

МАЙКОВ АНДРЕЙ ИГОРЕВИЧ

**КОМПЛЕКС МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВОЛНОВЫХ
МЕХАНИЗМОВ С КРУГОВОЙ ФОРМОЙ ЗУБЬЕВ И УПРУГИМИ
ЗВЕНЬЯМИ В ВИДЕ КОЛЬЦЕВЫХ ПРУЖИННЫХ ПАКЕТОВ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук**



Москва – 2011

Научный руководитель:

доктор технических наук, профессор
Клеников Сергей Сергеевич

Официальные оппоненты:

доктор технических наук, профессор
Гаврюшин Сергей Сергеевич

кандидат физико-математических наук
Слободчиков Савва Саввич

Ведущая организация:

ОАО "Корпорация
"Московский институт теплотехники"

Защита диссертации состоится «6» января 2011 г. в 11.00 часов на заседании диссертационного совета Д212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э.Баумана по адресу: г.Москва, Рубцовская наб., д.2/18, ауд.1006л.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью организации, просим выслать по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д.5, МГТУ им. Н.Э.Баумана, ученому секретарю совета Д212.141.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета имени Н.Э.Баумана.

Автореферат разослан «5» ноября 2011 г.

НТБ МГТУ им. Н.Э.Баумана



1988008

Маиков А.И. Комплекс матема

Ученый секретарь диссертационного
совета, кандидат технических наук,
доцент

Аттетков А.В

00

00

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. С развитием вычислительной техники стало возможным решение многих прикладных задач механики в области волновых механизмов.

Волновые механизмы основаны на принципе передачи и преобразования движения путем волнового деформирования одного из звеньев – гибкого колеса. Однако у волновых механизмов с эвольвентной формой зубьев существует ряд недостатков. Их к.п.д. составляет 80-90% в зависимости от величины передаточного отношения. В них возникают шумовые эффекты (скрип, скрежет и др.), а это недопустимо во многих областях техники. Эти недостатки связаны с тем, что между сопряженными зубьями колес в точках их контакта происходят проскальзывания, что приводит к их «стачиванию» и порождает неравномерность загрузки самого зуба.

Самыми эффективными являются передачи с зубьями в форме циклоиды. Потери энергии здесь минимальны. К.п.д. таких передач достигает 98%, так как в сопряженных парах зубьев с циклоидальной формой теоретически отсутствует их взаимное проскальзывание, а потому такие передачи практически бесшумны, в них не возникают различные побочные эффекты. Однако эти качества достигаются лишь в том случае, когда циклоиды сопряженных профилей зубьев колес изготовлены очень точно, что требует специального высокоточного оборудования.

При неточном изготовлении циклоидальных форм зубьев обязательно появятся либо натяги (что ведет к заклиниванию зацепления), либо зазоры (что ведет к нарушению условия многопарности их зацепления). С этой точки зрения представляется целесообразным использовать циклоидальную форму зубьев в волновых механизмах, где есть высокодеформативный элемент, который будет компенсировать эти недочеты. Более того, как показали теоретические исследования, циклоидальную форму зуба в волновой передаче можно заменить круговой. Это обусловлено тем, что как неточности, связанные с отклонением приближенной круговой формы зуба от его точной циклоидальной формы, так и технологические погрешности изготовления зубьев, будут «отфильтровываться» весьма податливым гибким колесом передачи. Исследования показывают, что к.п.д. таких волновых механизмов составляет примерно 95-97%. Такая замена целесообразна лишь при сохранении одинаковых условий контакта зубьев колес по их длине. Это

условие практически невозможно обеспечить у волновых механизмов с чащевидной формой гибкого колеса, зубья которых испытывают пространственное деформирование, а поэтому имеют различные условия контакта по их длине.

Для сохранения одинаковых условий контакта зубьев колес по их длине можно использовать гибкие колеса в виде кольцевых пружинных пакетов, что обеспечит равномерность распределения усилий контакта по длине зубьев. Кроме того, использование гибких колес в виде кольцевых пакетов существенно увеличит их необходимую радиальную податливость за счет совместного деформирования всех соосных колец пакета.

Колеса таких волновых механизмов гораздо проще изготавливать, так как круговую форму зуба нарезать на цилиндрической поверхности кругового кольца-венца значительно проще, чем циклоидальную форму. Следует также отметить еще одно существенное достоинство замены эвольвентных профилей зубьев круговыми. В этом случае в гибких зубчатых венцах в местах сопряжения впадин с эвольвентными профилями зубьев убираются все концентраторы напряжений. Это обстоятельство заведомо существенно увеличивает усталостную прочность гибких венцов с круговыми зубьями, а следовательно и их ресурс.

Для успешного решения задачи создания новых волновых механизмов необходима разработка соответствующих математических моделей и комплекса программ для расчета их основных характеристик. Разработанные математические модели и комплекс программ позволят проводить вычислительный эксперимент для различных видов волновых механизмов, осуществлять подбор всех необходимых параметров до этапа изготовления экспериментального образца.

Вышеизложенным определяется актуальность работы – создание комплекса математических моделей, описывающего волновые механизмы с круговой формой зубьев и упругими звеньями в виде кольцевых пружинных пакетов.

Цель и задачи исследования. Целью данной работы является разработка математических моделей и комплекса программ расчета волновых механизмов с круговой формой зубьев и упругими звеньями в виде кольцевых пружинных пакетов.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих основных задач:

1. Разработка алгоритма построения согласованной геометрии зацепления зубьев гибкого и жесткого колес с заменой эвольвентных форм зубьев круговыми формами, приближенными с высокой степенью точности к циклоидам.

2. Построение математических моделей, численных методов и программ расчета динамики нагружения волновых механизмов с круговой формой зубьев и упругими звеньями в виде кольцевых пружинных пакетов.

Методы исследования, используемые для достижения поставленной цели, основаны на методах численного анализа разработанных математических моделей: метод конечных разностей с прогонкой для 7-ми диагональных матриц и размытием δ -функции; метод конечных элементов с итерационным учетом сил инерции; метод Гира; а также на других методах строительной механики.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обусловлена корректной постановкой задач исследования, всесторонним тестированием алгоритмов и программного комплекса в сериях вычислительных экспериментов, сравнительным анализом результатов численных расчетов, полученных разными методами, использованием расчетных результатов при проектировании и изготовлении работоспособного макетного образца волнового шагового двигателя.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Разработана математическая модель волновых механизмов с круговой формой зубьев и упругими звеньями в виде кольцевых пружинных пакетов:

- создан итерационный алгоритм построения согласованной геометрии зацепления зубьев гибкого и жесткого колес с круговой формой зубьев с заменой эвольвентной формы зубьев круговой формой, приближенной с заданной точностью к циклоиде;

- построена численная модель и программа расчета матрицы податливости гибкого колеса в виде пружинного пакета методом конечных элементов (МКЭ) на основе кругового стержня и методом конечных разностей (МКР). Для МКР создан новый алгоритм прогонки для 7-ми диагональной матрицы.

2. Построен итерационный алгоритм расчета величин зазоров и сил одностороннего взаимодействия между круговыми зубьями при их сборке и нагружении полезной нагрузкой.

3. Построена иерархия математических моделей и пакет программ

позволяющие моделировать и проектировать волновые механизмы до этапа их изготовления.

Практическая значимость диссертационной работы заключается в том, что содержащиеся в нем положения и выводы могут быть использованы:

- для моделирования и подбора основных параметров волновых передач с пружинным пакетом и без него, обеспечивающих их бесшумность, высокую кинематическую точность, высокий КПД, снижение уровня максимальных напряжений в гибких колесах, что позволит их изготавливать из более дешевых материалов;

- при разработке новых и модернизации существующих волновых передач и приводов на их основе;

- аспирантами, инженерно-техническими работниками, занимающимися вопросами математического моделирования динамики систем.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Математические модели, численные методы, программный комплекс и результаты расчетов волновых механизмов с круговой формой зубьев и упругими звеньями в виде кольцевых пружинных пакетов.

2. Созданный на основе расчетов и моделирования совместно с Фоминой Т.А. работоспособный натурный макетный образец волнового шагового двигателя.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Международной научной студенческой конференции «Научный потенциал студенчества – будущему России» (Ставрополь, 2007), Всероссийской научно-технической конференции «VII Гагаринские чтения» (Сергиев Посад, 2006), научных семинарах по машиноведению Владимирского государственного университета (Владимир, 2009), теоретической механики и теории механизмов, прикладной математики и информатики, общей и прикладной математики Московского государственного индустриального университета (Москва, 2007-2010).

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 6 печатных работах, в том числе в 3-х статьях из Перечня рецензируемых ведущих научных журналов и изданий [1, 2, 5] и 2-х тезисах докладов и трудах конференций [3, 4]. Получено одно свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [6].

Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе

научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю; заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа изложена на 118 страницах, содержит 57 иллюстрации. Библиография включает 101 наименование.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи, научная новизна, практическая значимость работы, основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе диссертации приведен обзор работ, относящихся к теме диссертации.

Во второй главе приведен алгоритм замены эвольвентной формы зубьев круговой формой, приближенной с заданной точностью к циклоиде; создан итерационный алгоритм построения согласованной геометрии колес волновых механизмов с круговой формой зубьев; проведен подбор параметров колес для построения согласованной геометрии; оценены потери энергии, связанные с проскальзыванием зубьев колес.

На рис.1 изображена схема построения профиля зубчатого колеса с круговой формой зуба. Анализируемый профиль колеса образуется наложением на кольцо радиуса R малых круговых профилей радиусов r_1 и r_2 внешнего и внутреннего частей зуба соответственно. Их центры лежат на окружностях, отстоящих от главной окружности радиуса R на расстояниях h_1 и h_2 .

На каждой итерации строится профиль колеса с круговой формой зубьев с заданными параметрами. После этого вычисляется расстояние между точками O и O_2 (рис.2). Если оно меньше заданной точности ϵ , то расчет завершается. В противном случае радиус R уменьшается на величину dR и повторным расчетом строится новый профиль колеса, и получается новое расстояние между точками O' и O_2' (рис.2).

При определенных значениях радиусов колец и параметров r_1 , r_2 , h_1 , h_2 взаимное движение зубьев колес будет проходить без перекрытия их контуров (то есть без «наползания»).

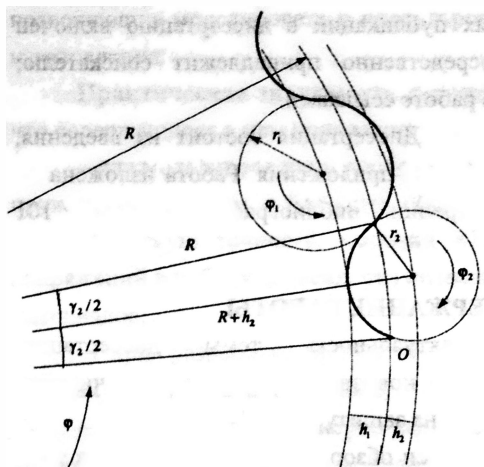


Рис. 1. Схема построения колеса с круговой формой зуба

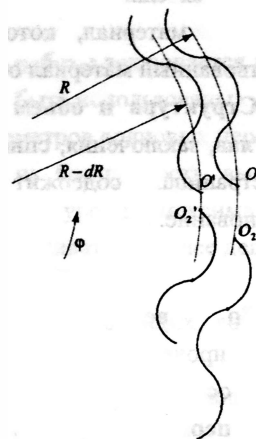


Рис. 2. Условие перехода к следующему шагу алгоритма

Такие значения параметров r_1 , r_2 , h_1 , h_2 выбираются направленным подбором на основе многократных расчетов согласованных форм зубьев по построенному алгоритму.

Третья глава посвящена постановке и решению задачи деформирования кольцевого пружинного пакета. Решения получены методами конечных элементов (МКЭ) и конечных разностей (МКР). Пружинный пакет представлен упругой системой плоско-деформируемых круговых колец, каждое из которых рассчитывается отдельно, а затем эти решения «стыкуются» исходя из условий сопряжения колец через жесткие переключки. Проведено сравнение решений полученными данными двумя методами с аналитическим решением для одного кольца. Проведен сравнительный анализ точности и длительности расчетов двух рассматриваемых методов. Выбран метод конечных элементов как наиболее эффективный для решения задач деформирования кольцевого пружинного пакета.

Уравнение равновесия каждого кругового кольца с нерастяжимой средней линией в перемещениях принималось в виде:

$$\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + \frac{R^4}{EJ} \left(q_\varphi + \frac{dq_n}{d\varphi} \right) + \frac{R^3}{EJ} \left(\frac{d^2 m}{d\varphi^2} + m \right) = 0. \quad (1)$$

где $v(\varphi)$ – касательные перемещения в кольце, R – радиус его средней линии, EJ – его изгибная жесткость, а q_φ , q_n – внешние погонные окружная и

радиальная нагрузки на кольцо, m – внешний изгибающий момент.

Уравнение (1) для каждого кольца дополняется следующими граничными условиями:

- 1) условие замкнутости кольца: $v_N = v_1$, $w_N = w_1$, $\theta_N = \theta_1$;
- 2) условие заделки точки кольца: $v_i = 0$, $w_i = 0$, $\theta_i = 0$;
- 3) условие стыковки колец в перемычках: $\theta_1 = \theta_2$, $w_1 = w_2$, $v_1 + L\theta_1 = v_2$.

Перемычки принимаются нерастяжимыми, несжимаемыми и неизгибаемыми.

Метод конечных элементов. Рассматриваются кольцевые конечные элементы со следующими функциями формы:

$$N_k = N_k(\varphi, r, C_k) = c_{k1} + c_{k2}\varphi + (c_{k3} + c_{k4}\varphi)\cos\varphi + (c_{k5} + c_{k6}\varphi)\sin\varphi, \quad k = \overline{1,6}.$$

Наборы констант c_{ij} для функций форм находятся из граничных условий для элемента:

$$v(\varphi_i) = v_i, \quad -\frac{dv}{d\varphi}(\varphi_i) = w(\varphi_i) = w_i, \quad -\frac{1}{R}\left(\frac{d^2v}{d\varphi^2}(\varphi_i) + v(\varphi_i)\right) = \theta(\varphi_i) = \theta_i,$$

$$v(\varphi_j) = v_j, \quad -\frac{dv}{d\varphi}(\varphi_j) = w(\varphi_j) = w_j, \quad -\frac{1}{R}\left(\frac{d^2v}{d\varphi^2}(\varphi_j) + v(\varphi_j)\right) = \theta(\varphi_j) = \theta_j.$$

С учетом нерастяжимости средней линии строится матрица жесткости $[k_{el}]$ отдельного элемента:

$$[k_{el}] = R \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [B]^T [D] [B] d\varphi,$$

где $[B] = \left(\frac{1}{R^2} (N_1''' + N_1), \dots, \frac{1}{R^2} (N_6''' + N_6) \right)$ – матрица, связывающая деформации и перемещения, $[D] = EJ$ – матрица упругости, φ_1, φ_2 – радиальные координаты узлов рассматриваемого элемента. Таким образом, для отдельного элемента матрица жесткости имеет вид:

$$[k_{el}]_{ij} = \frac{EJ}{R^3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ (N_i''' + N_i)(N_j''' + N_j) \right\} d\varphi, \quad i = \overline{1,6}, \quad j = \overline{1,6}.$$

Из матриц жесткости отдельных элементов формируется матрица жесткости для каждого кольца $[k_i]$, $i = \overline{1, n}$, где n – количество колец в пружинном пакете. Далее матрицы жесткости колец соединяются в одну глобальную матрицу жесткости $[K]$ с помощью стыковочных условий для перемещений колец в зоне перемычек. Узловые перемещения находятся из

решения системы $\{F\} = [K]\{\Delta\}$, где $\{F\}$ – столбец внешних сил, $\{\Delta\}$ – столбец узловых перемещений. Далее определяется функция касательных перемещений $v(\varphi)$, через которую можно получить все остальные неизвестные – $w(\varphi)$, $\theta(\varphi)$, $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$, $M(\varphi)$, а затем и напряжения. Таким образом, строится решение для всего пружинного пакета.

Метод конечных разностей. В методе конечных разностей численное решение дифференциального уравнения (1) осуществлялось на 7-точечном шаблоне (рис.3) с использованием разработанной процедуры прогонки для 7-ми диагональной матрицы.

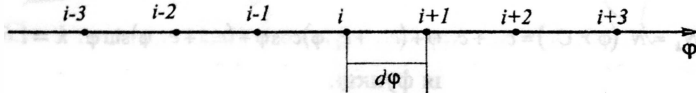


Рис. 3. Семиточечный шаблон

Дискретный аналог для i -ой точки (рис.3) представляется в виде:

$$a_i \cdot v_{i-3} + b_i \cdot v_{i-2} + c_i \cdot v_{i-1} - d_i \cdot v_i + e_i \cdot v_{i+1} + f_i \cdot v_{i+2} + g_i \cdot v_{i+3} + h_i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i$ – параметры, получаемые в результате дискретизации уравнения (1) по конечно-разностной схеме, h_i – параметр, отвечающий за нагружение кольца, n – количество узловых точек. При составлении дискретного аналога для всех точек кольца, получается семидиагональная матрица $[m]$, состоящая из коэффициентов $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, i = \overline{1, n}$. Решение системы уравнений $[m]\{v\} + \{h\} = 0$ ищется в виде

$$v_i = A_i v_{i+1} + B_i v_{i+2} + C_i v_{i+3} + D_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где A, B, C, D – параметры. После подстановки (3) в (2) и исключения $v_{i-3}, v_{i-2}, v_{i-1}$ значения параметров получаются следующие:

$$A_i = \frac{-(a_i A_{i-3} A_{i-2} B_{i-1} + a_i A_{i-3} C_{i-2} + a_i B_{i-3} B_{i-1} + b_i A_{i-2} B_{i-1} + b_i C_{i-2} + c_i B_{i-1} + e_i)}{(a_i A_{i-3} A_{i-2} A_{i-1} + a_i A_{i-3} B_{i-2} + a_i B_{i-3} A_{i-1} + a_i C_{i-3} + b_i A_{i-2} A_{i-1} + b_i B_{i-2} + c_i A_{i-1} - d_i)},$$

$$B_i = \frac{-(a_i A_{i-3} A_{i-2} C_{i-1} + a_i B_{i-3} C_{i-1} + b_i A_{i-2} C_{i-1} + c_i C_{i-1} + f_i)}{(a_i A_{i-3} A_{i-2} A_{i-1} + a_i A_{i-3} B_{i-2} + a_i B_{i-3} A_{i-1} + a_i C_{i-3} + b_i A_{i-2} A_{i-1} + b_i B_{i-2} + c_i A_{i-1} - d_i)},$$

$$C_i = \frac{-g_i}{(a_i A_{i-3} A_{i-2} A_{i-1} + a_i A_{i-3} B_{i-2} + a_i B_{i-3} A_{i-1} + a_i C_{i-3} + b_i A_{i-2} A_{i-1} + b_i B_{i-2} + c_i A_{i-1} - d_i)},$$

$$D_i = \frac{(h_i - (a_i A_{i-3} A_{i-2} D_{i-1} + a_i A_{i-3} D_{i-2} + a_i B_{i-3} D_{i-1} + a_i D_{i-3} + b_i A_{i-2} D_{i-1} + b_i D_{i-2} + c_i D_{i-1}))}{(a_i A_{i-3} A_{i-2} A_{i-1} + a_i A_{i-3} B_{i-2} + a_i B_{i-3} A_{i-1} + a_i C_{i-3} + b_i A_{i-2} A_{i-1} + b_i B_{i-2} + c_i A_{i-1} - d_i)}.$$

С учетом граничных условий рассчитываются значения A_i, B_i, C_i, D_i по

полученным формулам, потом по (3) получаются значения перемещений v_i в каждой узловой точке.

Заметим, что МКР является более трудоемким и требует значительно больше машинного времени (более, чем в 7 раз). Это особенно важно при решении задач определения сил одностороннего взаимодействия зубьев колес с поиском границ зон контактов итерационными методами строительной механики при учете сил инерции. Поэтому МКЭ выбран как наиболее эффективный.

Построенные на базе МКЭ модель и пакет программ расчета позволяют моделировать процесс деформирования пружинного пакета из соосных круговых колец, соединенных жесткими перемиками, с целью проектирования волновых механизмов с уменьшенными осевыми габаритами, высокой кинематической точностью, более высоким к.п.д. и запасом прочности и из менее дешевых материалов.

В четвертой главе построена матрица податливости пружинного пакета, рассчитаны силы, обеспечивающие согласованное волновое зацепление для различных видов зацепления (одноволновое, двухволновое и т.д.), выбраны параметры для изготовления экспериментального макета и построена динамическая модель работы волновых механизмов.

Для обеспечения согласованного волнового зацепления необходимо подобрать такую систему сил, деформирующих пакет, чтобы радиальные перемещения деформированного зубчатого венца имели форму, близкую к косинусу или эллипсу. То есть система искомых узловых сил должна обеспечивать нужную форму деформирования гибкому зубчатому венцу. Решение такой задачи строится следующим образом. Используется математическая модель пружинного пакета на базе метода конечных элементов. Задаются необходимые перемещения для набора точек гибкого зубчатого венца $\{\Delta\}$. Далее по заданным перемещениям ищутся силы по следующему алгоритму:

1) для столбца заданных перемещений точек наружного кольца пакета составляется матрица податливости $[\delta]$, элементами которой δ_{ij} являются перемещения j -ой точки венца от действия в i -ой точке единичной силы;

2) решается система уравнений $[\delta]\{Q\} = \{\Delta\}$, где $\{Q\}$ – неизвестные искомые силы, которые обеспечивают заданные перемещения гибкому венцу в узловых точках.

Для волнового зацепления с передаточным отношением 33 многократными расчетами выполнен подбор параметров для изготовления экспериментального образца волнового шагового двигателя. В итоге были выбраны следующие значения параметров: двухволновое зацепление; передаточное отношение равно 33; количество зубьев внутреннего колеса равно 64, внешнего – 66; пружинный пакет состоит из двух колец, между которыми две регулярные перемычки, а внутреннее кольцо соединено с валом двумя регулярными заделками; радиусы центральных линий колец равны соответственно 100 мм и 92 мм; толщины колец равны 1,5 мм и 1,2 мм соответственно.

Зависимости радиальных перемещений от угла для этой волновой передачи представлены на рис.4.

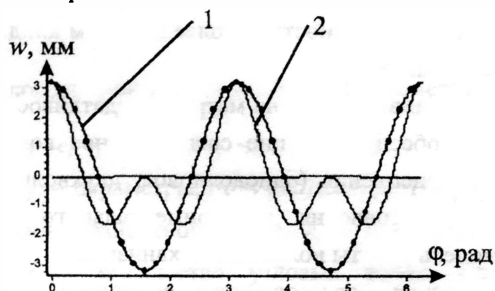


Рис. 4. Зависимости радиальных перемещений от угла для выбранной передачи: 1 – для внешнего кольца, 2 – для внутреннего

Динамический расчет. Силы инерции конечного элемента представляются в виде: радиальная сила инерции: $\Phi_w = -m_{el}a_i^w$, $i = \overline{1, n}$; касательная сила инерции: $\Phi_v = -m_{el}a_i^v$, $i = \overline{1, n}$; сила инерции от поворота сечений на угол θ : $\Phi_\theta = -Ja_i^\theta$, $i = \overline{1, n}$, где a_i^w , a_i^v , a_i^θ – соответствующие силам инерции ускорения, m_{el} – масса элемента, J – его момент инерции, n – количество элементов. Из-за малости Φ_θ по сравнению с Φ_w и Φ_v они не учитывались.

Учет сил инерции осуществлен по следующему алгоритму:

ШАГ 1. Расчет форм колец пакета для одного полного оборота волны деформирования без учета сил инерции. При этом волна деформирования пройдет 2π радиан за время $n\Delta t$, где Δt – время прохождения волны от одной

узловой точки к другой. То есть значение угловой частоты вращения волны деформирования ω равно:

$$\omega = \frac{2\pi}{n\Delta t}.$$

Вычисление значений функций перемещений (w_i, v_i) и ускорений (a_i^w, a_i^v) первого приближения по конечно-разностной схеме для каждой узловой точки в каждый момент времени.

ШАГ 2. Для каждой узловой точки добавляются две внешние силы Φ_w и Φ_v . Вычисление новых значений функций перемещений (w_i, v_i) и ускорений (a_i^w, a_i^v) узловых точек от времени.

Шаг 2 повторяется до тех пор, пока абсолютное суммарное изменение ускорений не окажется меньше заданной точности.

На рис.5 представлены зависимости радиальных и касательных перемещений от угловой координаты для различных частот вращения ω в случае, когда формы задаются двум кольцам.

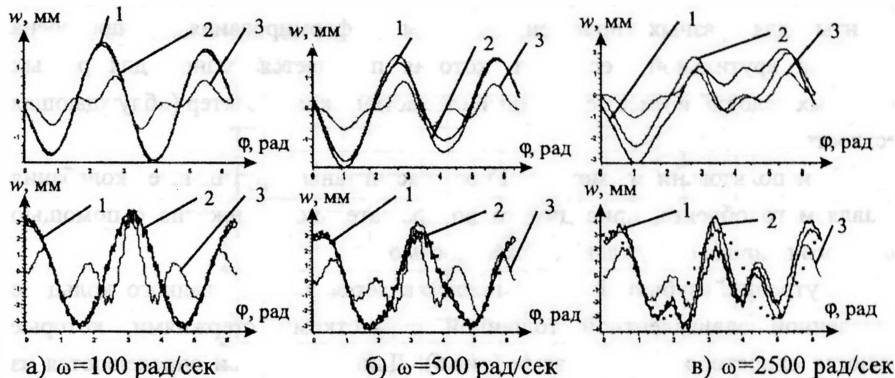


Рис. 5. Зависимости радиальных и касательных перемещений от угла при различной угловой скорости вращения: 1 – для внешнего кольца, 2 – для второго, 3 – для внутреннего

Результаты расчетов показывают, что формы сохраняются до $\omega \sim 500 \text{ рад/с}$. При этом с ростом ω происходит сглаживание перемещений внутренних колец пружинного пакета и уменьшение их максимальных значений. Однако, с дальнейшим ростом ω ($\omega > 1000 \text{ рад/с}$) решение начинает «разваливаться» (см. рис.5,в). Это связано с тем, что значение частоты вращения волны деформирования ω подходит к значению собственных частот

колебания пружинного пакета. В этом случае в расчет нужно искусственно вводить силы вязкого трения.

Так как натуральный эксперимент является весьма дорогим, то построенная модель существенно облегчает процедуру проектирования как пружинного пакета, так и волнового шагового двигателя.

В пятой главе проведен расчет сил односторонне контактирующих зубьев волновой передачи с круговой формой зубьев. Принята дискретная схема контакта элемента, учтен односторонний характер связей. Решение находится при помощи итерационного метода, в котором циклически выполняются три этапа:

- 1) определение контактных сил из решения системы уравнений для заданной области удерживающих связей;
- 2) определение зазоров между контактирующими звеньями;
- 3) коррекция (добавление или уменьшение числа связей) системы удерживающих связей в соответствии с заданными ограничениями.

По вычисленным значениям сил контакта зубьев рассчитаны крутильные моменты для разных положений волны деформирования и построена диаграмма крутильной жесткости, которая получается разной для разных начальных условий и имеет случайный стохастический характер («блуждающая жесткость»).

С использованием метода Гира рассчитаны крутильные колебания управляемого объекта, приводимого во вращательное движение с помощью волнового привода с блуждающей жесткостью.

Внутренний зубчатый венец представляется в виде гладкого кольца с приведенной эквивалентной толщиной с жесткими стержнями, которые являются односторонними связями (рис.6). Длины стержней определяются из геометрии зацепления зубьев колес, построенной в первой главе, так чтобы зазоры между стержнями и зубьями жесткого колеса соответствовали реальным зазорам между зубьями гибкого и жесткого колес.

Условия одностороннего контакта в односторонних связях выглядят следующим образом: $\Delta n_i = 0$, $Q_i > 0$ – контакт нагружен; $\Delta n_i = 0$, $Q_i = 0$ – состояние перехода; $\Delta n_i > 0$, $Q_i = 0$ – контакт разгружен, где Δn – функция зазоров между точками внутреннего и внешнего зубчатого венцов; Q – реакции, возникающие в результате контакта зубьев.

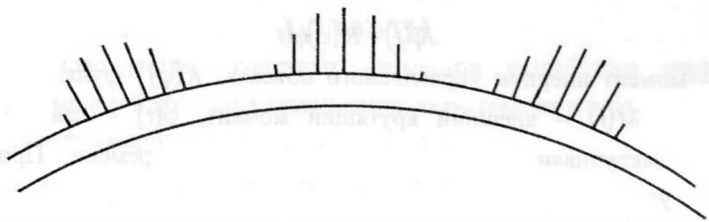


Рис. 6. Замена внутреннего зубчатого венца кольцом со стержнями

Вычисление сил односторонне-контактирующих зубьев осуществлено с помощью итерационного метода строительной механики и расчетной модели волнового зацепления, построенной в четвертой главе.

На рис.7 представлены расчетные диаграммы крутильной жесткости передачи, полученные при прохождении центральной оси деформирования в начальном положении через перемычку (кривая 1), равноудалено от перемычек (кривая 2) и через другие сечения пружинного пакета (кривые, расположенные между кривыми 1 и 2). Поскольку в исходном состоянии взаимное положение зубьев колес может быть произвольным, то крутильная жесткость в каждый момент времени будет находится между кривыми 1 и 2.

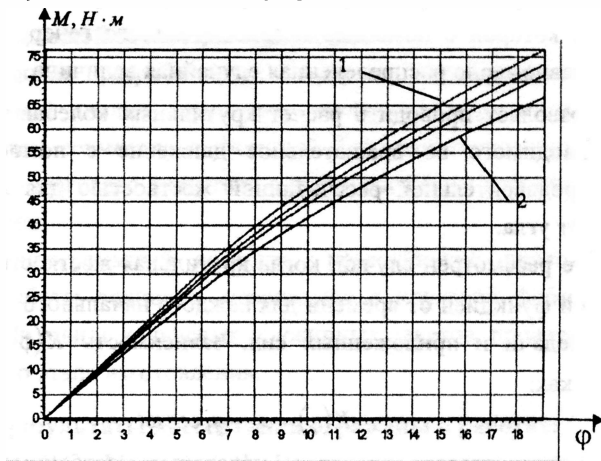


Рис. 7. Диаграмма крутильной жесткости

Следует отметить, что волновые передачи представляют собой нелинейно-упругие системы со случайной стохастической жесткостью. Это существенно усложняет задачу теоретического исследования крутильных колебаний управляемого объекта на выходном валу передачи.

Основное уравнение, описывающее крутильные колебания, имеет вид:

$$J\ddot{\varphi}(t) + K(\varphi)\varphi(t) = M(t), \quad (4)$$

где J – момент инерции управляемого объекта, $K(\varphi)$ – функция крутильной жесткости, $M(t)$ – внешний крутящий момент, $\varphi(t)$ – зависимость угла упругого закручивания управляемого объекта от времени. При решении данного уравнения предполагается, что случайная функция крутильной жесткости равномерно распределена между кривыми 1 и 2. Такое предположение допустимо, поскольку в начальный момент времени работы волнового привода центральная ось деформирования пружинного пакета может находиться в любом положении с равной вероятностью. Таким образом, функция крутильной жесткости с равной вероятностью может принимать любое значение между функциями 1 и 2 и определяется как

$$K(\varphi) = \frac{K_1(\varphi) + K_2(\varphi)}{2} + \frac{K_1(\varphi) - K_2(\varphi)}{2} f, \quad (5)$$

где $K_1(\varphi)$, $K_2(\varphi)$ – функции крутильной жесткости, соответствующие кривым 1 и 2 соответственно, f – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-1; 1]$. Численное решение уравнения (4) с учетом (5) проведено методом Гира с автоматическим выбором шага, реализованным в виде программы, в которой с помощью псевдослучайного генератора чисел была реализована равномерно распределенная случайная величина f . Разработанная программа позволяет проводить расчет крутильных колебаний управляемого объекта, приводимого во вращательное движение с помощью волнового привода, с предварительной рассчитанной жесткостью для любого вида ее зависимости от угла.

В работе рассмотрен случай, когда крутильная жесткость $K(\varphi)$ является периодической функцией от времени для каждого начального положения колес волновой передачи и приложенных сил. Зависимость $K(\varphi)$ в этом случае определяется как:

$$K(\varphi) = a_1 - q_1 \cos \omega t,$$

где ω – круговая частота, a_1 , q_1 – некоторые постоянные, зависящие от начального положения, а уравнение (4) при $M(t) = 0$ преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{(a_1 - q_1 \cos \omega t)}{J} \varphi = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) является уравнением Матье. С помощью диаграммы Айнса-Стретта оценены области устойчивых и неустойчивых колебаний.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. На основе метода конечных элементов разработана иерархия математических моделей волновых механизмов, включающая в себя:

- модель деформирования изолированного кольца;
- модель деформирования пружинного пакета;
- модель волнового зацепления круговых зубьев гибкого колеса в виде пружинного пакета с круговыми зубьями жесткого колеса;
- динамическая модель работы волновых механизмов;
- модель силового взаимодействия контактирующих круговых зубьев колес;
- модель крутильных колебаний управляемого объекта, приводимого во вращательное движение с помощью волнового привода со случайной стохастической жесткостью.

2. Иерархия математических моделей позволила обосновать целесообразность замены эвольвентной формы зубьев круговой формой, приближенной с заданной точностью к циклоиде.

3. С помощью разработанной иерархии математических моделей проведен детальный анализ параметров волнового зацепления, на основе которых изготовлен совместно с Фоминой Т.А. работоспособный макетный образец волнового шагового двигателя с пневматическим восьмицилиндровым волнообразователем.

4. Создан программный комплекс, позволяющий проводить полное моделирование работы волновых механизмов с круговой формой зубьев и упругими звеньями в виде кольцевых пружинных пакетов, производить подбор всех параметров до этапа изготовления.

Основные результаты диссертации отражены в работах:

1. Клеников С.С., Майков А.И. Построение согласованной геометрии волновой передачи с круговой формой зубьев // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2009. №1. С.3-8.

2. Клеников С.С., Майков А.И. Разработка математической модели расчета пружинного пакета волнового редуктора методом конечных элементов (МКЭ) // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2008. № 11. С. 25-30.

3. Клеников С.С., Майков А.И. Разработка математической модели волновой передачи с круговой формой зубьев и упругими звеньями в виде кольцевых пружинных пакетов // Научный потенциал студенчества – будущему России: материалы Международной научной студенческой конференции. Ставрополь, 2007. Т.1. С.115-116.

4. Клеников С.С., Майков А.И. Разработка математической модели волнового редуктора с круговой формой зубьев и упругими звеньями в виде кольцевых пружинных пакетов // Тез. докл. VII межвузовской научно-практической конференции. М., 2006. С.327-335.

5. Майков А.И. Разработка математической модели расчета пружинного пакета волнового редуктора методом конечных разностей // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2011. №6. С.15-18.

6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2010616381. Программа расчета волновой передачи с круговой формой зубьев и упругими звеньями в виде кольцевых пружинных пакетов / А.И.Майков. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 24.09.2010.