формулы (133), получимъ:

$$L_e = \frac{2\pi \cdot n \cdot P \cdot l}{60} \dots\dots\dots (135)$$

Если мы пожелаемъ выразить работу L_e въ лошадиныхъ силахъ, то, переводя l въ метры, а P — въ $kgr.$, дѣлимъ полученный результатъ на 75 (одна лошадиная сила равна 75 $kgr - mtr$ въ секунду); и такимъ образомъ окончательно находимъ:

$$L_{л.с} = \frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot P_{(kgr)} \cdot l_{(mtr)}}{60 \cdot 75} \dots\dots\dots (136)$$

Какъ видимъ, этотъ динамометръ весьма простъ и удобенъ, но въ то же время онъ обладаетъ однимъ недостаткомъ, весьма существеннымъ и затрудняющимъ производство измѣреній: никогда не удастся подобрать грузъ P такъ, чтобы равновѣсіе имѣло мѣсто болѣе или менѣе продолжительное время, — коромысло D постоянно колеблется то вверхъ, то внизъ. Если бы для устраненія этихъ колебаній мы устроили какую-нибудь задержку, въ родѣ изображенной на фиг. 255, то, легко видѣть, рисковали бы точностью наблюденій, такъ что эта задержка позволила бы намъ произвести лишь грубую предварительную установку прибора.

Веревочный динамометръ.

Динамометры другихъ конструкцій основаны на томъ же принципѣ, что и тормазъ *Прони*: въ нихъ вся работа, до того уходя-

шая къ станкамъ, также обращается въ работу тренія, измѣряемую затѣмъ тѣмъ или инымъ способомъ.

Въ динамометрахъ, разбираемыхъ ниже, введено на этотъ разъ треніе между *твердыми и гибкими тѣлами*, и общая схема ихъ устройства состоитъ въ томъ, что нѣкоторое гибкое тѣло, каковымъ можетъ служить ремень, металлическая лента и т. д., охватываетъ шайбу, сидящую на валу (на шпонкѣ); къ концамъ этого гибкаго тѣла прикрѣпляются грузы, имѣющіе своимъ назначеніемъ вызвать силы тренія и удержать гибкое тѣло отъ спаденія съ шайбы; иногда, какъ мы увидимъ ниже, грузъ привѣшивается только къ одному концу, — другой же удерживается пружиной; иногда бываетъ возможно обойтись даже только однимъ грузомъ. Какъ бы то ни было, но на поверхности соприкосновенія этого гибкаго тѣла съ шайбой вызывается такой нагрузкой треніе, величина котораго будетъ обусловлена величиной окружного усилія; подсчетъ этого послѣдняго можетъ быть произведенъ на основаніи извѣстныхъ уже соображеній о треніи твердыхъ и гибкихъ тѣлъ.

Извѣстно, что если мы имѣемъ гибкое тѣло, огибающее блокъ, и если концы его мы будемъ удерживать какимъ-нибудь образомъ, не давая ему, слѣдовательно, возможности быть увлеченнымъ блокомъ, то при вращеніи блока, *при неподвижномъ гибкомъ тѣлѣ*, въ различныхъ частяхъ этого послѣдняго будутъ вызваны различныя напряженія, лежащія между S_1 , напряженіемъ въ ведущей части и S_2 — въ ведомой. Извѣстно, что $S_1 > S_2$ и, кромѣ того, разность этихъ натяженій, $S_1 - S_2$, есть не что иное, какъ окружное усиліе P (см. ур—ніе 92). Обратно, если въ данной намъ системѣ гибкаго тѣла, сгибающаго блокъ, мы добьемся равновѣсія его при данномъ вращеніи блока, подвѣшивая тѣ или другіе грузы, то для опредѣленія окружного усилія, вращающаго блокъ, достаточно будетъ измѣрить натяженія S_1 и S_2 и взять ихъ разность.

Какъ и въ случаѣ тормазы *Прони*, здѣсь необходимо отцѣпить отъ машины станки и затѣмъ, пристроивъ динамометръ, добиться по-прежнему того, чтобы машина работала совершенно такъ же, какъ и прежде со станками. Здѣсь также придется обезопасить себя отъ вредныхъ послѣдствій нагрѣванія.

Самымъ простымъ изъ динамометровъ этого типа можно считать *веревочный* динамометръ, устройство котораго крайне просто: мы перекидываемъ обыкновенную веревку черезъ шкивъ (иногда прямо черезъ маховикъ) и къ концамъ ея подвѣшиваемъ тѣ или другіе грузы, стараясь выполнить при этомъ всѣ вышеизложенныя требованія. Тормазъ этотъ, какъ видимъ, въ простотѣ и удобствѣ не уступаетъ тормазу *Прони*. — Иногда, во избѣжаніе необходимости накладывать грузы на оба конца веревки, одинъ конецъ прикрѣпляютъ къ пружиннымъ вѣсамъ, а грузы подвѣшиваютъ къ другому.

Уголъ обхвата въ этомъ динамометрѣ вообще мало отличается отъ 180^0 , и въ этомъ отношеніи можно пойти дальше, приближая этотъ уголъ къ 360^0 , такъ что трущіяся части динамометровъ будутъ охватывать уже почти всю поверхность шайбы. Подобнаго рода динамометръ, какъ, напр., описываемый ниже динамометръ *Брауэра*, позволяетъ при этомъ обойтись только однимъ грузомъ, подвѣшиваемымъ къ динамометру на цѣпи или веревкѣ. Грузъ этотъ попрежнему подвѣшивается съ цѣлью воспрепятствовать вращенію динамометра и такимъ образомъ вызвать треніе.

Динамометръ Брауэра.

Динамометръ *Брауэра* состоитъ изъ металлической ленты A (фиг. 256), огибающей шкивъ B почти по всей его окружности; между концами ея (e, e) введена приклепанная къ ней скоба C , а подъ ней бляшка, служащая опорной поверхностью для винтовъ m и n , вращающихся въ гнѣздахъ скобы C ; вращая винты, можно по желанію измѣнять степень натяженія ленты A . Такимъ образомъ, ввинчивая винты, мы заставляемъ ленту плотнѣе прилегать къ шкиву; а подвѣсивая различные грузы P , можемъ подобрать этотъ грузъ такъ, что при вращеніи вала динамометръ будетъ оставаться въ равновѣсіи. Такъ какъ моментъ груза P при такомъ равновѣсіи будетъ въ точности равенъ полному моменту силъ тренія $\sum f_n r$ и такъ какъ безъ особой погрѣшности можно допустить, что плечи какъ груза P , такъ и силъ f_n одинаковы и равны радіусу шкива r , то очевидно, что грузъ P равенъ всей силѣ тренія или, что то же, *окружному усилію*.

Внизу, въ точкахъ a и b , ленты прикрѣпляются обыкновенно крючки, къ которымъ привязываются концы двухъ веревокъ, ac и bd , прикрѣпленныхъ другими концами къ полу; веревки эти служатъ для того, чтобы не дать прибору вращаться въ ту или другую сторону, если грузъ P окажется или слишкомъ великъ, или слишкомъ малъ, — въ случаѣ равновѣсія обѣ эти веревки должны быть не натянуты. Обыкновенно въ этихъ тормозахъ употребляется не лента, а металлическая же трубка, по которой циркулируетъ, охлажденія ради, вода.

При помощи какъ этихъ, такъ и многихъ другихъ имъ подобныхъ динамометровъ мы можемъ опредѣлить *эффективную* работу машины-двигателя, работающей при тѣхъ или другихъ условіяхъ: при извѣстномъ давленіи и расходѣ пара, при опредѣленномъ числѣ оборотовъ и проч. Сравнивая эту работу съ индикаторной, мы находимъ такимъ образомъ *механическій коэффициентъ полезнаго дѣйствія* данной машины.

Если индикаторную работу (въ паровыхъ лошадиныхъ силахъ) мы обозначимъ черезъ N_i , а эффективную (въ тѣхъ же единицахъ)—черезъ N_n , то упомянутый коэффициентъ, который мы будемъ обозначать буквой η , выразится такъ:

$$\eta = \frac{N_n}{N_i}.$$

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что коэффициентъ η *всегда меньше единицы*.

Динамометръ Гефнеръ-Альтенека.

Для каждой машины, станка и проч. существуетъ свой опредѣленный *минимум* работы, получая который, она находится еще въ состоянii выполнять свои функцiи, — при поступленii же меньшаго количества работы ея дѣйствiе прекращается. Этимъ обстоятельствомъ обуславливается важность и необходимость въ заводскомъ дѣлѣ учета работы, потребной для приведенiя въ дѣйствiе той или другой машины.

Этотъ учетъ можно было бы произвести хотя бы при помощи какаго-нибудь изъ динамометровъ вышеописанныхъ типовъ, но въ виду того, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ пользованiе ими неудобно или невозможно, были придуманы динамометры особаго рода, такъ называемые *трансмиссионные динамометры*, къ числу которыхъ относится динамометръ *Гефнеръ-Альтенека*. Предварительно выяснимъ принципъ, на которомъ основываются эти динамометры.

Пусть у насъ имѣются 2 шкива, ведущiй и ведомый (фиг. 257), охватываемые ремнемъ. Натяженiя ведущей и ведомой частей этого ремня, какъ извѣстно, различны и равны, допустимъ, S_1 и S_2 , причемъ разность $S_1 - S_2$ равна окружному усилию P . Пропустимъ теперь нашъ ремень черезъ рамку c , снабженную двумя блоками a и b ; такимъ образомъ ремень будетъ принужденъ обогнуть эти оба блока, и такимъ образомъ направленiя частей ремня, входящихъ и выходящихъ изъ рамки, будутъ образовывать между собою нѣкоторый уголъ, величина котораго будетъ обусловлена размѣрами рамки, блоковъ и т. д.; понятно, что тотъ же уголъ будутъ образовывать между собою и силы натяженiя (S_1, S_1) и (S_2, S_2) , имѣющiяся въ подходящихъ къ блокамъ и отходящихъ отъ нихъ частяхъ ремня, а это обстоятельство въ свою очередь обусловитъ собою появленiе двухъ силовыхъ параллелограммовъ (a_1, a_1) и (a_2, a_2) , т.-е. появленiе нѣкоторыхъ двухъ равнодѣйствующихъ, R_1 и R_2 , вообще другъ отъ друга отличныхъ. Такимъ образомъ, если въ системѣ блоковъ a, b и рамки c будутъ имѣться условiя, обезпечивающiя неравенство равнодѣйствующихъ R_1 и R_2 , то вся эта система въ равновѣсiи не останется, — приборъ будетъ имѣть стремленiе податься въ сторону большей силы, въ данномъ случаѣ—

вверхъ. Легко видѣть, что усиліе, съ которымъ приборъ будетъ стремиться податься вверхъ, оцѣнится разностью ($R_1 - R_2$). Въ случаѣ соблюденія нѣкоторыхъ специальныхъ условій эта разность будетъ находиться въ нѣкоторой опредѣленной и простой зависимости отъ разности натяженій $S_1 - S_2$, т.-е. отъ окружнаго усилія P . Такимъ образомъ, снабдивъ нашъ приборъ пружиной и нѣкоторыми необходимыми измѣрительными приспособленіями, мы будемъ въ состояніи опредѣлять окружныя усилія, измѣряя измѣненія длины пружины, — такъ какъ опредѣленной разности $R_1 - R_2$ будетъ, понятно, соответствовать и опредѣленное растяженіе пружины.

Не трудно теперь сообразить, въ чемъ должны состоять условія, которыя могли бы обезпечить постоянство разности $R_1 - R_2$ и простоту зависимости между этой разностью и разностью $S_1 - S_2$. Все дѣло здѣсь въ величинѣ угла, образуемаго направленіями подходящей къ блоку и уходящей отъ него частей ремня; одни и тѣ же натяженія S , при разныхъ углахъ между упомянутыми направленіями дадутъ различныя результирующія; а такъ какъ въ случаѣ, если бы нашъ приборъ состоялъ только изъ двухъ блоковъ и рамки, углы эти постоянно мѣнялись бы при перемѣщеніи прибора вверхъ и внизъ, то, слѣдовательно, постоянно мѣнялись бы какъ величины R_1 и R_2 , такъ и зависимость между разностями $R_1 - R_2$ и $S_1 - S_2$. Все это крайне затрудняло бы вычисленія и дѣлало бы пользованіе этимъ приборомъ весьма хлопотливымъ.

Устранить всѣ эти недостатки описаннаго схематическаго приспособленія можно только однимъ способомъ: помощью нѣкоторыхъ добавочныхъ роликовъ заставить упомянутыя части ремня, несмотря на перемѣщенія блоковъ a и b , подходить къ нимъ и уходить все время *подъ однимъ и тѣмъ же угломъ*, вполне опредѣленнымъ и для даннаго прибора постояннымъ; тогда будетъ установлено, во-первыхъ, постоянство результирующихъ R_1 и R_2 , и, во-вторыхъ, постоянство зависимости между каждой результирующей R и слагающими ея S ; приборъ будетъ допускать, такимъ образомъ, эмпирическое градуированіе.

Мысль эта осуществлена въ динамометрѣ *Гефнеръ-Альтенека*; схема его помѣщена на фиг. 258. Два упомянутые подвижные блокѣ, a и b , замѣнены здѣсь однимъ большимъ, сидящимъ на рычагѣ; этотъ рычагъ можетъ вращаться около шипа, укрѣпленнаго на той же рамкѣ, на которой укрѣплены шипы для шести меньшихъ блокѣвъ, служащихъ направляющими для ведомой и ведущей частей ремня. Въсь рычага, на которомъ сидитъ подвижной блокѣ A , и въсь самага блокѣ уравниваются грузомъ q . Установимъ приборъ такъ, чтобы ведущая часть ремня шла внизъ, тогда подѣ вліяніемъ силы $R_1 - R_2$ блокѣ подается вверхъ, — оба указателя сойдутъ со своихъ мѣстъ. Теперь мы, подтягивая пружину, приводимъ его опять въ прежнее положеніе, достичь этого поможетъ намъ верхняя стрѣлка, степень

же подтягиванія пружины (удлиненіе ея) укажетъ намъ нижняя стрѣлка. Приборъ обыкновенно градуируютъ такъ, чтобы показанія нижней стрѣлки прямо давали величину окружного усилія. Теорія этого снаряда проста: обозначивъ углы между направленіями подходящихъ и уходящихъ частей ремня черезъ α_1 —для ведущей и α_2 для ведомой, имѣемъ, какъ это ясно видно изъ фиг. 259,

$$R_1 = KM = 2 \cdot KN \cdot \sin \frac{\alpha_1}{2} = 2 S_1 \cdot \sin \frac{\alpha_1}{2}$$

подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$R_2 = 2 S_2 \sin \frac{\alpha_2}{2}$$

Во избѣжаніе различія между углами α_1 и α_2 приборъ долженъ быть устроенъ вполнѣ симметрично, и тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$; почему предыдущія два уравненія примутъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= 2 S_1 \sin \frac{\alpha}{2} \\ R_2 &= 2 S_2 \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (137)$$

Обозначимъ теперь величину $\frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ черезъ m .

тогда уравненія (137) дадутъ:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{S_1}{m} \\ R_2 &= \frac{S_2}{m} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (138)$$

такъ что

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= m \cdot R_1 \\ S_2 &= m \cdot R_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (139)$$

при чемъ

$$m = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \dots \dots \dots (140)$$

Вертикальная результирующая силъ R_1 и R_2 , направленная въ данномъ случаѣ вверхъ и, слѣдовательно, поднимающая приборъ, есть сила $R_1 - R_2$, а окружное усиліе P , равное разности $S_1 - S_2$, выразится, въ силу ур. (139), такъ:

$$P = S_1 - S_2 = m \cdot [R_1 - R_2] \dots \dots \dots (141)$$

Такъ какъ уголъ α при такомъ расположеніи вспомогательныхъ блочковъ выходитъ постояннымъ (это будетъ *постоянная* инстру-

мента, такъ что постояннымъ будетъ и m), то выходитъ, что окружное усилие прямо пропорціонально усилию, поднимающему приборъ, т.-е. усилию, съ которымъ натянута пружина при приведеніи верхняго указателя на прежнее мѣсто.

Точность этого прибора весьма невелика: на точность показаній пружины положиться нельзя, натяженіе ремня постоянно мѣняется, — все это заставляетъ блокъ постоянно колебаться; приходится поэтому устраивать особые уравниатели, придающіе прибору больше устойчивости. Главная причина неустойчивости прибора состоитъ въ томъ, что большія усилія приходится читать въ небольшомъ масшта-

бѣ: постоянная инструмента не велика, такъ что $\sin \frac{\alpha}{2}$ выходитъ очень малымъ, обратная же ему величина выходитъ очень большой и, слѣдовательно, влечетъ за собой незначительность усилия, поднимающаго приборъ и равнаго $R_1 - R_2$, т.-е. весьма малое удлиненіе пружины — появленіе большихъ ошибокъ, такимъ образомъ, неминуемо. — Къ достоинствамъ прибора слѣдуетъ причислить его компактность, удобство и простоту обращенія съ нимъ, почему онъ и до сихъ поръ употребляется на практикѣ довольно часто; въ особенности удобно производить съ нимъ предварительныя опредѣленія работы.

Калибровка прибора, обязательно производимое передъ его употребленіемъ, выполняется при помощи двухъ ремней, вводимыхъ въ приборъ и натягиваемыхъ различными грузами.

Динамометръ Батчельдера.

Динамометръ *Батчельдера* устроенъ такъ: на ведущемъ и ведомомъ валу насажены два одинаковыхъ зубчатыхъ колеса, A_1 и A_2 ; колеса эти располагаются въ такомъ разстояніи одно отъ другого, чтобы между ними могло помѣститься третье, меньшее, зубчатое колесо A_3 , которое должно находиться одновременно въ зацепленіи съ обоими большими (фиг. 260). Маленькое колесо A сидитъ на рычагѣ O_1OO_2 , равноплечемъ, такъ что $O_1O = OO_2$, и могущемъ вращаться около точки O ; въ O_2 подвѣшивается грузъ Q . Теорія этого снаряда крайне проста: пусть ведущимъ колесомъ будетъ колесо A_2 , а ведомымъ — A_1 ; со стороны ведущаго колеса A_2 передается на колесо O_1 окружное усилие P ; приблизительно такое же усилие P будетъ передано на то же колесо O_1 со стороны ведомаго колеса A_1 , притомъ въ ту же сторону, почему колесо O_1 будетъ стремиться податься внизъ подъ дѣйствіемъ силы $2P$ и для того, чтобы удержать рычагъ O_1OO_2 въ горизонтальномъ положеніи, придется подвѣсить грузъ Q , удовлетворяющій равенству:

$$Q = 2 P$$

откуда и опредѣлится искомое окружное усилие P :

$$P = \frac{1}{2} \cdot Q \dots \dots \dots (141)$$

Приборъ можно внѣшнимъ образомъ видоизмѣнить, употребивъ вмѣсто цилиндрическихъ колесъ фрикціонныя, коническія и т. д. Сущность дѣйствія во всякомъ случаѣ остается та же, что въ разобранномъ.

Регулированіе хода паровыхъ машинъ.

Равномѣрность хода машинъ требуется въ обыденныхъ условіяхъ вездѣ; неравномѣрность нежелательна, во-первыхъ, потому, что всякое измѣненіе скорости влечетъ за собою потерю живой силы, что уже само по себѣ не экономично; далѣе, всякое внезапное увеличеніе или уменьшеніе скорости ведетъ за собою ударъ, — частое повтореніе ударовъ повлечетъ за собою быстрое разрушеніе машины. Все это заставляетъ насъ пристраивать къ машинамъ такія приспособленія, которыя могли бы реагировать на эти измѣненія скоростей и, соотвѣтственно измѣняя величину силы, приводящей машину въ дѣйствіе, не позволяли бы проявляться вредному дѣйствію упомянутыхъ факторовъ. Приспособленія подобнаго рода, не позволяющія машинѣ превысить свою скорость болѣе, чѣмъ на опредѣленную величину, называются *регуляторами непериодическихъ измѣненій скоростей*.

Однако, какъ оказывается, однихъ этихъ приспособленій недостаточно, ибо причины неравномѣрности хода лежатъ въ самомъ устройствѣ механизма, передающаго работу пара на валъ; причины эти притомъ дѣйствуютъ періодически. Такимъ образомъ должны быть прибавлены приспособленія, могущія регулировать періодическія измѣненія скоростей, такъ какъ для насъ крайне важно, чтобы эти измѣненія строго удерживались въ извѣстныхъ предѣлахъ.

Выяснимъ теперь причины указанной періодичности, для чего представимъ себѣ механизмъ обыкновенной паровой машины, состоящей, какъ извѣстно, изъ парового цилиндра, ходящаго въ немъ поршня съ штокомъ, ползуна, шатуна и кривошипа. Пусть вся эта система въ нѣкоторый моментъ занимаетъ положеніе, изображенное на фиг. 261; на поршень давитъ съ извѣстной силой паръ; давленіе это черезъ штокъ передается шатуну, отъ него кривошипу, который и вращаетъ съ тѣмъ или другимъ усиліемъ валъ. Силу R , передаваемую шатуномъ пальцу кривошипа, можно разложить на двѣ: одну дѣйствующую вдоль кривошипа, а другую къ нему перпендикулярную.

Для насъ представить интересъ изслѣдованіе измѣняемости одной лишь послѣдней силы, — силы, дѣйствующей на палецъ кривошипа

перпендикулярно оси кривошипа; первая же сила вліяетъ лишь на прочность самого тѣла кривошипа, — она или сжимаетъ его, какъ это изображено на фиг. 261, или растягиваетъ, какъ на фиг. 262, и, слѣдовательно, въ передачѣ работы на валъ никакого участія не принимаетъ; вся работа вращенія вала выполняется исключительно тѣми слагающими силы R , которыя направлены въ каждый моментъ перпендикулярно оси кривошипа, т.-е. касательно къ окружности, описанной пальцемъ кривошипа; слагающія эти называются *тангенціальными* усиліями, и намъ предстоитъ теперь задача выяснитъ законъ ихъ измѣняемости.

Предположимъ сначала для простоты, что полезное сопротивленіе, испытываемое машиной, есть величина постоянная.

Если бы величина тангенціальныхъ усилій не мѣнялась при переходѣ кривошипа изъ одного положенія въ другое, то, въ случаѣ равенства моментовъ сопротивленія и тангенціального усилія, *машина могла бы двигаться равномерно сама*, — для достиженія этой равномерности въ такомъ случаѣ не потребовалось бы никакихъ приспособленій. На дѣлѣ же оказывается, что тангенціальное усиліе есть величина переменная, — это будетъ показано ниже, — а въ такомъ случаѣ не можетъ существовать вышеупомянутаго равенства моментовъ, — у насъ непременно появлялось бы либо ускореніе хода, либо замедленіе, смотря по тому, какой изъ моментовъ получалъ бы перевѣсъ въ данный моментъ. Легко убѣдиться, что этихъ неправильностей хода избѣжать нельзя никакъ. Остается лишь одно: устроить дѣло такъ, чтобы имѣть возможность держать измѣненія скорости въ извѣстныхъ, заранее опредѣляемыхъ предѣлахъ. — Послѣ этихъ предварительныхъ соображеній перейдемъ къ разрѣшенію нашей задачи.

Пусть давленіе пара на поршень равно P ; эта сила P , будучи передана (по штоку) къ болту ползуна, можетъ быть разложена на двѣ:

- 1) силу R , дѣйствующую вдоль шатуна, и
- 2) силу C , прижимающую башмакъ ползуна къ параллели (фиг. 263). Замѣтимъ, что сила P , свободное давленіе на поршень, есть для каждаго даннаго момента величина вполне опредѣленная, найти которую можно указаннымъ выше способомъ. Далѣе, сила R , будучи передана на палецъ кривошипа B , разложится на силу N — по шатуну и на силу T — тангенціальное усиліе. Если скорость ползуна въ данный моментъ равна u , то работа силы P за бесконечно малый промежутокъ времени dt выразится черезъ $P u dt$; если же величина тангенціального усилія для этого момента будетъ равна T , радіусъ кривошипа — r и угловая скорость — ω , то за тотъ же промежутокъ времени палецъ кривошипа произведетъ работу: $T \cdot r \cdot \omega dt$. Отвлекаясь пока отъ вредныхъ сопротивленій и отъ силы инерціи механизма, скажемъ, что элементарная работа силы P равна элемен-

тарной работѣ тангенціального усилія T за тотъ же промежутокъ времени dt . Такимъ образомъ можно написать ур-іе:

$$P \cdot u \cdot dt = T \cdot r \cdot \omega \cdot dt \dots \dots \dots (142)$$

или, послѣ сокращенія на dt :

$$P \cdot u = Tr\omega \dots \dots \dots (143)$$

откуда

$$T = \frac{P \cdot u}{r \cdot \omega} \dots \dots \dots (144)$$

Величину u , скорость ползуна, можно найти графическимъ путемъ для любого его положенія; именно, изъ теоріи механизмовъ извѣстно, что скорость ползуна u выражается произведеніемъ нѣкотораго отрѣзка AD (см. фиг. 263) на угловую скорость вращенія кривошипа; такъ что

$$u = AD \cdot \omega \dots \dots \dots (145)$$

и теперь уравненіе (144) принимаетъ видъ:

$$T = \frac{P \cdot AD \cdot \omega}{r \cdot \omega}$$

или, послѣ сокращенія,

$$T = \frac{P \cdot AD}{r} \dots \dots \dots (146)$$

Это выраженіе даетъ намъ возможность, при удобномъ выборѣ r , находить очень быстро и просто величины усилій.

Легко теперь составить, при помощи уравненія (146), діаграмму тангенціальныхъ усилій, которая и дастъ намъ полную картину распределенія ихъ въ зависимости отъ того или другого положенія кривошипа.

Въ этой діаграммѣ за абсциссы придется брать пути, проходимые точкой приложенія тангенціальныхъ усилій,—это будутъ дуги окружности, описанной пальцемъ кривошипа, а ординатами — соотвѣтствующія каждому данному положенію кривошипа, т.-е. каждой отсѣкаемой имъ дугѣ, тангенціальныя усилія. Поэтому развертываемъ эту окружность, дѣлимъ ее на n равныхъ частей и въ точкахъ дѣленія возставляемъ перпендикуляры (фиг. 264). Отмѣчаемъ далѣе на сказанной окружности, точки, соотвѣтствующія точкамъ дѣленія выпрямленной окружности отмѣчаемъ положенія шатуна, соотвѣтствующія этимъ точкамъ, — для каждой отдѣльно, отыскиваемъ рядъ точекъ D и, слѣд., рядъ отношеній $\frac{AD}{r}$; помножая эти послѣднія на

соотвѣтственные значенія свободныхъ усилій P , находимъ такимъ образомъ величины тангенціальныхъ усилій по отдѣльнымъ моментамъ и, наконецъ, откладываемъ ихъ на соотвѣтствующихъ ордина-

тахъ. Именно такимъ образомъ и составлена діаграмма этихъ усилій, приведенная на фиг. 264.—Работа тангенціальныхъ усилій выразится здѣсь, какъ и въ индикаторной діаграммѣ, площадью, ограниченной кривою *oklmγ* и осью абсциссъ *Oγ*, при чемъ, въ виду того обстоятельства, что при подсчетѣ величинъ *T* вредныя сопротивленія въ расчетъ приняты не были, площади обѣихъ діаграммъ, индикаторной и тангенціальныхъ усилій, должны быть одинаковы,—это обстоятельство, между прочимъ, можетъ послужить для повѣрки построения.

Мы предположили, что полезное сопротивление есть величина постоянная; въ такомъ случаѣ діаграмма силъ сопротивленія въ видѣ прямоугольника *Oαζγ*, высота коего *Oα* равна сопротивленію; кривая сопротивленій изобразилась бы прямой *αζ*, параллельной оси абсциссъ и идущей на разстояніи *Oα* отъ нея.

Присматриваясь къ фиг. 264, замѣчаемъ, что на нѣкоторомъ опредѣленномъ участкѣ пути кривошипа полезное сопротивление превышаетъ тангенціальныя усилія, затѣмъ на слѣдующемъ участкѣ отстаетъ, далѣе опять превышаетъ и т. д. Слѣдовательно, въ виду того, что ускореніе, вообще говоря, будетъ отлично отъ нуля, (оно равно нулю въ точкахъ пересѣченія кривою *Oklmγ* съ прямою *αζ*), — скорость будетъ то возрастать, то убывать. Въ случаѣ, если машина работаетъ правильно, должно имѣть мѣсто равенство площадей діаграммъ полезныхъ сопротивленій и тангенціальныхъ усилій, такъ что въ такомъ случаѣ къ концу періода всѣ скорости будутъ имѣть тѣ же значенія, какія онѣ имѣли въ началѣ его,—такъ въ этомъ указанномъ случаѣ каждый новый періодъ будетъ представлять собою точный сколокъ съ предыдущаго, — такимъ образомъ была бы соблюдена строжайшая періодичность измѣненія скоростей. Очевидно, что величину этого сопротивления найдемъ дѣленіемъ площади *Okγ* на *Oγ*—длину окружности извѣстнаго радіуса.

Въ частяхъ упомянутаго періода, какъ мы видѣли, существуютъ колебанія: то работа сопротивленія превышала работу тангенціальныхъ усилій, то наоборотъ. Но, какъ бы тамъ ни было, а къ данной машинѣ для любыхъ двухъ промежутковъ времени можно примѣнить такъ называемый законъ живыхъ силъ, гласящій, что для двухъ послѣдовательныхъ положеній системы разность живыхъ силъ равна разности работъ силъ дѣйствующихъ и силъ сопротивленія. Символически принципъ этотъ выразится такъ:

$$\sum \frac{mv_1^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = L_n - L_f (147)$$

гдѣ черезъ *m* обозначены массы точекъ системы, *v*₁ и *v*₀—скорости тѣхъ же точекъ въ концѣ послѣдующаго и предыдущаго положеній системы, *L*_{*n*}—работа силъ дѣйствующихъ, и *L*_{*f*}—силъ сопротивленія. Если

$$L_n = L_f$$

то въ системѣ ускореній не появится, и слѣдовательно живыя силы системы, въ начальномъ ея положеніи и въ послѣдующемъ, будутъ одинаковы. Приведенный выше законъ, формулируемый зачастую иначе: *приращеніе живой силы системы равно разности работъ двигателя и сопротивленія* имѣетъ мѣсто, какъ это извѣстно изъ механики, только тогда, когда *связи системы отъ времени не зависятъ*.

Допустимъ теперь, что связи (или условія) нашей машины отъ времени не зависятъ, такъ что соотношеніе (147) можно будетъ примѣнить ко всякому промежутку времени. Обратимся снова къ разсмотрѣнію нашей діаграммы (фиг. 264) тангенціальныхъ усилій и выяснимъ, на основаніи ея, условія измѣняемости скоростей системы за какой-либо промежутокъ времени. Если на діаграммѣ фиг. 264 или 265 обратимъ вниманіе на часть ея $O\ 1$, то замѣтимъ, что на этомъ участкѣ будетъ имѣть мѣсто постепенное убываніе скоростей, ибо работа силы здѣсь меньше работы сопротивленія. Легко видѣть, что подобное же убываніе скоростей будетъ наблюдаемо дальше между точками 2 и 3, 4 и 5, 6 и 7, и т. д.

Подобнымъ же образомъ заключаемъ, что между точками 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6 . . . будетъ наблюдаемо увеличеніе скоростей, такъ какъ на этихъ участкахъ работа силы больше работы сопротивленія. Гдѣ-нибудь въ этомъ періодѣ $O\gamma$ будетъ нѣсколько относительныхъ максимумовъ и минимумовъ; два изъ нихъ будутъ абсолютными — одинъ абсолютный максимумъ скоростей, а другой — абсолютный минимумъ скоростей. Такимъ образомъ діаграмма фиг. 265 даетъ намъ возможность опредѣлять, при какомъ положеніи кривошипа окружныя скорости вала будутъ имѣть *maxim*ит, и при какомъ — *minim*ит. Подробнѣе этотъ вопросъ мы рассмотримъ нѣсколько ниже, а теперь познакомимся въ краткихъ чертахъ съ однимъ изъ главнѣйшихъ вопросовъ машиностроенія, — *вопросомъ о регулированіи хода машинъ при помощи маховиковъ*. Для того, чтобы подойти къ его рѣшенію, мы имѣемъ теперь всѣ нужныя предварительныя соображенія.

Разобраться въ указанномъ вопросѣ можно при помощи діаграммы фиг. 265. Къ каждому изъ промежутковъ (1, 2) и т. д. можно примѣнить вышеупомянутую теорему живыхъ силъ; такъ, напр., можно сказать, что на промежуткѣ (1, 2) приращеніе живой силы системы будетъ равно разности между работами двигателя и сопротивленія; на основаніи предыдущаго заключаемъ, что эта послѣдняя разность изобразится какъ разъ площадью $1\kappa 2\Gamma$, величина которой, измѣренной, напр., въ $\frac{kgr. \times mtr}{sec}$, равна f_1 . По теоремѣ живыхъ силъ можемъ написать уравненіе:

$$f_1 = \sum \frac{mv_1^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} (148)$$

гдѣ индексомъ „0“ отмѣчены скорости въ началѣ разсматриваемаго промежутка, а „1“—въ концѣ. Не трудно видѣть, что въ случаѣ четырехъ точекъ пересѣченія кривой тангенціальныхъ усилій съ прямой сопротивленія наибольшая разниа скоростей будетъ наблюдаться на томъ участкѣ, которому соотвѣтствуетъ наибольшая площадь *); поэтому на нашей діаграммѣ придется измѣрить всѣ площади какъ избытковъ, такъ и недостатъ; наибольшая изъ нихъ (по абсолютной величинѣ) и укажетъ тотъ участокъ пути пальца кривошипа, на которомъ скорости мѣняются въ болѣе значительныхъ предѣлахъ, чѣмъ на другихъ участкахъ. Но допустимъ, что наибольшею такою площадью оказалась какъ разъ площадь f_1 .

Уравненіе (148) указываетъ намъ путь, по которому мы должны идти, для достиженія опредѣленной разницы скоростей,—для этого, какъ видимъ, слѣдуетъ соотвѣтственно увеличивать массы движущихся и вращающихся частей. Дѣйствительно при данномъ f_1 тѣмъ меньше будетъ разниа между скоростями v_1 и v_0 , чѣмъ больше масса. Въ нашихъ машинахъ-двигателяхъ цѣль эта достигается введеніемъ въ систему массивныхъ тѣлъ вращенія, называемыхъ *маховиками*, массивныхъ настолько, что вліяніе остальныхъ имѣющихся въ системѣ массъ исчезаетъ передъ вліяніемъ маховика. Въ этомъ случаѣ можно предположить, что въ уравненіи (148) всѣ m будутъ исчерпаны элементарными массами маховика, а поэтому, называя черезъ ω угловую скорость вращенія маховика и черезъ ρ разстояніе какой-нибудь элементарной массы отъ оси вращенія, можемъ написать

$$\sum \frac{v_1^2 - v_0^2}{2} m = \sum \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2} \rho^2 \cdot m = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2} \sum m \rho^2 = f_1$$

$\sum m \rho^2$ есть моментъ инерціи маховика относительно оси вращенія, такъ что, называя его черезъ J , напомнимъ:

$$f_1 = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2} J$$

или

$$f_1 = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2} (\omega_1 - \omega_0) \cdot J \dots \dots \dots (149)$$

Обозначимъ далѣе среднюю ариѳметическую угловыхъ скоростей, ω_1 и ω_0 , черезъ ω , т.-е. положимъ:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2}$$

Ее можно считать приблизительно за среднюю скорость вращенія вала.

*) Подробнѣе объ опредѣленіи абсолютнаго maximum'a и minimum'a будетъ сказано ниже.

Затѣмъ зададимся требованіемъ, чтобы разность крайнихъ скоростей, т.-е. величина колебаній скоростей не превышала нѣкоторой опредѣленной доли отъ этой средней скорости ω , т.-е. непременно должно быть соблюдено равенство:

$$\omega_1 - \omega_0 = \varepsilon \cdot \omega$$

гдѣ ε есть правильная дробь.

Теперь основное ур-ніе маховика (149) перепишется такъ:

$$f_1 = J \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \omega$$

или окончательно

$$f_1 = J \cdot \varepsilon \cdot \omega^2 \cdot \dots \dots \dots (150)$$

Въ этомъ ур-ніи у насъ обыкновенно все извѣстно, кромѣ J , которое, такимъ образомъ, отсюда и опредѣлится. Дѣйствительно, ω есть нѣкоторая опредѣленная величина, это — средняя скорость, которой мы задаемся при *проектированіи машины*; если нужно намъ число оборотовъ машины мы обозначимъ черезъ n , то

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \cdot \dots \dots \dots (151)$$

Такъ какъ теперь F_1 и ω извѣстны, то, выбравъ ε , получимъ моментъ инерціи такого маховика, который, будучи посаженъ на валъ машины, не позволить разницѣ скоростей превысить заданной величины. Для предварительнаго опредѣленія размѣровъ маховика сочтемъ сначала всю его массу какъ бы распредѣленной по окружности; тогда

$$J = M \cdot r^2$$

гдѣ r — радіусъ маховика, и уравненіе (150) перепишется такъ:

$$f_1 = M \cdot r^2 \cdot \varepsilon \cdot \omega^2$$

откуда опредѣляемъ приблизительно радіусъ маховика, а далѣе изъ его конструкціи находимъ болѣе точно и повѣряемъ уравненіе (150).

Обратимся теперь на нѣсколько времени къ нашей діаграммѣ тангенціальныхъ усилій. Пусть она имѣетъ видъ фиг. 265, — періодъ есть $O\gamma$. Предполагая попрежнему, что теорема живыхъ силъ применима для каждаго промежутка и здѣсь, приложимъ ее къ промежуткамъ 12, 23 и т. д. Такъ какъ діаграмма $O\kappa\mu\gamma$ съ каждымъ новымъ періодомъ не мѣняется, то для того, чтобы знать, что происходитъ за $\gamma\beta$, слѣдуетъ всю діаграмму сдвинуть направо на величину $O\gamma$; получимъ такимъ образомъ продолженіе нашей діаграммы $\gamma\eta\delta$, а сдвинувъ влѣво, получимъ діаграмму предшествовавшего хода $\Pi\eta\alpha$.

Мы видимъ такимъ образомъ, что на участкѣ (I 1) скорости убывали, затѣмъ, отъ 1 до 2 — онѣ возрастали, отъ 2 до 3 опять убывали и т. д. Выходитъ такимъ образомъ, что въ точкахъ II, 1, 3, 5

и т. д. будутъ *миним'ы* скоростей, а въ 1, 2, 4, 6 — *максим'ы*. Спрашивается, гдѣ же будетъ абсолютный *максимум* или *минимум*. Для этого придется разсмотрѣть, какія скорости меньше, въ 1 или въ 3, въ 3 или въ 5 и т. д. Ясно, что все зависитъ отъ недостачи работы тангенціальныхъ усилій: если въ точкѣ 1 имѣется нѣкоторый минимумъ скорости, а въ точкѣ 3 — другой, то уравненіе живыхъ силъ для промежутка 1 — 3 даетъ намъ:

$$\sum \frac{v_3^2 - v_1^2}{2} m = \text{пл. } 1k2 - \text{пл. } 2l3$$

и если площадь $2l3 >$ площади $1k2$, то $v_3 < v_1$.

Точно такъ же найдемъ, что если сумма площадей $4\gamma5$ и $2l3$ больше суммы $1k2 + 3m4$, то скорость $v_3 < v_1$ и т. д.

Такимъ образомъ мы отыщемъ, какой изъ *миним'овъ* будетъ абсолютнымъ. — Въ случаѣ нахожденія *максим'а* нужно поступать подобнымъ уже путемъ: напримѣръ, для сравненія *максим'а* 3 и 4 нужно взять алгебраическую сумму площадей $2l3$ и $3m4$ и если она < 0 , то $v_2 > v_4$ и наоборотъ, и т. д.

Сдѣлаемъ, наконецъ, еще одно замѣчаніе: при составленіи диаграммы тангенціальныхъ усилій мы пользовались индикаторной диаграммой. Строго говоря, это неправильно потому, что при этомъ игнорируются силы инерціи качающихся частей механизма, которыя, какъ мы знаемъ, мѣняють, и притомъ весьма сильно, видъ индикаторной диаграммы. Такимъ образомъ при построеніи диаграммы тангенціальныхъ усилій слѣдуетъ пользоваться индикаторной диаграммой, поправленной на силы инерціи.

Между прочимъ инерція качающихся частей вызываетъ еще одно явленіе. Пусть поршень находится въ началѣ его хода, т.-е. вблизи мертвого положенія кривошипнаго механизма, гдѣ, какъ мы это уже знаемъ, на сообщеніе ускоренія приходится потратить большое усиліе. Допустимъ, что поршень находится въ положеніи, соотвѣтствующемъ точкѣ *a* диаграммы (фиг. 266); на основаніи предыдущаго утверждаемъ, что давленіе на поршень слѣва (давленіе пара) выражается отрѣзкомъ *ab*; также знаемъ, что въ этотъ моментъ на преодоленіе силъ инерціи уйдетъ большая часть его *ad*; такимъ образомъ всего свободного давленія можетъ оказаться очень мало, — лишь *db*. Этотъ остатокъ дойдетъ до пальца кривошипа почти цѣликомъ, ибо кривошипъ находится вблизи своего мертвого положенія, такъ что штокъ, шатунъ и кривошипъ образуютъ почти одну прямую линію (*R* фигуры 263 — здѣсь почти равно *P*); отъ пальца кривошипа этотъ остатокъ опять почти цѣликомъ передается подшипнику коренного вала, въ то же самое время на внѣшнюю крышку цилиндра *mn* будетъ передано

полное давленіе пара ab . Такимъ образомъ, еслибы машина была подвѣшена въ пространствѣ, то появляющееся при каждомъ переходѣ механизма черезъ мертвыя положенія избыточное давленіе на ту или другую крышку цилиндра, не покрываемое къ тому никакимъ сопротивленіемъ, стало бы растаскивать части машины при одномъ положеніи и сближать ихъ при другомъ; такъ что если бы мы укрѣпили всѣ части машины на одной рамѣ и подвѣсили ее на веревкахъ, то, пустивъ ее въ ходъ, получили бы своего рода маятникъ. Наши машины ставятся и наглухо закрѣпляются на болѣе или менѣе массивныхъ фундаментахъ; значить, упомянутыя избыточные давленія будутъ передаваться каждый разъ фундаменту и такимъ образомъ будутъ его расшатывать, подвергая тѣмъ самымъ прочность его постояннымъ испытаніямъ.

Чтобы хотя бы нѣсколько умѣрить это зло, остается лишь одно средство: прибавить противовѣсъ P , посадивъ его на продолженіи кривошипа по другую сторону относительно вала (фиг. 267); дѣйствительно, въ такомъ случаѣ центробѣжная сила этого противовѣса будетъ до нѣкоторой степени компенсировать упомянутое избыточное давленіе. Подобнаго рода противовѣсы имѣются во всѣхъ скоростныхъ машинахъ, гдѣ они оказываютъ значительныя услуги въ смыслѣ повышенія степени устойчивости машины и увеличенія срока службы фундамента.

КОНЕЦЪ ВТОРОЙ ЧАСТИ.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
Введение	3

ЧАСТЬ I.

Общая теорія механизмовъ.

Общая кинематическія свѣдѣнія	9
Задачи	28
Кинематическія пары	29
Кинематическая цѣпь. Шарнирный четырехугольникъ	30
Теорема Грасгофа	31
Опредѣленіе скоростей различныхъ точекъ шатуна	32
Замѣна вращательной пары—поступательной. Ползунъ	35
Диаграмма отклоненій ползуна	36
Скорость ползуна	37
Графическій способъ построенія ускореній различныхъ точекъ шатуна	38
Задачи	44
Аналитическое опредѣленіе скорости и ускоренія ползуна	—
Качающаяся паровая машина	48
Круглый эксцентрикъ	51
Случай, когда сдѣлано неподвижнымъ звено „а“	—
Плоская четырехзвенная шарнирная цѣпь съ двумя поступательными парами	53
Муфта Oldham'a	54
Станокъ Leonardo-da-Vinci	—
Двойной ползунъ	55
Переходъ черезъ мертвыя положенія	56
Кинематическая цѣпь съ пятью шарнирами. Станокъ Коха и Мюллера	60
Винтовые пары	63
Трехзвенная винтовая цѣпь	64
Классификація механизмовъ	67

Передача движенія непосредственнымъ прикосновеніемъ.

Отд. 1. Отношеніе между скоростями и направленіями постоянно.

Цилиндрическая фрикціонная передача	69
Замѣна катящихся цилиндрическихъ поверхностей скользящими	71
Графическое построеніе профиля сопряженнаго данному	73

	<i>Стр.</i>
Способъ Poncelet	73
Способъ Reulaux	74
Циклическіе профили	75
Эвольвентный профиль	77
Цилиндрическія зубчатыя колеса	78
Циклическое заѣпление	81
Эвольвентное заѣпление	89
Коническая фрикціонная и зубчатая передача	94
Передача между осями непараллельными и непересѣкающимися	100
Коловратныя машины	112

Отд. 2. Отношеніе между скоростями перемѣнно, направленіями постоянно.

Некруглыя колеса	113
----------------------------	-----

Отд. 3. Отношеніе между скоростями и направленіями перемѣнно.

Кулаки и эксцентрики	117
--------------------------------	-----

Передача движенія при помощи промежуточныхъ звеньевъ.

Отд. 1. Отношеніе между скоростями и направленіями постоянно.

Рядовое соединеніе зубчатыхъ колесъ	126
---	-----

Отд. 2. Отношеніе скоростей перемѣнно, направленій—постоянно.

Шарниръ Гука	135
------------------------	-----

Отд. 3. Отношеніе скоростей и направленій перемѣнно.

Механизмъ Эванса	141
Параллелограмъ Уатта	142
Механизмъ Поселье	143
Механизмъ Гарта	145

ЧАСТЬ II.

Общая теорія машинъ.

Треніе въ машинахъ.

Треніе скольженія (1-го рода).

Общіе законы тренія	147
Движеніе тѣла по горизонтальной плоскости	155
Наклонная плоскость	158
Винтъ	162
Клинъ	167
Зубчатыя колеса	172
Треніе въ подшипникахъ и шипахъ	181

Треніє каченія (2-го рода).

	<i>Стр.</i>
Коэффициентъ тренія	190
Каченіє телѣжекъ	194

Ременная и канатная передача.

Ременная передача	196
Канатная передача	206

Изслѣдованіе работы паровыхъ машинъ.

Индикаторы.

Индикаторная діаграмма	210
Діаграмма свободныхъ усилій	215
Устройство индикатора	218

Динамометры.

Тормазъ Прони	221
Веревочный динамометръ	224
Динамометръ Брауэра	226
Динамометръ Гефнеръ-Альтенека	227
Динамометръ Батчельдера	230

Регулированіе хода паровыхъ машинъ	231
---	------------

