

На правах рукописи

Сорокина Анастасия Германовна

**Разработка методов расчета геликоидально симметричных
оболочек**

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2026

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана).

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Гаврюшин Сергей Сергеевич

Официальные оппоненты: **Коровайцева Екатерина Анатольевна**,
доктор физико-математических наук, старший
научный сотрудник НИИ механики МГУ им.
М.В. Ломоносова

Красноруцкий Дмитрий Александрович,
кандидат технических наук, доцент, доцент
кафедры прочности летальных аппаратов
ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный
технический университет»

Ведущая организация: ФГБАУ ВО «Московский авиационный
институт» (национальный исследовательский
университет) (МАИ)

Защита состоится « 7 » 10 2026 г. в 15 часов на
заседании диссертационного совета 24.2.331.12 при МГТУ им. Н.Э. Баумана
по адресу: 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

Ваш отзыв на автореферат в 2-х экземплярах, заверенных печатью,
просим направлять по указанному адресу.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э.
Баумана и на сайте www.bmstu.ru.

Телефон для справок: +7(499)263-66-39

Автореферат разослан « » 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.Т.Н., доцент



М.В. Мурашов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Винтовые или геликоидально симметричные оболочки (ГСО) достаточно часто применяются в технике в качестве сильфонов, гофрированных труб, теплообменников, рубашек химических реакторов, упругих элементов, шнеков, строительных конструкций. В случае нагружения ГСО осевой силой, крутящим моментом, внутренним давлением, центробежными силами инерции при вращении вокруг оси, а также некоторыми другими видами нагрузок, геликоидальная симметрия (ГС) сохраняется и для деформированного состояния.

Множество приложений ГСО обусловлено их способностью преобразовывать одни виды нагрузок в другие (например, внутреннее давление в крутящий момент, крутящий момент в осевую силу и т.п.). Эта возможность используется в приборостроении и при конструировании некоторых исполнительных механизмов роботов.

Одной из еще не решенных (в точной постановке) задач является поведение винтовой пружины, свитой из тонкостенной трубки с некруговым сечением под давлением (винтовые манометрические трубки Бурдона). Очевидно, что такие конструкции могут найти множество приложений. Например, винтовая манометрическая трубка существенно чувствительней обычной за счет большей длины оси. Кроме того, исполнительный механизм, использующий винтовую трубку, обеспечит больший угол при преобразовании давления в угловое перемещение.

Специфической проблемой, связанной с ГСО, является сложность их расчета. Геликоидальная симметрия приводит к уравнениям не намного более простым, чем для оболочек общего вида, что в корне отличает ее от осевой симметрии. Вероятно, этим можно объяснить сравнительно малое количество публикаций по рассматриваемой теме, особенно в связи с анализом больших перемещений таких оболочек. Общим для оболочек с осевой и геликоидальной симметрией является одномерный характер уравнений, то есть и в том и другом случае вместо уравнений в частных производных могут быть получены обыкновенные дифференциальные уравнения. Однако в отличие от осевой симметрии геликоидальная симметрия в теории оболочек довольно мало изучена, особенно для геометрически нелинейных задач. Поэтому тема диссертации является актуальной.

Цель диссертационной работы заключается в разработке и верификации методов расчета винтовых оболочек с нагрузками, обеспечивающими сохранение геликоидальной симметрии.

Для реализации поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Разработаны и реализованы в аналитическом и численном виде компьютерные процедуры, автоматизирующие вычисление

геометрических величин, которые используются при расчете ГСО.

2. Предложена и реализована новая концепция «ортогонального контура», которая позволяет вместо косоугольных координат и связанной с ними тензорной символики использовать ортогональные гауссовы координаты и известные классические уравнения теории оболочек (вариант А.Л. Гольденвейзера);

3. На основе концепции ортогонального контура построена методика решения линейной краевой задачи для ГСО, закрепленных по одной или несколькими винтовыми линиям;

4. Получены новые уравнения для расчета геометрии ГСО открытого профиля (ленточных пружин) и упрощенный способ вычисления упругой характеристики таких оболочек.

5. Разработан и реализован универсальный конечный элемент ГСО, нечувствительный к выбору исходного контура ГСО, что автоматически распространяет его на косоугольные координатные сетки.

6. С помощью разработанной методики решены новые задачи, которые ранее были недоступны, в частности исследовано напряженно деформированное состояние винтовых манометрических трубок.

Методы исследования. В диссертации используются метод Рунге-Кутты для численного интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений, метод ортогонализации С.К. Годунова для решения линейных краевых задач, метод Ньютона-Раффсона для решения нелинейных уравнений равновесия, метод конечного элемента, реализованный в авторской компьютерной программе, и комплекс Femap, для выполнения верификационных расчетов.

Научная новизна:

1. Разработана концепция «ортогонального контура», которая не встречается в работах других авторов.

2. Получено, доказано и верифицировано новое соотношение для вычисления объема внутренней полости замкнутой винтовой оболочки.

3. Предложена новая система обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета винтовых оболочек, закрепленных по одной или несколькими винтовыми линиям.

4. На основе теории чистого изгиба разработана новая полуаналитическая методика расчета больших перемещений винтовых оболочек открытого профиля, которая не встречается в работах других авторов.

5. Разработан авторский геликоидальный конечный элемент для расчета винтовых оболочек с нагрузками, сохраняющими геликоидальную симметрию, который существенно сокращает вычислительные затраты.

Теоретическая значимость диссертации вытекает из научной новизны. Теория геликоидально симметричных оболочек пополнилась несколькими новыми методами, расчетными приемами и уравнениями:

- методом построения ортогонального контура;
- системой обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета винтовых оболочек при малых перемещениях;
- теорией чистого изгиба винтовых оболочек открытого профиля при больших перемещениях;
- геликоидальным конечным элементом.

Достоверность результатов подтверждается строгостью использованных математических методов, верификацией разработанных алгоритмов по результатам других авторов, экспериментальной верификацией и результатами моделирования с помощью МКЭ.

Практическая значимость диссертации:

1. Авторская методика расчета винтовых оболочек сокращает вычислительные затраты в сотни и тысячи раз по сравнению с традиционными методиками, так как учитывает одномерный характер задачи. Например, вместо миллионов двумерных конечных элементов удастся обойтись всего несколькими сотнями одномерных конечных элементов.

2. Разработанная в диссертации инженерная методика расчета напряженного состояния винтовых трубок, нагруженных внутренним давлением, может заменить традиционную методику, основанную на подборе коэффициентов из норм прочности.

Положения, выносимые на защиту:

- концепция ортогонального контура, которая позволяет полностью отказаться от косоугольных гауссовых координат;
- метод расчета малых перемещений винтовых оболочек, закрепленных по одной или нескольким винтовым линиям, основанный на адаптации классических уравнений теории оболочек к случаю геликоидальной симметрии;
- метод расчета больших перемещений винтовых оболочек открытого профиля при больших перемещениях, основанный на теории чистого изгиба;
- метод построения и практическое применение геликоидального конечного элемента.

Внедрение. В учебный процесс кафедры прикладной механики и в расчетную практику АО «Прочность» внедрены следующие результаты диссертации:

- а) конечный элемент для расчета винтовых оболочек, нагруженных

нагрузками, сохраняющими геликоидальную симметрию;

б) упрощенная процедура вычисления упругих характеристик винтовых оболочек с произвольной геометрией контура.

Использование результатов диссертации подтверждено соответствующими актами о внедрении.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и были одобрены на Международной научной конференции, посвященной 90-летию В. И. Феодосьева «Фундаментальные и прикладные проблемы механики» Москва, 2006; на V и VII Международных научных конференциях «Проблемы современных машин», Улан-Удэ 2012, 2018; на II Всероссийской научно-технической конференции, посвященной юбилеям основателей кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана профессоров С.Д. Пономарева, В.Л. Бидермана, К.К. Лихарева, Н.Н. Малинина, В.А. Светлицкого «Механика и математическое моделирование в технике», Москва, 2017; на IX Международном научном симпозиуме, посвященном 90-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова, Тверь, 2021; на XXV-XXXI Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А. Г. Горшкова, Кременки, 2019 - 2026; на межкафедральном научном семинаре, возглавляемом профессорами С.С. Гаврюшиным, В.С. Зарубиным и В.Н. Зиминым, Москва, 2025.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 24 научных работы, в том числе 6 работ в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК при Минобрнауки России, общим объемом 9,48 п. л./ 8,04 п.л.

Структура и объем диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, общих выводов и заключения и приложения. Общий объем диссертации составляет 180 страниц, 114 рисунков и 7 таблиц. Список литературы включает 103 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, приведена постановка задач и краткая аннотация содержания работы по разделам, дана оценка научной новизны и практической значимости полученных результатов и представлены методы исследования, применяемые в диссертации.

В **Главе 1** представлена классификация винтовых оболочек: ГСО открытого профиля, ГСО закрытого профиля и геликоидальные сильфоны. Перечислены отрасли техники, в которых применяются ГСО. Рассмотрены виды нагрузки, сохраняющие геликоидальную симметрию. Выполнен

обзор работ, посвященных математическому моделированию ГСО (Л.И. Соломон, Д.Ю. Панов, В.Г. Рекач, В.Л. Бидерман, В.Н. Шитиков, И.А. Биргер, А.Е. Белкин, Е.И. Михайловский, С.Я. Колтунов, D.W. Taylor, E. Reissner, W.N. Rösingh и др.), из которых особо выделены работы профессора Кривошапко С.Н. и его учеников. Указаны специфические проблемы, возникающие при расчете ГСО, главной из которых является использование косоугольной системы гауссовых координат (Рисунок 1, а) и связанная с этим необходимость представления уравнений ГСО в тензорном виде.

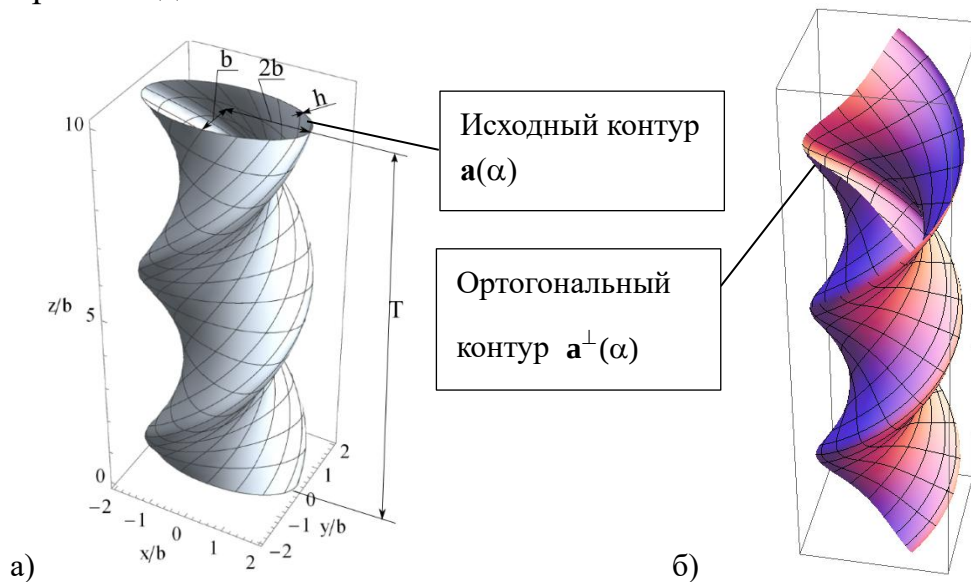


Рисунок 1. Исходная (а) и ортогональная (б) координатные сетки

Глава 2 полностью посвящена геометрии геликоидальной поверхности (ГП) с учетом специфических особенностей геликоидальной симметрии. Предложено задавать исходную срединную поверхность ГСО одним из двух взаимосвязанных способов, означающих винтовое движение контура:

$$\mathbf{r}(\alpha, \varphi) = \mathbf{k} \frac{T\varphi}{2\pi} + [\mathbf{L}(\varphi)]\mathbf{a}(\alpha); \quad \mathbf{r}(\alpha, s) = \mathbf{k}s + [\mathbf{L}(\omega s)]\mathbf{a}(\alpha), \quad (1)$$

где $\mathbf{k}$ – орт оси z (ось ГСО); α – контурная гауссова координата; $\mathbf{a}(\alpha)$ – контур; s – винтовая гауссова координата, отсчитываемая вдоль оси z ; T – период ГСО; $\omega = 2\pi/T$ – крутка; $[\mathbf{L}(\varphi)]$ – матрица поворота вокруг оси z на угол $\varphi = \omega s$.

С использованием обычных уравнений гауссовой теории поверхности получены выражения для параметров первой и второй квадратичных форм исходной и деформированной поверхностей, параметров Ламе, кривизны координатных линий и кручения срединной поверхности ГСО.

Наиболее существенным отличием данной диссертации от других работ, посвященных ГСО, является использование ортогонального контура – такого контура, который в каждой точке ортогонален винтовым линиям (Рисунок 1). Для построения ортогонального контура достаточно

вычислить квадратуру $s^\perp(\alpha)$ и подставить ее в (1) вместо s :

$$s^\perp(\alpha) = s^\perp_0 - \int_0^\alpha \frac{A \cos \chi}{B} d\alpha; \quad \mathbf{a}^\perp(\alpha) = \mathbf{r}(\alpha, s^\perp(\alpha)), \quad (2)$$

где A, B – параметры Ламе (масштабы); χ – угол между линиями α и s .

На Рисунке 1 одна и та же винтовая поверхность построена с использованием исходного эллиптического замкнутого контура и разомкнутого ортогонального контура. Ортогональный контур оказывается весьма удобным для расчета ГСО открытого профиля и для ГСО, закрепленных по одной или нескольким винтовым линиям, так как соотношения теории оболочек в подавляющем большинстве работ записаны в ортогональных гауссовых координатах. Построенный по соотношениям (2) ортогональный контур начинает играть роль исходного, поэтому о существовании исходного контура можно «забыть».

Для ГСО закрытого профиля ортогональный контур менее удобен, так как он получается разомкнутым. Тем не менее, производные по направлениям, перпендикулярным винтовым линиям (фактически по длине ортогонального контура), оказываются полезными и для замкнутых контуров.

Далее выводится и верифицируется формула для вычисления объема внутренней полости одного периода ГП:

$$V^+ = T \oint_\alpha \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \lambda + \frac{\omega^+}{3} \mathbf{k} \times \mathbf{a}^+ \right) \cdot \left(\mathbf{a}^+ \times \frac{d\mathbf{a}^+}{d\alpha} \right) d\alpha, \quad (3)$$

где индекс «+» помечает деформированное состояние; λ – кратность удлинения оси ГСО. Формула (3) также является новой, так как не встречается в известной литературе по ГСО.

Завершает Главу 2 два правила дифференцирования по длине η ортогонального контура и ξ – направлению, перпендикулярному исходному контуру:

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} = \frac{1}{\sin \chi} \left(\frac{\partial(\dots)}{A \partial \alpha} - \cos \chi \frac{\partial(\dots)}{B \partial s} \right); \quad \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} = \frac{1}{\sin \chi} \left(\frac{\partial(\dots)}{B \partial s} - \cos \chi \frac{\partial(\dots)}{A \partial \alpha} \right). \quad (4)$$

Формулы (4) применяются в тех случаях, когда линии η и ξ явно не построены, но нужно вычислить производные по указанным направлениям.

Разработанные в Главе 2 диссертации математические средства являются основой для расчета ГСО при малых и больших перемещениях.

В **Главе 3** рассмотрены малые перемещения ГСО, закрепленных по одной или нескольким винтовым линиям. Если указанные закрепления отсутствуют, то, как правило, перемещения автоматически становятся большими, что требует учета геометрической нелинейности, которая

рассматривается в следующих главах.

Предварительно строится ортогональный контур, поэтому все расчеты выполняются в ортогональной системе гауссовых координат ($\chi=\pi/2$), состоящей из винтовых линий и семейства ортогональных контуров.

Геликоидальная симметрия приводит к тому, что деформированное состояние ГСО не меняется вдоль винтовых линий, поэтому вместо частных производных применяются обыкновенные производные:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{du}{d\alpha} + K_1 w; \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{AB} \frac{dB}{d\alpha} + K_2 w; \quad \gamma_{12} = \frac{B}{A} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{v}{B} \right) - 2K_{12} w; \quad \vartheta_1 = K_1 u - K_{12} v - \frac{1}{A} \frac{dw}{d\alpha}; \\ \vartheta_2 &= -K_{12} u + K_2 v; \quad \vartheta_n = \frac{1}{2AB} \frac{d(vB)}{d\alpha}; \quad \mathfrak{a}_1 = \frac{d\vartheta_1}{Ad\alpha} - K_{12} \vartheta_n; \quad \mathfrak{a}_2 = \frac{\vartheta_1}{AB} \frac{dB}{d\alpha} + K_{12} \vartheta_n; \\ \mathfrak{a}_{12} &= \mathfrak{a}_{21} = \frac{d\vartheta_2}{Ad\alpha} - K_1 \left(\frac{v}{AB} \frac{dB}{d\alpha} + K_{12} w \right) + K_{12} \varepsilon_1,\end{aligned}\quad (5)$$

где u, v, w – перемещения; $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_n$ – повороты; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_{12}$ – деформации и компоненты приращения кривизны срединной ГП; K_1, K_2, K_{12} – кривизны координатных линий (не главные) и кручение.

С использованием (5) строится полный потенциал системы

$$\begin{aligned}\Pi &= T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (U_T + U_M + Q_1 \gamma_{13} - q_1 u - q_2 v - q_3 w) AB d\alpha + \Pi_b; \quad \gamma_{13} = \vartheta_1 + \frac{1}{A} \frac{dw}{d\alpha} - K_1 u + K_{12} v; \\ U_T &= \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + 2(1-\mu) \left(\frac{\gamma_{12}^2}{4} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right) \right]; \quad U_M = \frac{D}{2} \left[(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^2 + 2(1-\mu) (\mathfrak{a}_{12}^2 - \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) \right],\end{aligned}\quad (6)$$

где E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; h – толщина; D – цилиндрическая жесткость; γ_{13} – поперечный сдвиг; q_1, q_2, q_3 – распределенные нагрузки; Q_1 – множитель Лагранжа, имеющий смысл поперечной силы; Π_b – внеинтегральные слагаемые, учитывающие потенциал краевых нагрузок.

Условие минимума функционала (6) и последующие тождественные преобразования приводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений 8-го порядка

$$\frac{dy}{d\alpha} = [F]y + g; \quad g = (0, 0, 0, 0, -ABq_1, -ABq_2, -ABq_3, 0)^T, \quad (7)$$

где y – вектор состояния 8×1 ; $[F]$ – матрица коэффициентов системы 8×8 . Коэффициенты матрицы $[F]$ находились с использованием компьютерной аналитики, некоторые из них показаны ниже

$$F_{11} = -\mu \frac{B'}{B}; \quad F_{12} = 0; \quad F_{13} = -(K_1 + \mu K_2)A; \quad \dots \quad F_{87} = A; \quad F_{88} = \frac{(1+\mu)h^2 K_{12}^2 + 8\mu(3+h^2 K_2^2)}{(1+\mu)h^2 K_{12}^2 + 8(3+h^2 K_2^2)} \frac{B'}{B}. \quad (8)$$

где штрихом помечено дифференцирование по α . Ценность аналитической формы представления матрицы $[F]$ заключается в том, что ее вывод достаточно выполнить всего один раз. После этого остается лишь подставлять параметры конкретной ГСО в формулы (7) и (8).

В качестве примера на Рисунке 2 показана ГСО с контуром в виде полуокружности, лежащей в вертикальной плоскости. ГСО закреплена на

абсолютно жестком цилиндре и нагружена внутренним давлением p . Ортогональные контуры уже не являются плоскими, хотя и напоминают половинки эллипсов, они показаны на Рисунке 2,а жирными линиями.

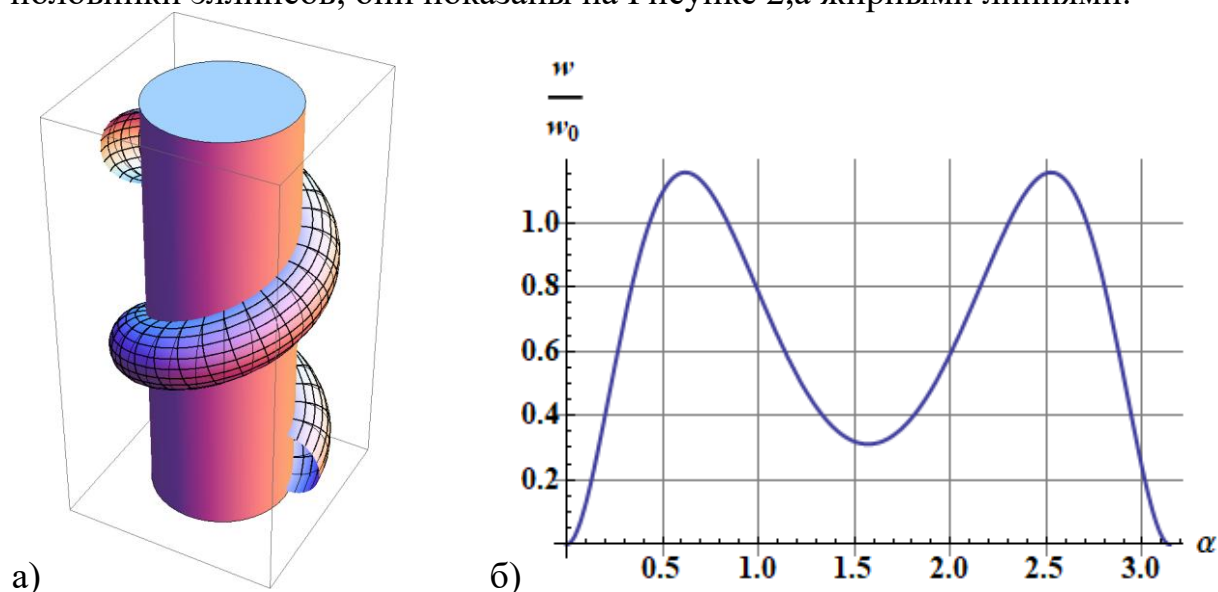


Рисунок 2. Общий вид ГСО (а); график безразмерных нормальных перемещений (б), где $w_0 = pb^2/Eh$; b – радиус полуокружности

Численное решение линейной краевой задачи методом С.К. Годунова для системы (8) с граничными условиями (9)

$$u(0)=v(0)=w(0)=u(\pi)=v(\pi)=w(\pi)=0; \vartheta_1(0)=\vartheta_1(\pi)=0 \quad (9)$$

дает полную информацию о напряженно деформированном состоянии ГСО. В частности, на Рисунке 2,б показан график безразмерных нормальных перемещений, который показывает, что деформированное состояние ГСО существенно отличается от безмоментного даже в средней части.

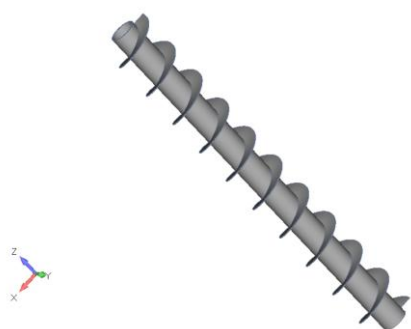


Рисунок 3. Общий вид КЭ - модели шнека (Femap)

Глава 3 завершается контролем, то есть, сопоставлением результатов, полученных в диссертации, с результатами решения тех же задач с помощью коммерческого комплекса Femap (Рисунок 3) и результатами других авторов. Контроль показывает, что авторская методика приводит к правильным результатам, при этом она существенно экономичнее Femap и аналогичных комплексов.

Сопоставление авторских результатов с результатами учеников школы профессора Кривошапко С.Н. также весьма удовлетворительно для достаточно пологих ГСО, которые обычно изучаются представителями данной школы.

Дополнительно проводилась экспериментальная верификация.

Натурный эксперимент был выполненным учеными из Хорватии и Черногории.

На Рисунке 4 показана экспериментальная установка, на которой исследовались напряженное состояние двухзаходного геликоида. Двухзаходность позволила отделить полость, нагруженную внутренним давлением, от полости, в которой располагаются тензодатчики и проводка.

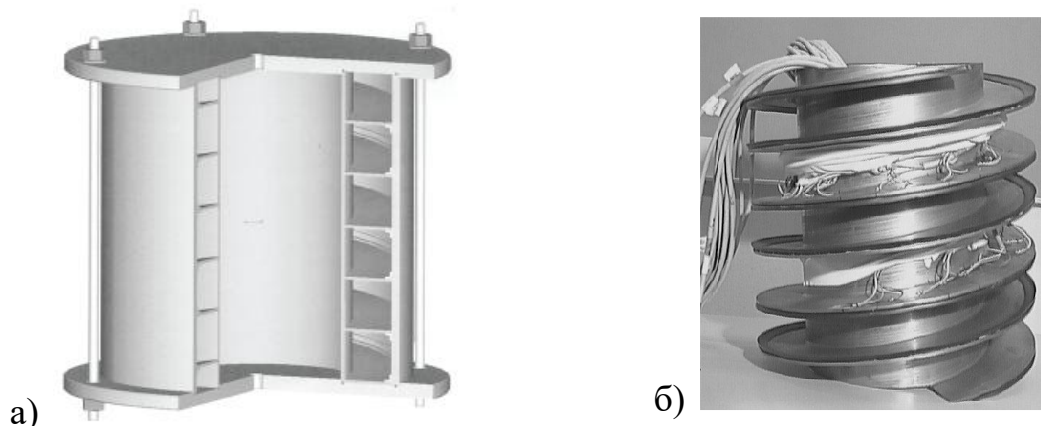


Рисунок 4. Схема экспериментальной установки (а) и геликоид с наклеенными тензодатчиками (б)

Экспериментальные график осевого перемещения в зависимости от координаты точки на луче представлен на Рисунке 5,а. График, рассчитанный по авторской методике из Главы 3, показан на Рисунке 5,б. Сопоставление показывает, что расхождение расчетных и экспериментальных графиков перемещений весьма незначительное, поэтому можно утверждать, что авторская методика прошла еще и экспериментальную верификацию. Расчетные и экспериментальные значения напряжений также отличаются незначительно.

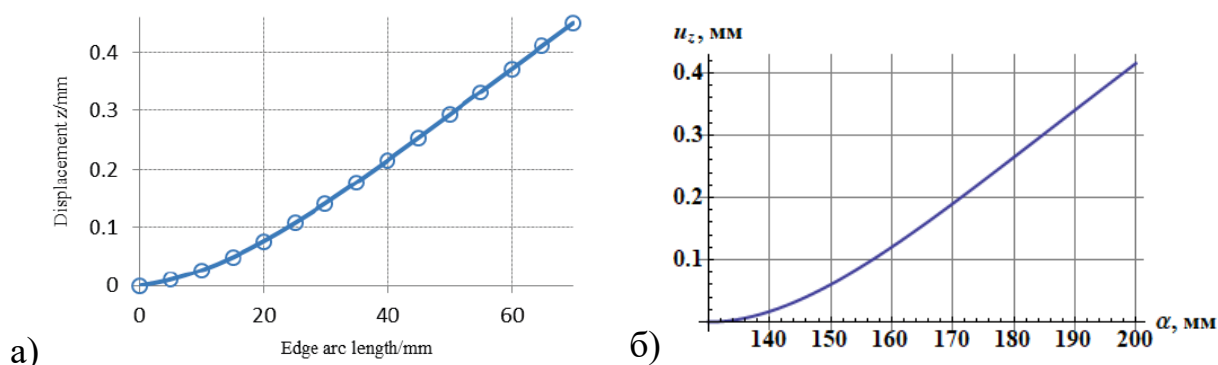


Рисунок 5. Осевые перемещения в эксперименте (а) и в расчете (б)

Глава 4 посвящена приближенному расчету ГСО открытого профиля. Такие оболочки весьма податливы, поэтому их применяют в качестве ленточных пружин или механизмов преобразования поступательного движение во вращательное (Рисунок 6). Предположение о чистом изгибании позволяет по известной исходной конфигурации ортогонального контура $\mathbf{a}(\alpha)$ найти деформированную конфигурацию $\mathbf{a}^+(\alpha)$ в зависимости

всего от двух параметров ω^+ и λ . Найденный деформированный контур также является ортогональным, что упрощает вычисление потенциальной энергии деформаций.

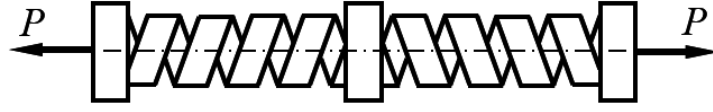


Рисунок 6. Ленточная пружина, как механизм преобразования поступательного перемещения во вращательное

Предварительно вычисляются вспомогательные функции $\rho(\alpha)$, $f_0(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $\theta(\alpha)$:

$$\rho = \frac{1}{\omega^+} \sqrt{(\omega a_x)^2 + (\omega a_y)^2 + 1 - \lambda^2}; \quad f_0(\alpha) = (a'_x)^2 + (a'_y)^2 + (a'_z)^2 - (\rho')^2; \quad (10)$$

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{\lambda} [\omega((a_y)'a_x - (a_x)'a_y) + (a_z)'];$$

$$f_2(\alpha) = \frac{\omega^+ \lambda f_1(\alpha)}{\lambda^2 + (\omega^+ \rho)^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega^+ \lambda f_1(\alpha)}{\lambda^2 + (\omega^+ \rho)^2} \right)^2 + \frac{\lambda^2 (f_0(\alpha) - f_1^2(\alpha))}{\rho^2 (\lambda^2 + (\omega^+ \rho)^2)}};$$

$$\theta = \int f_2(\alpha) d\alpha + C_1.$$

Далее вычисляются все три проекции деформированного контура

$$a_x^+ = \rho \cos \theta; \quad a_y^+ = \rho \sin \theta; \quad a_z^+ = \int \left(f_1(\alpha) - \frac{\omega^+ \rho^2}{\lambda} f_2(\alpha) \right) d\alpha + C_2. \quad (11)$$

Константы интегрирования C_1 , C_2 в формулах (10) и (11) играют роль жестких смещений (C_1 - жесткий поворот вокруг оси z , C_2 - жесткое смещение вдоль оси z) и могут быть опущены. Найденный по (11) деформированный контур также является ортогональным, что упрощает вычисление потенциальной энергии деформаций

$$U = \frac{T}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} D \left\{ (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^2 + 2(1 - \mu)(\mathfrak{a}_{12}^2 - \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) \right\} AB d\alpha; \quad (12)$$

$$\mathfrak{a}_1 = K_1^+ - K_1; \quad \mathfrak{a}_2 = K_2^+ - K_2; \quad \mathfrak{a}_{12} = -(K_{12}^+ - K_{12}).$$

Согласно принципу Лагранжа дифференцирование потенциальной энергии U по обобщенным перемещениям приводит к соответствующим обобщенным силам

$$\frac{\partial U}{T \partial \Delta \lambda} = P; \quad \frac{\partial U}{T \partial \Delta \omega} = M; \quad (\varepsilon = \Delta \lambda = \lambda - 1; \quad \Delta \omega = \omega^+ - \omega), \quad (13)$$

где P - осевая сила; M - крутящий момент.

Соотношения (13) можно использовать непосредственно для вычисления силы и момента, если заданы ω^+ и λ . Если же заданы сила и

момент, то (13) превращаются в систему нелинейных алгебраических уравнений для определения ω^+ и λ .

С помощью системы (13) были найдены конфигурации ленточной пружины при нагружении крутящим моментом и осевой силой (Рисунок 7,а). По той же методике была построена упругая характеристика (Рисунок 7,б) одного периода ленточной пружины, где b – ширина ленты.

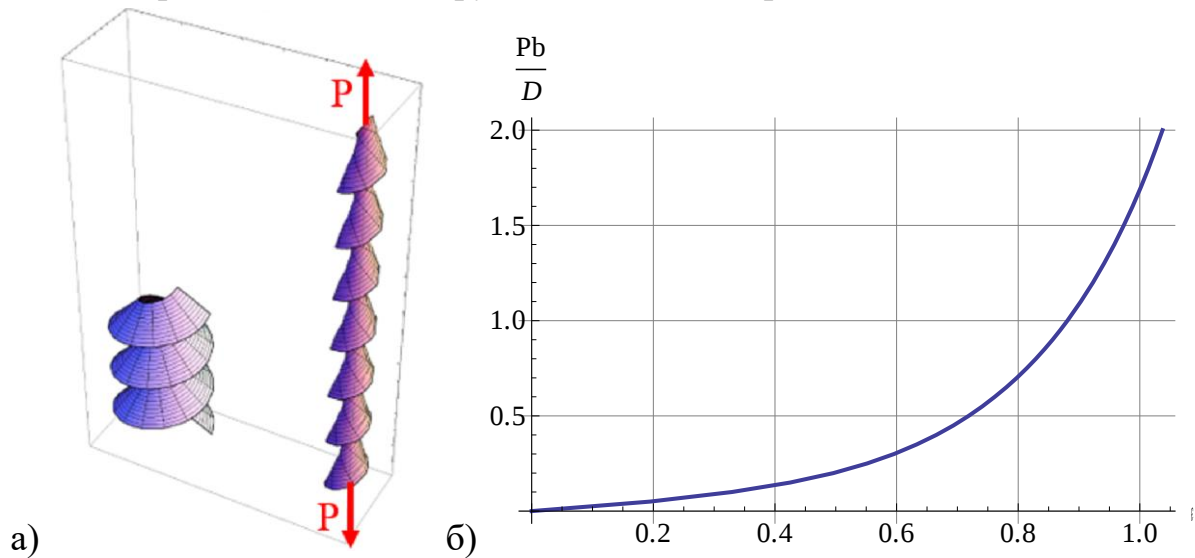
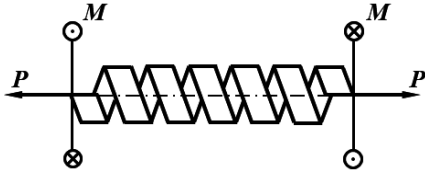


Рисунок 7. Конфигурация растянутой ленточной пружины в сопоставлении с исходным состоянием (а); упругая характеристика ленточной пружины (б).

Для дополнительного контроля по разработанной методике были вычислены податливости δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22} цилиндрической ленточной пружины и сопоставлены с аналогичными податливостями из работ В.Л. Бидермана и В.Н. Шитикова. Результат сопоставления представлен в Таблице 1 (R – радиус срединной поверхности).

Таблица 1.

	$\delta_{11} D / R^2$	$\delta_{12} D / R$	$\delta_{22} D$
Теория чистого изгиба	4,421	-0,7739	6,325
Методика В.Л. Бидермана	4,487	0,6603	6,577
Расхождение	1,5%	17%	3,8%

Отличие знаков перед сопоставляемыми числами (плюс или минус) в Таблице 1 объясняется иным выбором правила знака осевого поворота.

Сопоставление показывает достаточно хорошее совпадение податливостей, найденных по теории чистого изгиба и по методике В.Л. Бидермана. Хорошее совпадение численных и теоретических результатов говорит об полной достоверности всех предположений, использованных в Главе 4.

В **Главе 5** диссертации построен геликоидальный конечный элемент (ГКЭ), представляющий из себе узкую полоску ГСО (Рисунок 8).

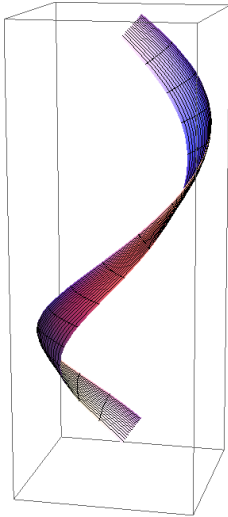


Рисунок 8. Общий вид ГКЭ ГСО

ГКЭ нечувствителен к выбору контура и, как следствие, применим в косоугольной системе координат. ГКЭ учитывает ГС и при этом одинаково применим как к открытым, так и замкнутым ГСО. В отличие от Главы 3 в общем случае отсутствуют закрепления по винтовым линиям, поэтому перемещения могут быть большими, что приводит к необходимости учитывать геометрическую нелинейность. Учет геометрической нелинейности в ГКЭ удалось выполнить только частично. Построение ГКЭ совпадает с традиционной методикой только выбором функций формы – все три проекции перемещения контура задаются узловыми перемещениями и первыми производными

перемещений в узлах – всего 12 степеней свободы:

$$\Delta \mathbf{a} = \{u_x, u_y, u_z\}^T;$$

$$u_x = N_1 u_{x1} + N_2 u'_{x1} + N_3 u_{x2} + N_4 u'_{x2};$$

$$u_y = N_1 u_{y1} + N_2 u'_{y1} + N_3 u_{y2} + N_4 u'_{y2};$$

$$u_z = N_1 u_{z1} + N_2 u'_{z1} + N_3 u_{z2} + N_4 u'_{z2},$$

где u_{xk}, u_{yk}, u_{zk} – неизвестные узловые перемещения контура КЭ ($k=1,2$); $u'_{xk},$

u'_{yk}, u'_{zk} – неизвестные узловые производные по α перемещений контура КЭ

($k=1,2$); $N_i(\alpha)$ – функции формы (полиномы Эрмита):

$$N_1 = 1 - 3t^2 + 2t^3; \quad N_2 = (t - 2t^2 + t^3)\Delta\alpha;$$

$$N_3 = 3t^2 - 2t^3; \quad N_4 = (t^3 - t^2)\Delta\alpha;$$

$$t = \frac{\alpha - \alpha_1}{\Delta\alpha}; \quad \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Кроме этого, общими степенями свободы для всех ГКЭ в модели ГСО являются приращение крутки и осевая деформация. Таким образом, каждый ГКЭ содержит 14 степеней свободы:

$$\mathbf{y} = \{u_{x1}, u'_{x1}, u_{y1}, u'_{y1}, u_{z1}, u'_{z1}, u_{x2}, u'_{x2}, \\ u_{y2}, u'_{y2}, u_{z2}, u'_{z2}, \Delta\lambda, \Delta\omega\}^T.$$

Для каждого ГКЭ строилась матрица жесткости размерностью 14×14 .

Построение матрицы жесткости и вектора сил ГКЭ выполнялось через вычисление полного потенциала ГКЭ и его дифференцирование по степеням свободы. Рассматривались исходное и деформированное состояние и для каждого из них по классическим формулам вычислялись коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Далее находились деформации и компоненты приращения кривизны, через которые вычислялась энергия деформаций.

Выражение для энергии деформаций конечного элемента здесь не представлено, так как оно аналогично (6), но без слагаемого с множителем Лагранжа Q_1 (в ГКЭ изначально заложено отсутствие поперечных сдвигов, т.е., выполняется гипотеза Кирхгофа о жесткой нормали).

При вычислении потенциала внутреннего давления p использовалась формула (3) для объема внутренней полости ГП. Потенциал осевой силы и крутящего момента (Рисунок 9) очевиден

$$W = -P(\lambda - 1)T - M(\omega^+ - \omega)T - p(V^+ - V),$$

где V – объем полости одного периода оболочки; V^+ – объем той же полости в деформированном состоянии.

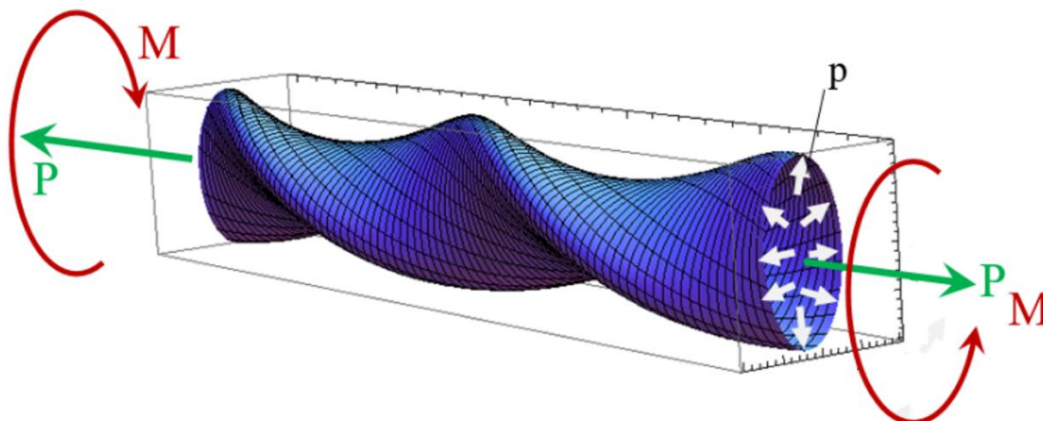


Рисунок 9. Виды нагрузок, прикладываемых к ГСО

На каждом этапе выполнялась линеаризация всех соотношений в полуавтоматическом режиме с помощью символьной компьютерной процедуры, реализующей короткий отрезок ряда Тейлора:

$$Taylor[f] = f|_{\zeta=0} + \left(\frac{df}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} \right) \zeta,$$

где ζ - малый параметр, по которому и выполняется линеаризация.

В результате ГКЭ оказался геометрически линейным. При необходимости вместо линеаризации в геометрических соотношениях достаточно оставить вторые степени перемещений контура, $\Delta\lambda$ и $\Delta\omega$, что расширит область применения ГКЭ на геометрически нелинейные задачи. В этом случае все разложения необходимо выполнять до вторых степеней малого параметра ζ :

$$Taylor[f] = f|_{\zeta=0} + \left(\frac{df}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} \right) \zeta + \left(\frac{d^2 f}{d\zeta^2} \Big|_{\zeta=0} \right) \frac{\zeta^2}{2}.$$

Но даже в геометрически линейном варианте ГКЭ нашел множество приложений. После верификации, которая выполнялась по результатам Глав 3 и 4, а также сопоставлением с натурным экспериментом, ГКЭ использовался для обоснования инженерной методики расчета винтовых трубок и расчета винтовых манометрических пружин (Рисунок 10).

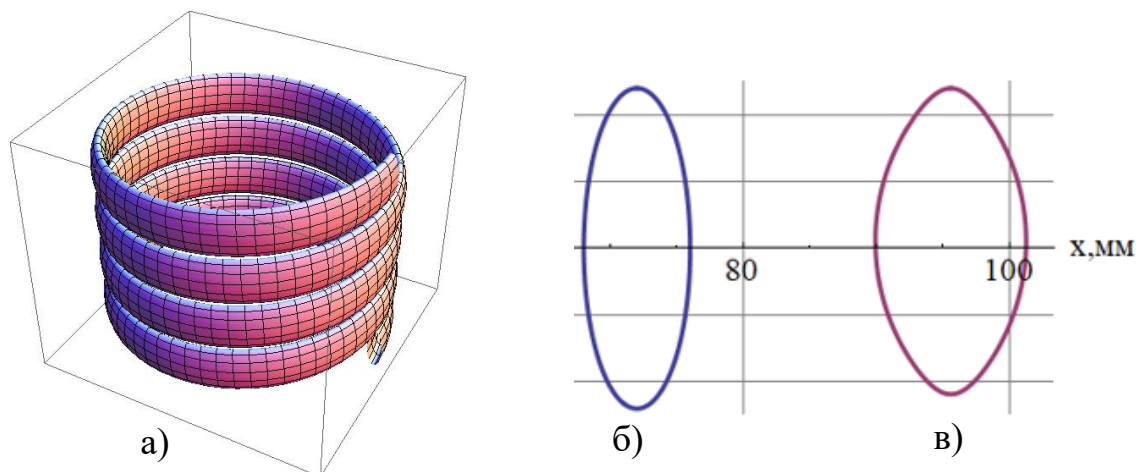


Рисунок 10. Винтовая трубка Бурдона (фрагмент) (а); (б) – исходный контур; (в) – деформированный контур (перемещения увеличены в 10 раз)

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработаны новые эффективные методы расчета винтовых оболочек с нагрузками, обеспечивающими сохранение геликоидальной

симметрии.

2. Предложена и реализована новая концепция «ортогонального контура», которая позволяет отказаться от косоугольных гауссовых координат и связанного с ними тензорного исчисления и адаптировать для расчета винтовых оболочек известные уравнения классической теории оболочек в ортогональной сетке гауссовых координат (уравнения А.Л. Гольденвейзера).

3. Для расчета винтовых оболочек, закрепленных по одной или нескольким винтовым линиям, получена система обыкновенных дифференциальных уравнений 8-го порядка, с помощью которой решен ряд практически важных задач.

4. На основе теории чистого изгиба построены новые уравнения для вычисления геометрии деформированных винтовых оболочек открытого профиля, что позволило достаточно просто вычислить упругие характеристики ленточных пружин различной геометрии.

5. Разработан и реализован геликоидальный конечный элемент, учитывающий геликоидальную симметрию и нечувствительный к косоугольности координатной сетки, который существенно, в сотни раз, снижает вычислительные затраты при использовании МКЭ.

6. Разработанные методы прошли успешную верификацию сопоставлением полученных результатов с результатами других авторов, коммерческих конечно элементных комплексов и натурного эксперимента.

7. Результаты диссертации внедрены в расчетную практику АО «Прочность» и учебный процесс кафедры прикладной механики, что подтверждается соответствующими актами о внедрении.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Сорокина А.Г., Гаврюшин С.С. Расчет геликоидально симметричных оболочек, закрепленных по одной или нескольким винтовым линиям // Машиностроение и инженерное образование. 2021. № 1-2 (66). С. 13-21. (0,79 п.л./0,60 п.л.)

2. Сорокина А.Г., Кирсанова В.А., Фомичева В.Ф. Расчет напряженного состояния витой трубки некругового сечения на основе тензорной теории оболочек // Инженерный журнал: наука и инновации. 2021. № 7 (115). С. 1-14. (1,22 п.л./0,96 п.л.)

3. Сорокина А.Г., Фомичева В.Ф., Кокоулин В.Г. Расчет напряженно – деформированного состояния эластичной ленты геликоидального конвейера // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 12 (84). С. 1-10. (0,88 п.л./0,62 п.л.)

4. Сорокина А.Г. Разработка и обоснование инженерной методики расчета напряженного состояния винтовых трубок, нагруженных внутренним давлением // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2017. № 10 (691). С. 10-17. (0,75 п.л.)

5. Сорокина А.Г. Расчет упругой характеристики ленточной пружины (геликоидально симметричной оболочки открытого профиля) при больших перемещениях на основе теории чистого изгиба // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2012. № 7. С. 22-26. (0,44 п.л.)

6. Сорокина А.Г. Расчет формы деформированной срединной поверхности геликоидально симметричной оболочки открытого профиля при больших перемещениях на основе теории чистого изгиба // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2011. № 11. С. 8-13. (0,53 п.л.)

7. Сорокина А.Г., Фомичева В.Ф. Расчет напряженно деформированного состояния винтовой рубашки охлаждения химического реактора // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXXI Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. Москва, 2025. С. 168-170. (0,35 п.л/0,28 п.л.)

8. Сорокина А.Г. Сопоставительный анализ различных методов расчета геликоидально симметричных оболочек // Проблемы механики современных машин. IX Междунар. конф.: Сборник статей / отв. ред. Л.А. Бохоева. – УланУдэ: Изд-во ВСГТУ, 2025. С. 57-62. ISBN 978-5-907942-62-2. (0,53 п.л.)

9. Сорокина А.Г., Фомичева В.Ф. Оценка точности инженерной методики расчета напряжений в винтовых трубках // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXX Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. Москва, 2024. С. 73-74. (0,18 п.л/0,13 п.л.)

10. Сорокина А.Г., Фомичева В.Ф. Инженерная методика расчета напряжений в винтовых трубках, нагруженных внутренним давлением // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXIX Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. Москва, 2023. С. 196-198. (0,26 п.л/0,19 п.л.)

11. Сорокина А.Г., Фомичева В.Ф. Построение ортогональной сетки координатных линий на винтовой поверхности для расчета геликоидально симметричных оболочек // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVIII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. Москва, 2022. С. 170-172. (0,26 п.л/0,20 п.л.)

12. Сорокина А.Г., Гаврюшин С.С. Расчет геликоидальных оболочек в ортогональных координатах, не совпадающих с линиями кривизны // IX Международный научный симпозиум, посвященный 90-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела».: Материалы симпозиума. Тверь. 2021. С. 73-77. (0,35 п.л/0,28 п.л.)