

Pg. 90744

О Т Ч Е Т Ъ

О ДѢЯТЕЛЬНОСТИ

ИМПЕРАТОРСКАГО

МОСКОВСКАГО ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА

ЗА 1886-87 АКАДЕМИЧ. ГОДЫ

2/ В 1

КРАТКІЙ ОТЧЕТЪ

О ДѢЯТЕЛЬНОСТИ

ИМПЕРАТОРСКАГО

МОСКОВСКАГО ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА

за 1886—87 академическій годъ.

БИБЛИОТЕКА

Прозер. 1935 ИМПЕРАТОРСКАГО

МОСКОВСКАГО

ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА.



КРАТКІЙ ОЦЕНКЕ

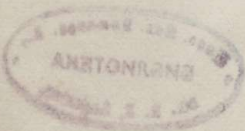
О ЦЕНЗУРНОСТИ

Дозволено цензурою. Москва, ноября 1888 года.

МОСКОВСКОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ

№ 881—78 1888 г.

ВНЕШНЯЯ
ОТДЕЛЕНИЕ
ОТДЕЛЕНИЕ
ОТДЕЛЕНИЕ



КРАТКІЙ ОТЧЕТЪ

О ДѢЯТЕЛЬНОСТИ

ИМПЕРАТОРСКАГО МОСКОВСКАГО ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА

ЗА 1886—87 АКАДЕМИЧЕСКІЙ ГОДЪ.

I. ДѢЯТЕЛЬНОСТЬ Педагогическаго Совѣта.

Въ истекшемъ академическомъ году Педагогическій Совѣтъ имѣлъ 16 засѣданій, изъ которыхъ 2 были экстраординарные.

Въ засѣданіи Совѣта 31 августа 1886 года было постановлено:

1) При приѣмѣ вновь поступающихъ въ I общій классъ руководствоваться утвержденнымъ Господиномъ Министромъ Народнаго Просвѣщенія 6 марта 1882 года спискомъ учебныхъ заведеній, ученики которыхъ допускаются къ повѣрочному экзамену для поступленія на I курсъ С.-Петербургскаго Практическаго Технологическаго Института;

2) Ввести въ I общемъ классѣ частные экзамены по математикѣ, теоретической механикѣ, физикѣ и начертательной геометріи, назначивъ для каждого отдѣльнаго предмета по одному частному экзамену на каждую годовую лекцію.

Въ засѣданіи Совѣта 22 сентября 1886 года было постановлено: вслѣдствіе оставленія службы при Учи-

лицѣ доцентомъ В. А. Малышевымъ, три часа занятій по проектированію въ III спеціальному классѣ передать главному инженеръ-механику А. И. Пермякову, удержавъ за нимъ два часа занятій по тому же предмету во II спеціальному классѣ.

Въ засѣданіяхъ Совѣта 22 сентября и 8 октября 1886 года были рассмотрѣны и утверждены нижеслѣдующія программы учебныхъ предметовъ для I общаго класса:

По Закону Божию (при 2 годичныхъ лекціяхъ).

Предварительныя понятія о предметѣ и задачахъ науки богословія.—Общій планъ науки.

О т д ѣ л ь I.

О религіи вообще.

Сущность религіи; происхожденіе и всеобщность религіи съ изложеніемъ и разборомъ отрицательныхъ мнѣній относительно этого предмета.

Отношеніе религіи къ наукѣ; связь религіи и нравственности. — Самостоятельность религіи въ ряду другихъ стремленій человѣка. — Значеніе религіи въ жизни человѣка.

Изложеніе доказательствъ бытія Божія.

Самостоятельное личное бытіе человѣческаго духа; опроверженіе матеріалистическихъ воззрѣній относительно самостоятельности духовнаго начала въ человѣкѣ. — Основанія для вѣры въ безсмертіе души. — Значеніе идеи личнаго безсмертія для жизни человѣка.

О т д ѣ л ь II.

О религіяхъ, такъ называемыхъ, естественныхъ.

Разнообразное обнаруженіе религіозныхъ стремленій въ исторической жизни человѣчества.

Характеръ первобытной религіи; происхожденіе многобожія. — Характеристика религій некультурныхъ и

культурныхъ языческихъ народовъ. — Выводы изъ разсмотрѣнія основныхъ пунктовъ главнѣйшихъ системъ язычества по отношенію къ требованіямъ истинной религіи.

О т д ѣ л ъ III.

О б ъ о т к р о в е н і и в о о б щ е.

Понятіе объ откровеніи; откровеніе естественное и сверхъестественное. — Возможность и необходимость сверхъестественнаго откровенія.

Признаки истиннаго откровенія внутренніе и внѣшніе. — Понятіе о чудѣ; цѣль, свойства и характеръ истинныхъ чудесъ; необходимость чудесъ для убѣжденія въ дѣйствительности Божественнаго откровенія. — Обзоръ возраженій противъ чудесъ.

Пророчество; понятіе о немъ; цѣль и значеніе пророчествъ въ дѣлѣ убѣжденія въ Божественности откровенія.

О т д ѣ л ъ IV.

Откровенная религія Ветхозавѣтная и Новозавѣтная—христіанская

Особое исключительное положеніе религіи Ветхаго Завѣта среди религій древняго міра. — Ветхозавѣтное ученіе о Богѣ въ сравненіи съ языческими ученіями о божествахъ. — Несостоятельность попытокъ объяснить происхожденіе этого ученія путемъ естественнымъ. — Ученіе Ветхаго Завѣта о происхожденіи міра и человѣка, о первоначальномъ состояніи человѣка и его паденіи. — Ученіе о Мессіи и постепенное раскрытіе этого ученія. — Смыслъ и значеніе религіи Ветхаго Завѣта.

Новозавѣтная религія или христіанство.

Божественное происхожденіе христіанской религіи; опроверженіе взглядовъ, по которымъ христіанство образовалось путемъ естественнымъ.

Божественное достоинство Основателя христіанства; Его безгрѣшность и вообще чрезвычайныя нравственныя

совершенства. — Историческая дѣйствительность евангельскаго образа Іисуса Христа.

Историческая достовѣрность, характеръ и главные мотивы чудесъ Іисуса Христа. — Его пророчества и исполненія ихъ.

Воскресеніе Іисуса Христа изъ мертвыхъ, какъ чрезвычайное событіе Его жизни и какъ основаніе и сила вѣры и Церкви.

Разсмотрѣніе содержанія христіанскаго ученія. — Ученіе Іисуса Христа о Богѣ Отцѣ, о Себѣ Самомъ и Св. Духѣ. — Важность и высокое значеніе христіанскаго ученія о Св. Троицѣ. — Христіанское ученіе объ искупленіи.

Христіанское ученіе о Церкви, какъ о царствѣ Божіемъ на землѣ; о свойствахъ истинныхъ членовъ Церкви, о цѣли жизни человѣка, о главномъ началѣ человѣческой дѣятельности, о послѣдней судьбѣ міра и человѣка.

Сверхъестественность христіанства, открывающаяся изъ его преобразующаго вліянія на нравственную и общественную жизнь народовъ.

По математикѣ

(при 5 годичныхъ лекціяхъ).

Начало курса. — Введеніе съ аналитическую геометрію: теорія проекцій на ось, координаты прямолинейныя и полярныя на плоскости и въ пространствѣ, разстояніе двухъ точекъ, дѣленіе линіи въ данномъ отношеніи, углы прямой съ осями, уголъ между двумя прямыми, проекціи площадей, основныя формулы сферической тригонометріи.

ПЕРВОЕ ПОЛУГОДИЕ.

Алгебра (2 часа). — Сжатый теоретическій очеркъ общаго курса. — Теорія опредѣлителей. — О сходимости рядовъ. — Простѣйшіе ряды. — Тригонометрическая форма мнимаго. — Связь тригонометрическихъ функцій съ показательными. — Двучленные уравненія. — Уравненія третьей и четвертой степени.

Тригонометрія (1 часъ). — Сжатый теоретическій очеркъ общаго курса теоріи круговыхъ функцій. — Обратныя круговыя функціи. — Упражненія въ логариѳмическихъ вычисленіяхъ.

Аналитическая геометрія (2 часа). — О геометрическихъ мѣстахъ. — О представленіи кривыхъ уравненіями. — О построеніи уравненій. — Теорія прямой. — Теорія круга. — Задачи на прямую и кругъ. — Упрощеніе общаго уравненія кривыхъ второго порядка: эллипсъ, парабола, гипербола. — Построеніе этихъ кривыхъ по точкамъ.

ВТОРОЕ ПОЛУГОДИЕ.

Анализъ (2 часа). — О предѣлахъ. — О функціяхъ и ихъ непрерывности. — Теорія производныхъ. — Дифференцированіе явныхъ и неявныхъ функцій съ однимъ переменнымъ. — Теорема Тэйлора и примѣненіе ея къ разложенію функцій въ ряды.

Высшая алгебра (1 часъ). — Корни цѣлой функціи. — Разложеніе на множители. — Соотношеніе коэффиціентовъ и корней. — Выдѣленіе равныхъ корней. — О дѣйствительныхъ корняхъ уравненій. — Разысканіе соизмѣримыхъ корней. — Теорема Штурма. — Вычисленіе корней. — Примѣръ рѣшенія трансцендентныхъ уравненій.

Аналитическая геометрія (2 часа). — Подробное изслѣдованіе свойствъ эллипса, параболы и гиперболы. — Замѣчательнѣйшія кривыя высшихъ порядковъ и трансцендентныя.

По начертательной геометріи

(при 3 годичныхъ лекціяхъ).

Понятіе о проекціяхъ: центральной и параллельной; ортогональная проекція точки и прямой; опредѣленіе положенія точки и прямой помощію проекціи. — Задачи, относящіяся до прямой линіи.

Условія, опредѣляющія положеніе плоскости. — Задачи, относящіяся къ плоскости.

Методы, употребляемые въ начертательной геометріи: совмѣщенія, вращенія и перемѣна плоскостей проекцій; приложеніе ихъ къ рѣшенію различныхъ вопросовъ.

Условія параллельности плоскостей. — Пересѣченіе плоскостей; пересѣченіе прямой съ плоскостью и условія перпендикулярности прямой съ плоскостью. — Задачи, сюда относящіяся. — Проекція прямого угла; задачи, относящіяся къ построенію проекцій перпендикулярныхъ прямыхъ.

Задачи, относящіяся до построенія угла между линіями и плоскостями.

Рѣшеніе трехграннаго угла.

Многогранникъ и его проекціи. — Построеніе проекцій многогранника по даннымъ условіямъ. — Пересѣченіе многогранника съ плоскостью и прямой. — Развертываніе многогранниковъ.

Опредѣленіе кривой помощію проекцій. — Построеніе проекцій кривой по даннымъ условіямъ.

О поверхности вообще. — Касательная плоскость. — Построеніе касательной плоскости къ цилиндрической и конической поверхностямъ; построеніе очерковъ этихъ поверхностей. — Построеніе проекцій цилиндровъ и конусовъ по даннымъ условіямъ. — Развертываніе этихъ поверхностей. — Коническая и цилиндрическая винтовые линіи.

Пересѣченіе цилиндрическихъ и коническихъ поверхностей плоскостью и прямою линіею.

Пересѣченіе цилиндровъ, конусовъ, призмъ и пирамидъ между собою.

Поверхность вращенія; построеніе проекцій поверхности вращенія по даннымъ условіямъ. — Пересѣченіе поверхности вращенія плоскостью и прямою линіею. — Пересѣченіе поверхностей вращенія между собою. — Пересѣченіе поверхности вращенія съ многогранникомъ.

Винтовые поверхности, проведеніе къ нимъ касательной плоскости и пересѣченіе ихъ плоскостью.

Собственная и падающая тѣнь. — Построеніе тѣни отъ точки и прямой какъ на плоскостяхъ проекцій, такъ

и на данной поверхности. — Тѣнь отъ плоскихъ фигуръ. — Собственная и падающая тѣнь призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и шара. — Собственная и падающая тѣнь на разрѣзахъ призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и шара. — Собственная и падающая тѣнь поверхности вращенія.

Изометрическая, диметрическая и триметрическая проекціи; соотношеніе между масштабами сокращеній; построеніе масштабовъ для этихъ проекцій. — Изометрическая проекція соединенія брусковъ.

Основные законы перспективы. — Перспективный масштабъ. — Построеніе перспективъ: точки, прямой и кривой, призмы, пирамиды, цилиндра и конуса. — Перспектива сложнаго тѣла.

По теоретической механикѣ

(при 3 годичныхъ лекціяхъ).

Краткій историческій очеркъ развитія механики, ея раздѣленіе на три части.

Статика. — Начало статики. — Теоремы о сложении силъ. — Статья о центрѣ тяжести. — Пары силъ. — Общая теорія эквивалентности силъ. — Равновѣсіе свободного и несвободнаго твердаго тѣла. — Равновѣсіе тяжелаго тѣла на горизонтальной плоскости, устойчивость равновѣсія. — Теорія вѣсовъ. — Основные теоремы графостатики и ихъ приложеніе къ примѣрамъ.

Кинематика. — Движеніе матеріальной точки. — Равномерное и равномерно-переменное движеніе. — Скорость и ускореніе (тангенціальное и полное) во всякомъ движеніи, ихъ проекціи на ось. — Проекціи полного ускоренія на касательную и нормаль. — Сложеніе скоростей и ускореній (при поступательномъ движеніи траекторіи), опредѣленіе скорости относительнаго движенія, примѣры. — Движенія неизмѣняемой системы (параллельно плоскости, при неподвижной точкѣ и свободной). — Сложеніе движеній неизмѣняемой системы.

Динамика. — Матеріальна точка. — Начала динамики. — Масса, связь между массою, ускореніемъ и силою. — Силы инерціи. — Примѣры на движеніе свободной матеріальной точки. — Работа силы, теорема живыхъ силъ. — Теорема о количествѣ движенія. — Движеніе несвободной матеріальной точки (наклонная плоскость, математическій маятникъ, коническій маятникъ). — Начало Даламбера, разъясненное многими примѣрами. — Поступательное движеніе твердаго тѣла отъ силы, дѣйствующей на центръ его тяжести. — Вращательное движеніе около неподвижной оси, сложный маятникъ, равнодѣйствующая центробѣжныхъ силъ, свободная ось вращенія тѣла. — Статія о моментахъ инерціи съ опредѣленіемъ моментовъ инерціи многихъ тѣлъ. — Мгновенныя силы и теорія удара (центральный ударъ прямой и косою, понятіе о центрѣ удара). — Элементарное изложеніе общихъ теоремъ динамики системы (теорема живыхъ силъ, теорема о движеніи центра тяжести свободной системы, теорема о сохраненіи главнаго момента количествъ движенія).

По физикѣ

(при 2 годичныхъ лекціяхъ).

1. Единицы длины, массы, времени и силы. Нолюсъ. — Микрометрический винтъ.
2. Сферометръ. — Опредѣленіе сферометромъ толщины и радіусовъ кривизны линзъ.
3. Дѣлительная машина.
4. Катетометръ.
5. Вѣсы. — Условія ихъ чувствительности. — Способы взвѣшиванія.
6. Законъ передачи давленія въ жидкости Паскаля. — Гидравлическій прессъ.
7. Давленіе внутри жидкости. — Давленіе жидкости на дно и стѣнки сосуда.
8. Сообщающіеся сосуды.
9. Законъ Архимеда. — Плаваніе тѣлъ.

10. Опредѣленіе удѣльнаго вѣса твердаго тѣла взвѣшиваніемъ, ареометромъ Никольсона.
11. Опредѣленіе удѣльнаго вѣса тѣла пикнометромъ.
12. Опредѣленіе удѣльнаго вѣса жидкости пикнометромъ.
13. Опредѣленіе удѣльнаго вѣса жидкости: стекляннымъ тѣльцемъ, ареометромъ Фаренгейта.
14. Ареометры Боме и Гей-Люссака.—Спиртомѣръ.
15. Общія свойства газовъ.—Давленіе газовъ; опытъ Торичелли.—Постоянный барометръ.
16. Барометры Фортена и Гей-Люссака.
17. Анероиды.—Повѣрка закона Архимеда для газовъ (бароскопъ).
18. Законъ Мариотта-Бойля и повѣрка его для давленій большихъ и меньшихъ атмосфернаго.
19. Опыты Дебре надъ сжатіемъ различныхъ газовъ.—Опыты Дюлонга и Араго.—Манометры.
20. Машина для разрѣженія воздуха съ двумя цилиндрами.—Кранъ Бабинне.
21. Ртутный насосъ Бессель-Гагена.
22. Истеченіе жидкости изъ сосуда черезъ отверстіе.—Теорема Торичелли.—Расходъ жидкости.—Форма струи.
23. Истеченіе газовъ черезъ отверстіе. — Опыты Бунзена.
24. Растяженіе упругаго тѣла. — Измѣненіе объема при растяженіи.
25. Опыты надъ растяженіемъ тѣла: Каньярь-делатура и Вертейма.
26. Крученіе и сгибаніе.
27. Сжимаемость жидкостей. — Опыты Эрштеда и Реньо.
28. Молекулярныя явленія въ жидкостяхъ. — Опыты Плато.—Тонкія пластинки.
29. Капиллярныя трубки и теорія капиллярности.
30. Диффузія жидкостей и газовъ.

31. О колебательномъ движеніи. — Перемѣщеніе и скорость колебательнаго движенія.
32. Разложеніе и сложеніе движеній съ одинаковыми періодами.
33. Сложеніе двухъ колебательныхъ движеній съ разными періодами. — Біеніе.
34. Волнообразное движеніе.
35. Интерференція волнъ.
36. Источники звука. — Опредѣленіе числа колебаній: сиреною, камертономъ, зубчатымъ колесомъ.
37. Униссонъ, аккордъ, консонансъ и диссонансъ. — Музыкальная шкала. — Гармоническіе тоны. — Предѣлы распознаванія звука.
38. Колебанія струнъ. — Монохордъ. — Опытъ Мельде.
39. Закрытыя трубы.
40. Открытыя трубы.
41. Резонансъ. — Резонаторъ Гельмгольца.
42. Интерференція звуковыхъ волнъ.
43. Опредѣленіе скорости звука: а) по способу Реньо, б) съ помощію интерференціонныхъ трубъ.

Въ засѣданіи Совѣта 8 октября 1886 года былъ утвержденъ нижеслѣдующій докладъ комиссіи, организованной Совѣтомъ для разсмотрѣнія программъ преподаванія рисованія и черченія въ I общемъ классѣ:

1. По вопросу о преподаваніи

рисованія.

По прежнему учебному плану на преподаваніе рисованія было назначено по 2 урока въ I и II общихъ классахъ; по новому учебному плану полагается на него 4 урока въ I общемъ классѣ. — Такимъ образомъ представляется возможнымъ всю программу рисованія, безъ сокращеній и какихъ либо измѣненій, выполнить въ теченіе одного года въ I общемъ классѣ. — Эта программа заключаетъ рисованіе съ натуры архитектурныхъ деталей и деталей машинъ, съ окончательной тушевкой ихъ. — Предполагается назначить 4 срока въ каждомъ

полугодіи для сдачи исполненныхъ рисунковъ, такъ что каждый учащійся обязанъ будетъ представить 8 рисунковъ въ теченіе года (4 рисунка архитектурныхъ деталей и 4 рисунка деталей машинъ).

2. По вопросу о преподаваніи

черченія.

На преподаваніе черченія назначалось до сихъ поръ по 4 урока въ I и II общихъ классахъ; по новому учебному плану опредѣлено на него 8 уроковъ въ общемъ классѣ. — Слѣдовательно программу черченія оканчивается возможнымъ выполнить въ теченіе одного года въ I общемъ классѣ съ слѣдующими въ ней измѣненіями:

а) включить въ программу черченія упражненія въ кругломъ письмѣ (рондо), при чемъ требовать отъ учащихся надписей всѣхъ исполняемыхъ ими чертежей этимъ именно шрифтомъ;

б) включить въ программу упражненія въ жидкой тушеvkѣ и штриховкѣ, а также черченіе кривыхъ линий, преимущественно циклическихъ;

в) исключить изъ программы черченія тѣ отдѣлы, которые ближе относятся къ упражненіямъ по начертательной геометріи, какъ то: проекціи геометрическихъ тѣлъ, задачи на пересѣченіе многогранниковъ и развѣтываніе ихъ поверхностей, а также соединенія дерева, которыя просить преподавателя начертательной геометріи внести въ курсъ упражненій по этому предмету, какъ примѣры изометрическихъ проекцій;

г) исключить изъ программы отдѣлъ графическихъ вычисленій, который можетъ войти впослѣдствіи въ курсъ графостатики;

д) наконецъ, изъ отдѣла архитектурнаго черченія оставить въ программѣ черченія лишь копіи плана, фасада и разрѣза деревяннаго и каменнаго зданія, какъ заключительные чертежи программы.

Послѣ этихъ измѣненій, частію сокращеній, а частію дополненій, программа черченія I общаго класса

будеть обнимать слѣдующіе отдѣлы: круглое письмо, черченіе циклическихъ кривыхъ, упражненія въ жидкой тушеvkѣ и штриховкѣ, черченіе деталей машинъ, детализировка чертежей по составленнымъ кроки, черченіе съ натуры частей машинъ и цѣлыхъ машинъ, архитектурное черченіе (въ указанныхъ границахъ).— Предполагается, что каждый учащійся въ теченіе года представить 30 урочныхъ чертежей по всѣмъ упомянутымъ отдѣламъ программы, въ опредѣленные преподавателемъ сроки.—Кромѣ того въ теченіе года будутъ производиться въ извѣстные урочные часы частные экзамены по черченію, при чемъ учащихся каждой параллели необходимо раздѣлить на 3 группы (около 30 человекъ въ каждой группѣ) и для каждой группы назначить 4 частныхъ экзамена въ теченіе года. — Такимъ образомъ, каждый учащійся обязанъ будетъ представить 30 урочныхъ и 4 экзаменаціонныхъ чертежей въ годъ.

Въ засѣданіи Совѣта 27 октября 1886 года былъ утвержденъ нижеслѣдующій докладъ комиссіи, избранной Совѣтомъ для обсужденія вопроса о производствѣ частныхъ экзаменовъ въ I общемъ классѣ:

1. Назначеніе краткихъ сроковъ для производства экзаменовъ не желательно, потому что въ случаѣ сосредоточенія экзаменовъ на небольшой срокъ, слабѣйшіе или менѣе прилежные изъ воспитанниковъ навѣрное манкировали бы лекціями, чтеніе которыхъ будетъ продолжаться въ теченіе экзаменаціоннаго промежутка времени, но и при такомъ, произвольномъ и весьма вредномъ, расширеніи воспитанниками назначеннаго имъ срока подготовки, эта подготовка была бы тѣмъ болѣе напряженной и вмѣстѣ съ тѣмъ поверхностной, чѣмъ менѣе давалось бы на нее времени.

Однако и растяженіе экзаменаціоннаго періода во времени имѣетъ свои невыгоды въ томъ, что какъ бы ни были облегчены воспитанники въ дѣлѣ ихъ подготовки къ экзаменамъ, они въ теченіе экзаменаціоннаго періода будутъ меньше, чѣмъ въ обыкновенное время,

посвящать свое вниманіе текущимъ лекціямъ и вообще будутъ находиться въ менѣе нормальной обстановкѣ ихъ общихъ занятій.

Избирая середину между указанными двумя противоположностями, комиссія находитъ, что наиболѣе удобнымъ представляется недѣльный промежутокъ времени между двумя послѣдовательными экзаменами одного и того же воспитанника въ теченіе каждаго изъ трехъ экзаменаціонныхъ періодовъ.—Такой, вообще говоря, недѣльный промежутокъ времени можетъ однако безъ особаго ущерба сокращаться до пяти дней, или удлиняться до девяти въ зависимости отъ распредѣленія дней экзаменовъ на недѣлѣ экзаменаторами двухъ смежныхъ экзаменовъ.

2. Относительно распредѣленія экзаменовъ въ ихъ послѣдовательности для разныхъ группъ экзаменующихся комиссія находитъ, что всего удобнѣе сосредоточивать на всякую недѣлю экзаменаціоннаго періода экзаменъ всему классу по одному и тому же предмету, такъ какъ при этомъ облегчится составленіе группъ экзаменующихся по ихъ личному соглашенію, облегчится также общее распредѣленіе экзаменовъ и установится общій порядокъ занятій цѣлаго класса, который неопытнымъ воспитанникамъ долженъ быть указанъ извнѣ.

3. Что касается до порядка слѣдованія экзаменовъ по предметамъ, то наиболѣе удобнымъ представляется назначеніе экзаменовъ сначала по математикѣ, потомъ по механикѣ и затѣмъ по начертательной геометріи, такъ какъ два первые предмета ближе связаны между собою по свойству ихъ методовъ, а изученіе математическихъ формулъ, прилагаемыхъ въ механикѣ, естественно должно предшествовать изученію приложений.

4. Экзамены по физикѣ не совпадаютъ въ числѣ съ экзаменами по другимъ предметамъ, и уже по этой причинѣ должны имѣть другіе сроки. — По помимо этого неудобно увеличивать продолжительность экзаменаціоннаго періода свыше трехъ недѣль, по крайней мѣрѣ для

экзаменовъ за первыя двѣ трети учебнаго года, потому что нужно принимать во вниманіе утомленіе экзаменуемыхъ и устранять по возможности поводы къ продолжительнымъ манкировкамъ на лекціяхъ. — Экзамены по физикѣ всего удобнѣе назначить—первый въ концѣ перваго полугодія передъ Рождествомъ и второй передъ Пасхой.

5. Въ виду всего вышеизложеннаго экзамены удобно расположить такъ: первая серія экзаменовъ по математикѣ, механикѣ и начертательной геометріи въ первыя три недѣли ноября (въ настоящемъ году математика съ 3 по 8, механика съ 10 по 15, начертательная геометрія съ 17 по 22), первый экзаменъ физики въ серединѣ декабря (въ настоящемъ году съ 8 по 13), вторая серія трехъ экзаменовъ въ январѣ съ начала второго полугодія (въ настоящемъ году математика съ 12 по 17, механика съ 19 по 24, начертательная геометрія съ 26 по 31), послѣдняя серія трехъ экзаменовъ въ мартѣ (въ настоящемъ году математика съ 2 по 7, механика съ 9 по 14, начертательная геометрія съ 16 по 21), второй экзаменъ физики на шестой недѣлѣ поста (въ настоящемъ году съ 23 по 28).

6. Въ основу указаннаго распредѣленія экзаменовъ положено комиссіей то требованіе, чтобы частными экзаменами исчерпывался по возможности полнѣе весь курсъ по каждому изъ предметовъ. — Въ противномъ случаѣ весьма часто оказывалось бы, что конецъ курса, непрорепетированный на послѣднемъ частномъ экзаменѣ, оставался бы неразработаннымъ и для полнаго годового экзамена, а слѣдовательно, распредѣленіе, не удовлетворяющее упомянутому требованію, вело бы къ систематическому нарушенію законченности ежегодныхъ занятій. — Практика экзаменовъ показываетъ, что вообще послѣдніе билеты программъ оказываются наименѣе разработанными, и выводъ этотъ понятенъ à priori, если принять въ расчетъ, что полная равномѣрность подготовки возможна только для наиболѣе аккуратныхъ воспи-

танниковъ, умѣющихъ притомъ соразмѣрить время подготовки съ объемомъ экзаменаціонной программы.

7. Не смотря однако на возможность прорепетировать весь курсъ на частныхъ экзаменахъ, полный экзаменъ не перестаетъ быть необходимымъ, или, по крайней мѣрѣ, желательнымъ. Этотъ экзаменъ, выполняемый послѣ частныхъ экзаменовъ, не представить для воспитанниковъ особыхъ затрудненій. Но, съ другой стороны, онъ дастъ воспитанникамъ возможность охватить въ цѣломъ весь годичный курсъ предмета, а такое расширение содержанія занятій непременно будетъ способствовать—какъ лучшему усвоенію самой сути дѣла и его деталей, такъ и вообще нѣкоторому расширенію кругозора учащихся. Естественно, что всякая цѣль положеній въ наукахъ дедуктивныхъ глубже анализируется при повторительномъ ея разборѣ, чѣмъ при первоначальномъ, да еще отрывочномъ. Курсы же предметовъ вышеупомянутыхъ, да и вообще теоретическихъ предметовъ, по преимуществу обладаютъ свойствомъ непрерывности и взаимной связи.

8. Цѣлостность повторенія изучаемаго курса и равномерность его распредѣленія для всѣхъ воспитанниковъ составляютъ несомнѣнные преимущества новаго плана частныхъ экзаменовъ сравнительно съ планомъ прежнихъ репетицій. Частные экзамены устанавливаютъ также болѣе однородную для всѣхъ воспитанниковъ оцѣнку правильности и успѣшности ихъ занятій.

9. Но эти экзамены окажутся болѣе, чѣмъ прежнія репетиціи, обременительными для преподавателей и репетиторовъ. Взамѣнъ прежняго равномернаго распредѣленія труда этихъ лицъ по опредѣленному числу часовъ въ недѣлю, явится, хотя и временная, но весьма напряженная концентрація труда въ теченіе каждаго экзаменаціоннаго періода. Чтобы судить о степени этой концентрации, достаточно замѣтить, что при условіяхъ настоящаго года И. Е. Михалевскому придется, занимаясь только по вечерамъ, проэкзаменовать на одной недѣлѣ

болѣе 120 человекъ по математикѣ и на другой недѣль болѣе 180 по начертательной геометріи.

10. Ясно, что при указанной интенсивности труда экзаменовъ, эти экзамены могутъ преслѣдовать одну только цѣль провѣрки знаній экзаменующихся и не могутъ повести къ такому общенію преподавателя со слушателями, которое способствовало бы разъясненію недоразумѣній послѣднихъ.

11. Въ виду большого количества труда, выпадающаго на долю экзаминаторовъ въ теченіе каждаго экзаменаціоннаго періода, необходимо предоставить самимъ экзаминаторамъ выборъ дней и часовъ экзаменовъ на недѣль и назначеніе размѣровъ экзаменующихся группъ, съ тѣмъ, однако, чтобы подобное распредѣленіе было составлено и объявлено учащимся заблаговременно (за недѣлю).

12. Такъ какъ лекціи по нѣкоторымъ днямъ заканчиваются въ 12 ч., а по другимъ въ 4 ч., и такъ какъ не всѣ воспитанники пользуются завтракомъ и обѣдомъ въ зданіи училища, то экзамены должны быть назначаемы въ первые изъ упомянутыхъ дней не ранѣе часа, а во вторые—не ранѣе пяти часовъ.

13. Смотря по числу лекцій, читаемыхъ по предмету, на преподавателя возлагается или треть, или половина труда частныхъ экзаменовъ. Желательно, чтобы соотвѣтствующія части общаго числа экзаменующихся чередовались бы передъ преподавателемъ въ теченіе всѣхъ экзаменаціонныхъ періодовъ, дабы преподаватель знакомился со всѣмъ курсомъ слушателей и всѣмъ воспитанникамъ предъявлялись бы наиболѣе однородныя требованія.

14. Распредѣленіе группъ экзаменующихся по всѣмъ предметамъ остается постояннымъ для всѣхъ экзаменаціонныхъ періодовъ.

15. Въ случаѣ неявки экзаминатора въ одинъ изъ экзаменаціонныхъ дней, экзаменъ переносится по соглашенію съ экзаменующимися на одинъ изъ ближайшихъ дней той же недѣли.

16. Въ случаѣ неявки экзаминатора въ теченіе всей соотвѣтствующей его экзамену недѣли, пропущенный экзаменъ переносится на ближайшую изъ слѣдующихъ свободныхъ недѣль.

17. Въ случаѣ неявки экзаменующагося на одинъ изъ частныхъ экзаменовъ, ему становится баллъ единица, который замѣняется при слѣдующемъ частномъ экзаменѣ новымъ балломъ, если экзаменующійся представить инспекціи Училища въ промежуткѣ двухъ частныхъ экзаменовъ свидѣтельство о болѣзни, выданное врачомъ Училища, и сдать пропущенный экзаменъ вмѣстѣ со вторымъ экзаменомъ по тому же предмету. Только болѣзь, удостовѣренная свидѣтельствомъ, выданнымъ на срокъ экзамена однимъ изъ врачей Училища, предоставляетъ учащемуся право сдать этотъ экзаменъ въ другой вышеуказанный срокъ.

18. Если причина неявки экзаменующагося на одинъ изъ частныхъ экзаменовъ будетъ признана инспекціей Училища неуважительной, то баллъ единица удерживается и входитъ въ вычисленіе среднего годичнаго балла.

19. Баллы экзаменаціонные выставляются въ особые литографированные списки частныхъ экзаменовъ, отдѣльные для каждаго предмета.

Въ засѣданіи Совѣта 27 ноября 1886 года была утверждена нижеслѣдующая программа преподаванія нѣмецкаго и французскаго языковъ для воспитанниковъ I и II общихъ классовъ:

Занятія въ I общемъ классѣ будутъ состоять въ переводахъ съ иностраннаго языка на русскій съ попутными объясненіями, пополняющими грамматическія свѣдѣнія учащихся и съ указаніемъ тѣхъ оборотовъ, которые представляютъ особенность иностраннаго языка.— Пройдено будетъ около 25 страницъ текста in 8°, знаніе которыхъ обязательно для перехода во II общій классъ.

Руководствами могутъ служить: а) по французскому языку хрестоматія Фену, б) по нѣмецкому языку сбор-

никъ образцовыхъ произведеній нѣмецкихъ классиковъ Гретмана и Биберштейна.

Во II общемъ классѣ занятія будутъ состоять въ переводахъ съ иностраннаго языка статей спеціального содержанія, изъ которыхъ учащіеся ознакомились бы съ различными терминами по технологіи и по механикѣ, которые дали бы имъ возможность пользоваться учеными произведеніями запада.

Въ томъ же засѣданіи Совѣта была подвергнута обсужденію нижеслѣдующая программа практическихъ занятій въ физической лабораторіи Техническаго Училища, составленная профессоромъ физики В. С. Щегляевымъ:

I. Общія измѣренія.

- № 1. Опредѣленіе длины катетометромъ.
- № 2. Опредѣленіе толщины пластинокъ сферометромъ.
- № 3. Опредѣленіе толщины проволоки взвѣшиваніемъ.
- № 4. Калиброваніе трубокъ.
- № 5. Отсчетъ барометра съ поправками.
- № 6. Вѣсы; нуль вѣсовъ, чувствительность, отношеніе плечъ.
- № 7. Двойное взвѣшиваніе съ приведеніемъ къ пустотѣ.

Опредѣленіе удѣльнаго вѣса твердыхъ тѣлъ:

- № 8.—взвѣшиваніемъ въ водѣ и въ воздухѣ,
- № 9.—взвѣшиваніемъ и опредѣленіемъ объема.

Опредѣленіе удѣльнаго вѣса жидкостей:

- № 10.—стекляннымъ тѣльцемъ,
- № 11.—пикнометромъ.
- № 12.—ареометромъ.
- № 13. Опредѣленіе коэффициента упругости проволоки изъ удлиненія.

II. Акустика.

№ 14. Опредѣленіе числа колебаній камертона.

Опредѣленіе скорости звуковой волны:

№ 15.— въ твердыхъ тѣлахъ,

№ 16.— въ воздухѣ.

III. Оптика.

№ 17. Фотометрическія измѣренія.

№ 18. Опредѣленіе радіуса кривизны линзы.

№ 19. Опредѣленіе фокусныхъ разстояній линзъ.

№ 20. Увеличеніе оптической трубы.

№ 21. Поле зрѣнія оптической трубы.

№ 22. Спектры металловъ.

№ 23. Спектральный анализъ смѣсей солей.

IV. Теплота.

№ 24. Постоянныя точки термометра.

№ 25. Точка кипѣнія жидкостей.

№ 26. Температура плавленія легкоплавкихъ веществъ.

№ 27. Калориметрическія опредѣленія.

№ 28. Опредѣленіе механическаго эквивалента тепла.

V. Электричество.

№ 29. Сравненіе магнитной и химической мѣры тока.

№ 30. Переводный факторъ электродинамометра Siemens'a.

Опредѣленіе гальваническихъ сопротивленій:

№ 31.— подстановкою,

№ 32.— дифференціальнымъ гальванометромъ,

№ 33.— мостомъ Уитстона.

№ 34. Удѣльное сопротивленіе металловъ.

Опредѣленіе сопротивленій элементовъ:

№ 35.—по Мансу,

№ 36.—по Томсону.

№ 37. Определеніе сопротивленія обмотокъ гальванометра по Томсону.

№ 38. Определеніе электродвижущей силы элемента.

№ 39. Сравненіе электродвижущихъ силъ элементовъ.

Основная задача программы такова:

а) познакомить учащагося съ устройствомъ, установкою и употребленіемъ возможно большаго числа физическихъ, измѣрительныхъ снарядовъ;

б) преподавать практически способы измѣреній характеристическихъ физическихъ постоянныхъ, и

в) дать возможность ученику самому выполнить эти измѣренія, пользуясь преподаванными приемами.

Такъ какъ существующее помѣщеніе лабораторіи можетъ вмѣстить не болѣе 20 человекъ работающихъ, то классы, численность которыхъ превышаетъ это количество, должны быть раздѣлены на группы, работающія поочередно.

Каждый ученикъ въ группѣ получаетъ задачу, относящуюся къ тому отдѣлу физики, который онъ недавно прослушалъ на лекціяхъ. Поэтому ученики I общаго класса еще не работаютъ въ лабораторіи, а наоборотъ лабораторскія занятія продолжаются и на II специальномъ, гдѣ лекціи по физикѣ уже не читаются. Исчерпавши запасъ доступныхъ ему задачъ, ученикъ временно прерываетъ свои занятія, чтобы вновь возвратиться къ нимъ, запасшись новыми теоретическими свѣдѣніями на лекціяхъ, которыя, въ свою очередь, примѣнены къ лабораторскимъ занятіямъ. — При такомъ расположеніи занятій, ученикъ въ среднемъ успѣетъ исполнить въ годъ около 10 работъ, а въ четыре года лабораторскаго обученія около 40 работъ.

Чтобы предлагаемая программа могла быть успѣшно

преподана большому числу учениковъ, руководство занятіями необходимо организовать слѣдующимъ образомъ.

Каждая задача, предлагаемая ученику, должна быть предварительно установлена, если позволить время, профессоромъ и *обязательно* его ассистентомъ, главные усилія котораго должны быть направлены на лабораторію.

Установка задачи состоитъ: 1) въ изученіи свойствъ снаряда; 2) въ выработкѣ способа измѣренія, возможно простаго и наиболѣе подходящаго для даннаго снаряда (иногда весьма несовершеннаго); 3) въ измѣреніи эталона, опредѣленіе котораго предлагается ученику. — Числа, полученные такимъ образомъ, записываются въ книгу и служатъ контролемъ результатовъ ученическихъ измѣреній, для которыхъ допускается ошибка, не превышающая извѣстнаго процента, смотря по трудности измѣренія и по свойствамъ снаряда.

Задавая ученику задачу, должно преподавать вкратцѣ устройство снаряда и способъ измѣренія.

Во время исполненія ученикомъ задачи надо слѣдить за тѣмъ, дѣйствуетъ ли онъ систематично, или попытками и разъяснять его сомнѣнія. Въ заключеніе принять отъ ученика результатъ и обсудить причины его неточности, или полной невѣрности. Въ послѣднемъ случаѣ предложить повторить измѣреніе.

Только при такой организаціи лабораторскія занятія по физикѣ могутъ привести къ желаемой цѣли, состоящей въ томъ, чтобы, во-первыхъ, сдѣлать для ученика болѣе осязательными физическія явленія и черезъ то оживить его интересъ къ изученію природы и укрѣпить въ его памяти результаты такого изученія, и, во-вторыхъ, чтобы развить въ ученикѣ умѣнье самостоятельно изслѣдовать явленіе и при томъ такъ, чтобы всегда идти систематически къ ясно опредѣленной цѣли, не теряя времени и силъ на случайныя и излишнія попытки.

Было постановлено: Для выясненія условій удобопримѣнимости на практикѣ вводить практическія занятія

по физикѣ постепенно, изыскивая въ то-же время необходимыя для этого средства.

Въ засѣданіи Совѣта 9 марта 1887 года обсуждался вопросъ о назначеніи времени для занятій воспитанниковъ въ лабораторіи — *Было постановлено*: лабораторію въ праздничные дни закрывать, а въ учебные дни допускать продолженіе занятій воспитанниковъ до 7 часовъ вечера, поставивъ непремѣннымъ условіемъ, чтобы эти занятія производились воспитанниками подъ непосредственнымъ надзоромъ и контролемъ состоящихъ при лабораторіяхъ помощниковъ главнаго лаборанта.

Въ засѣданіи Совѣта 31 марта 1887 года былъ утвержденъ нижеслѣдующій текстъ публикаціи о производствѣ пріемныхъ экзаменовъ въ 1887—88 учебномъ году:

На основаніи § 16 Высочайше утвержденнаго 1 іюня 1868 года устава Императорскаго Московскаго Техническаго Училища симъ доводится до всеобщаго свѣдѣнія, что пріемные экзамены для поступленія въ первый общій классъ Училища въ настоящемъ 1887 году будутъ производиться съ 16 августа по 1 сентября съ соблюденіемъ нижеслѣдующихъ правилъ:

1) Къ поступленію въ первый общій классъ Училища допускаются молодые люди, окончившіе курсъ классической гимназій съ аттестатомъ зрѣлости, а также прошедшіе полный курсъ семи классовъ реальныхъ училищъ и удостоенные одобрительнаго свидѣтельства объ окончаніи курса.

2) Вышеуказанное право поступленія распространяется также на молодыхъ людей, вышедшихъ изъ другихъ учебныхъ заведеній, въ которыхъ пройденный этими лицами, на основаніи предъявленныхъ ими свидѣтельствъ, курсъ приравненъ по заключенію Педагогическаго Совѣта Училища къ курсу семиклассныхъ реальныхъ училищъ Министерства Народнаго Просвѣщенія. Списокъ таковыхъ учебныхъ заведеній находится въ канцеляріи Училища.

3) Все лица, поступающія въ Училище, подвергаются однородному конкурентному испытанію по предметамъ: математикѣ, физикѣ, черченію и рисованію.

4) Испытаніе по математикѣ и физикѣ производится въ объемѣ гимназическаго курса этихъ предметовъ.

5) Испытаніе по черченію и рисованію ведется по программамъ преподаванія этихъ предметовъ въ основномъ отдѣленіи шести-классныхъ реальныхъ училищъ Министерства Народнаго Просвѣщенія.

II. Личный составъ служащихъ.

а) Почетные члены Педагогическаго Совѣта.

Его Императорское Высочество Великій Князь Константинъ Николаевичъ.

Его Императорское Высочество Николай Максимиліановичъ Романовскій, герцогъ Лейхтенбергскій.

Дѣйствительный тайный совѣтникъ, графъ Дмитрій Андреевичъ Толстой.

Генералъ-адъютантъ, генералъ отъ кавалеріи, князь Владимиръ Андреевичъ Долгоруковъ.

Академикъ, тайный совѣтникъ Пафнутій Львовичъ Чебышевъ.

Предсѣдатель Императорскаго Русскаго Техническаго Общества, дѣйствительный тайный совѣтникъ Петръ Аркадьевичъ Кочубей.

Тайный совѣтникъ Петръ Іоновичъ Губонинъ.

Военный инженеръ, генералъ-маіоръ Амандъ Егоровичъ Струве.

Президентъ технологическаго института въ Бостонѣ, профессоръ Джонъ Рункль.

Дѣйствительный статскій совѣтникъ Викторъ Карловичъ Делла-Восъ.

Дѣйствительный статскій совѣтникъ Дмитрій Ивановичъ Менделѣевъ.

б) Корреспондентъ Совѣта.

Инженеръ Александръ Веніаминовичъ Бари.

**в) Служащіе по административной и учебной части
Училища.**

Управляющій Училищемъ почетный опекунъ, генералъ-лейтенантъ Веніаминъ Ивановичъ Ахшарумовъ (по 29 іюля 1887 года).

Съ Высочайшаго соизволенія, послѣдовавшаго въ 29 день іюля 1887 года, управляющимъ Училищемъ назначенъ попечитель Московскаго Учебнаго Округа графъ Павелъ Алексѣевичъ Капнистъ.

Исправляющій должность директора, инспекторъ Училища, дѣйствительный статскій совѣтникъ Иванъ Васильевичъ Аристовъ.

Исправляющій должность инспектора Училища, коллежскій совѣтникъ Василій Ѳеодоровичъ Давыдовскій.

Исправляющій должность помощника инспектора, коллежскій совѣтникъ Николай Петровичъ Циркуновъ.

Профессоры:

Прикладной механики: Орловъ, Ѳеодоръ Евпловичъ, магистръ чистой математики Московскаго Университета, статскій совѣтникъ.

Построенія машинъ: (вакансія).

Химической технологии и металлургии: Коссовъ, Ильдефонсъ Казимировичъ, магистръ химической технологии, дѣйствительный статскій совѣтникъ.

Химической технологии: Рудневъ, Владимиръ Матвѣевичъ, магистръ химіи С.-Петербургскаго Университета, статскій совѣтникъ.

Высшей математики: Лѣтниковъ, Алексѣй Васильевичъ, докторъ чистой математики Московскаго Университета и членъ-корреспондентъ Императорской Академіи Наукъ, дѣйствительный статскій совѣтникъ.

Строительнаго искусства: Черепашинскій, Михаилъ Михайловичъ, сост. въ V-мъ кл. по чинопр.

Составленія проектовъ машинъ и заводовъ: Эшлиманъ, Александръ Карловичъ, кандидатъ математическихъ наукъ С.-Петербургскаго Университета, инженеръ-технологъ 1-го разряда, статскій совѣтникъ.

Технологіи волокнистыхъ вещ.: (вакансія).

Органической и неорганич. химіи: Колли, Александръ Андреевичъ, магистръ химіи Московскаго Университета, статскій совѣтникъ.

Общей и прикладной физики: Щегляевъ, Владимиръ Сергѣевичъ, магистръ физики Московскаго Университета, сост. въ V кл. по чинопр.

Аналитической механики: Жукѣвскій, Николай Егоровичъ, докторъ прикладной математики Московскаго Университета, статскій совѣтникъ (съ 8-го апрѣля 1887 г.).

Доценты:

По кафедрѣ химіи: Павловъ, Владимиръ Евграфовичъ, кандидатъ С.-Петербургскаго Университета, коллежскій секретарь.

По кафедрѣ технологіи металловъ и дерева: Мальцовъ, Павелъ Ивановичъ, инженеръ механикъ, коллежскій секретарь.

По кафедрѣ технологіи красильныхъ веществъ: Петровъ, Петръ Петровичъ, ученый инженеръ-технологъ, коллежскій совѣтникъ.

По кафедрѣ машиностроенія: Худяковъ, Петръ Кондратьевичъ, ученый инженеръ - механикъ, губернский секретарь.

По кафедрѣ высшей математики: Шапошниковъ, Николай Александровичъ, магистръ чистой математики Московскаго Университета, статскій совѣтникъ (онъ же секретарь Педагогическаго Совѣта).

Репетиторы:

/ Михалевскій, Иванъ Елеазаровичъ, статскій совѣтникъ.

Карельскихъ, Константинъ Павловичъ, инженеръ-механикъ.

Тумскій, Константинъ Ивановичъ, коллежскій совѣтникъ.

(одна вакансія).

Ассистенты:

По кафедрѣ механики: Румянцевъ, Василій Алексѣевичъ, инженеръ-механикъ, губернский секретарь.

По кафедрѣ физики: Величковскій, Анатолій Порфирьевичъ, кандидатъ С.-Петербургскаго Университета, коллежскій секретарь.

Лаборанты:

Главный лаборантъ: Никитинскій, Яковъ Яковлевичъ, ученый инженеръ-технологъ, коллежскій совѣтникъ.

Помощники главного лаборанта: { Поляковъ, Александръ Андреевичъ, инженеръ-технологъ, коллежскій секретарь.

{ Ку克林ъ, Евгеній Владимировичъ, кандидатъ С.-Петербургскаго Университета, коллежскій секретарь.

Законоучитель.

Виноградовъ, Николай Сергѣевичъ, священникъ, кандидатъ богословія.

Преподаватели:

Механической Федоровъ, Семень Андреевичъ, инженеръ-механикъ.
технологіи:

Строительнаго Залѣсскій, Василій Герасимо-
искусства: вичъ, коллежскій совѣтникъ.

Французскаго Давиньонъ, Левъ Францовичъ,
языка: статскій совѣтникъ.

Нѣмецкаго язы- Бикъ, Евгеній Николаевичъ, стат-
ка: скій совѣтникъ.

Естественной Мѣшаевъ, Викторъ Дмитріевичъ,
исторіи: статскій совѣтникъ.

Статистики: Фуксъ, Владимиръ Александро-
вичъ, надворный совѣтникъ.

Бухгалтеріи: Владимировъ, Моисей Евстафі-
евичъ, коллежскій асессоръ.

Черченія: { Гансъ, Адольфъ Христофоровичъ,
коллежскій совѣтникъ.

{ Ронжинъ, Николай Васильевичъ,
коллежскій секретарь (онъ же библиотекаръ).

Рисованія: Турчаниновъ, Капитонъ Ѳеодо-
ровичъ, статскій совѣтникъ.

Учители:

Церковнаго пѣ- Мамонтовъ, Викторъ Николае-
нія: вичъ, хормейстеръ Императорскихъ
Московскихъ театровъ.

Танцованія: Литавкинъ, Спиридонъ Алек-
сандровичъ, артистъ Император-
скихъ Московскихъ театровъ.

Воспитатели:

Пѣвnickій, Викторъ Ивановичъ, статскій совѣтникъ.

Діанинъ, Николай Павловичъ, титулярный совѣтникъ (по 1 января 1887 года).

Пахорскій, Николай Адриановичъ, титулярный совѣтникъ.

Дмитревскій, Иванъ Петровичъ, кандидатъ Московскаго Университета.

(три вакансіи).

Письмоводитель при инспекторъ

Кречетовъ, Петръ Семеновичъ (онъ же помощникъ бібліотекаря).

Служащіе по хозяйственной и административной части:

И. д. помощника Панинъ, Павелъ Ѳеодоровичъ, директора по хозяйственной части: коллежскій секретарь.

Правитель дѣлъ: Еремѣевъ, Ѳеодоръ Дмитріевичъ, коллежскій ассессоръ.

Бухгалтеръ: Лакашинъ, Владимиръ Петровичъ, надворный совѣтникъ.

Архитекторъ: Каминскій, Александръ Степановичъ, коллежскій секретарь.

И. д. эконома: Поляковъ, Андрей Гавриловичъ, коллежскій совѣтникъ.

Казначей и полицеймейстеръ: Фроловъ, Сергій Николаевичъ, надворный совѣтникъ.

Кастелянша: Хавская, Елизавета Алексѣевна.

Служащіе при церкви:

Священникъ: Виноградовъ, Николай Сергѣевичъ, кандидатъ богословія.

Діаконъ: Соколовъ, Яковъ Ивановичъ.
(на вакансіи псаломщика).

Церковный староста: Бородинъ, Николай Михайловичъ, потомственный почетный гражданинъ.

Служащіе при лазаретѣ:

Врачъ:	Карлинъ, Михаилъ Арсеньевичъ, дѣйствительный статскій совѣтникъ.
Сверхштатный врачъ:	Боголюбовъ, Мелитонъ Петровичъ, коллежскій совѣтникъ.
Старшій фельдшеръ:	Воронцовъ, Петръ Никитичъ, коллежскій регистраторъ.
Младшій фельдшеръ:	Кирилловъ, Александръ Кирилловичъ, коллежскій регистраторъ.

Учебныя мастерскія и механическій заводъ.

Инспекторъ учебныхъ мастерскихъ:	Протопоповъ, Павелъ Петровичъ, инженеръ-механикъ, губернский секретарь.
----------------------------------	---

Завѣдующіе механическимъ заводомъ:

Главный инженеръ-механикъ:	Пермяковъ, Александръ Ивановичъ, инженеръ-механикъ, губернский секретарь.
Помощникъ главно-инженеръ-механика:	Петровъ, Никаноръ Петровичъ, инженеръ-механикъ, коллежскій секретарь.
Бухгалтеръ:	Липинскій, Іосифъ Ѳомичъ, коллежскій совѣтникъ.

Завѣдующіе отдѣльными мастерскими:

Учебно-слесарною:	Протопоповъ, Павелъ Петровичъ, инженеръ-механикъ, губернский секретарь.
Чертежною:	Варенниковъ, Ишполитъ Георгіевичъ, инженеръ-механикъ.
Токарною по дереву:	Ларіоновъ, Герасимъ Ларіоновичъ, ученый мастеръ.
Кузнечною:	Буровъ, Семенъ Васильевичъ, ученый мастеръ.

Модельною:	Михайловъ, Андрей Михайловичъ, ученый мастеръ.
Токарною по металл:	Поповъ, Степанъ Дмитріевичъ, ученый мастеръ.
Литейною:	Веревкинъ, Павелъ Ивановичъ, ученый мастеръ.

Служащіе при мастерскихъ:

Магазинъ-вахтеръ:	Дюмулень, Ипполитъ Генриховичъ, коллежскій совѣтникъ (испр. должн., по найму).
Смотритель мастерскихъ:	Благообразовъ, Николай Ивановичъ, потомственный почетный гражданинъ.

г) Движеніе по службѣ.

Уволены по прошеніямъ: отъ должности—воспитателя, титулярный совѣтникъ Діанинъ съ 1 января 1887 года; *отъ службы по найму:* доцентъ по кафедрѣ составленія проектовъ и смѣтъ фабрикъ и заводовъ коллежскій совѣтникъ Малышевъ—съ 1 сентября 1886 г. и преподаватель русскаго языка статскій совѣтникъ Виноградовъ съ 1 сентября 1886 года.

Опредѣлены: профессоромъ общей и прикладной физики магистръ Московскаго Университета Щегляевъ—съ 16 октября 1886 года; ассистентомъ по кафедрѣ механики инженеръ-механикъ Румянцевъ—съ 14 сентября 1886 года, и воспитателемъ кандидатъ Московскаго университета Дмитревскій—съ 1 іюня 1887 года (онъ же исправлялъ эту должность по найму съ 1 февраля 1887 года).

Назначены: сверхштатный профессоръ теоретической механики Жуковскій штатнымъ профессоромъ аналитической механики—съ 8 апрѣля 1887 года; преподаватели черченія Гансъ и Ронжинъ—членами Педагогическаго Совѣта на 1886—87 учебный годъ съ 21 августа 1886 года (послѣдніе двое съ оставленіемъ въ за-

нимаемыхъ должностяхъ); псаломщикъ Соколовъ діаконъ съ 26 іюля 1887 года.

Утверждены въ должностяхъ: инспектора учебныхъ мастерскихъ (исправлявшій оную) Протопоповъ съ 1 октября 1886 года и бухгалтера (исправлявшій оную) Лакашинъ съ 1 ноября 1886 года.

Избранъ: въ секретари Педагогическаго Совѣта на 1886—87 учебный годъ доцентъ Шапошниковъ— 22 сентября 1886 г.

Произведены за выслугу лѣтъ со старшинствомъ: въ *статскіе совѣтники:* профессоръ Рудневъ—съ 2 января 1886 г.; въ *коллежскіе совѣтники:* и. д. инспектора Давыдовскій—съ 1 октября 1883 г.; преподаватель Залѣсскій—съ 12 октября 1886 года и сверхштатный врачъ Боголюбовъ—съ 23 сентября 1870 г.; въ *надворные совѣтники:* казначей и полицеймейстеръ Фроловъ—съ 13 января 1886 года; въ *мѣстныя совѣтники:* воспитатель Пахорскій—съ 3 января 1886 г. и въ *коллежскіе секретари:* и. д. помощника директора по хозяйственной части Панинъ—съ 30 января 1884 г.; помощникъ главнаго инженеръ-механика Петровъ—съ 1 мая 1885 г.; помощникъ главнаго лаборанта Поляковъ—съ 23 сентября 1886 г., и архитекторъ Каминскій—съ 17 марта 1886 г.

Утверждены со старшинствомъ: въ чинѣ *коллежскаго секретаря:* доцентъ Павловъ—съ 1-го ноября 1883 года и ассистентъ Величковскій—съ 16 декабря 1885 года, оба по степени кандидата С.-Петербургскаго Университета, и въ чинѣ *губернскаго секретаря:* ассистентъ Румянцевъ съ 14 сентября 1886 года по званію инженеръ-механика.

Награждены: чиномъ *дѣйствительнаго статскаго совѣтника:* и. д. директора, инспекторъ Аристовъ и врачъ Карлинъ; *орденами:* *Св. Станислава 1 степени* профессоръ Лѣтниковъ, *Св. Владиміра 3 степени* профессоръ Эшлиманъ, *Св. Владиміра 4 степени* профессоръ Орловъ и преподаватель Бикъ; *Св. Ста-*

нислава 2 степени доцентъ Шапошниковъ и *Св. Станислава 3 степени* преподаватель Ронжинъ.

д) Высочайшія повелѣнія и особыя распоряженія.

Государь Императоръ, согласно положенію Опекунскаго Совѣта, въ 5-й день сего іюля Высочайше соизволилъ на введеніе въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ съ начала 1886—78 учебнаго года, взаимнѣ полуторачасовыхъ, часовыхъ лекцій, безъ сокращенія существующей нынѣ поурочной платы преподавателямъ за полуторачасовыя лекціи.

Высочайше утвержденнымъ 21 ноября сего года положеніемъ Военнаго Совѣта постановлено:

1) Предоставить войсковому начальству Терскаго казачьяго войска имѣть двѣ стипендіи вообще въ высшихъ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ Имперіи, съ тѣмъ, чтобы на эти стипендіи замѣщались войсковые воспитанники, безъ различія происхожденія, преимущественно бѣднѣйшаго состоянія.

2) Для замѣщаемыхъ на означенныя стипендіи въ Императорское Московское Техническое Училище вносить непосредственно въ сіе послѣднее по 450 рубл. въ годъ на каждого стипендіата. По всѣмъ же прочимъ высшимъ техническимъ учебнымъ заведеніямъ на содержаніе каждого стипендіата и для уплаты за слушаніе лекцій производить по 420 руб. въ годъ.

3) Определенный предыдущимъ пунктомъ постоянный расходъ, какъ равно и расходъ, слѣдующій на обезпеченіе войсковой стипендіи съ нынѣшняго 1886 — 87 учебнаго года воспитанниковъ Терскаго войска, слушающихъ лекціи въ Московскомъ Техническомъ Училищѣ и въ Институтѣ Гражданскихъ Инженеровъ, отнести на счетъ 25 тысячъ рубл., определенныхъ изъ общаго войскаго капитала Терскаго войска, по Высочайшему повелѣнію 1-го августа 1870 года, вообще на учебную часть въ названномъ войскѣ.

Государь Императоръ, Именнымъ указомъ Правительствующему Сенату, воспослѣдовавшимъ въ 5-й день іюля 1887 года, Высочайше повелѣть соизволилъ на передачу Императорскаго Московскаго Техническаго Училища изъ Вѣдомства учреждений Императрицы Маріи въ вѣдѣніе Министерства Народнаго Просвѣщенія.

Указъ Правительствующему Сенату.

Въ соотвѣтствіе принятыхъ, по *Нашимъ* указаніямъ, мѣръ къ сосредоточенію въ Министерствѣ Народнаго Просвѣщенія завѣдыванія техническимъ образованіемъ въ Имперіи, *Повелѣваемъ*:

1) Императорское Московское Техническое Училище передать изъ Вѣдомства учреждений Императрицы Маріи въ вѣдѣніе Министерства Народнаго Просвѣщенія.

2) Находящіяся въ г. Москвѣ училищныя зданія съ землею и движимостью передать въ вѣдѣніе означеннаго Министерства до тѣхъ поръ, пока будетъ существовать Техническое Училище, съ тѣмъ, чтобы въ случаѣ отклоненія сего имущества отъ цѣлей техническаго образованія, имущество это было возвращено Вѣдомству учреждений Императрицы Маріи.

3) Дачу въ с. Косинѣ (Московского уѣзда), исключивъ изъ состава училищнаго имущества, оставить въ Вѣдомствѣ учреждений Императрицы Маріи.

4) Основной (неприкосновенный), запасный и оборотный капиталы Техническаго Училища оставить въ Вѣдомствѣ учреждений Императрицы Маріи, прочіе-же капиталы, которыми обезпечиваются стипендіи въ означенномъ Училищѣ, перечислить въ вѣдѣніе Министерства Народнаго Просвѣщенія для употребленія согласно назначенію.

5) Отпускать въ пособіе Государственному Казначейству на содержаніе Московскаго Техническаго Училища, изъ средствъ Вѣдомства учреждений Императрицы Маріи, въ 1888, 1889, 1890 и 1891 годахъ по сто че-

тыре тысячи рублей, а въ 1892 году пятьдесятъ двѣ тысячи рублей и затѣмъ совершенно прекратить участіе Вѣдомства въ содержаніи Училища; и

6) Установленіе подробностей передачи Московскаго Техническаго Училища и самую передачу въ возможно-непродолжительномъ времени предоставить соглашенію Министра Народнаго Просвѣщенія съ Главноуправляющимъ Собственною *Нашею* канцеляріею по учрежденіямъ Императрицы Маріи.

Правительствующій Сенатъ не оставитъ учинить должное по сему распоряженіе.

На подлинномъ Собственною Его Императорскаго Величества рукою начертано:

„АЛЕКСАНДРЪ“.

Въ Петергофѣ,
5 іюля 1887 г.

Государь Императоръ въ 29 день іюля 1887 года Высочайше повелѣтъ соизволилъ на предоставленіе Попечителю Московскаго Учебнаго Округа графу Павлу Алексѣевичу Капнисту по управленію Императорскимъ Московскимъ Техническимъ Училищемъ тѣхъ же правъ, которыми пользовался почетный опекунъ, завѣдывавшій означеннымъ Училищемъ.

е) Особые труды профессоровъ и преподавателей.

Профессоръ В. М. Рудневъ напечаталъ въ Извѣстіяхъ Петровской Земледѣльческой Академіи за 1886 годъ „О сельскохозяйственномъ винокуреніи“ и въ Dinger's polytechnisches Journal — „Ueber die Fabrikation der Holzessigsäure“.

Профессоръ М. М. Черепашинскій напечаталъ въ отчетѣ Политехническаго Общества „Результаты новѣйшихъ опытовъ надъ сопротивленіемъ желѣза и стали“.

Доцентъ П. К. Худяковъ сдѣлалъ сообщенія:

1) Политехническому Обществу — „О новыхъ регуляторахъ Proell.“

2) Ученому Отдѣлу Общества Распространенія Техническихъ Знаній „О фабрикаціи прогарныхъ трубъ изъ волнистаго желѣза и примѣненіи ихъ въ практикѣ“ и „Объ испытаніяхъ Баушингера надъ сопротивленіемъ металлическихъ и каменныхъ нагруженныхъ колоннъ въ огнѣ и при быстромъ охлажденіи.“

Сдѣлалъ одно публичное объясненіе коллекцій Политехническаго Музея по производству стальныхъ перьевъ и опубликовалъ въ „Атласѣ исполнительныхъ чертежей машинъ заводскихъ зданій и прочихъ техническихъ сооружений“ детальные чертежи новыхъ типовъ паровыхъ машинъ, паровыхъ котловъ и проч. (12 листовъ размѣрами 28 дюйм.×21 дюймъ).

Доцентъ Н. А. Шапошниковъ выпустилъ вторымъ изданіемъ „Основаніе теоріи детерминантовъ“ и вновь— „Введеніе въ Алгебру“ и „Сборникъ алгебраическихъ задачъ.“

Преподаватель В. Г. Залѣсскій сдѣлалъ сообщеніе въ отдѣленіи Русскаго Императорскаго Техническаго Общества по вопросу отопленія и вентиляціи зданій (помѣщено въ Трудахъ Общества за 1887 годъ).

Репетиторъ К. И. Тумскій напечаталъ въ журналѣ „Русская Мысль“ „Обзоръ новостей технологіи.“

III. Личный составъ учащихся.

а) Число учащихся.

Къ началу 1886—1887 учебнаго года состояло на лицо:

Казеннокоштныхъ.....	72
----------------------	----

Своекоштныхъ пансіонеровъ и стипендіатовъ.....	54
--	----

Полупансіонеровъ.....	1
-----------------------	---

Приходящихъ учениковъ.....	355
----------------------------	-----

Стипендіатовъ Министерства Народнаго	
--------------------------------------	--

Просвѣщенія.....	5
------------------	---

Итого.....	487
------------	-----

По 1-е іюня 1887 года

а) выпущено:

Съ правомъ ученаго мастера... 1

б) уволено.

Казеннокоштныхъ... 1

Своекоштныхъ пансіонеровъ... 1

Приходящихъ учениковъ... 30

Всего 32

в) принято:

Приходящихъ учениковъ... 7

г) перечислено:

Изъ приходящихъ въ казеннокоштные... 1

„ пансіонеровъ въ приходящіе... 7

„ приходящихъ въ пансіонеры... 2

„ пансіонеровъ въ полупансіонеры... 1

„ полупансіонеровъ въ приходящіе... 1

Всего..... 12

Къ 1-му іюня 1887 года состояло:

Казеннокоштныхъ... 72

Своекоштныхъ пансіонеровъ и стипендіатовъ... 47

Полупансіонеровъ... 1

Приходящихъ учениковъ... 336

Стипендіатовъ Министерства Народнаго
Просвѣщенія... 5

Всего 461

Съ 1-го іюня 1887 года по 10-е октября:

а) выпущено:

Съ правами инженеръ-механика... 18

„ „ инженеръ-технолога... 16

Съ правами ученаго мастера	4
Стипендіатовъ Министерства Народнаго Просвѣщенія.....	5
Всего	43

б) уволено:

Пансіонеровъ	1
Приходящихъ учениковъ.....	6
Всего	7

в) принято:

Приходящихъ учениковъ.....	2
----------------------------	---

г) умерло:

Приходящихъ учениковъ.....	1
----------------------------	---

д) перечислено:

Изъ приходящихъ въ казеннокоштные...	17
„ пансіонеровъ въ приходящіе.....	7
„ приходящихъ въ пансіонеры.....	2
„ полупансіонеровъ въ приходящіе....	1
Всего	27

На открывшіяся вакансіи подано прошеній:

Въ своекоштные пансіонеры.....	4
„ приходящіе ученики.....	59
Всего	63

Принято по конкурсу:

Въ своекоштные пансіонеры.....	4
„ приходящіе ученики.....	45
Всего	49

Затѣмъ къ началу 1887—1888 учебнаго года состоитъ на лицо:

Казеннокоштныхъ	72
Своекоштныхъ пансіонеровъ и стипендіатовъ.	43
Приходящихъ учениковъ.	345
Занимающихся въ мастерскихъ по окончаніи теоретическаго курса.	1
Всего	461

Въ теченіе 1886—1887 учебнаго года состояли стипендіатами:

Имени Его Императорскаго Величества (Коломенской Городской Думы) — Добычинъ Петръ и Зубаревъ Дмитрій.

Имени въ Бозѣ почивающей Императрицы Маріи Ѳеодоровны (Собственной Его Императорскаго Величества Канцеляріи по учрежденіямъ Императрицы Маріи)—С у-тоцкій Стефанъ.

Имени въ Бозѣ почивающаго Его Императорскаго Высочества Принца Петра Георгіевича Ольденбургскаго—Турчаниновъ Митрофанъ.

Имени Его Императорскаго Высочества Великаго Князя Константина Николаевича (Московского Биржеваго Комитета)—Дмитріевъ Дмитрій.

Имени бывшаго Министра Финансовъ М. Х. Рейтерна (Московского Биржеваго Комитета)—Орловъ Петръ.

Имени Князя С. М. Голицына—Чижиговъ Александръ.

Кавказскими стипендіатами: Ивановъ 1-й Николай, Карповъ Ѳедоръ, Даль Левъ, Степановъ Тикранъ, Теръ-Іоаннесовъ Акопъ, Теръ-Татеосовъ Аршакъ, Киферъ Людвигъ и Шереметко Петръ.

Имени барона Дельвига—Разинъ Константинъ.

Имени тайнаго совѣтника И. Н. Дурново (Ростовской на-Дону Городской Думы)—Ходатаевъ Петръ.

Имени умершаго потомственнаго почетнаго гражданина В. Ѳ. Кокина—Около-Кулакъ Николай.

Имени умершаго московскаго купца Г. Г. Хлѣбникова—Гоголовъ Александръ.

Имени умершаго инженеръ-механика С. И. Гарелина—Митрофановъ Петръ.

Болгарскій стипендіатъ—Калянджіевъ Цанъ.

Вспогательнаго Общества Купеческихъ Прикащиковъ въ Москвѣ—Костроминъ Сергѣй, Хохловъ Петръ и Тряпкинъ Владиміръ.

Донскаго казачьяго войска—Пѣговъ Дмитрій, Ротовъ Александръ и Самсоновъ Яковъ.

Имени въ Бозѣ почивающаго Императора Александра II (Владикавказской городской Думы) — Козловскій Елисѣй.

Терскаго казачьяго войска—Мелиховъ Иванъ.

б) Распреѣленіе учащихся по классамъ къ 1-му іюня 1887 года.

К Л А С С Ы.	Казенно- коштныхъ.	Пансіонеровъ.	Полупансіонеровъ.	Приходящихъ.	ВСЕГО.
Въ 1-мъ общемъ классѣ	2	20	1	154	177
Во 2-мъ общемъ классѣ	6	11	—	62	79
Въ 3-мъ общемъ классѣ	16	6	—	36	58
„ 1-мъ спеціальному классѣ.	19	6	—	45	70
Во 2-мъ спеціальному классѣ.	11	2	—	16	29
Въ 3-мъ спеціальному классѣ.	17	1	—	17	35
„ практическомъ разрядѣ.	1	1	—	6	8
Всего . . .	72	47	1	336	456
Стипендіатовъ Мѣнѣстерства Народнаго Просвѣщенія	—	—	—	—	5
Итого . . .	—	—	—	—	461

в) Распредѣленіе учащихся по классамъ къ началу
1887—1888-го учебнаго года.

К Л А С С Ы.	Казенно- коштныхъ.	Пансіоне- ровъ.	Полупансіо- неровъ.	Приходя- щихъ.	ВСЕГО.
Въ 1-мъ общемъ классѣ	1	9	—	82	92
Во 2-мъ общемъ классѣ	9	12	—	119	140
Въ 3-мъ общемъ классѣ	10	10	—	48	68
„ 1-мъ спеціальному классѣ.	19	3	—	36	58
Во 2-мъ спеціальному классѣ.	20	6	—	42	68
Въ 3-мъ спеціальному классѣ.	12	2	—	15	29
„ практическомъ разрядѣ.	1	1	—	3	5
Всего . .	72	43	—	345	460
Занимающихся въ мастерскихъ	—	—	—	—	1
Итого . .	—	—	—	—	461

г) Приѣмъ учащихся.

Послѣ приѣмныхъ испытаній, окончившихся 28 августа 1887 года, по опредѣленію Педагогическаго Совѣта, были приняты въ Училище:

Въ 1-й общій классъ.

Алифатовъ Георгій.	Гарнишевскій Алексѣй.
Арцимовичъ Іосифъ.	Гуськовъ Владиміръ.
Биттъ Эмилій.	Евдокимовъ Василій.
Виноградовъ Оедоръ.	Зворыкинъ Иванъ.
Витковскій Казиміръ.	Золотаревъ Иванъ.
Власовъ Иванъ.	Кабачинскій Николай.
Волковъ Леонидъ,	Казанцевъ Алексѣй.

Киферъ Людвигъ.	Солодовниковъ Сергѣй.
Коржевинъ Дмитрій.	Стариковъ Аркадій.
Костюченко Петръ.	Теръ-Андреасянцъ Мхитаръ.
Кринари Петръ.	Тимоееевъ Василій.
Лебедевъ Сергѣй.	Тонковъ Владиміръ.
Малиновскій Николай.	Федотовъ Николай.
Малиновскій Эдуардъ.	Хмѣлевскій Викторъ.
Миттельштедтъ Юлій.	Холевинскій Петръ.
Новоселовъ Иванъ.	Шиндлеръ Камилль.
Офросимовъ Алексѣй.	Шишкинъ Петръ.
Петровъ Николай.	Шмидтъ Анатолій.
Салтычевъ Иванъ.	Шульгинъ Дмитрій.
Серебряковъ Багратъ.	Юкинъ Александръ.
Скржипинскій Казиміръ.	Юсовъ Александръ.

Во 2-й общій классъ.

Березовскій Николай
Кастальскій Сергѣй.

Въ 1-й спеціальный классъ:

а) Инженерно-механическаго отдѣленія.

Бондаревъ Евгеній.
Великосельскій Константинъ.
Коленда Константинъ.
Некрасовъ Владиміръ.

б) Инженерно-технологическаго отдѣленія.

Круковскій Гирша.

Изъ бывшихъ воспитанниковъ приняты:

Въ 1-й общій классъ.

Агееенко Леонтій.
Кислаковскій Леонидъ.
Рейзинъ Іуда.
Ханларовъ Агаларъ.

Эпштейнъ Борисъ.

Плихановъ Василій.

Во 2-й общій классъ.

Доковскій Тимоѳей.

Рагозинъ Владиміръ.

б) Переходъ учащихся изъ класса въ классъ.

Послѣ годичныхъ экзаменовъ, окончившихся 3 іюня 1887 года, по опредѣленію Педагогическаго Совѣта, переведены:

Изъ 1-го общаго класса во 2-й общій.

Барановъ Георгій.

Беграмовъ Александръ.

Березинъ Михаилъ.

Берченко Николай.

Бирюковъ Дмитрій.

Бирюковъ Иванъ.

Бойчевскій Александръ.

Болдыревъ Алексѣй.

Благовѣщенскій Семенъ.

Бурджаловъ Георгій.

Буржинскій Владиміръ.

Бутковскій Файвель.

Бухоновъ Иннокентій.

Валлеръ Ааронъ.

Векшинъ Петръ.

Велецкій Александръ.

Веселовскій Евгеній.

Войтаховъ Петръ.

Володиміровъ Николай.

Вороновъ Николай.

Галаховъ Николай.

Гесслеръ Александръ.

Гингляттовъ Иванъ.

Гирей-ГаджиМагометъ-Оглы.

Головнинъ Михаилъ.

Гольдовскій Игнатій.

Горбачевъ Иванъ.

Горбуновъ Григорій.

Горленко Сергѣй.

Городецкій Гершъ.

Громанъ Борисъ.

Грязновъ Алексѣй.

Гулуловъ Степанъ.

Гуль Борисъ.

Гурляндъ Исаакъ.

Давиньонъ Петръ.

Дара Леонидъ.

Деканозовъ Георгій.

Дмитріевъ Дмитрій.

Добряковъ Иванъ.

Долинскій Леонидъ.

Дроздовъ Владиміръ.

Дукельскій Исаакъ.

Дьяконовъ Петръ.

Егоровъ Семень.	Нейманъ Вацлавъ.
Ефремовъ Михайлъ.	Немолодышевъ Степанъ.
Жаковъ Павелъ.	Никитскій Иванъ.
Ждановъ Ѳедоръ.	Никольскій Николай.
Жученковъ Дмитрій.	Никулинъ Василій.
Закъ Лазаръ.	Около-Кулакъ Николай.
Зиминъ Николай.	Первакъ Яковъ.
Зозулевскій Иванъ.	Первушинъ Алексѣй.
Ивановъ Иванъ.	Петровъ Александръ.
Ильинскій Петръ.	Плихановъ Василій.
Кадагидзе Дмитрій.	Покровскій Яковъ.
Калабинъ Николай.	Покровскій Константинъ.
Каплянскій Овсей.	Полозовъ Александръ.
Кардашевъ Иванъ.	Пономаревъ Степанъ.
Карнѣевъ Владиміръ.	Поповъ Павелъ.
Карпачевскій Иванъ.	Пузановъ Николай.
Керчикеръ Иванъ.	Раутенбергъ Михайлъ.
Кислаковскій Леонидъ.	Региреръ Израиль.
Кирпичниковъ Николай.	Семеновъ Михайлъ.
Комаровичъ Михайлъ.	Семеновъ Павелъ.
Котельниковъ 2-й Алексѣй.	Семилѣтовъ Александръ.
Котковъ Сергѣй.	Сергѣевъ Николай.
Котляровъ Филиппъ.	Скачковъ Михайлъ.
Козловскій Елисѣй.	Слободчиковъ Петръ.
Лепехинъ Михайлъ.	Смирновъ Викторъ.
Лихтенштейнъ Нотель.	Сорокинъ Андрей.
Лыжинъ Иванъ.	Стахѣевъ Ѳедоръ.
Лялинъ Леонидъ.	Страховъ Петръ.
Малининъ Николай.	Судра Иванъ.
Машкилейсонъ Ааронъ.	Теръ-Іоаннесовъ Аконъ.
Машкилейсонъ Овсей.	Туневъ Иванъ.
Марковъ Николай.	Тюремновъ Николай.
Мирошниченко Сергѣй.	Удинъ Михайлъ.
Молинари Георгій.	Фонъ-Бремзенъ Алексѣй.
Морозовъ Василій.	Фроловскій Василій.
Мыльниковъ Андрей.	Ховренко Михайлъ.
Напалковъ Николай.	Челокаевъ Дмитрій.

Шереметко Петръ.	Эпштейнъ Владиміръ.
Шифринъ Авраамъ.	Оедоровъ Сергѣй.
Эпштейнъ Борисъ.	

Изъ 2-го общаго класса въ 3-й общій.

а) Механическаго отдѣленія:

Абрамовъ Николай.	Палимпсестовъ Владиміръ.
Адамовъ Амбарцумъ.	Падьшау Александръ.
Анисимовъ Илья.	Панфиловъ Николай.
Бенкевичъ Анатолій.	Пестичъ Петръ.
Бонковскій Юліанъ.	Піотровичъ Петръ.
Бушуевъ Александръ.	Пушкинъ Константинъ.
Близнянскій Яковъ.	Пѣговъ Дмитрій.
Васильевъ Василій.	Ромейко-Гурко Николай.
Васильевъ Николай.	Ротовъ Александръ.
Грейнеръ Карлъ.	Рудневъ Оедоръ.
Григорьевъ Иванъ.	Савченко Сергѣй.
Долголенко Викторъ.	Сахацкій Сергѣй.
Доковскій Тимоѳей.	Семеновъ Николай.
Дьяковъ Владиміръ.	Сорокинъ Иванъ.
Засыпкинъ Иванъ.	Степановъ Тикранъ.
Зворыкинъ Владиміръ.	Суздальцевъ Евгеній.
Зворыкинъ Гурій.	Теръ-Маркозовъ Иванъ.
Ивановъ 2-й Николай.	Троицкій Николай.
Игнатьичевъ Константинъ.	Флоровъ Александръ.
Калугинъ Петръ.	Четвертининъ Автономъ.
Кіянницынъ Иванъ.	Чижиговъ Александръ.
Куксенко Николай.	Шереръ Адольфъ.
Локшинскій Николай.	Щербаковъ Сергѣй.
Мухинъ Оедоръ.	Яшновъ Андрей.

б) Химическаго отдѣленія.

/ Бузниковъ Владиміръ.	Калянджіевъ Цанъ.
Завадскій Андрей.	Карповъ Аполлонъ.
Игумновъ Иванъ.	Козьминъ Владиміръ.

Константиновъ Аполлонъ.	Тряпкинъ Владиміръ.
Кутеповъ Ѳедоръ.	Хохловъ Петръ.
Митрофановъ Петръ.	Шеурленъ Николай.
Соколовъ Илья.	15 Юрьевъ Григорій.
Срѣтенскій Александръ.	

Изъ 3-го общаго класса въ 1-й спеціальный.

а) Инженерно-механическаго отдѣленія.

Афанасьевъ Дмитрій.	Никитинъ Антонъ.
Березинъ Петръ.	Николаевъ Евгеній.
Волковичъ Иванъ.	Образцовъ Михаилъ.
Волоховъ Николай.	Полещукъ Алексѣй.
Ворогушинъ Александръ.	Потресовъ Михаилъ.
Гомолицкій Владиміръ.	Пушечниковъ Владиміръ.
Ивановъ 2-й Павелъ.	Салтыковъ Александръ.
Квятковскій Донатъ.	Сиптицъ Петръ.
Козьминъ Сергѣй.	Сумеркинъ Алексѣй.
Колдаевъ Владиміръ.	Сухотинъ Всеволодъ.
Коровинъ Александръ.	Турчаниновъ Митрофанъ.
Коротковъ Петръ.	Хлѣбниковъ Сергѣй.
Кронебергъ Алексѣй.	Черногрязскій Яковъ.
Кузнецовъ Сергѣй.	Черновъ Павелъ.
Курицынъ Михаилъ.	Шатрюковъ Иларіонъ.
Окновъ Михаилъ.	Цюндзевицкій Михаилъ.
Михайловъ Василій.	Ѳаддеевъ 2-й Николай.

б) Инженерно-технологическаго отдѣленія.

16 Аркинъ Лазаръ.	Карчагинъ Александръ.
Бардскій Людвигъ.	Кишкинъ Григорій.
Бойчевскій Петръ.	Кугушевъ Леонидъ.
Гедике Владиміръ.	Митрофановъ Владиміръ.
Гуськовъ Сергѣй.	Никольскій Константинъ.
Даль Левъ.	Оржешко Францъ.
Доковскій Степанъ.	Рендель Мовша.
Зарембо Василій.	Степановъ Дмитрій.
Каринъ Петръ.	Таршиловъ Василій.

Изъ 1-го спеціального класса во 2-й спеціальный.

а) Инженерно-механическаго отдѣленія.

Анучкинъ Алексѣй.	Назаровъ Григорій.
Барсовъ Константинъ.	Никифоровъ Алексѣй.
Березовскій Иванъ.	Ольденборгеръ Владиміръ.
Бруевичъ Василій.	Органовъ Владиміръ.
Бѣловъ Николай.	Ошанинъ Юрій.
Бубновъ Владиміръ.	Поляковъ Ермолай.
Ветчинкинъ Афанасій.	Попелышкинъ-Каськовъ
Герасимовъ Сергѣй.	Нилъ.
Гречинъ Герасимъ.	Разинъ Константинъ.
Гуляевъ Римма.	Розинъ Александръ.
Державинъ Алексѣй.	Россихинъ Александръ.
Дурденевскій Петръ.	Саларевъ Петръ.
Енишерловъ Константинъ.	Самгинъ Сергѣй.
Ермолинъ Василій.	Самойловъ Александръ.
Кнорре Оедоръ.	Сперберъ Фридрихъ.
Кожевниковъ Петръ.	Толоконниковъ Алексѣй.
Кожевниковъ Яковъ.	Тропаревскій Иванъ.
Костроминъ Сергѣй.	Успенскій Яковъ.
Кротковъ Левъ.	Шойгамъ Хаймъ-Юдка.
Моргулисъ Исаакъ.	Юрьевъ Юасафъ.

б) Инженерно-технологическаго отдѣленія.

34 Алабинъ Константинъ.	Ивановъ Варлаамъ.
Бонковскій Александръ.	Ивановъ І-й Николай.
Булашевичъ Павелъ.	Инштетовъ Александръ.
Васильевъ Петръ.	Крапивинъ Владиміръ.
Вилькенъ Карлъ.	Кропанинъ Леонидъ.
Горбачевъ Петръ.	Ливенъ Германъ.
Горбенко Яковъ.	Медвѣдниковъ Иванъ.
Давыдовъ Аркадій.	Михальскій Антоній.
Егоровъ Иванъ.	Овсяниковъ Николай.
Епифановъ Степанъ.	Плаксицкій Петръ.
Жуковъ Леонидъ.	Розановъ Алексѣй.

Сутоцкій Стефанъ.	Фидлеръ Иванъ.
Травинъ Яковъ.	Ходатаевъ Петръ.
Трубниковъ Никаноръ.	Чернышевъ Сергѣй.
Усышкинъ Михаилъ.	

Изъ 2-го спеціального класса въ 3-й спеціальный.

а) Инженерно-механическаго отдѣленія:

Боевъ Николай.	Левонтинъ Іехіель.
Брюхановъ Леонтій.	Михальскій Станиславъ.
Данцигеръ Соломонъ.	Подерни Сергѣй.
Дормидонтовъ Алексѣй.	Семеновъ Иванъ.
Зубаревъ Дмитрій.	Соснинъ Владиміръ.
Кокуринъ Павелъ.	Якоби Вильямъ.
Кордесъ Сергѣй.	

б) Инженерно-технологическаго отдѣленія.

63 Аносовъ Яковъ.	Ланговой Сергѣй.
Добычинъ Петръ.	Нечаевъ Семенъ.
Дьяконовъ Николай.	Никитинскій Сергѣй.
Карповъ Ѳеодоръ.	Плющовъ Степанъ.
Комовъ Антонъ.	Прокопенковъ Василій.
Котельниковъ 1-й Алексѣй.	Сѣнцовъ Михаилъ.
Крашенинниковъ Василій.	Устимовичъ Николай.
Кудрявцевъ Алексѣй.	78 Шустовъ Александръ.

Практическій разрядъ.

Переведены со 2-го курса на 3-й курсъ:

Дубовъ Николай.
Зайковскій Николай.
Панченко Семенъ.
Пѣвницкій Николай.
Теръ-Татеосовъ Аршакъ.

е) Выпускъ учащихся.

1. *Съ званіемъ инженеръ-механика и награжденіемъ Высочайше утвержденнымъ знакомъ отличія.*

Андреяновъ Павелъ.	Купецкій Александръ.
Бабовъ Аршакъ.	Меерсонъ Соломонъ.
Гартельманъ Моисей.	Перловъ Василій.
Готье Александръ.	Протопоповъ 2-й Александръ.
Дормидонтовъ Николай.	Рязанцевъ Иванъ.
Завьенко Дмитрій.	Токаревъ Николай.
Зябловъ Алексѣй.	Фаддеевъ Николай.
Кузьминъ Иванъ.	Фатовъ Александръ.
Кулишеръ Моисей.	Федотовъ Александръ.

2. *Съ званіемъ инженеръ-технолога и награжденіемъ Высочайше утвержденнымъ знакомъ отличія.*

Агеевъ Константинъ.	Квятковскій Владиславъ.
Бардскій Мечиславъ.	Квятковскій Николай.
Волковъ Иванъ.	Лаписовъ Александръ.
Грачевъ Григорій.	Медвѣдевъ Иванъ.
Душманъ Сауль.	Орловъ Петръ.
Жегинъ Іосифъ.	Семченко Иванъ.
Зиновьевъ Иванъ.	Штейнбергъ Абрамъ.
Ивановъ 1-й Павелъ.	Щеколдинъ Сергѣй.

3. *Съ званіемъ ученаго мастера:*

Инштетовъ Сергѣй.
Кондрашевъ Ѳеодоръ.
Триденцовъ Михайль.
Удинъ Николай.

Окончили курсъ приготовленія на должности учителей механики реальныхъ училищъ стипендіаты Министерства Народнаго Просвѣщенія:

Ефремовъ Дмитрій.
Рязановъ Михайль.

Садиковъ Николай.

Тимощенко Степанъ.

Чекаловъ Александръ.

Въ истекшемъ академическомъ году Педагогическимъ Совѣтомъ, на основаніи примѣчанія въ § 22 Высочайше утвержденнаго устава Училища, былъ удостоенъ званія инженеръ-механика окончившій курсъ въ бывшемъ ремесленномъ учебномъ заведеніи ученый мастеръ Александръ Николаевичъ *Николаевъ*.

По опредѣленію Педагогическаго Совѣта, на основаніи § 26 Высочайше утвержденнаго устава Училища, удостоенъ званія инженеръ-механика окончившій курсъ въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ, ученый мастеръ *Бригевичъ* Юлій.

ж) Экскурсіи учащихся и занятія ихъ внѣ Училища.

Учащіеся спеціальныхъ классовъ подъ руководствомъ гг. профессоровъ, доцентовъ и преподавателей въ теченіе отчетнаго года осматривали слѣдующіе заводы и фабрики: машиностроительный заводъ Струве въ г. Коломнѣ, Соколовскую мануфактуру Баранова въ Ярославской губерніи, Трехгорный пивоваренный заводъ, сахарный заводъ Графа Бобринскаго въ Тульской и Калужской губерніяхъ, писчебумажную фабрику Говарда, красильную фабрику Кондрашева, Алексѣевскую городскую водокачку, химическій заводъ Лепешкина, химическій заводъ Гилля, въ Ясенкахъ, Тульской губерніи, пассажъ Попова по устройству въ немъ электрическаго освѣщенія, фармацевтическую выставку въ Московскомъ Университетѣ, стеклянный заводъ Дютфуа, фабрику Ганешина, керосинный заводъ въ Кусковѣ, Прохоровскую мануфактуру, суконную и шерстяную фабрику Братъевъ Ганешиныхъ, механический заводъ Бромлея, механический заводъ Доброва и Набгольцъ, заводъ Морозова, ткацкую фабрику Бородина, парчевую фабрику Бр. Сапожниковыхъ, сахарный заводъ Московскаго товарище-

ства и ремонтныя мастерскія Московско-Курской желѣзной дороги.

Кромѣ того съ 1-го по 15 іюня 1887 года 15 воспитанниковъ спеціальныхъ классовъ занимались практическими работами на бумагопрядильной и ткацкой фабрикахъ Товарищества П. Малютина С-вей въ селѣ Раменскомъ, Московской губерніи.

з) Темы для сочиненій на 1888 годъ.

А. На полученіе золотой медали.

1) Устройство и расчетъ подвижныхъ мостовъ и поворотныхъ круговъ вообще и гидравлическихъ въ особенности.

2) Изслѣдованіе и примѣненіе кислотныхъ и щелочныхъ отбросовъ нефтяныхъ производствъ.

Б. Для соисканія преміи Политехнической Выставки:

1) Употребленіе электричества для передачи работы на разстояніе.

2) Теорія газоваго двигателя и исторія его усовершенствованія.

Примѣчаніе. Крайній срокъ для представленія разсужденій на вышеозначенныя темы—1 сентября 1888 г.

IV. Учебныя пособія.

1. Лабораторія.

Къ началу 1886—87 академическаго года состояло по инвентарю аппаратовъ и

приборовъ. 2544 на сумму 13.237 р. 28 к.

Въ теченіе года приобрѣтено. 144 " " 1.648 " 41 "

Итого къ 1887—88 г. числит-

ся аппаратовъ. 2688 на сумму 14.885 р. 69 к.

Кромѣ того для лабораторіи

приобрѣтено книгъ— 9 экз.

Между различными приборами и аппаратами, приобретенными в отчетном академическом году, выдаются: вѣсы химическіе на 100 граммъ, 2 печи газовыхъ Бунзена-Эрленмейера для органическаго анализа; паяльный столъ съ горѣлками и кожанымъ мѣхомъ, большой паровой мѣдный аппаратъ съ принадлежностями, вмазанный въ печную кладку и служащій для получения дистиллированной воды и для различныхъ работъ съ паромъ; аппаратъ для перегрѣванія пара, дѣйствующій до 500—600° Ц. и состоящій изъ кирпичной коксовой печи съ змѣвикомъ изъ газовыхъ трубъ и пирометромъ (этотъ аппаратъ приспособленъ для перегонки нефти); аппаратъ Бейльштейна для опредѣленія температуры вспышки керосина; аппаратъ Шѣне для механическаго анализа глинъ и почвъ. Кромѣ пріобрѣтенія означенныхъ аппаратовъ, въ технической лабораторіи была отдѣлана печь для сухой перегонки съ принадлежностями, придѣланъ къ ней воздушный и водяной холодильники и устроенъ сборникъ для жидкихъ дистиллатовъ; устроена кладовая для матеріаловъ и посуды въ нижнемъ этажѣ лабораторіи; лабораторіи аналитическая и химическая снабжены дополнительной мебелью.

Въ истекшемъ академическомъ году въ аналитической лабораторіи подъ руководствомъ доцента В. Е. Павлова занимались два класса инженеръ-технологическаго отдѣленія—I спеціальный (въ теченіе перваго полугодія) и III общій (въ продолженіе всего учебнаго года). Воспитанники III общаго класса изучали реакціи металловъ и металлоидовъ и ихъ соединеній, пріемы качественного анализа, производили анализы смѣсей неизвѣстнаго имъ состава и давали устные отчеты о ходѣ производимыхъ ими анализовъ. Воспитанники I спец. класса занимались вѣсовымъ и объемнымъ анализомъ; послѣднему, въ виду важнаго его значенія для технологовъ, удѣлялась болѣе большая часть времени.

Въ лабораторіи по органической химіи занимались подъ руководствомъ профессора А. А. Колли воспитан-

ники I и II спеціальныхъ классовъ инженерно-технологическаго отдѣленія. Воспитанники I спеціального класса, въ количествѣ 28 человекъ, при 12 рабочихъ часахъ въ недѣлю, занимаясь полгода, исполнили количественный анализъ органическихъ веществъ и кромѣ того нѣкоторые изъ воспитанниковъ успѣли сдѣлать нѣсколько работъ изъ жирнаго ряда. Воспитанники II спеціального класса, въ количествѣ 16 человекъ, при 13 рабочихъ часахъ въ недѣлю, занимались круглый годъ, при чемъ въ началѣ года продолжали дѣлать работы, относящіяся къ жирному ряду, а затѣмъ перешли къ ароматическому. По ароматическому ряду они, познакомившись со способами нитрированія и сульфированія, получали амидопроизводныя, азо и діазосоединенія, фенолы и нѣкоторыя краски.

Въ технической лабораторіи занимались воспитанники III спеціального класса по химической технологіи подъ руководствомъ проф. В. М. Руднева и по крашенію подъ руководствомъ доцента П. П. Петрова. Практическія занятія по химической технологіи состояли главнымъ образомъ въ изученіи способовъ технического анализа важнѣйшихъ заводскихъ матеріаловъ и продуктовъ. Кромѣ того воспитанники занимались также приготовленіемъ нѣкоторыхъ техническихъ продуктовъ, напр., смазочныхъ маселъ, уксусной кислоты и друг.

2. Физическій кабинетъ.

Къ началу 1886—87 года числилось по инвентарю:

Физическихъ приборовъ, инструментовъ, таблицъ, книгъ,	
мебели и проч.	519 на сумму 14197 р. 97к.
Въ теченіе года приобретено	210 „ 1181 „ 47 „
Итого къ 1887—88 г. числится	729 на сумму 15379 р. 44 к.

Въ 1886—87 году были приспособлены для физической лабораторіи двѣ комнаты, для чего въ нихъ устроена тяга, проведены газъ и вода и проложены электрическіе

проводы. Лабораторія снабжена мебелью, посудой и снарядами и въ ней открыты практическія занятія съ воспитанниками.

3. Механическій кабинетъ.

Къ началу 1886—87 г. въ механическомъ кабинетѣ по инвентарю числилось:

Кинематическихъ моделей, машинъ и деталей машинъ, инструментовъ и чертежей 464 нум. 630 предм., на сумму 7461 руб. 84³/₄ коп.

Въ теченіе 1886—87 г. приобрѣтено отъ механика Фойгта, въ Берлинѣ, 8 моделей различныхъ системъ зубчатыхъ зацепленій, на сумму 525 руб., и исполненъ, по заказу проф. Жуковского, въ мастерскихъ Училища 1 приборъ Максвелла, стоимостью 25 рубл.; всего 9 нум. и предм., на сумму 550 рублей.

Въ теченіе того же года перечислено въ чертежную преп. Ганса 65 нум. 84 предм., на сумму 466 рубл. 50¹/₂ коп., и въ физическій кабинетъ 2 нум. и предм., на сумму 89 руб. 80 коп.; всего 67 нум. 86 предм., на сумму 556 руб. 30¹/₂ коп.

Такимъ образомъ къ началу 1887—88 уч. года въ механическомъ кабинетѣ числится:

Кинематическихъ моделей, машинъ и деталей машинъ, инструментовъ и чертежей 406 нум. 553 предм., на сумму 7455 рубл. 54¹/₄ коп.

4. Кабинетъ естественной исторіи.

Къ началу 1886 — 87 учебнаго года по инвентарю числилось:

а) Минераловъ, моделей, кристалловъ и пр. 1829

б) Зоологическихъ препаратовъ, моделей и пр. и по анатоміи человѣка 511

в) Ботаническихъ моделей, продуктовъ и пр. 116

г) Инструментовъ	45
д) Атласовъ, таблицъ и пр.	130 наз.
Итого	2631

Сверхъ того мебели 35 пр.

Вновь приобрѣтено въ теченіе года:

Минераловъ	18
Инструментовъ	8
Атласовъ и книгъ	2
Мебели	26

Итого къ 1887—88 году числится всего въ
коллекціяхъ 2659 пр.

Мебели 61

На сумму 3909 р. 58 к.

5. Геодезическій кабинетъ.

Къ началу 1886—87 академическаго года числилось по инвентарю:

Различныхъ геодезическихъ инструментовъ 34

Въ теченіе года никакихъ приобрѣтеній и исключеній не было.

Къ 1887—88 году числится 34

на сумму 897 р. 22 к.

6. Пособія по начертательной геометріи.

Къ началу 1886—87 академическаго года числилось по инвентарю:

Таблицъ начертательной геометріи 43

Лекаль 40

Коллекція рельефныхъ моделей 1

Всего 84

Въ теченіе года никакихъ приобрѣтеній и исключеній не было.

Къ 1887—88 году числится 84

На сумму 18 р. 85 к.

7. Учебныя пособія по черченію.

Къ началу 1886—87 академическаго года числилось по инвентарю:

Разныхъ коллекцій чертежей, оригиналовъ, моделей и инструментовъ	1064
Въ теченіе года вновь поступило	116
Исключено	24
Къ 1887—88 г. числится всего	1156
на сумму	1288 р. 01 ³ / ₄ к.

8. Учебныя пособія по рисованію.

Къ началу 1886—87 академическаго года числилось по инвентарю:

Академическихъ рисунковъ, рисунковъ гео- метрическихъ тѣлъ, коллекцій гипсовыхъ, деталей машинъ и пр.	1007
Въ теченіе года вновь поступило	26
Къ началу 1887—88 года числится всего ..	1033
на сумму	430 р. 37 к.

9. Пособія по предмету проектированія деталей машинъ.

Къ началу 1886—87 академическаго года по инвентарю числилось:

а) Рисунковъ и чертежей	501 экз.
б) Инструментовъ	405 "
в) Книгъ и атласовъ	75 "

Всего 981 экз.

Въ истекшемъ академическомъ году пріобрѣтено вновь:

Инструментовъ и моделей деталей машинъ ..	97
Къ 1887—88 г. числится	1078
на сумму	2164 р. 11к.

10. Пособія по технологіи металловъ и дерева.

Къ началу 1886—87 учебнаго года числилось по инвентарю:

Чертежей	17
Образцовъ орудій	28
Разныхъ коллекцій	7
Всего	52

Въ теченіе года поступленій и исключеній не было.

Къ началу 1887—88 числится 52 экз. на сумму 487 руб. 39 коп.

11. Кабинетъ механической технологіи и воло- книстыхъ веществъ.

Къ началу 1886—87 академическаго года состояло:

- 1 приборъ для опредѣленія титра шелковой нити,
- 1 вѣски для опредѣленія вѣса пряжи въ моткахъ,
- 1 динамометръ Ретгеаухъ,
- 1 приборъ М. Alcan для испытанія пряжи,
- 1 модель трепальной волкъ-машины,
- 1 модель ленточной машины,
- 1 модель скатывающего аппарата,
- 86 настѣнныхъ таблицъ чертежей,
- 1 коллекція образцовъ волокнистыхъ веществъ въ сырьѣ,
- 1 коллекція образцовъ разнаго рода пряжи и тканей въ суровомъ, полуотдѣланномъ и окончательно готовомъ видѣ,
- 4 коллекціи, иллюстрирующія послѣдовательный ходъ фабричныхъ производствъ,
- 1 коллекція кардныхъ лентъ русскихъ и иностранныхъ фабрикъ,
- 1 коллекція образцовъ орудій и разныхъ принадлежностей для прядильныхъ и ткацкихъ фабрикъ,
- 1 ручной ткацкій станъ съ приборомъ Жакарда,

Въ теченіе года поступило:

- 1 Дифференціальный механизмъ и
- 1 „замокъ“, употребляемые въ банкаброшахъ прядильной фабрики,
- 1 машинка стараго типа для вставки и наборки кардъ.

12. Библіотека.

Къ началу 1886—87 академическаго
 года числилось 8532 соч. въ 13979 т.
 Въ теченіе года поступило 65 „ „ 122 „
 Къ 1887—88 году числятся. 8597 „ „ 14101 „
 На сумму 26031 руб. 99 коп.

Изъ числа поступившихъ пожертвованы Императорскимъ Русскимъ Историческимъ Обществомъ . 19 кн.

13. Учебныя мастерскія.

а) Кабинетъ учебныхъ мастерскихъ.

Къ началу 1886—87 академическаго года въ кабинетъ учебныхъ мастерскихъ числилось по инвентарю:

Разныхъ образцовыхъ инструментовъ, приборовъ, таблицъ, коллекцій и машинъ 814
 Разнаго рода предметовъ 23

Въ теченіе года пріобрѣтено:

Дрель американская 1
 Индикаторъ Ричардса. 1
 Турбина Жирара малыхъ размѣровъ. 1

Итого къ началу 1887 — 88 академическаго года числится 840 шт. на сумму 5284 р. 19³/₄ к.

б) Учебная токарная по дереву мастерская.

Въ истекшемъ 1886—87 академическомъ году въ токарной по дереву мастерской занятій съ воспитанни-

ками не производилось, кромѣ 6 человекъ, поступившихъ въ 1-й спеціальный классъ, которыми исполнено было 108 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1886—87 академическаго года въ мастерской числилось по инвентарю:

Токарныхъ станковъ, изъ которыхъ одинъ для овальнаго точенія	47	шт.
Верстаковъ ..	3	"
Точиль.	2	"
Станокъ для узорной пилы	1	"
Шаблоновъ	500	"
Разныхъ инструментовъ	960	"
Разнаго рода предметовъ	48	"

Въ теченіе года приобрѣтено:

Разныхъ инструментовъ

72 "

Итого къ началу 1887—88 академическаго года числится 1633 шт. на сумму 3079 р. 75 $\frac{1}{4}$ к.

Учебныя пособія мастерской:

Коллекція образцоваго инструмента, состоящая изъ

163 экз.

Коллекція инструментовъ, увеличенныхъ въ 6 разъ, состоящая изъ

24 "

Коллекція образцовъ нарѣзыванія, состоящая изъ

12 "

Коллекція образцовъ моделей, состоящая изъ

25 "

Итого на сумму 196 р. 99 к.

в) Учебная модельно-столярная мастерская.

Въ истекшемъ 1886—87 академическомъ году въ модельно-столярной мастерской занятій учащихся не производилось, кромѣ занятій 6 воспитанниковъ, принятыхъ въ 1 спеціальный классъ, которыми исполнено было 48 упражненій и 6 вполне оконченныхъ моделей.

Къ началу 1886—87 академическаго года въ мастерской числилось по инвентарю:

Верстаковъ столярныхъ.....	60	шт.
Станковъ токарныхъ.....	5	„
Универсальная пила съ принадлежностями.	1	„
Точиль для инструментовъ.....	2	„
Сверлильная ручная машина для сверленія подъ разными углами.....	1	„
Шкафовъ для храненія работъ.....	2	„
Разнаго инструмента.....	1363	„
Въ теченіе года приобрѣтено разнаго инстру- мента.....	173	„
Въ теченіе года исключено.....	9	„
Итого къ началу 1887—88 академическаго года числится.....	1598	шт. на сумму 1426 р. 43 к.

Учебныя пособія мастерской:

Двѣ коллекціи соединеній дерева, состоя- щія изъ.....	135	обр.
Коллекція моделей, состоящая изъ.....	34	экз.
Коллекція инструментовъ изъ дерева, уве- личенныхъ въ 6 разъ, состоящая изъ.....	31	„
Коллекція инструментовъ для строганія де- рева, состоящая изъ.....	21	„
Коллекція инструментовъ для пиленія дерева, состоящая изъ.....	19	„
Двѣ коллекціи инструментовъ для сверле- нія и долбленія дерева, состоящія изъ.....	89	„
Коллекція измѣрительныхъ инструментовъ.....	22	„
Итого на сумму	1513	р. 67 к.

г) Учебная металло-токарная мастерская.

Въ истекшемъ 1886—87 академическомъ году въ металло-токарной мастерской занимались 82 воспитанника, которыми исполнено было 997 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1886—87 академическаго года въ мастерской числилось по инвентарю:

Самоточка	1
Суппортовъ	10
Токарныхъ станковъ съ принадлежностями	34
Точиль съ чугунными ящиками	2
Горнь съ вентиляторомъ	1
Наковальня	1
Разныхъ инструментовъ	568

Въ теченіе года приобрѣтено: 2 универсальныхъ патрона, 1 вращающіеся тиски; исключено разныхъ инструментовъ 98 шт.

Итого къ началу 1887 — 88 академическаго года числится 520 шт. на сумму 3813 р. 86 к.

Учебныя пособія мастерской:

Двѣ коллекціи образцовыхъ инструментовъ, состоящія изъ	193 экз.
Двѣ коллекціи образцовъ токарнаго по металлу искусства, состоящія изъ	106 "

Итого на сумму 154 р. 24 к.

д) Учебная слесарная мастерская.

Въ истекшемъ 1886—87 академическомъ году въ слесарной мастерской занималось 126 воспитанниковъ, которыми исполнено 684 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1886—87 академическаго года числилось по инвентарю:

Верстаковъ	20
Тисокъ слесарныхъ	78
Машинъ строгальныхъ, ручныхъ	2
Машинъ сверлильныхъ, ручныхъ	5
Станокъ деревянный для сверленія	1
Точило двойное	1

Горнъ съ вентиляторомъ	1
Столовъ чугунныхъ	3
Разнаго слесарнаго инструмента	3621
Разнаго рода предметовъ	1041

Въ теченіе года приобрѣтено:

Разнаго слесарнаго инструмента 290 шт.

Итого къ началу 1887 — 88 академическаго года числится 5063 шт. на сумму 4830 р. 96 $\frac{1}{4}$ к.

Учебныя пособія мастерской отнесены къ кабинету учебныхъ мастерскихъ.

е) Учебная чугунно-мѣдно-литейная мастерская.

Въ истекшемъ 1886—87 академическомъ году въ чугунно-мѣдно-литейной мастерской занималось 21 воспитанникъ, которыми исполнено 335 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1886—87 академическаго года въ мастерской числилось по инвентарю:

Паровой горизонтальный двигатель въ 4 силы съ котломъ системы Фильда	1
Вентиляторъ	1
Вагранка о двухъ фурмахъ	1
Самодувный горнъ для трехъ тиглей	1
Печь системы Piat для плавки мѣди и бронзы	1
Литейный кранъ	1
Опокъ чугунныхъ	613
Чугунныхъ грузовъ 814 пудовъ въ	28 шт.
Печь для сушки стержней	1
Станковъ для шаблонной формовки	2
Верстаковъ съ козлами	7
Комплектовъ формовочнаго инструмента по 4 штуки въ каждомъ	20 экз.
Разнаго инструмента	26
Чугунныхъ моделей	9

Итого къ началу 1887 — 88 академическаго года числится. . . 712 шт. на сумму 6861 р. 21 к.

Учебныя пособія мастерской:

Коллекція инструментовъ, состоящая изъ 76 шт.

Итого на сумму 35 р.

ж) Учебная кузнечная мастерская.

Въ истекшемъ 1886 — 87 академическомъ году въ кузнечной мастерской занималось 22 воспитанника, которыми исполнено было 535 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1886—87 академическаго года числилось по инвентарю:

Молоть паровой съ наковальнями	1
Горнъ съ наковальнями и принадлежностями	6
Вентиляторъ для дутья	1
Десятичные вѣсы съ гирями и разновѣсками	1
Шкафы для храненія работъ	2
Горнъ переносный съ вентиляторомъ	1
Резервуаровъ желѣзныхъ для воды	2
Мѣхъ со станкомъ для горна	1
Жомъ для гнутія колѣнчатыхъ валовъ	1
Тисокъ столовыхъ желѣзныхъ	2
Разнаго мелкаго инструмента	682

Въ теченіе года приобрѣтено:

Станокъ для сварки желѣза	1
Разнаго мелкаго инструмента	35
Исключено разнаго мелкаго инструмента	17

Итого къ началу 1887 — 88 академическаго года числится. 719 шт. на сумму 3110 р. 62³/₄ к.

Учебныя пособія мастерской:

Образцовая коллекція кузнечнаго инструмента, состоящая изъ 110 шт.

Образцовая коллекція кузнечныхъ работъ, состоящая изъ 40 „

Итого на сумму 224р. 29¹/₄ к.

3) Учебная механическая мастерская.

Въ истекшемъ 1886—87 академическомъ году въ учебной механической мастерской занимались 67 воспитанниковъ и 6 стипендіатовъ Министерства Народнаго Просвѣщенія, всего 73 человѣка, которыми было исполнено около 58 отдѣльныхъ работъ. Къ наиболѣе выдающимся работамъ относятся: паровая машина въ 2 силы, паровая водокачка, токарные станки съ переборомъ, насосы и супорты.

Къ началу 1886—87 академическаго года въ учебной механической мастерской числилось по инвентарю:

Трубчатый паровой котель въ 30 силъ . . .	1
Постоянный котель съ 4 подогревателями . . .	1
Вертикальная паровая машина системы Уата съ коромысломъ въ 25 силъ	1
Паровая водокачка	1
Водомѣръ Шмидта	1
Приводовъ-трансмиссій	3

Сверлильныхъ машинъ разныхъ системъ:

Приводныхъ	6
Ручныхъ	3
Стругальныхъ машинъ	6
Долбежныхъ	2
Шпоночныхъ	1
Винторѣзныхъ	1
Фрезовыхъ	1
Дѣлительныхъ	1
Станковъ токарныхъ по металлу	10
Самоточныхъ станковъ разныхъ величинъ . . .	9
Разныхъ принадлежностей къ машинамъ . . .	1992
Тисокъ слесарныхъ	65
Верстаковъ слесарныхъ	8
Разнаго рода предметовъ	250
Разнаго мелкаго инструмента	5274

Въ теченіе года приобрѣтено инструментовъ 455 шт.

Итого къ началу 1887—88 академическаго года числится. 8092 шт. на сумму 32108 р. 35 к.

Учебныя пособія механической мастерской отнесены къ кабинету учебныхъ мастерскихъ.

Учебная механическая мастерская при участіи остальныхъ мастерскихъ, кромѣ занятій съ воспитанниками, съ съ помощію наемныхъ рабочихъ, съ 1 сентября 1886 по 1 сентября 1887 года исполнила заказовъ для частныхъ лицъ на сумму 45049 руб.

Выдающимися работами изъ числа этихъ заказовъ были слѣдующія:

Паровыхъ машинъ въ 8 силъ.....	4
" " " 2 силы.....	3
Турбина Жирара въ 1 силу.....	1
Самоточекъ.....	2
Водокачекъ паровыхъ.....	1
Насосовъ разныхъ.....	9
Стругальныхъ машинъ.....	2
Сверлильныхъ.....	1
Шлифовальныхъ.....	5
Вальцовыхъ.....	2
Приборовъ ткацкихъ станковъ для узорчатыхъ тканей.....	20
Центрофугъ.....	2
Прессовъ разныхъ.....	2
Вѣтряныхъ двигателей съ мельничными принадлежностями.....	3
Батарей для пароваго отопленія.....	117
Ретортъ чугунныхъ.....	9
Тисокъ разныхъ системъ.....	32
Супортовъ.....	8
Подъемныхъ машинъ.....	2
Приводовъ фабричныхъ.....	3

Краткій отчетъ о дѣятельности Политехническаго Общества, состоящаго при Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ,

за 1886—87 годъ.

Къ началу 1886—87 г. Политехническое Общество считало 21 почетныхъ членовъ, 4 членовъ-сотрудниковъ и 190 дѣйствительныхъ членовъ.

Въ теченіе 1886—87 г. Общество имѣло 7 обыкновенныхъ собраній, 1 экстраординарное и 1 годовое.

Въ обыкновенныхъ собраніяхъ, кромѣ текущихъ дѣлъ, обсуждались сообщенія по различныхъ вопросамъ техническихъ наукъ и технического образованія, сдѣланныя слѣдующими лицами: Н. П. Слугиновымъ, А. И. Пермяковымъ, Я. Я. Никитинскимъ, Н. П. Зиминымъ, П. К. Худяковымъ, К. П. Карельскихъ, П. К. Энгельмейеромъ, М. М. Черепашинскимъ, Е. Т. Покровскимъ, С. Я. Ландау, П. П. Петровымъ, А. К. Вессель, С. А. Владимірскимъ, Н. Е. Жуковскимъ и Е. Э. Бромлей.

Изъ текущихъ дѣлъ, обсуждавшихся въ тѣхъ же собраніяхъ, наиболѣе важныя состояли въ слѣдующемъ: Общество оказало свое содѣйствіе при выработкѣ проекта устава Общества для вспомошествованія нуждающимся учащимся Императорскаго Техническаго Училища; приступило къ выработкѣ нормальной программы учебно-слесарныхъ мастерскихъ, поручивъ это дѣло особой спеціальной комиссіи; положило начало осуществленію вспомогательнаго фонда для нуждающихся техникувъ,

временно находящихся безъ занятій; значительно приблизилось къ осуществленію устройства испытательной станціи при Техническомъ Училищѣ, получивъ отъ города въ свое пользованіе нѣкоторые приборы для испытанія матеріаловъ и отъ г. Почетнаго Опекуна, управляющаго Техническимъ Училищемъ, согласіе отвести при Училищѣ помѣщеніе для станціи.

Въ экстраординарномъ собраніи Общества 25 октября 1886 г. происходило обсужденіе доклада коммисіи объ реорганизациі Справочнаго Отдѣла съ цѣлю достиженія наибольшаго успѣха его дѣятельности. На основаніи постановленій этого собранія, выработана была Совѣтомъ Общества новая инструкція Справочному Отдѣлу, согласно которой онъ дѣйствовалъ въ истекшемъ году. Всѣхъ собраній Отдѣла по 1 апрѣля 1887 г. было 7. Лицъ, обращающихся въ Отдѣлъ съ просьбами о доставленіи мѣстъ, было 28, изъ коихъ 8 желали лишь перемѣнить мѣста; предложеній же мѣстъ въ тотъ же періодъ времени было 17, при чемъ 7 мѣстъ было занято лицами, рекомендованными Отдѣломъ. Съ цѣлю ознакомленія фабрикантовъ и заводчиковъ съ дѣятельностію Справочнаго Отдѣла, разосланы были имъ отъ Совѣта Общества циркуляры; для привлеченія же техниковъ къ активному участію въ дѣлахъ Общества и Справочнаго Отдѣла, отправлены были отъ Справочнаго Отдѣла письма всѣмъ окончившимъ курсъ въ Техническомъ Училищѣ и бывшемъ Ремесленномъ Учебномъ Заведеніи и несостоящимъ членами Общества. Наконецъ, для всеобщаго свѣдѣнія Справочный Отдѣлъ дѣлалъ краткія публикаціи въ газетахъ о цѣляхъ своей дѣятельности.

Въ годичномъ Собраніи Политехническаго Общества 8 апрѣля 1887 г. избраны въ почетные члены 7, въ члены-сотрудники 2 и въ дѣйствительные члены 25 лицъ. Вслѣдствіе истеченія срока избранія двухъ членовъ Совѣта — Н. П. Зимина и Н. М. Перепелкина, а также секретаря Общества и Совѣта К. П. Карельскихъ, Собраніе единогласно просило тѣхъ же лицъ исполнять

ихъ должности и на слѣдующее трехлѣтіе. Собраніе единогласно избрало на должность предсѣдателя Справочнаго Отдѣла А. И. Пермькова и на должность секретаря того же Отдѣла И. Г. Вареникова, временно исполнявшихъ эти должности въ теченіе прошедшаго года. Въ томъ же Собраніи избраны были 37 лицъ въ члены Справочнаго Отдѣла; 11 лицъ въ члены Инженерно-Механическаго Отдѣла, изъ нихъ П. П. Протопоповъ — секретаремъ этого Отдѣла; 10 лицъ въ члены Инженерно-Технологическаго Отдѣла, изъ нихъ Я. Я. Никитинскій — секретаремъ этого Отдѣла.

Доложена была записка Вице-Президента Общества О. Е. Орлова объ учрежденіи при Пол. Общ. постояннаго Отдѣла по техническому образованію. Собраніе вполнѣ согласилось съ предложеніемъ Вице-Президента и избрало 23 лица въ члены Отдѣла, изъ нихъ П. К. Худякова — предсѣдателемъ и А. С. Шестакова — секретаремъ этого Отдѣла.

Согласно мнѣнію Совѣта Общества, собраніе постановило: 1) не возобновляя на будущій годъ редакціоннаго Отдѣла, возложить, по примѣру прежнихъ лѣтъ, изданіе трудовъ Общества на секретаря Политехническаго Общества, предоставивъ въ его распоряженіе необходимыя средства на покрытіе расходовъ по изданію и, если окажется возможнымъ, назначивъ ему денежное вознагражденіе за этотъ трудъ, не входящій въ число прямыхъ его обязанностей; сношеніе же съ гг. профессорами Техническаго Училища по редактированію трудовъ Общества поручить Вице-Президенту Политехническаго Общества; 2) такъ какъ по недостатку денежныхъ средствъ изданіе періодическаго журнала оказывается пока невозможнымъ, то напечатать сообщенія тѣхъ членовъ, которые представляютъ подробное письменное изложеніе ихъ, въ приложеніи къ годичному отчету Политехническаго Общества съ достаточнымъ числомъ отдѣльных оттисковъ. На основаніи этого постановленія годичнаго Собранія, въ приложеніи къ годичному отчету

Политехническаго Общества за 1886—87 г. напечатаны слѣдующія сообщенія:

Профессора М. М. Черепашинскаго. Результаты новѣйшихъ опытовъ надъ сопротивленіемъ желѣза и стали.

Инженеръ-механика Е. Т. Покровскаго. Переносный песчаный калориферъ.

Инженеръ-механика С. Я. Ландау. Мацераторъ-фильтръ для свеклосахарныхъ заводовъ.

Е. Э. Бромлей. Газовые двигатели.

Въ томъ же годичномъ Собраніи представленъ былъ Совѣтомъ Общества списокъ членовъ, выбывшихъ изъ Общества, согласно § 25 Устава. Собраніе постановило извѣстить о семъ всѣхъ означенныхъ въ списокѣ лицъ, объяснивъ, что они будутъ считаться вновь членами Общества, безъ вторичнаго избранія, если внесутъ числящуюся за ними недоимку въ размѣрѣ 20 рубл., сразу или по частямъ, и что, кромѣ того, каждый изъ нихъ, и не внося недоимки, можетъ вновь баллотироваться въ члены Общества.

Что касается денежныхъ средствъ Общества, то, какъ видно изъ отчетовъ казначея А. П. Платонова, они значительно возрасли въ отчетномъ году, такъ что Общество могло покрыть всѣ свои расходы и оплатить всѣ имѣвшіеся прежде долги; но поступленіе членскихъ взносовъ, сравнительно съ числомъ всѣхъ дѣйствительныхъ членовъ, слѣдуетъ признать, какъ прежде, недостаточнымъ. Мысль объ учрежденіи стипендіи имени покойнаго профессора Техническаго Училища Д. Н. Лебедева въ истекшемъ году также приблизилась къ своему осуществленію: такъ, по открытой въ 1885 г. подпискѣ собрано въ этомъ году 251 руб.; кромѣ того ученый Отдѣлъ Общества Распространенія Техническихъ Знаній предложилъ для той же цѣли собранный имъ капиталъ, около 300 руб. Такимъ образомъ къ началу 1887—88 г. капиталъ для учрежденія стипендіи увеличился почти до 900 руб.

ТЕОРІЯ СООРУЖЕНІЙ.

АНАЛИТИЧЕСКІЙ и ГРАФИЧЕСКІЙ РАЗСЧЕТЪ СООРУЖЕНІЙ

ПО НОВѢЙШИМЪ МЕТОДАМЪ

СОСТАВИЛЪ

М. Черепашинскій,

Профессоръ Императорскаго Техническаго Училища и
Приватъ-Доцентъ Университета въ Москвѣ.

Съ 8 листами чертежей.

В Ы П У С К ъ І.

МОСКВА.

1889.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ сочиненіи, начало котораго составляетъ подлежащій выпускъ, мы намѣрены изложить по возможности полную теорію сооружений, развитую на основаніи взглядовъ, установленныхъ новѣйшими опытами и практикой. Желая сдѣлать нашъ трудъ одинаково полезнымъ какъ для строителей такъ и механиковъ мы поясняемъ выводы теоріи примѣрами, относящимися къ этимъ обѣимъ специальностямъ.

Перемѣщенія точекъ упругихъ системъ мы опредѣляемъ помощью принципа производной работы, употребленнаго для рѣшенія статическихъ задачъ впервые итальянскимъ инженеромъ Кастильяно, къ сожалѣнію столь преждевременно потеряннымъ для науки. Объ этомъ принципѣ догадывался уже Maupertuis, предложившій въ 1744 г. французской академіи наукъ теорему, названную имъ „loi de repos“ выражающую весьма неяснымъ впрочемъ образомъ, частный случай принципа производной работы. Прежде всѣхъ этимъ принципомъ воспользовался англійскій астрономъ Green для рѣшенія специальной задачи; но первый толчокъ къ его приложенію для рѣшенія задачъ практической механики далъ Кастильяно въ 1873 г. своей диссертацией, озаглавленной имъ: „Nuova teoria intorno all' equilibrio dei sistemi elastici.“

Въ Германіи замѣняютъ принципъ производной работы закономъ возможныхъ перемѣщеній. Вслѣдствіе отсутствія до сихъ поръ точнаго доказательства этого, хотя и безусловно вѣрнаго закона, мы не сочли цѣлесообразнымъ послѣдовать примѣру германскихъ авторовъ. Только строго логическое доказательство закона можетъ очертить точно кругъ его правильной примѣнимости. Въ противномъ случаѣ легко выйти изъ предѣловъ этого круга, и незамѣтнымъ образомъ впасть въ ошибку. Принципъ

производной работы, называемый въ частномъ случаѣ „принципомъ наименьшей работы“, доказывается безъ затрудненія самымъ строгимъ образомъ, и въ томъ заключается его преимущество передъ закономъ возможныхъ перемѣщеній.

Уравненіе (168) дополняетъ статическія условія равновѣсія, и весьма простымъ образомъ дѣлаетъ возможнымъ расчетъ тѣхъ сооружений, для которыхъ эти условія недостаточны. Такимъ образомъ получается общее правило для расчета всѣхъ сооружений вообще, что не мало облегчаетъ изученіе ихъ теоріи.

При опредѣленіи практическихъ коэффиціентовъ для сооружений, подвергаемыхъ дѣйствію подвижнаго груза, мы воспользовались опытами, произведенными надъ вліяніемъ перемѣннаго груза на крѣпость матеріаловъ. Выведенные Велеромъ изъ его долговѣстныхъ опытовъ законы мы выражаемъ формулой, полученной строго математическимъ путемъ, отличающейся отъ эмпирическихъ формулъ Ляунгардта, Вейрауха и др. большей точностью.

Законы Велера вполне подтверждаются новѣйшими опытами Баушингера, Considère и др., вслѣдствіе чего и въ тѣхъ странахъ, гдѣ прежде не обращали на нихъ вниманія, признають въ настоящее время необходимымъ, при расчетѣ сооружений принимать во вниманіе вліяніе перемѣннаго груза. Въ Франціи получила большое распространеніе формула инженера Séjourné, предложенная имъ въ 1886 г. Эта формула совершенно тождественна съ формулой, предложенной нами въ 1882 г. т. е. 4 года раньше. Намъ неизвѣстно какимъ образомъ Séjourné получилъ свою формулу, и ссылаясь на статью, напечатанную нами въ журналѣ М. П. С. „Инженеръ“ за 1883 г., не можемъ не возразить противъ названія, присвоеннаго ей во Франціи.

Параллельно съ аналитическими мы указываемъ графическіе способы расчета. Имѣя въ виду практическую сторону сочиненія мы рѣшаемъ задачи самыми простыми способами, ведущими къ цѣли по возможности короткимъ путемъ, безъ помощи Новой Геометріи, мало извѣстной инженерамъ. Основаніемъ графическихъ расчетовъ намъ служатъ веревочный многоугольникъ, многоугольникъ перемѣщеній и инфлуэнтныя линіи; послѣдними мы пользуемся не только при графическихъ, но и при аналитическихъ расчетахъ тамъ, гдѣ требуется опредѣлить наиболѣе

невыгодное положеніе подвижной нагрузки. При употребленіи инфлуэнтныхъ линій точность графическаго разсчета почти не уступаетъ точности аналитическаго; это есть причиной предпочтительнаго ихъ употребленія въ подлежащемъ сочиненіи.

Большое значеніе мы придавали ясности изложенія, облегчающей чтеніе сочиненія, хотя преслѣдующаго практическую цѣль, но по своему существу—теоретическаго. Образцомъ въ этомъ отношеніи намъ служилъ знаменитый математикъ и механикъ Бургъ, который, по его собственнымъ словамъ „преслѣдовалъ цѣль быть популярнымъ съ одинаковой настойчивостью и тамъ, гдѣ ясность достигалась не иначе, какъ цѣной весьма впрочемъ похвальной и желательной краткости, потому что должно писать не кратко, но ясно и понятно“.

На сколько исполненіе соотвѣтствуетъ желанію предоставляемъ судить благосклонному читателю. Мы будемъ благодарны за всякія указанія въ этомъ отношеніи, и не преминемъ воспользоваться ими въ слѣдующихъ выпускахъ.

М. Черепашинскій.

Глава I.

Упругость и сопротивленіе.

§ 1.

Упругость и крѣпость. — Всякое твердое тѣло можно разсматривать какъ систему матеріальныхъ точекъ, находящихся на бесконечно близкихъ другъ отъ друга разстояніяхъ, связанныхъ между собою частичными силами. Эти силы въ механикѣ называютъ *внутренними силами*.

Дѣйствія, производимыя на тѣло другими тѣлами, называютъ *внѣшними силами*.

Внѣшнія силы дѣлятъ на силы, обусловленные поверхностью тѣла, и на силы, обусловленные его массой. Первые независимы отъ массы, и къ нимъ принадлежатъ: давленіе атмосферы, треніе, сопротивленіе опоръ и т. д.; послѣднія дѣйствуютъ на частицы массы тѣла независимо отъ его поверхности, какъ сила тяжести, центробѣжная сила.

Совокупность внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло, будемъ для краткости называть *нагрузкой*.

Всякая нагрузка производитъ измѣненіе формы тѣла, которое по удаленіи нагрузки болѣе или менѣе исчезаетъ. Стремленіе, проявляемое всякимъ тѣломъ, возстановить свою первоначальную форму, измѣненную внѣшними силами, называется *упругостью*.

Та часть видоизмѣненія, которая по удаленіи нагрузки исчезаетъ, называется *упругимъ*, а остальная часть—*остающимся или постояннымъ видоизмѣненіемъ*.

До сихъ поръ неизвѣстно, существуютъ ли совершенно исчезающія видоизмѣненія. Когда остающіяся измѣненія очень малы и не превышаютъ извѣстнаго предѣла, то строительная механика ими пренебрегаетъ и принимаетъ, что тѣло по удаленіи нагрузки возстановляетъ вполнѣ свою первоначальную форму.

Наибольшее полное видоизмѣненіе, при которомъ остающаяся его часть еще такъ мала, что ея можно пренебречь, называется

предѣльнымъ упругимъ измѣненіемъ, а производящая его нагрузка— предѣльной упругой нагрузкой.

Очевидно, что обѣ эти величины зависятъ какъ отъ матеріальныхъ свойствъ тѣла, такъ и отъ его величины и формы.

Всякое постоянное видоизмѣненіе происходитъ отъ перемѣны въ группировкѣ частицъ тѣла, а слѣдовательно отъ измѣненія относительнаго положенія равновѣсія частицъ въ тѣлѣ, остающагося въ немъ послѣ освобожденія его отъ нагрузки. При постепенномъ увеличеніи видоизмѣненія посредствомъ постепеннаго увеличенія нагрузки относительное разстояніе частицъ на какомъ нибудь мѣстѣ измѣнится настолько, что равновѣсіе внутреннихъ силъ на томъ мѣстѣ сдѣлается невозможнымъ и сдѣленіе соотвѣтственныхъ частицъ разрушится. Наибольшая сила сдѣленія, которую можетъ проявить тѣло, и которая появляется въ моментъ передъ разрушеніемъ его, называется *крѣпостію матеріала*.

Мы будемъ разсматривать въ слѣдующемъ только такіа измѣненія въ измѣреніяхъ частей тѣла, которыя сравнительно съ самыми измѣреніями такъ малы, что ими при всѣхъ теоретическихъ выводахъ можно пренебрегать.

§ 2.

Безопасная нагрузка.—Части всякаго сооруженія должны получить такіе размѣры, чтобы ихъ видоизмѣненіе во всякой точкѣ было не только ниже того предѣла, при которомъ крѣпость матеріала нарушается, но чтобы оно было вообще ниже той величины, при которой постоянныя измѣненія дѣлаются замѣтными. Такъ какъ сооруженія подвергаются болѣе или менѣе значительнымъ сотрясеніямъ, увеличивающимъ дѣйствіе нагрузки, дѣйствію атмосферы, уменьшающему крѣпость матеріала, и т. д., то слѣдуетъ, что наибольшая безопасная нагрузка зависить въ различныхъ практическихъ случаяхъ отъ различныхъ обстоятельствъ, что она поэтому для различныхъ сооруженій вообще не одинакова.

За правило можно принять, что для постоянныхъ сооруженій видоизмѣненіе отъ наибольшей нагрузки ни на какомъ мѣстѣ не должно превосходить предѣльнаго упругаго измѣненія.

§ 3.

Задача строительной механики.—Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что строительная механика должна рѣшить слѣдующую задачу:

1) Опредѣлить нагрузку, которую сооруженіе можетъ выдерживать безопасно при данныхъ обстоятельствахъ, или опредѣ-

лить размѣры частей сооруженія такимъ образомъ, чтобы измѣненіе ихъ измѣреній, производимое данной нагрузкой, ни на какомъ мѣстѣ не было больше извѣстнаго предѣла.

2) Опредѣлить видоизмѣненія, производимыя данной нагрузкой въ частяхъ сооруженія.

Для рѣшенія этихъ задачъ нужно знать зависимость внутреннихъ или сопротивляющихся силъ отъ внѣшнихъ или дѣйствующихъ. Наука, занимающаяся опредѣленіемъ этой зависимости, называется *теоріей упругости*.

Намъ слѣдовало бы поэтому заняться прежде всего изложеніемъ теоріи упругости, что чрезмѣрно увеличило бы нашу задачу. Но такъ какъ вслѣдствіе несовершенства этой теоріи, строительная механика основываетъ свои теоремы преимущественно на данныхъ, получаемыхъ эмпирическимъ путемъ посредствомъ опытовъ, то знаніе ея для изученія теоріи сопротивленія матеріаловъ не представляетъ вообще необходимости. Вслѣдствіе того мы приведемъ изъ общей теоріи упругости и крѣпости только тѣ положенія, знаніе которыхъ облегчитъ пониманіе послѣдующихъ выводовъ.

§ 4.

Основные положенія. Теорія упругости пользуется слѣдующими предположеніями, основанными на результатахъ наблюдений:

1) Силы сдѣвленія, проявляющіяся между частицами тѣла при измѣненіи его вида—непрерывныя функціи взаимныхъ разстояній частицъ, т. е. измѣняются бесконечно мало при бесконечно маломъ измѣненіи этихъ разстояній.

2) Силы сдѣвленія, дѣйствующія между частицами тѣла, притягательны и отталкивательны. Когда тѣло находится въ естественномъ состояніи, то эти силы находятся въ равновѣсіи.

3) При всякомъ увеличеніи разстоянія частицъ какъ притягательныя, такъ и отталкивательныя силы уменьшаются, но отталкивательныя въ большемъ отношеніи чѣмъ притягательныя, такъ что равновѣйствующая внутреннихъ силъ въ этомъ случаѣ всегда притягательна.

4) При всякомъ уменьшеніи разстоянія частицъ какъ притягательныя, такъ и отталкивательныя силы увеличиваются, но отталкивательныя въ большемъ отношеніи чѣмъ притягательныя, такъ что равновѣйствующая внутреннихъ силъ въ этомъ случаѣ всегда отталкивательна.

Изъ обоихъ послѣднихъ положеній слѣдуетъ, что сила упругости, проявляющаяся при измѣненіи формы тѣла, всегда противоположна направленію перемѣщенія частицъ. Внутреннія силы

исполняютъ поэтому при видоизмѣненіи, произведенномъ внѣшними силами, отрицательную работу.

§ 5.

Напряженіе и сопротивленіе. — Когда тѣло, отъ дѣйствія внѣшнихъ силъ, измѣняетъ свой видъ, то сила упругости стремится возстановить его первоначальную форму, и какія-нибудь двѣ точки, которыхъ относительное положеніе измѣнилось, испытываютъ дѣйствіе внутреннихъ силъ.

Выдѣлимъ внутри этого тѣла очень малую плоскую поверхность $\Delta\Omega$, ограниченную замкнутой кривой, проведенной вокругъ одной изъ его точекъ. Между бесконечно близкими частицами, находящимися по обѣимъ сторонамъ этой поверхности, дѣйствуютъ внутреннія силы, равнодѣйствующую которыхъ обозначимъ черезъ W . Если поверхность $\Delta\Omega$ будетъ бесконечно мала и равна $d\Omega$, то можно принять, что внутреннія силы распредѣляются по ней равномерно, и частное $\frac{W}{d\Omega}$ дастъ равнодѣйствующую внутреннихъ силъ, отнесенную къ единицѣ площади разсматриваемой поверхности. Эту равнодѣйствующую называютъ *напряженіемъ*.

Подъ словомъ *напряженіе* понимаютъ поэтому такую внутреннюю силу, которая соответствуетъ единицѣ площади какого-нибудь плоскаго сѣченія нагруженнаго тѣла.

Внутреннюю силу, соответствующую произвольной площади сѣченія, будемъ для краткости называть *сопротивленіемъ*.

Силу $\frac{W}{d\Omega}$ можно разложить на двѣ слагающія σ и τ , изъ которыхъ σ перпендикулярна къ плоскости $d\Omega$, а τ лежитъ въ этой плоскости. Слагающую σ называютъ *нормальнымъ*, а слагающую τ — *касательнымъ* или *скалывающимъ* *напряженіемъ*.

То напряженіе, при которомъ видоизмѣненіе равно предѣльному упругому измѣненію, называется *предѣломъ упругости*.

Нормальное напряженіе σ стремится измѣнить разстояніе матеріальныхъ точекъ по направленію, перпендикулярному къ плоскости элемента, и оно называется *растяженіемъ*, когда это измѣненіе состоитъ въ увеличеніи взаимнаго разстоянія частицъ, и *сжатіемъ*, когда разстояніе между частицами уменьшается.

Скалывающее напряженіе τ стремится матеріальныя точки, находящіяся по ту и другую сторону плоскаго элемента, сдвинуть вдоль его плоскости.

§ 6.

Основные законы видоизмѣненія. — Зависимость между напряженіями и производимыми ими видоизмѣненіями было бы легко

опредѣлить, еслибъ были извѣстны законы, по которымъ въ упругихъ тѣлахъ измѣняется упругость, когда они отъ дѣйствія вишнихъ силъ измѣняютъ свой видъ. Такъ какъ, вслѣдствіе недостаточности знаній сущности матеріи, эти законы неизвѣстны, то упомянутая зависимость въ настоящее время можетъ быть опредѣлена только посредствомъ прямыхъ опытовъ надъ матеріалами различнаго рода.

Основной законъ упругости, выражающій зависимость между размѣрами тѣла, его напряженіемъ и производимымъ имъ видоизмѣненіемъ, получается посредствомъ слѣдующаго простаго опыта.

Возьмемъ прямоугольный параллелоипедъ $abcdefgh$ (черт. 1) и приложимъ къ его основаніямъ $abcd$ и $efgh$, равныя, но противоположныя силы P , равномерно распредѣленныя на площади этихъ основаній. Отъ дѣйствія этихъ силъ параллелоипедъ превращается въ другой— $a_1b_1c_1d_1e_1f_1g_1h_1$ по слѣдующему правилу:

Если силы P растягиваютъ параллелоипедъ, то его измѣреніе l , параллельное P , увеличивается, а другія измѣренія b и h —уменьшаются (черт. 1 а).

Если силы P сжимаютъ параллелоипедъ, то l уменьшается, а b и h —увеличиваются (черт. 1 б).

Въ обоихъ случаяхъ, слѣдовательно, измѣненіе измѣреній, перпендикулярныхъ къ силѣ, прямо противоположно измѣненіямъ измѣреній ей параллельныхъ. Всякое другое измѣненіе, составляющее съ направленіемъ силы уголъ меньшій 90° измѣняется въ положительномъ или отрицательномъ смыслѣ на величину, которая могла бы быть выражена въ функціи этого угла и которая абсолютно тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе этотъ уголъ приближается къ 0 или 90° .

Измѣненіе измѣренія, параллельнаго дѣйствующей силѣ P , называется *продольнымъ измѣненіемъ*. Если продольное измѣненіе положительно, то оно называется *удлиненіемъ*, а если отрицательно, то—*укороченіемъ*.

Измѣненія измѣреній, перпендикулярныхъ къ направленіямъ силы, называются *поперечными измѣненіями*. Положительное поперечное измѣненіе называется *уширеніемъ*, а отрицательное—*суженіемъ*.

Отношеніе измѣненія измѣренія къ его первоначальной длинѣ называютъ *относительнымъ измѣненіемъ*. Если поэтому означимъ измѣненія измѣреній l , b и h черезъ Δl , Δb , и Δh , а ихъ относительныя измѣненія—черезъ e , e_1 и e_2 , то

$$e = \frac{\Delta l}{l}, e_1 = \frac{\Delta b}{b}, e_2 = \frac{\Delta h}{h} \dots \dots \dots (1)$$

Опытами получено, что пока нормальное напряженіе не превышаетъ предѣла упругости, то какъ продольное, такъ и попе-

Постоянное число m можно принимать равнымъ отъ 3 до 4; всего чаще берутъ

$$E_1 = E_2 = 3E \quad \dots \quad (3)$$

§ 8.

Законъ Гука.—Изъ уравненій (1) и (2) слѣдуетъ

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} \quad \dots \quad (4)$$

σ означаетъ сопротивленіе, соотвѣтствующее единицѣ площади основанія параллелоипеда (черт. 1). Если площадь этого основанія означимъ черезъ Ω , то предполагая, что сила P распределѣна равномерно на основаніе, будетъ

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} \quad \dots \quad (5)$$

и слѣдовательно

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{E\Omega}$$

откуда

$$\Delta l = \frac{Pl}{E\Omega} \quad P = E\Omega \frac{\Delta l}{l} = Ec\Omega \quad \dots \quad (6)$$

Уравненіе (6) получено на основаніи эмпирическаго предположенія, выраженнаго уравненіемъ (2), оно дѣйствительно поэтому только до тѣхъ поръ, пока напряженіе σ не превышаетъ предѣла упругости. Оно даетъ слѣдующее правило:

Когда напряженіе матеріала не превышаетъ предѣла упругости, то измѣненія измѣреній прямо пропорціональны дѣйствующей силѣ и обратно пропорціональны произведенію изъ площади поперечнаго сѣченія Ω и модуля упругости E .

Для $P=1$ и $\Omega=1$ получаемъ изъ (6)

$$e = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{e} \quad \dots \quad (7)$$

т. е. модуль упругости есть обратная величина относительно удлиненія, произведеннаго напряженіемъ $= 1$ (силой 1, дѣйствующей на призму, которой площадь поперечнаго сѣченія $= 1$).

Численные значенія модуля упругости зависятъ поэтому отъ единицы силы и единицы площади, т. е. модуль упругости долженъ опредѣляться этими двумя единицами.

Въ таблицѣ I помѣщены числовые данныя для модуля упругости матеріаловъ, наиболѣе употребляемыхъ въ строительной практикѣ. За единицу силы принять килограммъ, а за единицу площади—сантиметръ.

§ 9.

Общія выраженія зависимости между нормальными напряжениями и относительными измѣненіями.—Положимъ, что на изотропный параллелепипедъ дѣйствуютъ нормальныя напряжения по тремъ направленіямъ, перпендикулярнымъ къ тремъ ребрамъ l , b и h (черт. 3). Если будемъ разсматривать измѣреніе l , то напряжение σ , параллельное l , увеличитъ его на Δl , напряжение σ_1 , параллельное b —уменьшитъ на $\Delta_1 l$, а напряжение σ_2 , параллельное h ,—уменьшитъ на $\Delta_2 l$. Длина измѣренія l послѣ деформации будетъ поэтому $l + \Delta l - \Delta_1 l - \Delta_2 l$, а относительное измѣненіе этого измѣренія

$$e = \frac{\Delta l - \Delta_1 l - \Delta_2 l}{l}$$

Но по (2)

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} \quad \frac{\Delta_1 l}{l} = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad \frac{\Delta_2 l}{l} = \frac{\sigma_2}{E_2}$$

или, такъ какъ $E_1 = E_2 = mE$

$$\frac{\Delta_1 l}{l} = \frac{\sigma_1}{mE} \quad \frac{\Delta_2 l}{l} = \frac{\sigma_2}{mE}$$

поэтому

$$e = \frac{1}{E} \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m} \right) \dots \dots \dots (7 \text{ а})$$

Точно такимъ образомъ получимъ если относительное измѣненіе измѣренія b означимъ черезъ e_1 , а измѣренія h —черезъ e_2

$$e_1 = \frac{1}{E} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma + \sigma_2}{m} \right) \dots \dots \dots (7 \text{ а})$$

$$e_2 = \frac{1}{E} \left(\sigma_2 - \frac{\sigma + \sigma_1}{m} \right) \dots \dots \dots$$

§ 10.

Зависимость между скалывающими напряжениями и производимыми ими сдвигеніями.—Возьмемъ внутри тѣла двѣ безконечно малыя плоскости, на которыя дѣйствуютъ скалывающія силы T (черт. 4). Произведенное этими силами видоизмѣненіе проявится въ томъ, что эти плоскости перемѣстятся параллельно самимъ себѣ и относительное положеніе точекъ r и s , которыя до видоизмѣненія находились на перпендикулярѣ rs къ этимъ плоскостямъ, по наступленіи равновѣсія будетъ дано точками r_1 и s_1 . Величина сдвигенія опредѣлится длиной rr_1 , а отношеніе $\frac{rr_1}{rs}$ называютъ *относительнымъ сдвигеніемъ*.

Если уголъ rsr_1 означимъ черезъ g , то изъ черт. 4 имѣемъ

$$\overline{rr_1} = \overline{rs} \cdot tg. g$$

Въ теоріи сооруженій разсматриваютъ только такія сдвигенія, которыхъ уголъ g всегда такъ малъ, что можно поставить

$$\cos g. = 1 \quad \sin g. = g = tg g$$

и слѣдовательно

$$g = \frac{\overline{rr_1}}{\overline{rs}} \dots \dots \dots (8)$$

т. е. *относительное сдвигеніе равно углу сдвигенія.*

Опыты показываютъ, что пока скалывающія напряжения (т. е. скалывающія силы, отнесенныя къ единицѣ площади той плоскости, въ которой онѣ дѣйствуютъ) не превышаютъ извѣстнаго предѣла, называемаго *предѣломъ упругости при скалываніи*, то относительныя сдвигенія пропорціональны этимъ напряжениямъ.

Если поэтому означимъ относительное сдвигеніе, произведенное скалывающимъ напряженіемъ 1, черезъ $\frac{1}{G}$, то напряженіе τ произведетъ относительное сдвигеніе

$$g = \frac{\tau}{G} \dots \dots \dots (9)$$

Коэффициентъ G зависитъ отъ свойства матеріала и называется *модулемъ упругости при скалываніи* (или скручиваніи).

Когда на площадь Ω дѣйствуетъ равномерно распределенная скалывающая сила T , то

$$\tau = \frac{T}{\Omega}$$

Если означимъ $\overline{rs}$ черезъ s , и $\overline{rr_1}$ —черезъ Δs , то

$$g = \frac{\Delta s}{s}$$

и по (9) будетъ

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{T}{\Omega G}$$

откуда

$$\Delta s = \frac{T s}{\Omega G} \dots \dots \dots (10)$$

Изъ сравненія уравненій (6) и (10) легко узнать, что измѣненія при скалываніи опредѣляются такимъ же образомъ, какъ при растяженіи или сжатіи.

§ 11.

Свойство скалывающихъ напряженій.—Внутри твердаго изотропнаго тѣла, подверженнаго дѣйствію внѣшнихъ силъ и находящагося въ состояніи равновѣсія, выдѣлимъ параллелопипедъ

такимъ образомъ, чтобы его ребра были параллельны прямоугольнымъ осямъ координатъ. Первоначальныя длины этихъ реберъ означимъ черезъ dx , dy , dz (черт. 5).

Дѣйствіе силъ сдѣвленія на каждую грань замѣнимъ соотвѣтственной равнодѣйствующей силой, которую разложимъ на 3 слагающія, параллельныя измѣреніямъ параллелоипеда. Эти силы будемъ считать положительными, когда онѣ направлены въ сторону положительныхъ осей координатъ.

Такъ, силу, замѣняющую дѣйствіе силъ сдѣвленія на грань OZ_1 , разложимъ:

на нормальную слагающую $m\zeta$ и на касательныя— $m\zeta$ и $m\eta$.

Нормальныя напряжения будемъ обозначать буквой σ , а касательныя или скалывающія—буквой τ —съ двумя показателями, изъ которыхъ первый указываетъ ось, къ которой плоскость напряженія перпендикулярна, а второй—ось, къ которой напряженіе параллельно. Такъ какъ для нормальныхъ напряженій оба эти показателя одинаковы, то величины σ получаютъ одинъ только показатель.

Согласно этому обозначенію легко узнать, что на параллелопипедъ дѣйствуютъ слѣдующія силы:

$$\begin{aligned} &\text{въ грани } OX_1: -\sigma_x dydz, \quad \tau_{xy} dydz, \quad \tau_{xz} dydz, \\ O_1 X: &\left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx \right) dydz, - \left(\tau_{xy} + \frac{d\tau_{xy}}{dx} dx \right) dydz, - \left(\tau_{xz} + \frac{d\tau_{xz}}{dx} dx \right) dydz, \\ OY_1: &-\sigma_y dxdz, \quad \tau_{yx} dxdz, \quad \tau_{yz} dxdz, \\ O_1 Y: &\left(\sigma_y + \frac{d\sigma_y}{dy} dy \right) dxdz, - \left(\tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} dy \right) dxdz, - \left(\tau_{yz} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} dy \right) dxdz, \\ OZ_1: &-\sigma_z dxdy, \quad \tau_{zx} dxdy, \quad \tau_{zy} dxdy, \\ O_1 Z: &\left(\sigma_z + \frac{d\sigma_z}{dz} dz \right) dxdy, - \left(\tau_{zx} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} dz \right) dxdy, - \left(\tau_{zy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz} dz \right) dxdy. \end{aligned}$$

Точки приложенія этихъ силъ находятся въ центрахъ тяжести соотвѣтственныхъ граней. Кромѣ того въ центрѣ тяжести параллелоипеда дѣйствуетъ его вѣсъ $gdxdydz$, гдѣ g —удѣльный вѣсъ матеріала.

Такъ какъ послѣ видоизмѣненія тѣло во всѣхъ его элементахъ находится въ равновѣсіи, то дѣйствующія на элементарный параллелопипедъ силы должны удовлетворять условіямъ равновѣсія. Если за ось вращенія примемъ прямую, параллельную ребрамъ dy , проходящую черезъ центръ тяжести параллелоипеда, то силы, пересѣкающія эту ось, а также — параллельныя ей, не дадутъ никакого момента, и уравненіе моментовъ—по отношенію

къ этой оси будетъ (пренебрегая измѣненіями измѣреній параллелоипеда) (черт. 6)

$$\left[\tau_{xz} dz dy + \left(\tau_{xz} + \frac{d\tau_{xz}}{dx} dx \right) dy dz \right] \frac{dx}{2} -$$

$$\left[\tau_{zx} dy dx + \left(\tau_{zx} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} dz \right) dy dx \right] \frac{dz}{2} = 0.$$

Пренебрегая очень малыми величинами высшей чѣмъ 3-й степени получимъ послѣ сокращенія на общій множитель $dx dy dz$

$$\tau_{xz} - \tau_{zx} = 0$$

откуда

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \dots \dots \dots (11)$$

Такимъ же образомъ получимъ, принимая за ось моментовъ прямую параллельную ребрамъ dx , и затѣмъ—ребрамъ dy ,

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} \text{ и } \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ:

Скалывающія напряжения двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей, перпендикулярныя къ линіи пересѣченія этихъ плоскостей, равны между собою.

Вслѣдствіе этого свойства будемъ обозначать

$$\tau_{xy} \text{ и } \tau_{yx} \text{ черезъ } \tau_x$$

$$\tau_{xz} \text{ и } \tau_{zx} \text{ „ } \tau_y$$

$$\tau_{yz} \text{ и } \tau_{zy} \text{ „ } \tau_z$$

§ 12.

Работа деформациі (*Живое сопротивление, работа внутреннихъ силъ*).—Положимъ, что вслѣдствіе видоизмѣненія, произведеннаго дѣйствующими на тѣло внѣшними силами, измѣренія $dx dy dz$ элементарнаго параллелоипеда измѣнились на $\Delta dx \Delta dy \Delta dz$.

Когда тѣло находилось въ естественномъ состояніи, то всѣ напряжения σ и τ были равны 0. Послѣ приложенія внѣшнихъ силъ нормальное напряженіе грани OX_1 возрастало отъ 0 до σ_x , а измѣреніе dx измѣнялось въ то же время отъ dx до $dx + \Delta dx$. Если въ слѣдующій затѣмъ моментъ продольное измѣненіе Δdx измѣнилось на $d\Delta dx$, то нормальная сила $\sigma_x dy dz$ исполнила въ этотъ моментъ работу (пренебрегая очень малыми величинами высшаго порядка)

$$\sigma_x dy \cdot dz \cdot d\Delta dx$$

поэтому работа, которую совершаетъ эта переменная сила во

время деформации элементарнаго параллелоипеда, опредѣляется выраженіемъ

$$\int_{\Delta}^{\Delta + dx} \sigma_x dy \cdot dz \cdot d\Delta dx = dy \cdot dz \int_{\Delta}^{\Delta + dx} \sigma_x d\Delta dx$$

Измѣненіе другихъ реберъ, которыя перпендикулярны къ σ_x не имѣетъ на работу силы $\sigma_x dy dz$ никакого вліянія.

Если не только измѣненіе dx , но и измѣренія dy и dz получаютъ измѣненія, то нормальныя силы, дѣйствующія въ граняхъ параллелоипеда, исполняютъ работу

$$\begin{aligned} d\tau_1 &= dy \cdot dz \int \sigma_x d\Delta dx + dx \cdot dz \int \sigma_y d\Delta dy + dx \cdot dy \int \sigma_z d\Delta dz \\ &= dx dy dz \left[\int \sigma_x \frac{d\Delta dx}{dx} + \int \sigma_y \frac{d\Delta dy}{dy} + \int \sigma_z \frac{d\Delta dz}{dz} \right]. \end{aligned}$$

Такъ какъ $\Delta dx = dx \cdot e_x$
то $d\Delta dx = dx \cdot de_x$,
слѣдовательно

$$\frac{d\Delta dx}{dx} = de_x, \quad \frac{d\Delta dy}{dy} = de_y, \quad \frac{d\Delta dz}{dz} = de_z$$

Если эти значенія вставимъ въ предыдущія уравненія, и означимъ объемъ $dx \cdot dy \cdot dz$ черезъ dv , то получимъ:

$$d\tau_1 = dv \left[\sigma_x de_x + \sigma_y de_y + \sigma_z de_z \right] \dots \dots (12)$$

Работа скалывающихъ силъ опредѣляется подобнымъ образомъ, какъ и нормальныхъ. Означимъ величину, на которую вслѣдствіе дѣйствія внѣшнихъ силъ измѣняется уголъ VOZ (черт. 5), черезъ g_x (показатель указываетъ ось, къ которой плоскость угла перпендикулярна), уголъ ZOX —черезъ g_y и уголъ XOY —черезъ g_z .

Если уголъ g_z измѣнится на бесконечно малую величину dg_z , то грань VO_1 передвинется по отношенію къ параллельной ей грани OV_1 въ сторону OZ на $dy \cdot dg_x$, и сила $\tau_x dx dz$, дѣйствующая въ грани VO_1 перпендикулярно къ dx , исполнитъ работу $\tau_x dx \cdot dz \cdot dy \cdot dg_x$, или: грань ZO_1 передвинется по отношенію къ грани OZ_1 въ сторону OV на величину $dz \cdot dg_x$, причемъ сила $\tau_x dx dy$, дѣйствующая въ грани ZO_1 перпендикулярно къ dx , исполнитъ работу $\tau_x dx \cdot dy \cdot dz \cdot dg_x$, слѣдовательно въ обоихъ случаяхъ эта работа равна

$$\tau_x dg_x \cdot dx dy dz = dv \tau_x dg_x.$$

Работа, которую эта сила исполняетъ во время видоизмѣненія параллелоипеда будетъ поэтому

$$dv \int_0^{g_x} \tau_x dg_x,$$

слѣдовательно работа всѣхъ скалывающихъ силъ параллело-
пипеда опредѣлится изъ выраженія

$$d\mathcal{A}_z = dv \left[\int \tau_x dg_x + \int \tau_y dg_y + \int \tau_z dg_z \right] \dots (13)$$

Если работу всѣхъ внутреннихъ силъ элементарнаго паралле-
лопипеда означимъ черезъ $d\mathcal{A}$, то

$$d\mathcal{A} = d\mathcal{A}_1 + d\mathcal{A}_2$$

а изъ (12) и (13) получимъ

$$d\mathcal{A} = dv \left[\left(\int \sigma_x de_x + \int \sigma_y de_y + \int \sigma_z de_z \right) + \left(\int \tau_x dg_x + \right. \right. \\ \left. \left. + \int \tau_y dg_y + \int \tau_z dg_z \right) \dots (14) \right]$$

Для возможности интегрированія этого уравненія нужно е вы-
разить въ функціи σ , и g въ функціи τ , или наоборотъ. Для
этого служатъ уравненія (7) и (9).

По (7)
$$e_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right)$$

$$de_x = \frac{1}{E} \left(d\sigma_x - \frac{d\sigma_y + d\sigma_z}{m} \right)$$

поэтому

$$\int \sigma_x de_x = \frac{1}{E} \left[\int \sigma_x d\sigma_x - \frac{1}{m} \int (\sigma_x d\sigma_y + \sigma_x d\sigma_z) \right]$$

Такимъ же образомъ получимъ

$$\int \sigma_y de_y = \frac{1}{E} \left[\int \sigma_y d\sigma_y - \frac{1}{m} \int (\sigma_y d\sigma_x + \sigma_y d\sigma_z) \right]$$

$$\int \sigma_z de_z = \frac{1}{E} \left[\int \sigma_z d\sigma_z - \frac{1}{m} \int (\sigma_z d\sigma_x + \sigma_z d\sigma_y) \right]$$

Помощію этихъ значеній уравненіе (12) получаетъ видъ

$$p\mathcal{A}_1 = \frac{1}{E} \left[\int \sigma_x d\sigma_x + \int \sigma_y d\sigma_y + \int \sigma_z d\sigma_z \right] - \frac{1}{mE} \left[\int (\sigma_x d\sigma_y + \sigma_y d\sigma_x) + \right. \\ \left. + \int (\sigma_x d\sigma_z + \sigma_z d\sigma_x) + \int (\sigma_y d\sigma_z + \sigma_z d\sigma_y) \right] \\ d\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{mE} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \dots (15)$$

По (9)

$$g_x = \frac{\tau_x}{G}, dg_x = \frac{d\tau_x}{G}$$

$$\int \tau_x dg_x = \frac{1}{G} \int \tau_x d\tau_x = \frac{\tau_x^2}{2G}$$

слѣдовательно также

$$\int \tau_y dg_y = \frac{\tau_y^2}{2G} \quad \int \tau_z d\tau_z = \frac{\tau_z^2}{2G} \quad (15)$$

Уравненіе (13) можно поэтому написать такъ:

$$d\varphi_2 = \frac{dv}{2G} (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \quad (16)$$

Помощію (15) и (16) получаемъ для работы внутреннихъ силъ элементарнаго параллелепипеда выраженіе

$$d\varphi = \frac{dv}{2E} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \right] + \frac{dv}{2G} (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \quad (17)$$

Работа всего тѣла равна суммѣ работъ всѣхъ его элементовъ, т. е.

$$\varphi = \frac{1}{2E} \int (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) dv - \frac{1}{mE} \int (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) dv + \frac{1}{2G} \int (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) dv \quad (18)$$

§ 13.

Опредѣленіе напряженій σ и τ .— Разобьемъ тѣло, подверженное дѣйствию внѣшнихъ силъ, двумя системами взаимно перпендикулярныхъ плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ ZOU и ZOX , на бесконечно узкія элементарныя призмы. Выдѣлимъ одну такую призму; означимъ размѣры ея поперечнаго сѣченія черезъ dx и dy , а длину—черезъ z (черт. 7).

Разсмотримъ только тотъ, на практикѣ всего чаще встрѣчающійся случай, когда всѣ на призму дѣйствующія силы находятся въ плоскости XU , или распределены по обѣ стороны этой плоскости такимъ образомъ, что ихъ равнодѣйствующія находятся въ ней. При этомъ предположеніи напряженія σ_y, τ_x и τ_z равны нулю, и на призму дѣйствуютъ только силы, представленныя на черт. 7 (для простоты напряженія σ_x и σ_z означены черезъ σ и ν , а напряженіе τ_y черезъ τ); кромѣ того, въ центрѣ тяжести призмы дѣйствуетъ ея вѣсъ $\gamma dx dy z$, гдѣ γ —вѣсъ единицы объема.

Когда тѣло послѣ видоизмѣненія, произведеннаго внѣшними силами, пришло въ состояніе покоя, то силы, дѣйствующія на

всякій его элементъ, удовлетворяють условіямъ равновѣсія. Изъ этихъ условій получимъ слѣдующія уравненія

$$\begin{aligned} & -\sigma z dy - \tau z dx + \left(\tau + \frac{d\tau}{dy} dy \right) z dx + \left(\sigma + \frac{d\sigma}{dx} dx \right) z dy = 0 \\ & -\nu z dx - \tau z dy + \left(\nu + \frac{d\nu}{dy} dy \right) z dx + \left(\tau + \frac{d\tau}{dx} dx \right) z dy - \gamma dx dy z = 0 \end{aligned}$$

Послѣ соотвѣтственнаго сокращенія эти выраженія получаютъ видъ

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx} + \frac{d\tau}{dy} &= 0 \\ \frac{d\tau}{dx} + \frac{d\nu}{dy} &= \gamma \end{aligned} \quad (19)$$

Когда на тѣло дѣйствуютъ только силы, распредѣленные по его поверхности, и не существуетъ силъ, дѣйствующихъ на его массу, то $\gamma=0$, и тогда вмѣсто послѣдняго уравненія будемъ имѣть слѣдующее:

$$\frac{d\tau}{dx} + \frac{d\nu}{dy} = 0 \quad (20)$$

Въ дѣйствительности не бываетъ случая, чтобы на массу не дѣйствовала никакая сила, такъ какъ сила тяжести дѣйствуетъ постоянно; но мы можемъ вычислить вліяніе послѣдней отдѣльно, а формулой (20) вмѣстѣ съ первой изъ формулъ (19) будемъ пользоваться для опредѣленія двухъ изъ напряженій σ , ν и τ , произведенныхъ тѣми внѣшними силами, которыя дѣйствуютъ на поверхность тѣла. Дѣйствительныя напряжения будутъ равны суммѣ напряженій, произведенныхъ силами поверхности, и напряженій, произведенныхъ силами массы.

§ 14.

Продолженіе.—Разрѣжемъ элементарную призму, разсмотрѣнную въ предыдущемъ параграфѣ, діагональною плоскостью ac на двѣ половины; устранимъ верхнюю половину acd , и дѣйствіе ея на плоскость ac нижней половины acb замѣнимъ нормальной силой $szdr$ и $tzdr$, гдѣ dr —длина діагонали ac (черт. 8).

Если уголъ этой діагонали съ осью OX означимъ черезъ α , то пренебрегая очень малыми величинами 3-й степени будемъ имѣть изъ условій равновѣсія:

$$\begin{aligned} szdr - \nu z dx \cos \alpha - \tau z dy \cos \alpha - \tau z dx \sin \alpha - \sigma z dy \sin \alpha &= 0 \\ -tzdr - \nu z dx \sin \alpha - \tau z dy \sin \alpha + \tau z dx \cos \alpha + \sigma z dy \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Раздѣливъ эти уравненія на zdr , и принявъ во вниманіе, что

$$\frac{dx}{dr} = \cos\alpha \quad \frac{dy}{dr} = \sin\alpha$$

получимъ

$$s = v \cos^2\alpha + \tau \sin\alpha \cos\alpha + \tau \sin\alpha \cos\alpha + \sigma \sin^2\alpha$$

$$t = \tau \cos^2\alpha + \sigma \sin\alpha \cos\alpha - v \sin\alpha \cos\alpha - \tau \sin^2\alpha$$

Если въ эти уравненія подставимъ слѣдующія значенія

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \quad \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$

$$\text{и } \sin\alpha \cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2},$$

то они, послѣ соотвѣтственнаго сокращенія, получаютъ видъ:

$$s = \frac{\sigma + v}{2} - \frac{\sigma - v}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha \quad . \quad . \quad (21)$$

$$t = \frac{\sigma - v}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Послѣднія уравненія можно написать такъ:

$$s = \frac{\sigma + v}{2} - \cos 2\alpha \left(\frac{\sigma - v}{2} - \tau \tan 2\alpha \right) = \frac{\sigma + v}{2} + \frac{\frac{\sigma - v}{2} - \tau \tan 2\alpha}{\sqrt{1 + (\tan 2\alpha)^2}} \quad (23)$$

$$t = \cos\alpha \left(\tau + \frac{\sigma - v}{2} \tan 2\alpha \right) = \pm \frac{\tau + \frac{\sigma - v}{2} \tan 2\alpha}{\sqrt{1 + (\tan 2\alpha)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Разложимъ силу, дѣйствующую въ плоскости ac , на горизонтальную и вертикальную слагающую, и означимъ горизонтальное напряженіе этой плоскости черезъ h , а вертикальное—черезъ v , то изъ черт. 8 получаемъ легко

$$vzdr = szdr \sin\alpha - szdr \cos\alpha$$

$$hzdr = -tzdr \cos\alpha - szdr \sin\alpha$$

откуда

$$v = t \sin\alpha - s \cos\alpha$$

$$h = -t \cos\alpha - s \sin\alpha$$

или, если для s и t вставимъ значенія (21) и (22)

$$\begin{aligned} v &= -(\tau \sin\alpha + v \cos\alpha) \\ h &= -(\sigma \sin\alpha + \tau \cos\alpha) \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

которых дѣйствуютъ предѣльные нормальныя напряжения, перпендикулярны другъ къ другу. Одному изъ этихъ значеній соотвѣствуетъ наибольшее, а другому—наименьшее нормальное напряжение, и по (29)

$$\begin{aligned} S \max &= \frac{\sigma + \nu}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + (\sigma - \nu)^2} \\ S \min &= \frac{\sigma + \nu}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + (\sigma - \nu)^2} \end{aligned} \quad \dots \dots (30)$$

Которое изъ этихъ двухъ значеній максимумъ, а которое минимумъ, рѣшаетъ уравненіе (21).

Предѣльныя значенія скалывающаго напряжения t въ данной точкѣ получаются изъ условія

$$\frac{dt}{d\alpha} = 0.$$

Если уголъ α для плоскости, въ которой скалывающее напряжение достигаетъ предѣла, означимъ черезъ α_t , то изъ (22) получимъ

$$\frac{dt}{d\alpha} = 2 \frac{\sigma - \nu}{2} \cos 2\alpha_t - 2t \sin 2\alpha_t = 0$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_t = \frac{\sigma - \nu}{2t} \quad \dots \dots \dots (31)$$

Помощію этого значенія уравненіе (24) получаетъ видъ, если предѣльное скалывающее напряжение означимъ черезъ T

$$T = \pm \frac{\tau + \frac{\sigma - \nu}{2} \cdot \frac{\sigma - \nu}{2\tau}}{\sqrt{1 + \frac{(\sigma - \nu)^2}{4\tau^2}}}$$

$$T = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + (\sigma - \nu)^2} \quad \dots \dots \dots (32)$$

Когда уголъ α измѣняется отъ 0 до 180° , то онъ принимаетъ два раза значеніе, удовлетворяющее уравненію 31, и оба эти значенія разнятся другъ отъ друга на 90° , т. е. плоскости, въ которыхъ дѣйствуютъ предѣльныя скалывающія напряжения, перпендикулярны между собою. Одному изъ этихъ значеній соотвѣствуетъ наибольшее, а другому наименьшее скалывающее напряжение, и по (32)

$$\begin{aligned} T \max &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma - \nu)^2 + 4\tau^2} \\ T \min &= - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma - \nu)^2 + 4\tau^2} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (33)$$

Изъ этихъ уравненій видно, что предѣльныя скалывающія напряжения равны между собою.

Слагая и вычитая уравненія (30) получаемъ

$$S \max + S \min = \sigma + \nu$$

$$S \max - S \min = \sqrt{4\tau^2 + (\sigma - \nu)^2}$$

и по (33)

$$S \max - S \min = 2T$$

откуда

$$T = \frac{S \max - S \min}{2}$$

Изъ (28) и (31) имѣемъ

$$\operatorname{tg} 2\alpha_s = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_t}$$

изъ чего слѣдуетъ

$$\begin{aligned} 2\alpha_s &= 90^\circ + 2\alpha_t \\ \alpha_s &= 45^\circ + \alpha_t \end{aligned} \quad (34)$$

т. е. плоскости предѣльных нормальныхъ напряженій составляютъ съ плоскостями предѣльныхъ скалывающихъ напряженій углы 45° .

Предѣльные напряженія называютъ часто главными напряженіями.

§ 16.

Графическое опредѣленіе напряженій s и t .

Радіусомъ $zA = \frac{\sigma + \nu}{2}$ (черт. 9) опишемъ изъ z окружность I, проведемъ горизонтальный діаметръ AzB , отложимъ отъ z на zB

$$\overline{zr} = \frac{\sigma - \nu}{2}$$

возставимъ въ r къ zB перпендикуляръ rd , отложимъ на немъ

$$\overline{rd} = \tau,$$

соединимъ d съ z , и на zd , какъ на діаметрѣ, опишемъ окружность II.

Чтобы получить напряженія s и t для плоскости, наклоненной къ горизонтали подъ угломъ α , проводимъ черезъ A прямую An подъ угломъ α къ AB , продолжаемъ ее до пересѣченія съ окружностью I въ n , соединяемъ n съ z , опредѣляемъ точку пересѣченія τ прямой nz съ окружностью II, и соединяемъ τ съ d . Получаемъ

$$\overline{n\tau} = s, \quad \overline{\tau d} = t$$

Въ самомъ дѣлѣ: опустимъ изъ r на nz и $d\tau$ перпендикуляры rp и rq , то

$$\overline{zq} = \frac{\sigma - \nu}{2} \cos 2\alpha \quad \overline{rq} = \frac{\sigma - \nu}{2} \sin 2\alpha$$

$$\tau d = dq_1 + q_1 \tau = \tau \cos 2\alpha + \frac{\sigma - \nu}{2} \sin 2\alpha = t$$

$$n\tau = n\varepsilon - \varepsilon q + q\tau = \frac{\sigma + \nu}{2} - \frac{\sigma - \nu}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha = s$$

следовательно, по (21) и (22)

$$\tau d = t, \quad n\tau = s.$$

Если соединимъ n съ d , то

$$nd = r = \sqrt{s^2 + t^2}$$

и $\angle \tau nd = \delta$

Продолжимъ nd до пересѣченія съ окружностью I въ δ и соединимъ δ съ A , то δA —дѣйствительное направленіе равнодѣйствующаго напряженія r . Потому что, если въ A возставимъ къ nA перпендикуляръ An_1 , встрѣчающій окружность I въ n_1 , то

$$\angle n_1 A \delta = \angle \tau nd.$$

Если тоже построение повторимъ для плоскости $a_1 b_1$, перпендикулярной къ ab , то получимъ

$$s_1 = n_1 \tau, \quad t_1 = \tau d, \quad r_1 = dn_1, \quad \delta_1 = \angle dn_1 \tau$$

r_1 совпадаетъ съ направленіемъ $\delta_1 A$.

Такъ какъ

$$\overline{mn_1} = 2Az = 2 \frac{\sigma + \nu}{2}$$

$$\text{и } \overline{mn_1} = n\tau + \tau n_1 = s + s_1, \text{ то}$$

$$s + s_1 = \sigma + \nu$$

т. е. сумма нормальныхъ напряженій въ данной точкѣ для всѣхъ паръ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей—величина постоянная.

Изъ построенія видно, что скалывающія напряженія въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ—численно равны между собою.

Предѣльные нормальныя напряженія. Когда элементъ $a_1 b_1$ вращается около точки A , то дѣйствующее на него нормальное напряженіе s вращается около ε , и равно $n_1 \tau = n_1 \varepsilon + \varepsilon \tau$. Во время этого вращенія измѣняется только $\varepsilon \tau$, $n_1 \tau$ сдѣлается поэтому максимумъ для такого положенія плоскости $a_1 b_1$, для котораго $\varepsilon \tau$ будетъ максимумъ, т. е. для котораго $\varepsilon \tau$ сдѣлается діаметромъ круга II (черт. 10). Нормальное напряженіе $n\tau$ плоскости ab , перпендикулярной къ $a_1 b_1$, будетъ въ тоже время минимумъ, и поо = nd , а касательное напряженіе $t = 0$.

Изъ черт. 10 получаемъ

$$tg (180 - 2\alpha_s) = -tg 2\alpha_s = \frac{rd}{rz} = \frac{\tau}{\sigma - \nu}$$

или

$$tg 2\alpha_s = -\frac{2\tau}{\sigma - \nu}$$

$$S \max = n_1 \tau = n_1 z + \tau z = \frac{\sigma + \nu}{2} + \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma - \nu}{2}\right)^2}$$

$$S \min = n \tau = n z - \tau z = \frac{\sigma + \nu}{2} - \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma - \nu}{2}\right)^2}$$

Радиусъ вѣшняго круга I

$$zn = \frac{S \max + S \min}{2}$$

Диаметръ круга II

$$zd = \frac{S \max - S \min}{2}$$

Предѣльные скалывающія напряженія. Скалывающее напряженіе t изображается хордой $d\tau$ (черт. 9), которая достигаетъ предѣльнаго значенія, когда сдѣлается діаметромъ (черт. 11). Такъ какъ въ этомъ случаѣ точка τ совпадаетъ съ точкой z , то m_1 дѣлается касательной къ окружности II.

Изъ черт. 11 получаемъ

$$\max t = zd = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma - \nu}{2}\right)^2}$$

$$\min t = -zd = -\sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma - \nu}{2}\right)^2}$$

$$tg \varphi = tg (90 - 2\alpha_t) = cotg 2\alpha_t = \frac{dr}{rz} = \frac{\tau}{\sigma - \nu}$$

$$cotg 2\alpha_t = \frac{2\tau}{\sigma - \nu}$$

$$tg \delta_t = \frac{zd}{zm} = \frac{S \max - S \min}{S \max + S \min}$$

Изъ черт. 12 видно, что плоскости ab и a_1b_1 , въ которыхъ дѣйствуютъ предѣльныя нормальныя напряженія, составляютъ съ плоскостями $\alpha\beta$ и $\alpha_1\beta_1$, соотвѣтствующими предѣльнымъ скалывающимъ напряженіямъ, углы въ 45° .

§ 17.

Работа деформации тѣла, подвергаемаго одному только нормальному напряженію σ_x .—Когда всѣ напряжения σ и τ , за исключеніемъ одного σ_x , которое въ этомъ случаѣ означимъ просто черезъ σ , равны нулю, то уравненіе (18) получаетъ видъ:

$$\delta = \frac{1}{2E} \int \sigma^2 dv \dots \dots \dots (35)$$

Тѣло подвергается одному напряженію σ когда равнодѣйствующая приложенныхъ къ нему силъ проходитъ черезъ его ось и совпадаетъ съ этой осью, т. е. когда тѣло растягивается или сжимается. Если эту равнодѣйствующую означимъ черезъ P , а площади сѣченія тѣла, перпендикулярнаго къ ней черезъ Ω , то

$$\sigma = \frac{P}{\Omega}.$$

Для призматическаго тѣла Ω постоянно, а слѣдовательно и σ постоянно, и тогда

$$\delta = \frac{\sigma^2}{2E} \int dv = \frac{\sigma^2 v}{2E} \dots \dots \dots (36)$$

Если l — длина тѣла, то

$$v = l\Omega,$$

последнее уравненіе можно поэтому написать такъ:

$$\delta = \frac{\sigma^2 l \Omega}{2E} \dots \dots \dots (37)$$

Означимъ удлинненіе, произведенное напряженіемъ σ или силой $\sigma\Omega$, черезъ λ , то по (4)

$$\sigma = \frac{\lambda E}{l}.$$

Подставивъ это значеніе въ (37), получимъ

$$\delta = \frac{E \lambda^2 \Omega}{2l} \dots \dots \dots (38)$$

§ 18.

Работа деформации, произведенная грузомъ, приложеннымъ съ начальной скоростью.—Положимъ, что сила P приложена къ призматическому тѣлу съ начальной скоростью v_0 , и что послѣ извѣстнаго промежутка времени, въ теченіе котораго эта сила произвела удлинненіе λ , скорость его сдѣлалась равной v .

Если означимъ ускореніе силы тяжести черезъ g , то въ теченіе этого промежутка живая сила груза P измѣнилась на

$$\frac{P}{g} \frac{v^2}{2} - \frac{P}{g} \frac{v_0^2}{2}.$$

Такъ какъ точка приложенія груза прошла путь λ , то онъ сдѣлалъ работу $P\lambda$, а сила упругости, по (38), — отрицательную работу $\frac{E\lambda^2\Omega}{2l}$, слѣдовательно по извѣстному закону работы

$$\frac{P}{2g} (v^2 - v_0^2) = P\lambda - \frac{E\lambda^2\Omega}{2l},$$

откуда работа деформациі

$$\mathcal{A} = \frac{E\lambda^2\Omega}{2l} = P\lambda - \frac{P}{2g} (v^2 - v_0^2). \quad *)$$

Когда начальная скорость v_0 груза, вслѣдствіе его встрѣчи съ тѣломъ, замедляется до нуля, то въ (39) $v=0$, и тогда

$$\mathcal{A} = \frac{E\lambda^2\Omega}{2l} = P\lambda + \frac{Pv_0^2}{2g}$$

т. е. работа деформациі въ этомъ случаѣ равна работѣ груза, сложенной съ начальной живой силой груза.

Очевидно, что уравненія (39) и (40) дѣйствительны только для напряженій σ , не превышающихъ предѣлъ упругости, или что одно и то же, для удлиненій λ , не превышающихъ предѣльное упругое удлиненіе.

Работа видоизмѣненія призматическаго тѣла для напряженій большихъ предѣла упругости, получается по (14) изъ выраженія

$$\mathcal{A} = \int dv \int \sigma de.$$

Такъ какъ въ призматическомъ брускѣ σ и de въ каждый моментъ для всѣхъ элементовъ dv одинаковы, то можно написать

$$\mathcal{A} = \int \sigma de \int dV = V \int \sigma de \dots \dots \dots (41)$$

$\int \sigma de$ выражаетъ площадь кривой, которой абсциссы— e , а ординаты— σ . Работа $\mathcal{A}$ можетъ поэтому быть опредѣлена опытами. Для сего откладываемъ величины относительнаго удлине-

*) Для тѣла съ непостояннымъ поперечнымъ сѣченіемъ было бы нужно въ уравненіи (39) вмѣсто $\frac{E\lambda^2\Omega}{2l}$ поставить $\frac{1}{2E} \int \sigma^2 dv$

нія e , получаема по мѣрѣ возрастанія груза P , какъ абсциссы, а соотвѣтствующія имъ напряженія σ —какъ ординаты; площадь полученной такимъ образомъ кривой, ограниченная крайними ординатами, представитъ работу деформаци, отнесенную къ единицѣ объема.

§ 19.

Живое сопротивленіе.—Выраженіемъ работы деформаци пользуются для опредѣленія сопротивленія, какое вызывается въ тѣлѣ подвижнымъ грузомъ, обладающимъ живою силою или механическимъ запасомъ работы, вслѣдствіе чего это работу, отнесенную къ единицѣ объема, называютъ *живымъ сопротивленіемъ*.

Живое сопротивленіе называется *живымъ упругимъ сопротивленіемъ*, если оно соотвѣтствуетъ продольному измѣненію, равному предѣльному упругому измѣненію, и *живымъ временнымъ сопротивленіемъ*, когда это измѣненіе доведено до разрушенія сцѣпленія.

Размѣры сооруженій, подвергаемыхъ дѣйствію подвижнаго груза, должны быть опредѣлены такимъ образомъ, чтобы ихъ напряженія, производимыя динамическимъ грузомъ, вообще не превышали живаго упругаго сопротивленія.

§ 20.

Вліяніе колебаній напряженій.—Вліяніе подвижнаго груза на крѣпость матеріала оказывается тѣмъ болѣе вреднымъ, чѣмъ чаще его дѣйствіе повторяется. Мы разсмотримъ два практическихъ случая повторенія дѣйствія плавнаго груза (дѣйствующаго безъ сотрясеній):

- 1) Матеріаль послѣ каждаго повторенія дѣйствія освобождается отъ всякаго напряженія.
- 2) Предѣльныя напряженія каждаго повторенія равны и противоположны.

Первый случай.—Когда грузъ P приложенъ къ призматическому тѣлу безъ начальной скорости, то онъ перемѣщается только вслѣдствіе имъ самымъ производимаго удлиненія, и по (39) при $v=v_0=0$

$$\frac{E\lambda^2\Omega}{2l}=P\lambda,$$

откуда—наибольшее удлиненіе при динамическомъ дѣйствіи груза

$$\lambda=\frac{2Pl}{E\Omega} \quad \dots \dots \dots (42)$$

Статическое удлинение, производимое грузомъ P по (6),

$$\Delta l = \frac{Pl}{E\Omega},$$

изъ чего видимъ, что вслѣдствіе живой силой, развивающейся при приложеніи груза, продольное измѣненіе въ первый моментъ вдвое больше того, какое соотвѣтствуетъ статическому равновѣсію тѣла.

Послѣ удлиненія тѣло укорачивается до первоначальной длины, затѣмъ испытываетъ по направленію его оси качанія, которыхъ первоначальная амплитуда $\lambda = 2\Delta l$ вслѣдствіе различнаго рода вѣшнихъ и внутреннихъ сопротивленій постепенно уменьшается, пока тѣло наконецъ не приметъ форму равновѣсія, опредѣленную уравненіемъ (6).

Второй случай. Когда грузъ P приложенъ къ призматическому тѣлу длиной l , то по наступленіи равновѣсія его длина измѣнилась на величину $\lambda = \frac{Pl}{E\Omega}$.

Если вслѣдъ за этимъ направленіе силы P сдѣлается прямо противоположнымъ, то въ первый моментъ тѣло будетъ стремиться принять первоначальную длину, и укоротится на λ . Начальная скорость этого періода $= 0$, а конечная $= v$, а такъ какъ сила упругости дѣйствуетъ по тому же направленію, что сила P , то по (39)

$$\frac{E\lambda^2\Omega}{2l} + P\lambda = \frac{P}{2g}v^2 \dots \dots \dots (43)$$

Во время слѣдующаго періода грузъ P измѣняетъ длину тѣла по направленію противоположному предыдущему измѣненію; начальная скорость этого періода равна конечной скорости перваго, а конечная $=$ равна нулю. Если μ — величина этого измѣненія, то по (39)

$$\frac{E\mu^2\Omega}{2l} - P\mu = \frac{P}{2g}v^2 \dots \dots \dots (44)$$

Изъ (43) и (44) имѣемъ

$$\frac{E\mu^2\Omega}{2l} - P\mu = \frac{E\lambda^2\Omega}{2l} + P\lambda$$

или, такъ какъ $P = \frac{E\lambda\Omega}{l}$,

$$\frac{E\mu^2\Omega}{2l} - \frac{E\lambda\Omega}{l}\mu = \frac{E\lambda^2\Omega}{2l} + \frac{E\lambda^2\Omega}{l}$$

и послѣ соотвѣтственнаго сокращенія

$$\mu^2 - 2\mu\lambda = 3\lambda^2,$$

откуда

$$\mu = 3\lambda \dots \dots \dots (45)$$

т. е. когда предѣльные напряженія одного повторенія равны и противоположны, то продольное измѣненіе втрое больше статическаго измѣненія.

Если поэтому продольное измѣненіе тѣла по наступленіи равновѣсія означимъ черезъ λ , то при повторенномъ прикладываніи груза по одному направленію это измѣненіе будетъ 2λ , а по противоположнымъ направленіямъ— 3λ . Изъ этого слѣдуетъ, что для достиженія одинаковой прочности допускаемая нагрузка должна быть въ послѣднемъ случаѣ — втрое, а въ первомъ — вдвое меньше, чѣмъ въ случаѣ неподвижнаго дѣйствія груза.

§ 21.

Вліяніе ударовъ.—Удары дѣйствуютъ на тѣло динамическимъ образомъ; производимыя ими напряженія опредѣляются поэтому помощію работы деформаціи. Такъ какъ теорія удара для случаевъ, имѣющихъ мѣсто въ сооруженіяхъ, весьма несовершенна, то производимыя ударами напряженія не могутъ быть опредѣлены теоретически съ достаточной для практики приближенностью. Вслѣдствіе того вліяніе ударовъ расчетомъ не опредѣляютъ, и принимаютъ его во вниманіе отъ части соотвѣтственнымъ увеличеніемъ напряженій, полученныхъ для покойнаго груза, и отъ части выборомъ матеріала, обладающаго достаточнымъ живымъ сопротивленіемъ. Такъ какъ послѣднее пропорціонально грузу и удлиненію, то слѣдуетъ, что матеріалъ, дающій значительное удлиненіе, можетъ при малой крѣпости обладать для ударовъ бѣльшимъ сопротивленіемъ, чѣмъ матеріалъ съ высокою крѣпостію, но малой способностью удлиняться.

Опыты показываютъ, что мягкіе металлы, не смотря на свою низкую крѣпость, сопротивляются динамическому грузу, дѣйствующему съ ударами, значительно лучше чѣмъ твердые, которые разрушаются при меньшемъ видоизмѣненіи. По Ардану и Борне, производившимъ въ этомъ отношеніи опыты надъ желѣзомъ различной твердости, мягкое желѣзо, котораго временное сопротивленіе покойному грузу 32 кил. на 1 квадр. миллиметръ, имѣетъ въ 53 раза бѣльшее сопротивленіе динамическому грузу чѣмъ твердое желѣзо съ временнымъ сопротивленіемъ въ 60 кил. на 1 кв. миллиметръ. Хотя поэтому первое разрывается при усиліи почти вдвое меньшемъ, но выдерживаетъ безопасно гораздо бѣльшіе удары, чѣмъ послѣднее. Вслѣдствіе того для частей, подверженныхъ грузу, дѣйствующему съ ударами, слѣ-

дуетъ употреблять мягкіе сорта желѣза и стали, а твердые можно брать только для такихъ сооружений, на которыя дѣйствуетъ покойная нагрузка.

§ 22.

Нагрузка и сопротивленіе.—Наименьшій грузъ отъ дѣйствія котораго въ теченіе короткаго времени тѣло разрушается, называется *разрушающимъ грузомъ*, а часть разрушающаго груза, приходящаяся на единицу площади сѣченія, въ которомъ произошло разрушеніе сѣпленія—*модулемъ крѣпости*.

Наибольшая величина силы упругости, отнесенная къ единицѣ площади, проявляющаяся въ моментъ передъ разрушеніемъ тѣла отъ дѣйствія спокойной нагрузки, называется *временнымъ сопротивленіемъ*.

Нагрузка, которую матеріаль можетъ выдерживать безопасно, называется *безопасной нагрузкой*, а ея наибольшая величина, допускаемая на практикѣ,—*допускаемой нагрузкой*.

Сила упругости, отнесенная къ единицѣ площади, допускаемая безопасно въ сооруженіяхъ, называется *прочнымъ или допускаемымъ напряженіемъ*.

Прежде принимали за допускаемое напряженіе извѣстную часть временнаго сопротивленія, и называли отношеніе временнаго сопротивленія къ прочному напряженію—*степенью прочности*, а обратную величину степени прочности — *коэффициентомъ прочности*.

Степень прочности принимаютъ тѣмъ большую, чѣмъ большее вліяніе на прочность матеріала въ данномъ сооруженіи могутъ имѣть постороннія обстоятельства, какъ удары и сотрясенія, производимыя движущимися массами, переменны температуры, атмосфера и т. д.

Среднія величины степеней прочности приведены въ таблицѣ II.

Если коэффициентъ прочности означимъ черезъ $\frac{1}{p}$, модуль крѣпости черезъ R , а допускаемое напряженіе черезъ k , то

$$k = \frac{1}{p} R \dots \dots \dots (46)$$

Въ таблицѣ III приведены числовыя данныя для модуля упругости, предѣла упругости, модуля крѣпости и допускаемаго напряженія. Числа даны въ килограммахъ на квадратный миллиметръ. Эти числа для различныхъ матеріаловъ—среднія, они выведены изъ многочисленныхъ опытовъ надъ матеріалами различного качества.

Къ временнымъ сооруженіямъ принадлежатъ тѣса, временные мосты и прочія краткосрочныя сооруженія, а также постоянныя сооруженія, на которыя дѣйствуетъ неподвижная нагрузка.

Допускаемыя напряжения, данныя въ графѣ „зданія и прочія сооруженія“ дѣйствительны для такихъ частей, которыя испытываютъ небольшіе удары и сотрясенія.

Большія значенія прочнаго сопротивленія, помѣщенные въ графѣ „стропила и мосты“ относятся къ ихъ длиннымъ частямъ, на которыя сотрясенія имѣютъ менѣе вліянія (какъ ноги стропиль, пояса мостовыхъ фермъ), а меньшія — къ короткимъ частямъ (поперечныя и продольныя балочки, раскосы фермъ и т. д.). Тѣже числа можно употреблять для частей машинъ, испытывающихъ небольшія сотрясенія.

§ 23.

Старый способъ опредѣленія размѣровъ поперечныхъ сѣченій. — Прежде опредѣляли площадь Ω поперечнаго сѣченія всякой части сооруженія такимъ образомъ, что статическимъ путемъ находили ея наибольшее сопротивленіе N и дѣлили его на допускаемое напряжение k , т. е. вычисляли Ω по формулѣ

$$\Omega = \frac{N}{k} \dots \dots \dots (47)$$

Если k равнялось $\frac{1}{p}$ части модуля крѣпости, то говорили, что сооруженіе построено съ p кратной прочностью. Что такое мнѣніе невѣрно, показываютъ уравненія (42) и (45), по которымъ подвижной грузъ производитъ въ моментъ приложенія, смотря по роду колебанія напряженій, напряжение вдвое и втрое большее статическаго, производимаго имъ въ неподвижномъ положеніи.

Если прикладываніе груза часто повторяется, то и эти увеличенныя напряжения будутъ часто повторяться, вслѣдствіе чего при одномъ и томъ же коэффициентѣ прочности $\frac{1}{p}$ сооруженіе, которое послѣ каждого повторенія приходитъ въ ненапряженное состояніе, будетъ имѣть при одинаковыхъ прочихъ обстоятельствахъ вдвое, а которое при каждомъ повтореніи испытываетъ равныя и противоположныя напряженія—втрое меньшую прочность чѣмъ то, на которое дѣйствуетъ неподвижная нагрузка. При этомъ сравненіи не принято еще во вниманіе вліяніе ударовъ и сотрясеній.

Это, теоретическимъ путемъ полученное, заключеніе о вліяніи динамическаго дѣйствія груза на сопротивленіе матеріала вполне подтверждается опытами.

§ 24.

Новый способ опредѣленія размѣровъ поперечныхъ сѣченій.—Надъ вліяніемъ повторенныхъ напряженій на крѣпость матеріала производили весьма обстоятельные опыты инженеръ Велеръ и профессоръ Шпангенбергъ въ Берлинѣ, профессоръ Баушингеръ въ Мюнхенѣ, инженеръ Considère въ Парижѣ и др.

Опыты Велера продолжались 12 лѣтъ (1859—1871). Изъ полученныхъ помощію ихъ результатовъ Велеръ вывелъ слѣдующіе законы крѣпости, которые всѣми послѣдующими опытами, произведенными другими испытателями, вполне подтвердились:

1) Разрушеніе матеріала можетъ произойти не только отъ нагрузки, равной разрушающему грузу (§ 28), но также отъ значительно меньшей нагрузки, если она повторяется достаточное число разъ.

2) Число повтореній напряженій, производящихъ разрушеніе, тѣмъ меньше:

а) чѣмъ больше наибольшее напряженіе при одинаковомъ наименьшемъ;

б) чѣмъ меньше наименьшее напряженіе при одинаковомъ наибольшемъ.

Изъ (2) слѣдуетъ

3) число повтореній напряженій, нужныхъ для разрушенія матеріала тѣмъ больше, чѣмъ меньше разность между наибольшимъ и наименьшимъ напряженіемъ каждаго повторенія. Замѣтимъ при этомъ, что согласно опытамъ, увеличеніе наибольшаго напряженія болѣе невыгодно при одной и той же разности напряженій, чѣмъ уменьшеніе наименьшаго.

4) Если наибольшее напряженіе меньше извѣстнаго предѣла, то разрушеніе не произойдетъ, какъ велико ни было бы число повтореній, т. е. число повтореній, производящихъ разрушеніе, въ этомъ случаѣ безконечно велико.

Пусть

π —число повтореній напряженій, нужныхъ для излома какой-нибудь части сооруженія,

N —наибольшее и

n —наименьшее сопротивленіе каждаго повторенія, то, согласно третьему закону Велера, число π должно быть функцией не разности $N-n$, но разности $\alpha N-n$, въ которой коэффициентъ α выражаетъ болѣе сильное вліяніе на π величины N , чѣмъ его имѣетъ величина n .

Законы Велера могутъ поэтому быть выражены алгебраической функцией вида

$$\frac{1}{\pi} = f(\alpha N - n).$$

Если въ известной общей формулѣ

$$y = a + bx + cx^2 + \dots$$

поставимъ

$$y = \frac{1}{\pi} \text{ и } x = \alpha N - n,$$

то получимъ

$$\frac{1}{\pi} = a + b(\alpha N - n) + c(\alpha N - n)^2 + \dots \quad (48)$$

Если этотъ рядъ окончимъ н. пр. третьимъ членомъ, то по-мощію четырехъ опытовъ было бы возможно опредѣлить коэффи-циенты a , b , c и α ; если бы число опытовъ было больше, то по-мощію метода наименьшихъ квадратовъ получились бы для этихъ коэффиціентовъ удовлетворительныя практическія величины.

Для $N=n$, уравненіе (48) получаетъ видъ

$$\frac{1}{\pi} = a + bN(\alpha - 1) + cN^2(\alpha - 1) + \dots$$

Когда N очень мало, то по 4-му закону Велера $\pi = \infty$, слѣдо-вательно для $N = 0$ и $\frac{1}{\pi} = 0$, поэтому

$$a = 0$$

и уравненіе крѣпости можно написать такъ:

$$\frac{1}{\pi} = b(\alpha N - n) + c(\alpha N - n)^2 + d(\alpha N - n)^3 + \dots$$

Опыты показываютъ, что отношеніе, въ какомъ уменьшается π при увеличеніи N , выше чѣмъ 2-й степени, такъ что для практическаго употребленія слѣдуетъ взять по крайней мѣрѣ 3 члена, т. е.

$$\frac{1}{\pi} = b(\alpha N - n) + c(\alpha N - n)^2 + d(\alpha N - n)^3. \dots \quad (49)$$

Для долговѣчныхъ сооруженій должно $\pi = \infty$, и зависимость между напряжениями *домовѣчныхъ* сооруженій опредѣлится урав-неніемъ

$$b(\alpha N - n) + c(\alpha N - n)^2 + d(\alpha N - n)^3 = 0$$

или

$$b + c(\alpha N - n) + d(\alpha N - n)^2 = 0. \dots \quad (50)$$

Означимъ наибольшее и наименьшее сопротивленіе, повто-реніе которыхъ матеріалъ можетъ выдержать безконечное число разъ:

а) когда наименьшее напряженіе cadaго повторенія равно наибольшему—черезъ K и K ,

б) когда наименьшее напряжение $= 0$ — через $\mathfrak{N}$ и 0 ,

в) Когда наименьшее напряжение равно, но противоположно наибольшему — через S и $-S$.

Для этих трех случаев получим по (50) слѣдующія уравненія:

$$b + cK(\alpha - 1) + dK^2(\alpha - 1)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

$$b + c\alpha\mathfrak{N} + d\alpha^2\mathfrak{N}^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

$$b + cS(\alpha + 1) + dS^2(\alpha + 1)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

изъ которыхъ получаемъ:

$$\alpha\mathfrak{N} = K(\alpha - 1) \quad \alpha = \frac{K}{K - \mathfrak{N}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

$$\text{и } \alpha\mathfrak{N} = S(\alpha + 1) \quad \alpha = \frac{S}{\mathfrak{N} - S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Если для K , $\mathfrak{N}$ и S подставимъ въ уравненіяхъ (54) и (55) опредѣленные опытами численные значенія, то получаются для α не совсѣмъ одинаковыя величины. Причина тому заключается отчасти въ томъ, что металлъ проявляетъ при сжатіи не совсѣмъ тѣже свойства, что при растяженіи, а также, вѣроятно, въ недостаточномъ числѣ членовъ, взятыхъ въ уравненіи (49).

Хотя разниа значеній α , получаемыхъ для одного и того же матеріала по формуламъ (54) и (55), такъ небольшая, что въ практикѣ еѹ можно бы пренебрегать, но для большей точности мы будемъ принимать за α среднее ариѳметическое обоихъ значеній. Оказывается также цѣлесообразнымъ для частей, которыхъ предѣльные напряжения однородны, опредѣлять α по (54), а для частей съ разнородными напряжениями пользоваться уравненіемъ (55).

Изъ уравненій (50) и (52) получаемъ

$$-c\alpha\mathfrak{N} - d\alpha^2\mathfrak{N}^2 + c(\alpha N - n) + d(\alpha N - n)^2 = 0$$

$$c[(\alpha N - n) - \alpha\mathfrak{N}] = -d[(\alpha N - n)^2 - \alpha^2\mathfrak{N}^2]$$

$$\frac{c}{d} = -[(\alpha N - n) + \alpha\mathfrak{N}].$$

Такимъ же образомъ получимъ изъ уравненій (50) и (51)

$$\frac{c}{d} = -[K(\alpha - 1) + \alpha\mathfrak{N}],$$

слѣдовательно

$$(\alpha N - n) + \alpha\mathfrak{N} = K(\alpha - 1) + \alpha\mathfrak{N}$$

или

$$\alpha N - n = K(\alpha - 1)$$

Если отношеніе наименьшаго напряженія къ наибольшему, т. е. $\frac{n}{N}$, означимъ черезъ ω , то изъ послѣдняго уравненія имѣемъ

$$\alpha - \omega = \frac{K}{N}(\alpha - 1),$$

откуда

$$N = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \omega} K = \frac{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) K}{1 - \frac{\omega}{\alpha}} \dots \dots \dots (56)$$

По (54)

$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{\mathfrak{N}}{K},$$

слѣдовательно также

$$N = \frac{\mathfrak{N}}{1 - \frac{\omega}{\alpha}} \dots \dots \dots (57)$$

Изъ уравненій (50) и (53) получаемъ для случая, когда предѣльные напряженія противоположны, слѣдовательно— n отрицательно, выраженіе

$$c [(\alpha N + n) - S(\alpha + 1)] = -d [(\alpha N + n)^2 - S^2(\alpha + 1)^2]$$

$$\frac{c}{d} = - [(\alpha N + n) + S(\alpha + 1)].$$

Такимъ же образомъ, изъ (52) и (53)

$$\frac{c}{d} = - [S(\alpha + 1) + \alpha \mathfrak{N}].$$

Слѣдовательно

$$(\alpha N + n) + S(\alpha + 1) = \alpha \mathfrak{N} + S(\alpha + 1),$$

откуда, означивъ отношеніе $\frac{n}{N}$ черезъ ω

$$N = \frac{\alpha}{\alpha + \omega} \mathfrak{N} \dots \dots \dots (58)$$

или

$$N = \frac{\mathfrak{N}}{1 + \frac{\omega}{\alpha}} \dots \dots \dots (59)$$

Изъ уравненій (57) и (59) видно, что для опредѣленія такого наибольшаго напряженія N , которое можетъ произвести разрушеніе матеріала только послѣ безконечно большаго числа повтореній, нужно вычислить оба предѣльные напряженія, и опредѣлить ихъ отношеніе ω . Между тѣмъ какъ при расчетахъ по старому методу достаточно было знать только наибольшее напряженіе каждаго повторенія, нужно по новому методу, кромѣ наибольшаго, опредѣлять и наименьшее напряженіе.

Въ формулахъ (57) и (59) не приняты во вниманіе вліянія ударовъ и сотрясеній, неоднородности матеріала и другихъ,

теоретически неопредѣлимыхъ обстоятельствъ. Эти вліянія принимаютъ въ расчетъ такимъ образомъ, что за допускаемое напряженіе берутъ не всю величину N , опредѣленную уравненіями (57) и (59), но только нѣкоторую часть ея, т. е. умножаютъ N на коэффициентъ прочности $\frac{1}{p}$. Безъ коэффициента прочности невозможно поэтому обойтись и при расчетахъ по новому методу, только теперь онъ можетъ быть болѣе близкимъ къ единицѣ, чѣмъ при употребленіи стараго метода.

Оказывается достаточнымъ для сооружений, подвергаемыхъ сильнымъ толчкамъ (желѣзнодорожныхъ мостовъ и т. п.) брать для желѣза и стали $p=3$,
для дерева $p=6$.

Если допускаемое напряженіе означимъ черезъ k , то для однородныхъ предѣльныхъ напряженій

$$k = \frac{N}{p} \frac{1}{1 - \frac{\omega}{\alpha}} \dots \dots \dots (60)$$

и для разнородныхъ

$$k = \frac{N}{p} \frac{1}{1 + \frac{\omega}{\alpha}} \dots \dots \dots (61)$$

§ 25.

Числовыя значенія допускаемаго напряженія для мостовыхъ и имъ подобныхъ сооружений.—Чтобы числовыя данныя допускаемаго напряженія были дѣйствительны и для менѣ хорошихъ сортовъ, мы воспользуемся только наиминизшими величинами, полученными изъ опытовъ надъ сопротивленіемъ матеріала при повторенныхъ напряженіяхъ.

а) *Жельзо*. Въ слѣдующей таблицѣ приведены наименьшія значенія напряженій K , N и S , выраженные въ килограммахъ на 1 квадратный миллиметръ, полученныя изъ опытовъ надъ тремя сортами желѣза.

Таблица IV.

Происхожденіе матеріала.	K.	N.	S.	$\alpha = \frac{K}{K-N}$	$\alpha = \frac{S}{N-S}$
Ось завода Фениксъ .	32,2	21,9	11,7	3,12	1,15
Однородное желѣзо					
Пирсона	42,8	29,2	17,5	3,14	1,50
Вестфальское желѣзо.	—	23,4	17,5	—	2,53
Среднее значеніе				3,13	1,72

$$\text{Беремъ: } \alpha = \frac{3,13 + 1,72}{2} = 2,42$$

$$\frac{1}{\alpha} = 0,4 \quad N = 21.$$

Поэтому

а) для однородныхъ напряженій, по (60)

$$k = \frac{21}{3} \cdot \frac{1}{1-0,4\omega} = \frac{7}{1-0,4\omega} \dots \dots \dots (62)$$

б) для разнородныхъ напряженій по (61)

$$k = \frac{7}{1+0,4\omega} \dots \dots \dots (62)$$

б) *Мякая Сталь.* Для мягкой стали, содержащей около 0,45 % углерода, получаются изъ таблицъ Велера слѣдующія наименьшія величины для *K*, *N* и *S*, выраженные въ килограммахъ на 1 квадратный миллиметръ:

Таблица V.

Родъ матеріала.	K.	N.	S.	$\alpha = \frac{K}{K-N}$	$\alpha = \frac{S}{N-S}$
Литая сталь завода Бо-хумъ	64,7	32,9	19,0	2,04	0,37
Литая сталь завода Викерсъ	42,4	—	16,1	—	—
Литая сталь завода Борзигъ	58,6	—	14,6	—	—
Листовая сталь . . .	53,4	36,5	—	3,16	—
Среднее				2,6	1,37

$$\alpha = \frac{2,6 + 1,37}{2} = 2,01 \quad \frac{1}{\alpha} = 0,5 \quad N = 32.$$

Для однородныхъ напряженій, по (60).

$$k = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{1-0,5\omega} = \frac{10}{1-0,5\omega} \dots \dots \dots (63)$$

и для разнородныхъ, по (61)

$$k = \frac{10}{1+0,5\omega}$$

в) *Твердая, литая, незакаленная сталь* (содержащая около 0,6% углерода).

Для этой стали получаемъ изъ опытовъ Шпангенберга слѣдующую таблицу:

Таблица VI.

Родъ матеріала	K.	N.	S.	$\alpha = \frac{S}{K-N}$	$\alpha = \frac{S}{N-S}$
Ось 1862	76,2	36,5	19,0	1,92	1,09
Сталь Firth	84,0	—	16,1	—	—
Среднее				1,92	1,09

$$\alpha = \frac{1,92 + 1,09}{2} = 1,5 \quad \frac{1}{\alpha} = 0,7 \quad N = 36$$

$$k = \frac{36}{3} \frac{1}{1 + 0,7\omega} = \frac{12}{1 + 0,7\omega} \quad \dots \quad (64)$$

г) *Дерево*.—Соотвѣтственно практическимъ даннымъ можно взять для дерева среднимъ числомъ (въ килограммахъ на 1 квадратный миллиметръ).

$$K=6, \quad N=2, \quad S=1,3.$$

Поэтому

$$\alpha = \frac{K}{K-N} = \frac{6}{4} \quad \alpha = \frac{S}{N-S} = 1,85$$

Среднее изъ обоихъ значеній

$$\alpha = \frac{1,5 + 1,85}{2} = 1,7 \quad \frac{1}{\alpha} = 0,6$$

Вслѣдствіе вреднаго вліянія атмосферы нужно взять для дерева: для постоянныхъ сооружений $p=6$ и для временныхъ— $p=4,5$. Изъ формулъ (60) и (61) получимъ для постоянныхъ сооружений

$$k = \frac{0,3}{1 + 0,6\omega} \quad \dots \quad (65)$$

и для временныхъ

$$k = \frac{0,44}{1 + 0,6\omega} \quad \dots \quad (66)$$

Для опредѣленія допускаемаго напряженія при расчетѣ сооружений, подвергаемыхъ дѣйствію переменной нагрузки съ сотрясеніями, имѣемъ поэтому слѣдующія формулы:

а) Желѣзо: $k = \frac{7}{1 + 0,4\omega}$

б) Мягкая сталь: $k = \frac{10}{1 \mp 0,5\omega}$

в) Твердая, незакаленная сталь: $k = \frac{12}{1 \mp 0,7\omega} \dots \dots \dots (67)$

г) Дерево $\begin{cases} \text{постоянные сооруженія: } k = \frac{0,3}{1 \mp 0,6\omega} \\ \text{временные сооруженія: } k = \frac{0,44}{1 \mp 0,6\omega} \end{cases}$

Изъ этихъ формулъ k получается въ килограммахъ на 1 квадратный миллиметръ. Знакъ минусъ въ знаменателѣ относится къ случаю, когда оба предѣльные напряженія однородны, а знакъ $+$ — когда они разнородны.

Г л а в а II.

Нормальная упругость.

§ 26.

Вступленіе.—Если плоская фигура, постоянного или переменнаго вида, скользитъ своимъ центромъ тяжести вдоль прямой или кривой линіи такимъ образомъ, что ея плоскость остается постоянно перпендикулярной къ этой линіи, то она описываетъ тѣло, которое называютъ *брусомъ*.

Линія, по которой движется центръ тяжести фигуры, называется средней линіей, или *осью* бруса, всякая линія, параллельная оси—*волокомъ*, а всякое сѣченіе, перпендикулярное къ оси—*поперечнымъ сѣченіемъ*.

По виду оси бруса его называютъ *прямымъ или кривымъ брусомъ*.

Сооруженіе можетъ состоять изъ одного, или изъ нѣсколькихъ брусевъ. Въ первомъ случаѣ оно называется *простымъ*, а въ послѣднемъ—*сложнымъ сооруженіемъ*.

Если брусья сложнаго сооруженія соединены между собою такимъ образомъ, что въ немъ возможны только такія видоизмѣненія, которыя допускаетъ упругость матеріала, то оно называется *сооруженіемъ неизмѣняемаго вида*. Чтобы такое сооруженіе имѣло неизмѣняемое положеніе въ пространствѣ, оно должно быть соединено съ неподвижнымъ тѣломъ такимъ образомъ, чтобы по отношенію къ послѣднему не могло имѣть никакого другого движенія кромѣ того, которое зависитъ отъ упругости.

Точки, посредствомъ которыхъ сооруженіе соединено съ неподвижнымъ тѣломъ, называются *подпорными точками*, а части неподвижнаго тѣла, содержащія подпорныя точки—*опорами*.

Сооруженіе неизмѣняемаго вида будемъ для краткости называть *неизмѣняемымъ*, а сооруженіе неподвижное въ пространствѣ,—*устойчивымъ сооруженіемъ*.

§ 27.

Роды дѣйствія вѣшнихъ силъ.—Положимъ, что на устойчивый брусъ AB (черт. 13) дѣйствуютъ вѣшнія силы $P_1 P_2 P_3 \dots$ по различнымъ направленіямъ въ пространствѣ. Эти силы вызываютъ въ опорныхъ точкахъ противодѣйствія или реакціи, а въ поперечныхъ сѣченіяхъ—упругія сопротивленія. Совокупность этихъ реакцій и сопротивленій измѣнитъ форму и положеніе бруса настолько, насколько это допуститъ упругость бруса и опоръ. Соотвѣтственно увеличенію видоизмѣненія бруса будетъ возрастать и напряженіе частичныхъ силъ до тѣхъ поръ, пока не наступитъ равновѣсіе во всѣхъ точкахъ между вѣшними и внутренними силами.

Представимъ себѣ, что черт. 13 представляетъ видъ бруса по наступленіи равновѣсія. Очевидно, что это равновѣсіе не будетъ нарушено, если произвольнымъ сѣченіемъ mn разрѣжемъ брусъ на двѣ части, и къ поверхностямъ разрѣза приложимъ силы, производящія на нихъ точно такое дѣйствіе, какое въ неразрѣзанномъ брусѣ производили внутреннія силы.

Отбросимъ правую часть mnB и рассмотримъ, какимъ образомъ проявляется дѣйствіе силъ на лѣвую часть Amn .

Если R —реакція опорной точки A , то силы R, P_1 и P_2 (черт. 13 a) вмѣстѣ съ сопротивленіемъ сѣченія mn , должны удовлетворять условіямъ равновѣсія.

Возьмемъ три взаимно перпендикулярныя оси координатъ такимъ образомъ, чтобы ось X проходила черезъ центръ тяжести сѣченія mn , и была къ нему перпендикулярна, и чтобы оси Y и Z лежали въ плоскости этого сѣченія.

Разложимъ силы $P_1 P_2$ и реакцію R (т. е. всѣ вѣшнія силы, дѣйствующія на лѣвую отсѣченную часть бруса) по направленіямъ этихъ трехъ осей, и означимъ алгебраическую сумму слагающихъ, параллельныхъ осямъ OX, OY и OZ (соотвѣтственно) черезъ $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$. Означимъ сумму моментовъ тѣхъ же силъ R, P_1, P_2 по отношенію къ осямъ OX, OY и OZ —черезъ M_x, M_y и M_z .

Такъ какъ сопротивленіе сѣченія уравновѣшиваетъ вѣшнія

силы R, P_1, P_2 , то слѣдуетъ, что слагающія силы этого сопротивленія будутъ— $\Sigma X, -\Sigma Y, -\Sigma Z$, а моменты:— $M_x, -M_y, -M_z$.

Сила ΣX , дѣйствующая перпендикулярно къ сѣченію (по направленію оси бруса), называется *нормальной силой*, а силы ΣY и ΣZ , параллельныя сѣченію—*поперечными силами*.

Нормальная сила ΣX стремится удалить два сѣченія другъ отъ друга, или приблизить ихъ другъ къ другу; въ первомъ случаѣ она называется *растяженіемъ*, а въ послѣднемъ—*сжатіемъ*.

Поперечныя силы ΣY и ΣZ стремятся сдвинуть одно сѣченіе по другому, или срѣзать брусъ по сѣченію; ихъ называютъ по-этому *срѣзывающими или скалывающими силами*.

Моментъ M_x стремится вращать сѣченіе бруса около его оси (т. е. около оси OX). Такой родъ дѣйствія внѣшнихъ силъ называется *крученіемъ*, а моментъ M_x —*скручивающимъ моментомъ*.

Моменты M_y и M_z стремятся повернуть сѣченіе бруса, первый около оси OY , а второй—около оси OZ . Производимое этими моментами видоизмѣненіе называютъ *изгибомъ или выгибаніемъ*, а моменты M_y и M_z —*сгибающими моментами*.

Въ практикѣ всего чаще встрѣчаются слѣдующіе случаи:

1) Всѣ слагающія и моменты за исключеніемъ слагающихъ ΣX , равны нулю. Это случай *нормальной упругости (растяженія или сжатія)*. Тѣло при разрушеніи разрывается или раздробляется.

2) Только ΣY или ΣZ не равны нулю: случай *скалыванія или перерѣзыванія*. При разрушеніи тѣло перерѣзывается или скалывается.

3) Только моментъ M_x не равенъ нулю. Это случай *скручиванія*; при разрушеніи тѣло скручивается.

4) Только одинъ изъ моментовъ M_y и M_z , или оба одновременно не равны нулю. При разрушеніи тѣло ломается—это случай *изгиба*.

Кромѣ этихъ четырехъ простыхъ случаевъ возможны также сложные случаи дѣйствія внѣшнихъ силъ на тѣло. Изъ нихъ въ строительной практикѣ встрѣчается всего чаще случай совокупнаго растяженія или сжатія и изгиба.

§ 28.

Нормальная упругость (растяженіе и сжатіе).

Нормальная упругость вообще.—Въ брусѣ вызывается одна только нормальная упругость если для cadaго сѣченія равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ проходитъ черезъ его центръ тяжести и совпадаетъ съ осью бруса.

Простѣйшій случай растяженія или сжатія имѣется тогда, когда прямолинейный брусъ на одномъ концѣ укрѣпленъ, а въ центрѣ тяжести сѣченія другого конца дѣйствуетъ сила, имѣющая направленіе оси бруса, или когда къ центрамъ тяжести обоихъ конечныхъ сѣченій приложены по направленію оси равныя и противоположныя силы. Если эти силы обращены другъ къ другу, то брусъ сжимается, въ противномъ случаѣ—растягивается.

Такъ какъ законъ, по которому напряженіе, вызываемое нормальной силой, распредѣляется на площадь сѣченія, точно не извѣстенъ, то принимаютъ, что усиліе распредѣляется равномерно на сѣченіе. Это предположеніе соотвѣтствуетъ тѣмъ болѣе дѣйствительности, чѣмъ болѣе сѣченіе удалено отъ точки приложенія силы. Опыты и теорія показываютъ, что неравномѣрность распредѣленія силы имѣетъ мѣсто только въ сѣченіяхъ, весьма близкихъ къ ея точкѣ приложенія.

§ 29.

Призматическій брусъ.—Если означимъ черезъ

Ω —площадь сѣченія бруса,

l —его длину,

G —дѣйствующую на него нормальную силу,

σ —напряженіе,

E —модуль упругости,

Δl —удлиненіе (измѣненіе длины l , произведенное силой G),

$$\text{то} \quad \sigma = \frac{G}{\Omega} \dots \dots \dots (68)$$

Когда сѣченіе Ω переменнo, то въ различныхъ сѣченіяхъ будетъ дѣйствовать различное напряженіе σ . Условія прочности требуютъ, чтобы это напряженіе ни на какомъ мѣстѣ не было болѣе допускаемаго напряженія k . Если, поэтому, наиболѣе слабое сѣченіе бруса означимъ черезъ $\min \Omega$, то должно

$$k = \frac{G}{\min \Omega}, \dots \dots \dots (69)$$

откуда

$$\min \Omega = \frac{G}{k} \dots \dots \dots (70)$$

Помощію этихъ уравненій можно опредѣлить силу G , которую данный брусъ можетъ нести безопасно или—наименьшее сѣченіе $\min \Omega$ для данной силы G .

Пусть

$d l$ —длина элемента бруса, заключеннаго между двумя безконечно близкими сѣченіями,

Δdl —его удлиненіе, произведенное напряженіемъ σ , то по (4)

$$\frac{\Delta dl}{dl} = \frac{\sigma}{E}$$

$$\Delta dl = \frac{\sigma}{E} dl$$

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_0^l \sigma dl = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{G}{\Omega} dl \dots \dots \dots (71)$$

Для призматическаго бруса (черт. 14), на концѣ котораго дѣйствуетъ сила G , послѣднее уравненіе получаетъ видъ

$$\Delta l = \frac{G}{E\Omega} \int_0^l dl$$

$$\Delta l = \frac{Gl}{E\Omega} \dots \dots \dots (72)$$

На всякое тѣло дѣйствуетъ, кромѣ приложенныхъ къ нему внѣшнихъ силъ, сила тяжести, проявляющаяся какъ вѣсъ тѣла. Въ многихъ случаяхъ этотъ вѣсъ, сравнительно съ приложенными къ тѣлу силами, такъ малъ, что имъ пренебрегаютъ, но иногда онъ бываетъ столь значителенъ, что необходимо его дѣйствіе принимать въ расчетъ.

Мы рассмотримъ тотъ случай, когда прямолинейный брусъ укрѣпленъ вертикально, когда слѣдовательно вѣсъ дѣйствуетъ какъ нормальная сила. Если вѣсъ единицы объема бруса означимъ черезъ γ , то на сѣченіе m (черт. 15), отстоящее отъ свободнаго конца на разстояніе x дѣйствуетъ сила

$$P_x = G + \gamma \int_0^x \Omega dx \dots \dots \dots (73)$$

Прочность требуетъ, чтобы для всякаго сѣченія было исполнено условіе

$$k \cdot \Omega x = G + \gamma \int_0^x \Omega dx \dots \dots \dots (74)$$

Когда брусъ призматическій, то уравненіе (73) получаетъ видъ

$$P_x = G + \gamma \Omega x$$

$$\sigma_x = \frac{G + \gamma \Omega x}{\Omega} \dots \dots \dots (75)$$

Наибольшее напряженіе испытываетъ въ этомъ случаѣ сѣченіе у прикрѣпленнаго конца, для котораго

$$P = G + \gamma \Omega l$$

Поэтому

$$\max \sigma = \frac{G + \gamma \Omega l}{\Omega} \dots \dots \dots (76)$$

Изъ условія, что должно

$$\max \sigma \leq k,$$

получаемъ

$$\Omega = \frac{G}{k - \gamma l} \dots \dots \dots (77)$$

откуда

$$G = \Omega (k - \gamma l) \dots \dots \dots (78)$$

Для опредѣленія удлиненія Δl имѣемъ по (71) и (75)

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{1}{E} \int_0^l \sigma dl = \frac{1}{E\Omega} \int_0^l (G + \gamma \Omega l) dl \\ \Delta l &= \frac{\left(G + \frac{\gamma \Omega l}{2}\right)l}{E\Omega} \end{aligned}$$

Если вѣсъ всего бруса означимъ черезъ W , то

$$\gamma \Omega l = W,$$

слѣдовательно

$$\Delta l = \frac{\left(G + \frac{W}{2}\right)l}{E\Omega} \dots \dots \dots (79)$$

Въ этомъ уравненіи $\frac{Gl}{E\Omega}$ означаетъ удлиненіе, произведенное силой G , а $\frac{1}{2} \frac{Wl}{E\Omega}$ — вѣсомъ W бруса, и изъ него видимъ,

что грузъ, приложенный къ концу бруса, производитъ въ два раза большее удлиненіе, чѣмъ нагрузка, равномерно распределенная по всей длинѣ его.

§ 30.

Брусъ равнаго сопротивленія.—Въ призматическомъ, вертикально укрѣпленномъ брусѣ, подверженномъ дѣйствію нормальной силы, сѣченіе укрѣпленнаго конца испытываетъ наибольшее напряженіе, а напряженіе во всякомъ другомъ сѣченіи тѣмъ меньше, чѣмъ оно ближе къ свободному концу, ибо тѣмъ меньшая часть вѣса бруса дѣйствуетъ на него.

Измѣняя величину поперечныхъ сѣченій такъ, чтобы напряженіе во всѣхъ сѣченіяхъ было постоянно и равно допускаемому

напряженію k , получимъ брусъ съ наивыгоднѣйшей формой въ продольномъ очертаніи, такъ какъ безъ ущерба для прочности его объемъ будетъ наименьшій.

Если напряженіе бруса во всѣхъ сѣченіяхъ постоянно и равно k , то нагрузка сѣченія C (черт. 16), отстоящаго отъ свободного конца на разстояніе x

$$P_x = k\Omega,$$

гдѣ Ω — площадь этого сѣченія.

Нагрузка слѣдующаго сѣченія, отстоящаго отъ l на безконечно близкомъ разстояніи dx будетъ

$$P_{\zeta} = k\Omega + \gamma\Omega dx,$$

слѣдовательно

$$dP_x = P_{\zeta} - P_x = \gamma\Omega dx.$$

Такъ какъ

$$P_x = k\Omega,$$

то

$$dP_x = k d\Omega,$$

поэтому

$$k d\Omega = \gamma\Omega dx$$

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{\gamma}{k} dx,$$

откуда

$$\log n\Omega = \frac{\gamma}{k}x + C.$$

Для $x=0$, $\Omega=\Omega_0$

Вставивъ это значеніе въ предыдущее уравненіе, получимъ

$$\log n\Omega = \frac{\gamma}{k}x + \lg n\Omega_0$$

$$\lg n \frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{\gamma}{k}x$$

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = e^{\frac{\gamma}{k}x}$$

гдѣ e —основаніе натуральныхъ логарифмовъ.

Такъ какъ $\Omega_0 = \frac{G}{k}$, то

$$\Omega = \frac{G}{k} e^{\frac{\gamma}{k}x}$$

и для $x=l$

$$\max \Omega = \frac{G}{k} e^{\frac{\gamma}{k}l} \dots \dots \dots (80)$$

По извѣстной формулѣ

$$e_x = 1 + x + \frac{x^2}{1,2} + \dots$$

можно уравнение (80) представить въ видѣ слѣдующаго ряда

$$\max \Omega = \frac{G}{k} \left(1 + \frac{\gamma l}{k} + \frac{\gamma^2 l^2}{2k^2} + \dots \right) \quad (81)$$

и точно также

$$\Omega = \frac{G}{k} \left(1 + \gamma \frac{x}{k} + \frac{\gamma^2 x^2}{2k^2} + \dots \right)$$

Относительное удлинение бруса равнаго сопротивленія по (4)

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{E}$$

откуда

$$\Delta l = \frac{kl}{E} \dots \dots \dots (82)$$

Уравненіями (80)—(82) можно пользоваться при опредѣленіи формы длинныхъ *шахтенныхъ штангъ*, а также высокихъ каменныхъ опоръ. Но какъ на практикѣ для нѣкоторыхъ матеріаловъ непрерывное измѣненіе сѣченія трудно исполнимо, то обыкновенно брусъ равнаго сопротивленія строить приблизительно-нымъ образомъ, составляя его изъ отдѣльныхъ призматическихъ брусевъ длиною $l_1, l_2, l_3 \dots$ (черт. 17), сѣченія которыхъ опредѣляютъ такимъ образомъ, что ихъ конечныя сѣченія $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \dots$ испытываютъ напряженіе k . Изъ этого условія получаются слѣдующія уравненія:

$$G + \gamma_1 \Omega_1 l_1 = \Omega_1 k$$

$$G + \gamma \Omega_1 l_1 + \gamma \Omega_2 l_2 = \Omega_2 k$$

$$G + \gamma \Omega_1 l_1 + \gamma \Omega_2 l_2 + \gamma \Omega_3 l_3 = \Omega_3 k$$

$$\dots \dots \dots$$

Отсюда по порядку

$$\Omega_1 = \frac{G}{k - \gamma l_1}$$

$$\Omega_2 = \frac{Gk}{(k - \gamma l_1)(k - \gamma l_2)}$$

$$\Omega_3 = \frac{Gk^2}{(k - \gamma l_1)(k - \gamma l_2)(k - \gamma l_3)}$$

$$\dots \dots \dots$$

Въ частномъ случаѣ, когда $l_1 = l_2 = l_3 = \dots$

$$\Omega_n = \frac{G}{k} \left(\frac{k}{k - \gamma l} \right)^n$$

Удлиненіе такого бруса равно суммѣ удлиненій его призматическихъ частей, которыя получаются по формулѣ (72).

§ 31.

Вліяніє температури.—При всякомъ повышеніи температуры бруса длина его увеличивается, а при пониженіи—уменьшается. Если α —относительное удлиненіе, соотвѣтствующее измѣненію температуры на 1 градусъ, то при измѣненіи ея на t градусовъ

откуда
$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha t,$$
$$\Delta l = \alpha t l \dots \dots \dots (84)$$

Коэффициентъ α зависитъ отъ свойства матеріала и называется *коэффициентомъ линейнаго расширенія*.

Когда на призматическій брусъ дѣйствуетъ сила, производящая въ его сѣченіяхъ напряженіе σ , и если при томъ температура его увеличится на t градусовъ, то относительное измѣненіе длины бруса будетъ

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} + \alpha t \dots \dots \dots (85)$$

Измѣненіе длины бруса, произведенное перемѣной температуры, не имѣетъ на его напряженіе никакого вліянія, если этому измѣненію не противодѣйствуютъ никакія препятствія. Въ противномъ случаѣ измѣненіе температуры вызываетъ въ брусѣ напряженіе, которое опредѣляется слѣдующимъ образомъ:

Положимъ, что прямолинейный призматическій брусъ AB (черт.18), укрѣпленный въ A неподвижно и свободный въ B , имѣетъ при извѣстной температурѣ длину $AB=l$. Если температура бруса понизится на t^0 , то онъ укоротится на длину $B\beta = \alpha t l$, и это укороченіе останется безъ вліянія на его напряженіе.

Представимъ себѣ теперь, что не только конецъ A , но и конецъ B укрѣпленъ неподвижно. Измѣненіе длины бруса въ этомъ случаѣ не будетъ возможно, вслѣдствіе чего при пониженіи температуры на t градусовъ длина его будетъ на $B\beta$ большая той, которую онъ имѣлъ бы въ свободномъ состояніи. Перемѣна температуры произведетъ, поэтому, точно такое дѣйствіе, какое произвела бы сила, измѣняющая длину бруса на $B\beta$. Но такая сила произвела бы въ сѣченіяхъ бруса, по (4), напряженіе

$$\sigma_t = Ee = \frac{E \cdot B\beta}{AB} = \frac{E \alpha t l}{l}$$

изъ чего слѣдуетъ, что измѣненіе температуры на t градусовъ вызываетъ въ несвободномъ брусѣ напряженіе

$$\sigma_t = E \alpha t.$$

При пониженіи температуры это напряженіе равномерно растяженію, а при повышеніи—сжатію, и оно складывается (алгебраически) съ напряженіями, произведенными внѣшними силами.

§ 32.

Примѣры:

1) На круглый желѣзный стержень, длиною 2 метра, дѣйствуетъ переменная, растягивающая сила, измѣняющаяся въ предѣлахъ 8 и 0 тонн.; опредѣлить діаметръ стержня и его удлиненіе.

Такъ какъ $\omega = 0$, то по (67a)

$$k = 7$$

и по (70)

$$\min \Omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{8000}{7}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \times 8000}{7}} = \sqrt{1454.5} = 38 \text{ мм.}$$

По (72)

$$\Delta l = \frac{Gl}{E\Omega}$$

Изъ таблицы I имѣемъ для желѣза $E = 20000$, слѣдовательно

$$\Delta l = \frac{8000.2000}{\frac{3,14}{4} 38^2.20000} = 0,706 \text{ мм.}$$

2) Предѣльные напряженія стержня изъ мягкой стали—12400 и 5000 кил.; опредѣлить площадь его полезнаго сѣченія.

Такъ какъ предѣльные напряженія противоположны, то по (67b)

$$k = \frac{10}{1 + 0,5 \frac{5000}{12400}} = \frac{10}{1,2} = 8,$$

поэтому

$$\Omega = \frac{12400}{8} = 1550 \text{ qmm.}$$

3) Желѣзная балка шириною 200 mm, лежитъ однимъ своимъ концомъ на кирпичной кладкѣ, на которую производитъ давленіе 6000 кил. Какой длиною должна балка лежать на кладкѣ, чтобы давленіе на нее не превышало 8 кил. на 1 квадратный сантиметръ?

Такъ какъ 8 кил. на 1 кв. сантиметръ = 0,08 кил. на 1 кв. миллиметръ, то, означивъ искомую длину черезъ x , имѣемъ

$$\frac{6000}{200.x} = 0,08$$

откуда

$$x = \frac{30}{0,08} = 375 \text{ мм.}$$

4) Какой грузъ можетъ нести короткая чугунная колонна кольцеобразнаго сѣченія, которой внѣшній діаметръ $D=20$, а внутренній $d=16$ мм.

$$G = k\Omega = k \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2).$$

Принимая $k=6$ кил. на 1 кв. мм. (таблица III) получимъ

$$G = \frac{3,14}{4} \cdot 6 (200^2 - 160^2) = 67824 \text{ кил.}$$

Какой грузъ раздробилъ бы эту колонну?

$$x = K\Omega = 70 \frac{3,14}{4} (200^2 - 160^2) = 791240 \text{ кил.}$$

5) Какую площадь сѣченія должна получить каменная колонна высотой 25 миллиметр., которая кромѣ собственнаго вѣса должна выдерживать давленіе 180 тоннъ? Колонна должна состоять изъ 5 призматическихъ частей, каждая высотой 5 миллиметр.

$$\text{По (83) } \Omega = \frac{G}{k} \left(\frac{k}{k - \gamma l} \right)^n$$

Здѣсь $G=180000$ кил.

Если возьмемъ $k=10$ кил. на 1 кв. см. = 100 тоннъ на 1 кв. метръ (табл. III) и положимъ вѣсъ 1 куб. метра камня $\gamma=2,5$ тон., то будетъ

$$\Omega = \frac{180000}{100000} \left(\frac{100000}{100000 - 2500 \times 5} \right)^n = 1,8 \times 1,143^n.$$

Изъ этого уравненія получаемъ

$$\Omega_1 = 2,06 \text{ квад. мтр.}$$

$$\Omega_2 = 2,34 \quad " \quad "$$

$$\Omega_3 = 2,67 \quad " \quad "$$

$$\Omega_4 = 3,04 \quad " \quad "$$

$$\Omega_5 = 3,47 \quad " \quad "$$

6) Какое напряженіе вызываетъ въ желѣзномъ брусѣ, укрѣпленномъ обоими концами неподвижно, повышеніе температуры на 30° выше нормальной?

По (86)

$$\sigma_t = Ext.$$

Если температура дана въ градусахъ Цельзія, то

$$\alpha = 0,0000118$$

поэтому

$$\sigma_t = 20000 \times 0,0000118 \times 30 = 7,08 \text{ кил. на 1 кв. мм.}$$

Изъ этого примѣра видно, какъ значительно можетъ быть напряженіе, произведенное переменной температуры въ несвободномъ брусѣ.

§ 33.

Практическіе случаи. — 1. Два упруія тѣла A и B , ограниченныя произвольными кривыми поверхностями, соприкасаются въ точкѣ P . Тѣло B неподвижно, а тѣло A производитъ на B давленіе D . Определить наибольшее напряженіе, производимое этимъ давленіемъ.

Означимъ главные радіусы кривизны въ точкѣ P (черт. 19) для тѣла A —черезъ R и r , а для тѣла B —черезъ R_1 и r_1 , и положимъ, что оба тѣла имѣютъ такое относительное положеніе, что ихъ радіусы R и R_1 находятся въ одной плоскости (при чемъ и перпендикулярные къ нимъ радіусы r и r_1 будутъ находиться тоже въ одной плоскости).

Пусть MN —плоскость соприкасанія въ точкѣ P и zz_1 —нормаль къ ней въ той же точкѣ. Проведемъ черезъ zz_1 плоскость, составляющую съ плоскостью радіусовъ R и R_1 уголъ φ ; возьмемъ на этой плоскости прямую bb_1 , параллельную zz_1 , на очень близкомъ разстояніи отъ zz_1 , и означимъ ея точки пересѣченія съ поверхностями тѣлъ A и B черезъ a_1 и b_1 . Если ρ и ρ_1 —радіусы кривизны нормальныхъ сѣченій zPa_1 и z_1Pb_1 , то по известной формулѣ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{\cos^2 \varphi}{R} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \\ \frac{1}{\rho_1} &= \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{r_1} \end{aligned} \quad (87)$$

Означимъ разстоянія точекъ a_1 и b_1 отъ MN черезъ η и η_1 , то

$$\eta = \frac{a^2}{2\rho}, \quad \eta_1 = \frac{a^2}{2\rho_1} \quad (88)$$

Послѣ видоизмѣненія, произведеннаго давленіемъ D , оба тѣла будутъ соприкасаться по маленькой поверхности qs (черт. 20), причемъ тѣло A получитъ въ a_1 , по направленію этого давленія, сжатіе $a_1\beta = y$, а тѣло B въ b_1 —сжатіе $b_1\beta = y_1$. Тѣла A и B будутъ испытывать напряженіе, пропорціональное этимъ сжатіямъ, такъ что если означимъ черезъ c и c_1 —коэффициенты, зависящіе отъ свойствъ матеріала и отъ формы обоихъ тѣлъ, можно написать

$$\sigma = cy = c_1y_1 \quad (89)$$

Обозначимъ полное сжатіе P_0P въ прямой zz_1 , соотвѣтствующее точкѣ первоначальнаго соприкасанія, черезъ p , то легко узнать, что

$$y + y_1 = p - (\eta + \eta_1)$$

Слѣдовательно

$$y = p - (\gamma + \gamma_1) - y_1$$

и такъ какъ по (89)

$$y = \frac{\sigma}{c} \quad y_1 = \frac{\sigma}{c_1}$$

то

$$\frac{\sigma}{c} = p - (\gamma + \gamma_1) - \frac{\sigma}{c_1}$$

откуда

$$\sigma = \frac{cc_1}{c+c_1} [p - (\gamma + \gamma_1)] \quad (90)$$

Это выраженіе получаетъ наибольшее значеніе въ точкѣ P , т. е. для $\gamma + \gamma_1 = 0$, поэтому

$$\max \sigma = \frac{cc_1}{c+c_1} p.$$

Если для краткости положимъ

$$\frac{c+c_1}{cc_1} = C,$$

то, принимая во вниманіе, что наибольшее напряженіе не должно быть больше допускаемаго напряженія k , будемъ имѣть

$$k = \frac{p}{C}.$$

Помощію этого значенія уравненіе (90) получаетъ видъ

$$\sigma = k - \frac{\gamma + \gamma_1}{C} = k - \frac{a^2}{2C} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) \quad (91)$$

Для точекъ, находящихся на периметрѣ поверхности соприкасання qs (черт. 20) $\sigma = 0$; если разстояніе этихъ точекъ отъ zz_1 означимъ черезъ A , то изъ послѣдняго уравненія получимъ

$$0 = k - \frac{A^2}{2C} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) \quad (92)$$

Отнесемъ точки периметра qs поверхности соприкасання къ прямоугольнымъ осямъ координатъ, взятымъ въ пересѣченіи этой поверхности съ плоскостями радіусовъ RR_1 и rr_1 главныхъ искривленій, и означимъ координаты точки этого периметра, лежащей въ выше упомянутой (произвольной) плоскости, составляющей съ плоскостью радіусовъ R и r , уголъ φ черезъ ξ и η , то

$$\xi = A \cos \varphi \quad \eta = A \sin \varphi$$

Помощію этихъ значеній уравненіе (87) получаетъ видъ

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\xi^2}{RA^2} + \frac{\eta^2}{rA^2}, \quad \frac{1}{\varrho_1} = \frac{\xi^2}{R_1A^2} + \frac{\eta^2}{r_1A^2}$$

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{A^2} \left[\xi^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) + \eta^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \right].$$

Вставивъ это значеніе въ (92), получимъ

$$k - \frac{1}{2C} \left[\xi^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) + \eta^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \right] = 0$$

$$1 = \frac{\xi^2}{\left[\frac{2kC}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}} \right]} + \frac{\eta^2}{\left[\frac{2kC}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}} \right]} \dots \dots \dots (93)$$

Это уравненіе показываетъ, что периметръ поверхности соприкасания—эллипсисъ, котораго полуоси

$$A = \sqrt{\frac{2kC}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}}, \quad B = \sqrt{\frac{2kC}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}}}.$$

Полное давленіе, производимое тѣломъ A на тѣло B

$$D = \int_0^{2\pi} \int_0^A \sigma(ad\varphi) da = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^A ada \left[k - \frac{a^2}{2c} \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} \right) \right]$$

$$D = \int_0^{2\pi} d\varphi \left[k - \frac{A^2}{4C} \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} \right) \right] \frac{A^2}{2} = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \frac{A^2}{2} d\varphi.$$

Послѣдній интегралъ выражаетъ площадь плоскости соприкасания qs , а такъ какъ, по доказанному, периметръ этой плоскости—эллипсисъ, то

$$\int_0^{2\pi} \frac{A^2 d\varphi}{2} = \pi AB,$$

слѣдовательно

$$D = \frac{k}{2} \pi AB = \frac{k\pi}{2} \sqrt{\frac{2kC}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}} \sqrt{\frac{2kC}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}}},$$

или, означивъ $\pi C = \frac{\pi(c+c_1)}{cc_1}$ — черезъ L ,

$$D = \frac{Lk^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)}}$$

$$k^2 = \frac{D\sqrt{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)}}{L} \dots \dots \dots (94)$$

Изъ этого выраженія видимъ, что при одинаковыхъ прочихъ обстоятельствахъ *наибольшее напряженіе пропорціонально квадратному корню изъ давленія D .*

Частные случаи.

а) *Тѣло A шаръ, а тѣло B —плоская плита.*

Въ этомъ случаѣ

$$R = r, \quad R_1 = r_1 = \infty,$$

слѣдовательно по (94)

$$D = Lk^2 r \dots \dots \dots (95)$$

б) *Тѣла A и B —цилиндры, которыхъ оси перпендикулярны другъ къ другу.*

$$R_1 = r = \infty,$$

$$D = Lk^2 \sqrt{Rr} \dots \dots \dots (96)$$

Этому случаю соотвѣтствуетъ давленіе колеса на рельсъ, при положеніи колеса надъ шпалой (R означаетъ радіусъ колеса, т. е. длину нормали коническаго обода, считая до оси колеса). Когда колесо находится между шпалами, то поверхность соприкасання, вслѣдствіе выгибанія рельса, увеличивается, и, слѣдовательно, k —уменьшается.

в) *Тѣла A и B —цилиндры съ параллельными осями.*—Въ этомъ случаѣ уравненіе (94) недействительно.

Если R и R_1 —радіусы цилиндровъ, то по (91) и (92)

$$\sigma = k - \frac{a^2}{2C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right), \quad 2kC = A^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Давленіе D на длину $= 1$ поверхности соприкасання, которой ширина $2A$, будетъ

$$D = 2 \int_0^A \sigma da = 2A \left[k - \frac{A^2}{2C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \right] = \frac{4}{3} k \sqrt{\frac{2kC}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}}.$$

Если положимъ

$$\frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{2C}} = \sqrt{\frac{32}{9} \frac{c + c_1}{cc_1}} = B,$$

то

$$D = \frac{Bk^2}{\sqrt{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}} \dots \dots \dots (97)$$

Наибольшее напряженіе k въ этомъ случаѣ пропорціоально третьему корню изъ квадрата давленія.

в) Цилиндръ на плоскости.

Для $R_1 = \infty$ получаемъ изъ (97)

$$D = Bk^2 \sqrt[3]{R}, \quad D^2 = \frac{32}{9} Ck^3 R \dots \dots \dots (98)$$

Въ практикѣ обыкновенно принимаютъ, что сопротивленіе цилиндрическихъ катковъ, лежащихъ на плоскости, прямо пропорціоально произведенію изъ діаметра на длину, т. е. — горизонтальной проеэкціи цилиндра, и берутъ для допускаемаго напряженія на 1 квадратный сантиметръ этой проеэкціи

для желѣзныхъ катковъ — отъ 25—35 кил.,

для стальныхъ — отъ 35—50 кил.

д) Цилиндръ въ цапфѣ. — Мы предполагаемъ, что во всѣхъ точкахъ цилиндра и цапфы имѣетъ мѣсто совершенное соприкасаніе. Если величину сжатія въ произвольной точкѣ d (чер. 21), измѣренную по направленію радіуса этой точки, означимъ для цилиндра черезъ y , а для цапфы — черезъ y_1 , то по (89)

$$\sigma = cy = c_1 y_1.$$

Проведемъ въ f перпендикуляръ fg къ zc , до пересѣченія съ прямой cg_1 проведенной черезъ c параллельно zP ,

то

$$\overline{cf} = y + y_1 = \overline{cg} \cos \varphi$$

и o означивъ cg черезъ η

$$y + y_1 = \eta \cos \varphi,$$

или

$$\frac{\sigma}{c} + \frac{\sigma}{c_1} = \eta \cos \varphi,$$

откуда

$$\sigma = \frac{\eta \cos \varphi}{C} \dots \dots \dots (99)$$

Если R —радіусъ цилиндра и D —давленіе на единицу его длины, то, предполагая, что соприкасаніе происходитъ по полуокружности, будетъ

$$D=2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma R d\varphi \cos\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \cos^2\varphi}{C} R d\varphi.$$

Для простоты примемъ, что вертикальное сжатіе η на всѣхъ мѣстахъ одинаково, тогда

$$D = \frac{2\eta R}{C} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{\eta R}{C} \frac{\pi}{2}.$$

Вставивъ это значеніе въ (99), получимъ

$$\sigma = \frac{2DC \cos\varphi}{\pi R C} = \frac{2D \cos\varphi}{\pi R}.$$

Наибольшее напряженіе дѣйствуетъ въ точкѣ P , для которой $\varphi = 0$, т. е.

$$\max \sigma = k = \frac{2D}{\pi R} \dots \dots \dots (100)$$

Изъ послѣдняго уравненія видимъ, что наибольшее напряженіе точно такое, какое оно было бы, если бы давленіе D распредѣлялось равномерно на половину поверхности цилиндра.

Этотъ результатъ полученъ при предположеніи, что η постоянно для всей поверхности соприкасанія. Такъ какъ въ дѣйствительности давленіе распредѣляется менѣе равномерно, то напряженіе въ P немного больше величины, получаемой изъ уравненія (100). Для сооружений, подвергаемыхъ сильнымъ ударамъ (какъ подушки мостовыхъ балокъ) слѣдуетъ брать

$$\max \sigma = k = \text{отъ } \frac{4D}{\pi R} \text{ до } \frac{6D}{\pi R},$$

$$\text{или } r = \text{отъ } \frac{1,5D}{k} \text{ до } \frac{2,0D}{k} \dots \dots \dots (101)$$

Меньшее значеніе дѣйствительно для стали, а большее—для желѣза.

е) *Призма лежитъ ребромъ на плоскости.*—Согласно опытамъ берутъ за допускаемое напряженіе k на 1 погонный метръ стального лезвія—200 кил.

Если D —давленіе, а l —длина лезвія, то

$$D = 200l,$$

откуда

$$l = \frac{D}{200} \text{ (въ кил. и см.)} \dots \dots \dots (102)$$

Примѣчаніе. Для опредѣленія постоянной C не имѣется еще достаточно опытовъ, но изъ сравненія выведенныхъ въ этомъ параграфѣ формулъ съ лучшими изъ существующихъ сооружений (преимущественно мостовыхъ) получается для чугуна и желѣза приблизительно

$$C = \text{отъ } 0,008 \text{ до } 0,05,$$

такъ что среднимъ числомъ

$$C = 0,023.$$

§ 34.

2) На вагонное колесо, имѣющее $2n$ желѣзныхъ спиць, требуется надѣть стальную шину въ горячемъ состояніи, такимъ образомъ, чтобы напряженіе шины, произведенное укороченіемъ при охлажденіи, не было больше допускаемаго напряженія k . До какой температуры должна быть нагрѣта шина?

Для рѣшенія этой задачи означимъ черезъ

e —относительное укороченіе шины,

s —ея сѣченіе,

s_1 —среднее сѣченіе спиць,

d —длину спиць,

e_1 —ихъ относительное укороченіе,

o —сѣченіе обода,

r —его внѣшній радіусъ,

$r(1-\rho)$ —внутренній радіусъ холодной шины, который на $r\rho$ короче внѣшняго радіуса r обода,

E —модуль упругости стали и

E_1 —желѣза.

Такъ какъ отъ сжатія, производимаго шиной вслѣдствіе укорачиванія ея при охлажденіи, длина d спиць, а слѣдовательно и радіусъ r обода, уменьшаются, то наружный периметръ p обода послѣ охлажденія будетъ

$$2\pi (r - e_1 d),$$

поэтому, его относительное укороченіе

$$\frac{2\pi e_1 d}{2\pi r} = \frac{e_1 d}{r}.$$

и дѣйствующая въ его сѣченіи сжимающая сила, по (6)

$$\frac{E_1 e_1 d}{r} o.$$

Въ спицахъ дѣйствуетъ сжатіе

$$E_1 e_1 s_1,$$

а въ шинѣ — растяженіе Ees .

Внутренняя окружность шины послѣ охлажденія равняется

$$2\pi r(1-\rho)(1+e),$$

а внѣшняя — обода

$$2\pi(r - e_1 d).$$

Поэтому

$$2\pi r(1-\rho)(1+e) = 2\pi(r - e_1 d)$$

или

$$(1-\rho)(1+e) = 1 - \frac{e_1 d}{r},$$

откуда, пренебрегая малыми величинами высшаго порядка,

$$1 - \rho + e = 1 - \frac{d}{r} e_1,$$

$$\rho = e + \frac{d}{r} e, \quad \frac{\rho}{e} = 1 + \frac{de_1}{re} \dots \dots \dots (103)$$

Разрѣжемъ колесо сѣченіемъ $mnpqr$ (черт. 22), пересѣкающимъ по поламъ ободъ, шины и всѣ спицы, и замѣнимъ напряжения, дѣйствующія въ отдѣльныхъ сѣченіяхъ, внѣшними силами. Тогда нужно приложить къ сѣченіямъ шины растягивающія силы Ees , къ сѣченіямъ обода — сжимающія силы

$E_1 e_1 o \frac{d}{r}$ и къ сѣченіямъ спиць — сжимающія силы $E_1 e_1 s_1$. Число

послѣднихъ въ одной половинѣ колеса — n . Если себѣ представимъ, что эти силы распределены равномерно вдоль обода, — что будетъ тѣмъ болѣе соответствовать дѣйствительности, чѣмъ больше n , — то вдоль длины rt обода распределена сила $nE_1 e_1 s_1$, слѣдовательно на элементъ его длиной dx дѣйствуетъ по направ-

ленію радіуса сила $\frac{nE_1 e_1 s_1}{r\pi} dx$, которой слагающая, перпендику-

лярная къ сѣченію $mn = \frac{nE_1 e_1 s_1 dx}{r\pi} \sin \varphi$, гдѣ φ = уголъ, обра-

зубый радіусомъ соотвѣтственнаго элемента, съ m . Сумма этихъ слагающихъ будетъ

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{nE_1 e_1 s_1 dx \sin \varphi}{r\pi},$$

или, такъ какъ $dx = r d\varphi$,

$$\frac{2nE_1 e_1 s_1 r}{r\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sin \varphi = \frac{2nE_1 e_1 s_1}{\pi}.$$

Изъ условія равновѣсія имѣемъ

$$2Es = 2E_1 e_1 o \frac{d}{r} + \frac{2nE_1 e_1 s_1}{\pi},$$

откуда

$$\frac{e_1}{e} = \frac{Es}{2E_1 \left(\frac{do}{r} + \frac{ns_1}{\pi} \right)}.$$

Если это значеніе вставимъ въ (103), то получимъ

$$\frac{\rho}{e} = 1 + \frac{d}{r} \frac{Es}{2E_1 \left(\frac{do}{r} + \frac{ns_1}{\pi} \right)} \dots \dots \dots (104)$$

гдѣ $e = \frac{\sigma}{E}.$

Укороченіе шины равно $2\pi r \rho$; если α —коэффициентъ линейнаго расширенія матеріала шины и t —разность температуръ, вызвавшая это укороченіе, то

$$2\pi r \rho = 2\pi r \alpha t$$

и отсюда

$$t = \frac{\rho}{\alpha} = \frac{\sigma}{E\alpha} \left[1 + \frac{d}{r} \frac{Es}{2E_1 \left(\frac{do}{r} + \frac{ns_1}{\pi} \right)} \right] \dots \dots \dots (105)$$

t означаетъ число градусовъ, на которое должна быть повышена температура шины, чтобы ея напряженіе по охлажденіи было равно σ .

§ 35.

Сопротивленіе тянутыхъ проволокъ.—При изготовленіи проволоки металлъ уплотняется преимущественно на поверхности, а сердцевина состоитъ изъ менѣ плотнаго металла. Проволоку

можно поэтому разсматривать какъ тѣло, состоящее изъ двухъ металловъ различной плотности: изъ мягкой сердцевины и изъ твердой оболочки.

Если означимъ черезъ

Ω_1 —сѣченіе, E_1 —модуль упругости и σ_1 —напряженіе сердцевины,

Ω_2 —сѣченіе, E_2 —модуль упругости и σ_2 —напряженіе оболочки,

G —дѣйствующій на проволоку грузъ, то, принимая во вниманіе, что удлиненіе оболочки и сердцевины одинаковы, имѣемъ

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}$$

$$\text{и } G = \Omega_1 \sigma_1 + \Omega_2 \sigma_2.$$

Изъ этихъ уравненій получаемъ:

$$\sigma_1 = \frac{GE_1}{E_1 \Omega_1 + E_2 \Omega_2} \dots \dots \dots (106)$$

$$\sigma_2 = \frac{GE_2}{E_1 \Omega_1 + E_2 \Omega_2} \dots \dots \dots (107)$$

Такъ какъ $E_2 > E_1$, то $\sigma_2 > \sigma_1$, т. е. оболочка болѣе напряжена чѣмъ сердцевина, вслѣдствіе чего предѣльное напряженіе въ первой достигнется ранѣе чѣмъ въ послѣдней. Проволоку нужно поэтому разсматривать на сопротивленіе оболочки, т. е. ея сопротивленіе опредѣляется формулой (107).

Если напряженіе проволоки не должно превышать данной величины k , то по (107) получимъ

$$k = \frac{GE_2}{E_1 \Omega_1 + E_2 \Omega_2}.$$

Означивъ діаметръ проволоки черезъ d и толщину оболочки—черезъ $\frac{\delta}{2}$, имѣемъ

$$\Omega_1 = \frac{\pi}{4}(d - \delta)^2$$

и пренебрегая очень малой величиной δ^2

$$\Omega_1 = \frac{\pi}{4}(d^2 - 2d\delta)$$

$$\Omega_2 = \frac{\pi}{4}d^2 - \Omega_1 = \frac{\pi}{2}d\delta.$$

Поэтому

$$k = \frac{GE_2}{E_1 \frac{\pi}{4} (d^2 - 2d\delta) + E_2 \frac{\pi}{2} d\delta},$$

откуда

$$G = \frac{\pi}{4} \frac{k}{E_2} \left[E_1 d^2 + 2\delta (E_2 - E_1) d \right].$$

Если поставимъ

$$\frac{\pi E_1}{4 E_2} k = A, \quad \frac{\pi}{4} \frac{k}{E_2} 2\delta (E_2 - E_1) = B,$$

то сопротивление G проволоки разрыву опредѣлится формулой

$$G = Ad^2 + Bd \dots \dots \dots (108)$$

Хотя эта формула не точна, такъ какъ пропорціональность напряженій и удлинений имѣеть мѣсто только до предѣла упругости, и переходъ матеріала оболочки къ матеріалу ядра въ дѣйствительности не внезапный, но постепенный, такъ что сѣченіе проволоки слѣдовало бы разсматривать состоящимъ изъ болѣе или менѣе значительнаго числа металлическихъ колецъ, которыхъ твердость отъ крайняго кольца къ центру постепенно уменьшается, но опыты подтверждаютъ, что сопротивленіе тянутой проволоки опредѣляется формулой вида (108).

Отожженіе проволоки уменьшаетъ E_2 въ болѣе сильной степени чѣмъ E_1 , коэффициентъ B уравненія 108 долженъ поэтому отожженіемъ уменьшаться болѣе чѣмъ коэффициентъ A . Это теоретическое заключеніе вполне подтверждается опытами Кармарша, изъ которыхъ получены для A и B слѣдующія значенія:

Таблица VII.

Родъ матеріала.	Неотож- женная.		Отожжен- ная.	
	A	B	A	B
Сталь	50	21	45	3
Желѣзо лучшее	50	12,5	26	3
Желѣзо обыкновенное. . .	36	18	22,5	5
Латунь	43	8	22,5	5
Мѣдь	27,5	7,5	18,5	0

Помощію этихъ значеній получается по формулѣ (108) сопротивление разрыву проволоки въ килограммахъ, если d взято въ миллиметрахъ.

Задача.—Проволока AOB (черт. 23) телеграфнаго провода подвѣшена въ A и B къ столбамъ такимъ образомъ, что ея середина O находится немного ниже прямой AB , соединяющей ея точки прикрѣпленія. Стрѣлка f образованной ея кривой AOB измѣняется вмѣстѣ съ температурой; при пониженіи температуры стрѣлка уменьшается, вслѣдствіе чего напряжение проволоки увеличивается.

Опредѣлить стрѣлку f такимъ образомъ, чтобы во время наименьшей температуры, какая въ данной мѣстности возможна, натяженіе проволоки не было больше известнаго предѣла.

Наинизшую точку O примемъ за начало осей координатъ, изъ которыхъ ось OX —касательна къ AOB въ O . Означимъ черезъ

x и y —абсциссу и ординату произвольной точки m проволоки,

φ —уголъ касательной въ этой точкѣ съ осью OX ,

g —вѣсъ 1-го погоннаго метра проволоки,

H —ея сопротивленіе въ сѣченіи O ,

S —тоже въ сѣченіи m .

Мы предполагаемъ, что искривленіе проволоки такъ мало, что длину какой нибудь части ея можно замѣнить длиной проеکціи этой части на ось OX .

Вырѣжемъ часть Om проволоки, и къ разрѣзаннымъ сѣченіямъ O и m приложимъ нормальныя силы H и S . На эту часть дѣйствуютъ 3 силы: H , S и вѣсъ gx , поэтому изъ условій равновѣсія получимъ:

$$H - S \cos \varphi = 0,$$

$$S \sin \varphi - gx = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{gx}{H} = \frac{dy}{dx},$$

$$y = \frac{gx^2}{2H} + C.$$

Такъ какъ для $x=0$, y тоже $=0$, то $C=0$.

Для $x=a$, $y=f$, поэтому

$$f = \frac{ga^2}{2H} \dots \dots \dots (109)$$

Изъ обоихъ послѣднихъ уравненій получаемъ:

$$\frac{y}{f} = \frac{x^2}{a^2} \dots \dots \dots (109a)$$

Это уравненіе показываетъ, что при малыхъ искривленіяхъ проволока принимаетъ видъ параболы.

Если

s —длина проволоки при температурѣ, при которой происходитъ устройство провода,

s_1 —длина ея при наинизшей температурѣ, какая въ данной мѣстности возможна,

t —разность этихъ температуръ, и

α —коэффициентъ линейнаго расширенія матеріала проволоки,

то

$$s = s_1(1 + \alpha t) \dots \dots \dots (110)$$

Но

$$s = 2 \int_0^a dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

или, такъ какъ по (109a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2f}{a^2} x,$$

то

$$\frac{s}{2} = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{2fx}{a^2}\right)^2} dx = \int_0^a dx \left(1 + \frac{2f^2}{a^4} x^2\right),$$

откуда

$$s = 2a \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f^2}{a^2}\right) \dots \dots \dots (111)$$

Такимъ же образомъ получимъ

$$s_1 = 2a \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f_1^2}{a^2}\right) \dots \dots \dots (112)$$

гдѣ f_1 —стрѣлка проволоки при наинизшей температурѣ.

Помощію этихъ значеній уравненіе (110) получаетъ видъ

$$2a \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f^2}{a^2}\right) = 2a \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f_1^2}{a^2}\right) (1 + \alpha t)$$

и пренебрегая малыми величинами высшей степени

$$\frac{2}{3} \frac{f}{a^2} = \frac{2}{3} \frac{f_1}{a^2} + \alpha t$$

$$f = \sqrt{f_1^2 + 1,5 \alpha t a^2} \dots \dots \dots (113)$$

Если наибольшее напряжение проволоки, испытываемое ею во время наименьшей температуры означимъ для сѣченія O черезъ H_m , а для сѣченія m —черезъ S_m , то по (109)

$$f_1 = \frac{ga^2}{2H_m}, \quad S_m = \sqrt{H_m^2 + (ga)^2}.$$

Уравненіе (113) можно поэтому написать такъ:

$$f = a \sqrt{\left(\frac{ga}{2H_m}\right)^2 + 1,5\alpha t} \dots \dots \dots (114)$$

По этой формулѣ можно вычислить f для различныхъ температуръ t , и составить таблицу значеній f и t , которыми слѣдуетъ пользоваться при устройствѣ телеграфнаго провода.

Проволочные канаты.

§ 36.

Роды проволочныхъ канатовъ. Допускаемое напряженіе.—Проволочные канаты бываютъ крученые и некрученые.

Въ некрученыхъ канатахъ проволоки расположены параллельно и связаны на соответственныхъ мѣстахъ обвитой вокругъ нихъ проволокой, а крученые состоятъ изъ нѣсколькихъ проволочныхъ снурковъ, соединенныхъ въ одинъ канатъ.

Сопротивленіе проволоки, которой діаметръ d , по (108) = $Ad^2 + Bd$. Если поэтому $\frac{1}{p}$ коэффициентъ прочности, то безопасная нагрузка проволоки = $\frac{1}{p}(Ad^2 + Bd)$, а безопасная нагрузка единицы площади сѣченія, т. е. *допускаемое напряженіе*

$$k = \frac{Ad^2 + Bd}{p \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4}{\pi p} (A + Bd),$$

или

$$k = \frac{1,273}{p} \left(A + \frac{B}{d} \right) \dots \dots \dots (115)$$

Въ большинствѣ случаевъ пренебрегаютъ вторымъ членомъ въ скобкахъ, который сравнительно съ первымъ малъ, и берутъ

$$k = \frac{1,27A}{p} \dots \dots \dots (115a)$$

Коэффициенты A и B даны въ таблицѣ VII.

Формула (115) действительна для постоянной нагрузки; когда нагрузка переменная, то по (60)

$$k = \frac{R}{p} \frac{1}{1 - \frac{\omega}{\alpha}},$$

$$\text{гдѣ } \alpha = \frac{R}{R - R} \text{ и } \omega = \frac{\min N}{\max N}.$$

Для хорошей железной проволоки

$$R = 60, R = 24,$$

следовательно

$$\frac{1}{\alpha} = 0,6$$

и при тройной прочности ($p = 3$)

$$k = \frac{8}{1 - 0,6\omega} \dots \dots \dots (116)$$

Для хорошей стальной проволоки

$$R = 110, R = 54,$$

поэтому

$$\frac{1}{\alpha} = 0,5$$

и для $p = 3$

$$k = \frac{18}{1 - 0,5\omega} \dots \dots \dots (117)$$

Формулы (116) и (117) даютъ допускаемое напряженіе въ килограммахъ на 1 квадратный миллиметръ.

§ 37.

Некрученные проволочные канаты.—Некрученные проволочные канаты употребляются только въ тѣхъ случаяхъ, когда канатъ не долженъ навиваться на цилиндрическую поверхность, потому что при большихъ изгибахъ его сопротивленіе значительно уменьшается.

Если означимъ черезъ

d —діаметръ проволоки,

D —діаметръ каната,

n —число составляющихъ его проволокъ,

G —безопасный грузъ каната,

то по (108)

$$G = \frac{n}{p} (Ad^2 + Bd) \dots \dots \dots (118)$$

откуда діаметръ проволоки, нужный при грузѣ G ,

$$d = -\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} + \frac{Gp}{nA}} \dots \dots \dots (119)$$

Эмпирически получено, что сѣченіе каната среднимъ числомъ на 70 процентовъ больше суммы сѣченій его проволокъ, т. е.

$$\frac{\pi}{4} D^2 = 1,7n \frac{\pi}{4} d^2.$$

Изъ этого уравненія получимъ

$$d = \frac{0,77D}{\sqrt{n}} \dots \dots \dots (120)$$

Помощію этого значенія уравненіе (118) получаетъ видъ

$$G = \frac{n}{p} \left(\frac{AD^2}{1,7n} + \frac{B0,77D}{\sqrt{n}} \right)$$

или

$$G = \frac{1}{p} (0,59AD^2 + 0,77BD \sqrt{n}) \dots \dots \dots (121)$$

Если k —допускаемое напряженіе проволоки, то

$$G = kn \frac{\pi d^2}{4} \dots \dots \dots (121a)$$

слѣдовательно

$$d = 1,128 \sqrt{\frac{G}{nk}} \dots \dots \dots (122)$$

и по (120)

$$D = 1,47 \sqrt{\frac{G}{k}} \dots \dots \dots (123)$$

Если вѣсъ одного погоннаго метра каната, въ килограммахъ, означимъ черезъ g , то приблизительно

$$\text{для желѣза } g = 0,8 \text{ } nd^2 \dots \dots \dots (124)$$

$$\text{и для стали } g = 0,9 \text{ } nd^2 \dots \dots \dots (125)$$

гдѣ d —діаметръ проволоки въ сантиметрахъ.

Примѣръ. Опредѣлить діаметръ желѣзнаго проволочнаго каната, который при 7 кратной прочности могъ бы поддерживать грузъ 1000 кил. Діаметръ проволоки = 3 мм.

Здѣсь

$p = 7$, $d = 3$, а въ таблицѣ VII находимъ

$$A = 45, B = 3.$$

По (115)

$$k = \frac{1,27}{7} \left(45 + \frac{3}{3} \right) = 8 \text{ кил. на 1 кв. мм.}$$

По (123)

$$D = 1,47 \sqrt{\frac{1000}{8}} = 16,47 \text{ мм.}$$

Число проволокъ каната, по (120),

$$n = \left(\frac{0,77 D}{d} \right)^2 = \left(\frac{0,77 \times 16,47}{3} \right)^2 = 18.$$

§ 38.

Крученые канаты.—Крученые канаты изготовляютъ такимъ образомъ, что сначала скручиваютъ изъ проволокъ снурки, и затѣмъ изъ этихъ снурковъ—канаты. Какъ проволоки въ снуркахъ, такъ и снурки въ канатѣ располагаютъ вокругъ сердцевинъ изъ пеньки, которыя придаютъ канату требуемую гибкость. Только при употребленіи очень тонкихъ проволокъ замѣняютъ иногда пеньковыя сердцевины въ снуркахъ проволоками.

Число проволокъ въ канатѣ—всегда нѣкоторое кратное числа 6; всего чаще встрѣчаются слѣдующія числа:

18, 24, 30, 36, 72, 84, 108, 144 и 192.

Канаты составляютъ изъ 4—6 снурковъ; послѣднее число болѣе употребительно чѣмъ первое. Въ фиг. 23 представлено сѣченіе каната, составленнаго изъ сердцевинъ и 6 снурковъ; каждый снурокъ содержитъ 6 проволокъ.

Наиболѣе употребляемыя толщины проволокъ—1·2, 1·3, 1·5, 1·7, 1·9, 2·1, 2·5, 2·8, 3·2, и 3·5, миллиметр. Проволоки въ снуркахъ скручиваютъ на уголъ отъ 8 до 15°, а снурки въ канатѣ—на уголъ отъ 10 до 25°.

Всякое скручиваніе уменьшаетъ сопротивленіе каната, такъ какъ проволока уже въ ненагруженномъ состояніи испытываетъ напряженіе, произведенное крученіемъ, но оно для канатовъ полезно, потому что: 1) лучше обезпечиваетъ при изгибѣ каната совмѣстное дѣйствіе всѣхъ составляющихъ его проволокъ, и 2) проволока дѣйствуетъ въ родѣ винтообразной пружины, вслѣдствіе чего дѣйствіе ударовъ и сотрясеній дѣлается для каната менѣе вреднымъ.

Когда канатъ употребляется въ прямолинейномъ или немного изогнутомъ видѣ, то его сопротивленіе можетъ быть опредѣлено по формулѣ (121).

Если канатъ обхватываетъ цилиндрическую поверхность, то уже въ ненагруженномъ состояніи онъ испытываетъ напряженія, произведенныя его изгибомъ; въ нагруженномъ состояніи напряженіе каната равно суммѣ напряженій, произведенныхъ нагрузкой и этимъ изгибомъ. Если напряженіе, произведенное нагрузкой, означимъ черезъ t , а наибольшее напряженіе отъ изгиба— черезъ σ , то прочность требуетъ, чтобы

$$\sigma + t \leq k \dots \dots \dots (126)$$

Чтобы опредѣлить напряженіе σ , означимъ черезъ

r —радіусъ поверхности, огибаемой канатомъ,

D —діаметръ каната,

d —діаметръ составляющихъ его проволокъ,

l —длину верхней, наиболѣе натянутой части проволоки, которой центральный уголъ φ ,

Δl —измѣненіе длины l , произведенное натяженіемъ,

φ —длину дуги радіуса $= 1$, соотвѣтствующую центральному углу φ .

Изъ черт. 24 имѣемъ

$$l = \left(r + D - \frac{d}{2} \right) \varphi,$$

$$l + \Delta l = (r + D) \varphi.$$

Изъ этихъ уравненій получаемъ

$$\Delta l = \frac{1}{2} d \varphi.$$

Напряженіе, произведенное изгибомъ верхней проволоки, по (4)

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l} = \frac{E \frac{1}{2} d \varphi}{\left(r + D - \frac{d}{2} \right) \varphi},$$

откуда, пренебрегая величиной $\left(D - \frac{d}{2} \right)$ весьма малой въ сравненіи съ величиной r ,

$$\sigma = \frac{dE}{2r} \dots \dots \dots (127)$$

и

$$r = \frac{dE}{2\sigma} \dots \dots \dots (128)$$

Изъ послѣдняго уравненія видимъ, что радіусъ r увеличивается вмѣстѣ съ толщиной проволоки.

Если t — безопасное напряженіе проволоки, произведенное одной нагрузкой, то безопасная нагрузка каната, состоящаго изъ n проволокъ

$$G = nt \frac{\pi d^2}{4},$$

или, такъ какъ по (126)

$$t = k - \sigma,$$

$$G = n (k - \sigma) \frac{\pi d^2}{4} = n \left(k - \frac{dE}{2r} \right) \frac{\pi d^2}{4},$$

$$G = \frac{n\pi}{4} \left(kd^2 - \frac{d^3 E}{2r} \right) \dots \dots \dots (129)$$

Наиболѣе выгодный діаметръ проволоки тотъ, для котораго G получаетъ наибольшее значеніе, т. е. для котораго

$$\frac{dG}{dd} = 0.$$

Но

$$\frac{dG}{dd} = 2kd - \frac{3}{2} \frac{d^2 E}{2r} = 0,$$

откуда

$$d = \frac{4}{3} \frac{kr}{E} \dots \dots \dots (130)$$

Подставивъ это значеніе въ (127), получимъ

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{kr}{E \cdot 2r} = \frac{2}{3} k \dots \dots \dots (131)$$

слѣдовательно

$$t = k - \sigma = \frac{1}{3} k \dots \dots \dots (132)$$

т. е. напряженіе, производимое нагрузкой, не должно превышать $\frac{1}{3}$ допускаемаго напряженія.

Такъ какъ $\sigma = \frac{2}{3} k$, то по (128)

$$r = \frac{3}{4} \frac{dE}{k} \dots \dots \dots (133)$$

$$G = \frac{k}{3} \cdot \frac{n\pi d^2}{4} = 0,26knd^2 \dots \dots \dots (134)$$

Примръ. — Опредѣлить толщину желѣзной проволоки для крученаго каната, состоящаго изъ 72 проволокъ, который въ шахтѣ глубиною 200 метр. долженъ кромѣ собственнаго вѣса, платформы и телѣжки, поднимать грузъ 800 кил. Вѣсъ платформы и телѣжки = 700 кил.

Для рѣшенія этой задачи имѣемъ уравненіе (134)

$$G = 0,26 \, k n d^2.$$

Нагрузка G состоитъ изъ вѣса каната, платформы и телѣжки, и изъ полезнаго груза. Такъ какъ вѣсъ каната по (124) $= 0,8 \times 72 \times d^2 \times 200 = 11520 d^2$, то $G = 700 + 800 + 11520 d^2 = 1500 + 11520 d^2$.

Канатъ подвергается дѣйствию переменнѣй нагрузки, поэтому по (116)

$$k = \frac{8}{1 - 0,6\omega}.$$

Наибольшая нагрузка $\max N = G$, а наименьшая $\min N = G - 800$; для опредѣленія $\omega = \frac{\min N}{\max N}$ нужно слѣдовательно знать діаметръ d . Такъ какъ этотъ діаметръ неизвѣстенъ, то исполнимъ расчетъ каната сначала такимъ образомъ, какъ если бы на него дѣйствовала постоянная нагрузка G .

По (132) напряженіе отъ нагрузки должно равняться только $\frac{1}{3}$ всего напряженія, поэтому

$$\max N = \frac{1}{3} \frac{n}{p} (A d^2 + B d).$$

Изъ табл. VII имѣемъ

$$A = 50, \quad B = 12,5.$$

Если положимъ $p = 3$, то получимъ $\max N = 1500 + 115,2 d^2$

$$\frac{1}{3} \frac{72}{3} (50 d^2 + 12,5 d)$$

или

$$5,266 = d^2 + 0,351 d,$$

откуда

$$d = 2,15 \text{ мм.}$$

Помощію этого значенія будетъ

$$\omega = \frac{700 + 115,2 (2,15)^2}{1500 + 115,2 (2,15)^2} = 0,6.$$

Поэтому

$$k = \frac{8}{1 - 0,6\omega} = 12,5.$$

По (134)

$$1500 + 115,2 d^2 = 0,26 \times 12,5 \times 72 d^2$$

$$1500 = 118,8 d^2$$

$$d = 3,5 \text{ мм.}$$

Радиусъ блока получается изъ уравненія (133)

$$r = \frac{3dE}{4\kappa}.$$

Для желѣза $E = 20000$ кил., поэтому

$$r = \frac{3 \times 3,5 \times 20000}{4 \times 12,5} = 4200 \text{ миллиметр.}$$

§ 39.

Утоняющіеся проволочные канаты.—Когда глубина колодца или шахты очень большая, то для уменьшенія вѣса каната составляютъ его изъ частей, діаметры которыхъ могутъ быть опредѣлены по формуламъ (83), полученнымъ для длинныхъ шахтенныхъ штангъ. Число проволокъ во всѣхъ частяхъ каната берутъ одинаковымъ, а измѣненіе діаметра достигается измѣненіемъ толщины проволокъ.

Утоняющіеся канаты, вслѣдствіе ихъ меньшаго вѣса, обходятся, при одинаковой крѣпости, дешевле канатовъ съ постояннымъ поперечнымъ сѣченіемъ.

Если означимъ черезъ $l_1, l_2, l_3 \dots$ длины отдѣльных частей каната, считая снизу вверхъ, въ метрахъ,

$d_1, d_2, d_3 \dots$ діаметры ихъ проволокъ, въ миллиметрахъ,

$k_1, k_2, k_3 \dots$ ихъ допускаемыя напряженія въ килограммахъ на 1 квадратный миллиметръ,

n — число проволокъ каната,

g — вѣсъ одного погоннаго метра каната въ килограммахъ, то вообще

$$g = and^2.$$

По (124) и (125)

для желѣза $a = 0,008$

и для стали $a = 0,009$.

Чтобы напряженіе въ опасныхъ (наивысшихъ) сѣченіяхъ отдѣльных частей не превышало допускаемаго напряженія, должны быть исполнены слѣдующія уравненія, въ которыхъ G означаетъ грузъ, привѣшенный къ концу каната:

$$G + and_1^2 l_1 = \frac{k_1 n \pi d_1^2}{4},$$

$$G + and_1^2 l_1 + and_2^2 l_2 = \frac{k_2 n \pi d_2^2}{4},$$

$$G + and_1^2 l_1 + and_2^2 l_2 + and_3^2 l_3 = \frac{k_3 n \pi d_3^2}{4}$$

.....

Изъ этихъ уравненій получаемъ:

$$d_1 = \sqrt{\frac{G}{n \left(\frac{\pi k_1}{4} - al_1 \right)}}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{G \frac{\pi k_2}{4}}{n \left(\frac{\pi k_1}{4} - al_1 \right) \left(\frac{\pi k_2}{4} - al_2 \right)}}$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{G k_1 k_2 \left(\frac{\pi}{4} \right)^2}{n \left(\frac{\pi k_1}{4} - al_1 \right) \left(\frac{\pi k_2}{4} - al_2 \right) \left(\frac{\pi k_3}{4} - al_3 \right)}} \quad (135)$$

вообще

$$d_n = \sqrt{\frac{G k_1 k_2 k_3 \dots k_{n-1} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n-1}}{n \left(\frac{\pi k_1}{4} - al_1 \right) \left(\frac{\pi k_2}{4} - al_2 \right) \dots \left(\frac{\pi k_n}{4} - al_n \right)}}$$

Когда нагрузка постоянна, то $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n$; если притомъ длины всѣхъ частей каната равны между собою, т. е. $l_1 = l_2 = l_3 = \dots = l_n$, то послѣднее уравненіе получаетъ видъ

$$d_n = \sqrt{\frac{G \left(\frac{k\pi}{4} \right)^{n-1}}{n \left(\frac{k\pi}{4} - al \right)^n}} \dots \dots \dots (136)$$

Когда канатъ огибаетъ цилиндрическую поверхность (блокъ, барабанъ), то по (132) вмѣсто $k_1, k_2, k_3 \dots$ нужно подставить въ эти формулы $\frac{1}{3} k_1, \frac{1}{3} k_2, \frac{1}{3} k_3 \dots$

Примѣръ. Определить діаметры проволокъ стального каната, состоящаго изъ 72 проволокъ, для шахты глубиною 720 метровъ. Канатъ раздѣленъ на 3 равныя части, каждая длиной 240 мтр., діаметры которыхъ сверху внизъ уменьшаются. Всѣ платформы и телѣжки = 790 кил., а нагрузки — 1000 кил.

а) Расчетъ наинизшей части.

Для опредѣленія допускаемаго напряженія k_1 имѣемъ:

$$\begin{aligned} \min N &= 790 + 0,009 \times 72 \times d^2 \times 240 = 790 + 155,52d^2 \\ \max N &= 1790 + 155,52d^2 \end{aligned}$$

Принимая сначала, что на канатъ дѣйствуетъ постоянная нагрузка, будетъ по (118)

$$\max N = \frac{1}{3} \frac{n}{p} (Ad^2 + Bd).$$

Для неотожженной стали получаемъ изъ табл. VII

$$A = 50, \quad B = 21.$$

Поэтому, для $p = 3$

$$\max N = \frac{1}{3} \cdot \frac{72}{3} (50d^2 + 21d) = 400d^2 + 168d$$

$$1790 + 155,52d^2 = 400d^2 + 168d.$$

Изъ этого уравненія получаемъ

$$d = 2,4 \text{ миллим.},$$

слѣдовательно

$$\min N = 790 + 0,009 \times 72 \times 2,4^2 \times 240 = 790 + 896 = 1686$$

$$\max N = 2686$$

$$\omega = \frac{\min N}{\max N} = 0,6$$

и по (117)

$$k_1 = \frac{18}{1 - 0,5\omega} = 25.$$

По (135)

$$d_1 = \sqrt{\frac{1790}{72 \left\{ \frac{3,14 \times \frac{25}{3}}{4} - 0,009 \times 240 \right\}}} = 2,4 \text{ мм.}$$

Вѣсъ первой части каната

$$W_1 = 155,52d^2 = 896 \text{ кил.}$$

б) Расчетъ средней части:

$$\min N = 790 + 896 + 155,52d_2^2 = 1686 + 155,52d_2^2$$

$$\max N = 2686 + 155,52d_2^2.$$

Изъ уравненія

$$2686 + 155,52d_2^2 = 400d_2^2 + 168d_2$$

получаемъ какъ приближительное значеніе

$$d_2 = 2,99$$

$$\min N = 1686 + 155,52 \times 2,99^2 = 3046$$

$$\max N = 4046$$

$$\omega = \frac{3046}{4046} = 0,75$$

$$k = \frac{18}{1 - 0,5 \times 0,75} = 28$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{1790 \times \frac{3,14}{4} \cdot \frac{25}{3}}{72 \left(\frac{3,14}{4} \cdot \frac{25}{3} - 0,009 \times 240 \right) \left(\frac{3,14}{4} \cdot \frac{28}{4} - 0,009 \times 240 \right)}} = 2,7 \text{ мм.}$$

$$W_2 = 155,52 d_2^2 = 1115 \text{ кил.}$$

в) Разсчетъ верхней части:

$$\min N = 790 + 896 + 1115 + 155,52 d_3^2 = 2801 + 155,52 d_3^2$$

$$\max N = 3801 + 155,52 d_3^2,$$

Приблизительно

$$3801 + 155,52 d_3^2 = 400 d_3^2 + 168 d_3,$$

откуда

$$d_3 = 3,6.$$

Помощію этого значенія получаемъ

$$\omega = \frac{\min N}{\max N} = \frac{4816}{5816} = 0,83$$

$$k = \frac{18}{1 - 0,5 \times 0,83} = 30$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{1790 \cdot \frac{25}{3} \cdot \frac{28}{3} \left(\frac{3,14}{4} \right)^2}{316,1 \times 5,17 \left(\frac{3,14}{4} \cdot \frac{30}{3} - 2,16 \right)}} = 3,0 \text{ мм.}$$

$$W_3 = 155,52 d_3^2 = 1400 \text{ кил.}$$

§ 40.

Практическія данныя для разсчета желѣзныхъ проволочныхъ канатовъ. — Когда не требуется большой точности, производятъ разсчетъ желѣзныхъ проволочныхъ канатовъ по слѣдую-

щимъ приближительнымъ формуламъ, въ которыхъ буквы G , n , d и g имѣютъ прежнее значеніе:

$$G = 3,15D^2 \quad (137)$$

$$g = 0,003D^2 \quad (138)$$

$$D = 1,59d\sqrt{n} \quad (139)$$

Въ этихъ формулахъ нужно выражать D и d въ сантиметрахъ, а G и g —въ килограммахъ.

Примѣръ. Опредѣлить приближительно нагрузку и вѣсъ одного погоннаго метра желѣзнаго каната, содержащаго 24 проволоки діаметра 2,1 миллим.

Діаметръ каната по (139)

$$D = 1,59 \times 2,1 \times \sqrt{24} = 16,4 \text{ мм.}$$

Вѣсъ одного пог. метра по (138)

$$g = 0,003 \times 16,4^2 = 0,81 \text{ кил.}$$

Безопасная нагрузка каната при отсутствіи изгиба

$$G = 3,15 \times 16,4^2 = 849 \text{ кил.}$$

Если канатъ обхватываетъ цилиндрическую поверхность, то

$$G = \frac{849}{3} = 283 \text{ кил.}$$

§ 41

Пеньковые канаты.—Пеньковые канаты составляютъ, подобнымъ образомъ какъ и проволочные, изъ шнурковъ, изготовленныхъ изъ пеньковыхъ нитей, расположенныхъ вокругъ особаго пеньковаго шнурка, называемаго сердцевиной (черт. 25). Въ сердцевинѣ нити расположены всегда параллельно.

Когда канатъ назначается для употребленія въ прямолинейномъ или только немного изогнутомъ видѣ, то шнурки, располагаемые вокругъ сердцевины, имѣютъ или одинаковое съ сердцевиной устройство, или ихъ скручиваютъ на столько, что составляющія ихъ нити укорачиваются на $\frac{1}{5}$ своей первоначальной длины. Опыты показали, что болѣе сильное скручиваніе уменьшаетъ крѣпость шнурковъ.

Когда канатъ долженъ навиваться на цилиндрическую поверхность, то сердцевина, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, состоитъ изъ параллельныхъ нитей, но другіе шнурки—крученые,

и ихъ оси образуютъ вокругъ сердцевины винтообразныя линіи. Крученые канаты обладаютъ въ изогнутомъ состояніи болѣе значительнымъ сопротивленіемъ чѣмъ некрученые, такъ какъ усиліе въ нихъ распредѣляется болѣе равномерно на снурки.

Опыты показываютъ, что при одинаковыхъ прочихъ обстоятельствахъ сопротивленіе пеньковыхъ канатовъ, отнесенное къ единицѣ площади сѣченія, тѣмъ больше, чѣмъ тоньше нити, изъ которыхъ состоятъ снурки, и чѣмъ меньше толщина каната. Вода уменьшаетъ крѣпость каната, потому что волоена, пропитываясь водой, утолщаются, вслѣдствіе чего длина ихъ увеличивается и они испытываютъ напряженія уже въ ненагруженномъ состояніи.

Крѣпость пеньковыхъ канатовъ колеблется между 5 и 8 килгр. на 1 квадратный миллиметръ и равняется среднимъ числомъ 6-ти кил. на 1 кв. миллиметръ. Поэтому допускаемое напряженіе пеньковыхъ канатовъ при 6 кратной прочности

$$k=1 \text{ кил. на 1 кв. мм.}$$

Полезное сѣченіе каната равно приблизительно 0,9 площади того круга, который можетъ быть описанъ около его дѣйствительнаго сѣченія, поэтому безопасная нагрузка пеньковаго каната, включая его собственный вѣсъ, получается изъ уравненія

$$G=0,9\frac{\pi D^2}{4}k=0,7kD^2 \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

откуда

$$D=\sqrt{\frac{G}{0,7k}}=1,19\sqrt{\frac{G}{k}} \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

Для $k=1$ кил. на 1 кв. мм. будетъ

$$G=0,7D^2, \quad D=1,19\sqrt{G} \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

Если вѣсъ одного погоннаго метра каната въ килограммахъ означимъ черезъ g , а діаметръ его въ миллиметрахъ—черезъ D , то для сухаго несмазаннаго каната приблизительно

$$g=0,00065D^2.$$

а для мокраго и смазаннаго

$$g=0,00078D^2.$$

Пеньковые канаты получаютъ діаметръ отъ 10—60 миллиметровъ.

Наименьшій радіусъ блока или барабана, на который канатъ долженъ навиваться, опредѣляютъ изъ уравненія

$$r=4D.$$

Примѣръ. Определить діаметръ пеньковаго каната, который долженъ поднимать грузъ=500 кил. на высоту 10 метровъ.

Вѣсъ каната

$$g=0,00078D^2 \times 10=0,0078D^2,$$

поэтому полный грузъ

$$G=500 \times 0,0078D^2. \quad (143)$$

По (142)

$$D=1,19\sqrt{500+0,078D^2},$$

откуда

$$D=28 \text{ миллиметровъ.}$$

§ 42.

Цѣпи. — Звенья, изъ которыхъ состоятъ цѣпи, получаютъ различную форму, но наибольшимъ распространениемъ пользуются цѣпи, называемыя англійскими, которыхъ звенья имѣютъ видъ эллиптическихъ колець, изготовленныхъ изъ круглаго желѣза (черт. 26). Очевидно, что при этой формѣ звенья сопротивляются растяженіемъ и выгибаніемъ, что поэтому ихъ сопротивленіе меньше чѣмъ сопротивленіе желѣза, изъ котораго они изготовлены, при дѣйствіи одного растяженія. Произведенные въ Англій опыты показали, что сопротивленіе эллиптическихъ звеньевъ относится къ сопротивленію желѣза, изъ котораго они изготовлены, какъ 9:11, такъ что допускаемое напряженіе k_1 для англійской цѣпи

$$k_1 = \frac{9}{11}k. \quad (144)$$

гдѣ k —допускаемое напряженіе желѣза при растяженіи. Соответственно обстоятельствамъ, при которыхъ цѣпь должна работать, k определяется данными таблицы III, или формулами (67).

При временномъ употребленіи цѣпи можно принимать

для желѣза $k_1=10$ кил. на 1 кв. мм.

и для стали $k_1=12$ кил. на 1 кв. мм.

Если полную нагрузку (включая собственный вѣсъ цѣпи), которую цѣпь можетъ нести безопасно, означимъ черезъ G , то діаметръ звена d получается изъ уравненія

$$G=k_1 \frac{\pi d^2}{4} = 0,785 k_1 d^2. \quad (145)$$

Вѣсъ одного погоннаго метра цѣпи, приблизительно

$$g=0,0233d^2 \text{ килогр.,}$$

если d взято въ миллиметрахъ.

Относительные размѣры звеньевъ видны изъ черт. 26.

Радиусъ блока или барабана, на который цѣпь должна навиваться, не дѣлають менѣе 12*d*.

Чтобы уменьшить изгибъ звеньевъ и такимъ образомъ увеличить сопротивленіе цѣпи, *Brunton* снабжаетъ звенья поперечинами, расположенными по малой оси эллипсиса (черт. 27). Цѣпи *Brunton*'а изготовляютъ изъ круглаго желѣза, діаметра 13—52 миллиметра.

По опытамъ, произведеннымъ въ Англіи, сопротивленіе цѣпи, *Brunton*'а $\frac{9}{7}$ разъ больше сопротивленія обыкновенной англійской цѣпи.

Такъ какъ при продолжительномъ употребленіи цѣпей металлъ ихъ дѣлается хрупкимъ, то бываетъ необходимо черезъ каждые 3—4 года отжигать ихъ.

Глава III.

Сочлененныя системы.

§ 43.

Опредѣленіе сочлененной системы. Сочлененной системой называется система прямолинейныхъ брусевъ, соединенныхъ между собою только на концахъ посредствомъ шарнировъ, такимъ образомъ, что, освободивъ одинъ конецъ бруса, можно его вращать свободно около другого конца. Такіе брусья называются *стержнями*, а соединенныя ими точки—*узлами*.

Мы будемъ предполагать, что:

1) оси всѣхъ стержней, выходящихъ изъ одного узла, пересекаются въ центрѣ его шарнира, называемаго *узловой точкой*.

2) Внѣшнія силы имѣютъ точки приложенія только въ узловыхъ точкахъ.

3) Вращеніе около шарнировъ происходитъ безъ тренія.

Очевидно, что при этихъ условіяхъ стержни могутъ испытывать только растяженія, или только сжатія, т. е. въ нихъ вызывается только нормальная упругость.

§ 44.

Свободная неизмѣняемая система.

Нужные стержни.—Неизмѣняемую сочлененную систему можно себѣ представить какъ систему матеріальныхъ точекъ, соединенныхъ между собою стержнями такимъ образомъ, что ихъ относительныя разстоянія измѣняться не могутъ.

Положимъ, что въ пространствѣ даны точки 1, 2, 3....*n*, которыя должны быть соединены стержнями неизмѣняемымъ образомъ и требуется найти число нужныхъ для этого стержней.

Первыя двѣ точки 1 и 2 могутъ быть соединены между собою только однимъ стержнемъ $\overline{12}$ (черт. 28).

Третья точка 3 требуетъ для неизмѣняемаго соединенія съ обѣими предыдущими двухъ стержней $\overline{31}$ и $\overline{32}$. Три точки, 1, 2 и 3, соединенныя неизмѣняемо стержнями, образуютъ неизмѣняемую фигуру—треугольникъ.

Чтобы четвертую точку 4 соединить неизмѣняемо съ предыдущими необходимы 3 стержня, потому что если бы мы ее соединили только двумя стержнями $\overline{43}$ и $\overline{41}$, то она могла бы вращаться около оси $\overline{13}$; третій стержень $\overline{42}$ уничтожаетъ это вращеніе и дѣлаетъ ее неподвижной. Такимъ же образомъ узнаемъ, что всякая слѣдующая точка требуетъ для неизмѣняемаго соединенія ея съ системой, образованной предыдущими точками, 3 стержня. Изъ этого слѣдуетъ, что для соединенія n точекъ въ неизмѣняемую систему необходимо

$$1+2+3(n-3)=3n-6 \text{ стержней} \quad . \quad . \quad . \quad (146)$$

Стержни, необходимые для неизмѣняемости системы, называются *нужными*.

Свободная неизмѣняемая система (ничѣмъ не связанная съ какимъ нибудь другимъ тѣломъ) имѣетъ поэтому при n узлахъ $3n-6$ *нужныхъ стержней*.

§ 45.

Несвободная неизмѣняемая система.—Всякая сила, приложенная къ свободной системѣ, приведетъ ее въ движеніе. Въ практикѣ обыкновенно требуется, чтобы система имѣла по отношенію къ данному тѣлу (или другой системѣ) неизмѣняемое положеніе.

Число стержней, необходимое для неизмѣняемаго соединенія двухъ тѣлъ A и B получается слѣдующимъ образомъ (черт. 29).

Для неизмѣняемаго прикрѣпленія какой-нибудь точки къ тѣлу необходимы 3 стержня. Если точка α тѣла A соединена съ тѣломъ B тремя стержнями $\alpha 1$, $\alpha 2$ и $\alpha 3$, то она по отношенію къ B абсолютно неподвижна, но тѣло A можетъ вращаться около ней по всевозможнымъ направленіямъ.

Если другую точку β , взятую на A , соединимъ съ B четвертымъ стержнемъ $\beta 4$, то точки α , β и 4 составятъ треугольникъ, котораго вершина β можетъ вращаться около оси $\alpha 4$. Это вращеніе будетъ уничтожено стержнемъ $\beta 5$, соединяющимъ β съ произвольной точкой 5 тѣла B , не находящейся на прямой $\alpha 4$.

Этими 5 стержнями достигнется неподвижность прямой $\alpha\beta$ тѣла A , но самое тѣло можетъ около этой прямой вращаться какъ около неподвижной оси. Шестой стержень $\gamma\delta$, соединяющій третью точку γ тѣла A съ тѣломъ B сдѣлаетъ это вращеніе невозможнымъ.

Точки α , β , γ , которыми свободная система A соединена съ тѣломъ B , называются *опорными точками*, а стержни, которыми эти точки соединены съ B —*опорными стержнями*.

Изъ предыдущаго разсужденія слѣдуетъ, что для того, чтобы одна система имѣла по отношенію къ другой неизмѣняемое положеніе, необходимы 6 опорныхъ стержней, выходящихъ изъ трехъ опорныхъ точекъ.

Въ практикѣ мѣсто опорныхъ стержней замѣняютъ обыкновенно соотвѣтственные сопротивленія опоръ. Если сопротивленіе опоры такого рода, что опорная точка абсолютно неподвижна, то она можетъ быть замѣнена тремя стержнями; если она можетъ двигаться по линіи, то двумя, а если по поверхности, то—однимъ стержнемъ.

Неизмѣняемая система, соединенная съ тѣломъ неизмѣняемымъ образомъ, называется по отношенію къ этому тѣлу—*устойчивой*. *Устойчивая неизмѣняемая система имѣетъ при n узлахъ $3n-6$ нужныхъ стержней системы и 6 нужныхъ опорныхъ стержней, слѣдовательно всего $(3n-6)+6=3n$ нужныхъ стержней.*

§ 46.

Плоскія системы.—Когда всѣ точки системы находятся въ одной плоскости, то первая 3 точки потребуютъ для неизмѣняемаго соединенія между собою трехъ стержней, а каждая слѣдующая для неизмѣняемаго соединенія съ предыдущими—по 2 стержня, поэтому число нужныхъ стержней плоской системы, имѣющей n узловъ, будетъ

$$s_1 = 3 + 2(n-3) = 2n - 3 \dots \dots \dots (147)$$

Если точку α плоской системы A (черт. 29) прикрѣпимъ къ плоскости B двумя стержнями, то точка α будетъ по отношенію къ B неподвижной, но система A можетъ около нея вращаться въ плоскости. Третій стержень $\beta\gamma$ сдѣлаетъ это вращеніе невозможнымъ. Плоская система требуетъ поэтому для устойчивости 3 нужныхъ стержня, такъ что число нужныхъ стержней устойчивой неизмѣняемой плоской системы, имѣющей n узловъ,

$$s = (2n - 3) + 3 = 2n \dots \dots \dots (148)$$

§ 47.

Наибольшее число стержней системы. Добавочные стержни. — Первые три точки могут быть соединены между собою только тремя стержнями; четвертая точка может быть соединена съ тремя предыдущими тремя стержнями, пятая съ четырьмя предыдущими—четырьмя стержнями и т. д. Поэтому наибольшее число стержней, которое может имѣть свободная система при n узлахъ, будетъ

$$(1+2)+3+4+5+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \dots (149)$$

Это правило дѣйствительно какъ для пространственныхъ, такъ и для плоскихъ системъ.

Выше было получено, что неизмѣняемая система имѣетъ при n узлахъ $3n-6$ стержней, но изъ этого не слѣдуетъ, чтобы всякая система, имѣющая это число стержней, была неизмѣняемой. Она будетъ неизмѣняемой только тогда, когда всѣ $3n-6$ стержней—нужные стержни, т. е. когда они расположены такимъ образомъ, что всякая точка соединена съ системой предыдущихъ не менѣе чѣмъ тремя стержнями.

Плоская система будетъ неизмѣняемой когда ея стержни имѣютъ такое расположеніе, что каждый узелъ соединенъ съ системой остальныхъ не менѣе чѣмъ двумя стержнями.

Представленная на черт. 30 плоская система имѣетъ 8 узловъ и 14 стержней. Такъ какъ $2 \times 8 - 3 = 13$, то она имѣетъ на одинъ стержень болѣе, чѣмъ необходимо для неизмѣняемости. Но если будемъ распредѣлять стержни попарно отдѣльнымъ узламъ, то увидимъ, что въ четырехугольникѣ 2564 одна точка (напр. 5) прикрѣплена къ системѣ предыдущихъ только однимъ стержнемъ, и что послѣ распредѣленія два стержня, напр. a и b , останутся не принадлежащими никакому узлу. Эта система не имѣетъ поэтому свойства неизмѣняемости, такъ какъ она вмѣсто 13 имѣетъ только 12 нужныхъ стержней; остающіеся два стержня a и b называются *добавочными*.

Такимъ же образомъ легко узнать, что пространственная система только тогда устойчива, когда имѣетъ не менѣе чѣмъ 6 нужныхъ опорныхъ стержней. Система, имѣющая болѣе чѣмъ 6 опорныхъ стержней, будетъ неустойчивой, если число ея нужныхъ опорныхъ стержней менѣе 6.

Такъ система $ABCD$ (черт. 31) имѣетъ 7 опорныхъ стержней и не смотря на то она неустойчива. Эти семь стержней дѣлаютъ неподвижной въ пространствѣ только прямую AB , а эта цѣль будетъ тоже достигнута, если у точки A два опорныхъ

стержня, напр. a и b , устранимъ. Система имѣетъ поэтому 2 добавочныхъ, а слѣдовательно только 5 нужныхъ опорныхъ стержней.

§ 48.

Деформація сочлененной системы.—Положимъ, что къ узламъ $a, b, c, \dots$ сочлененной системы приложены силы такого рода, что напряженія, произведенныя ими въ стержняхъ системы, не превышаютъ предѣла упругости. Длина каждаго стержня измѣнится на величину, пропорціональную его напряженію (опредѣляемую уравненіемъ 4) и первоначальная форма системы перейдетъ въ другую, соотвѣтствующую новымъ длинамъ ея стержней. При этомъ узлы, а слѣдовательно и концы стержней, перемѣстятся въ пространствѣ на нѣкоторыя величины, при чемъ концы стержней, выходящихъ изъ одного узла, перемѣстятся на одну и ту же величину, равную перемѣщенію этого узла.

Видъ системы послѣ деформаціи будетъ извѣстенъ, если будутъ извѣстны относительныя перемѣщенія узловъ, т. е. измѣненія ихъ относительныхъ разстояній и положеній.

Для опредѣленія этихъ перемѣщеній отнесемъ узлы системы къ тремъ взаимно перпендикулярнымъ осямъ координатъ OX, OY и OZ (черт. 32), соединеннымъ неизмѣнимо съ самой системой. При такомъ соединеніи координаты узловъ, взятые по отношенію къ этимъ осямъ, могутъ измѣняться только при измѣненіи относительныхъ разстояній узловъ, а всякое перемѣщеніе системы въ пространствѣ, при которомъ относительныя положенія узловъ не измѣняются, не будетъ имѣть на эти координаты никакого вліянія.

Пусть (черт. 32)

a и b —два произвольные узла ненагруженной сочлененной системы,

x, y, z и x_1, y_1, z_1 —ихъ координаты,

ab —соединяющій ихъ призматическій стержень,

l —длина этого стержня,

Ω —площадь его поперечнаго сѣченія,

E —модуль упругости его матеріала,

α, β, γ —его углы съ осями OX, OY, OZ .

Приложимъ къ узламъ системы внѣшнія силы и означимъ перемѣщенія, произведенныя ими по направленію осей координатъ, для узла a черезъ ξ, η, ζ , а для узла b —черезъ

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1.$$

сопротивленіе стержня ab —черезъ N ,

измѣненіе его длины l —черезъ λ ,

а его углы съ осями координатъ послѣ деформаци — черезъ α', β', γ' ,

то по (6)

$$N = E\Omega \frac{\lambda}{l}.$$

Если постоянное отношеніе $\frac{E\Omega}{l}$, зависящее только отъ матеріала и размѣровъ стержня и независящее отъ дѣйствующихъ внѣшнихъ силъ, означимъ для краткости черезъ c , то будетъ

$$N = \lambda \cdot c \quad (150)$$

Для опредѣленія удлиненія λ (которое можетъ быть положительно или отрицательно), имѣемъ

$$l = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$$

$$l + \lambda = \sqrt{[(x_1 + \xi_1) - (x + \xi)]^2 + [(y_1 + \eta_1) - (y + \eta)]^2 + [(z_1 + \zeta_1) - (z + \zeta)]^2}$$

Пренебрегая величинами $(\xi_1 - \xi)^2$, $(\eta_1 - \eta)^2$ и $(\zeta_1 - \zeta)^2$, которыя сравнительно съ $(x_1 - x)^2$, $(y_1 - y)^2$ и $(z_1 - z)^2$ очень малы, получимъ

$$l + \lambda = l \sqrt{1 + \frac{2[(x_1 - x)(\xi_1 - \xi) + (y_1 - y)(\eta_1 - \eta) + (z_1 - z)(\zeta_1 - \zeta)]}{l^2}}$$

или

$$l + \lambda = l \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2}{l^2} [(x_1 - x)(\xi_1 - \xi) + (y_1 - y)(\eta_1 - \eta) + (z_1 - z)(\zeta_1 - \zeta)] \right) + f,$$

гдѣ f представляетъ сумму тѣхъ членовъ ряда, которые содержатъ высшія степени очень малыхъ величинъ $\xi_1 - \xi$, $\eta_1 - \eta$ и $\zeta_1 - \zeta$. Изъ послѣдняго уравненія имѣемъ

$$\lambda = \frac{1}{l} [(x_1 - x)(\xi_1 - \xi) + (y_1 - y)(\eta_1 - \eta) + (z_1 - z)(\zeta_1 - \zeta)] + f. \quad (151)$$

Такъ какъ

$$\frac{x_1 - x}{l} = \cos \alpha, \quad \frac{y_1 - y}{l} = \cos \beta, \quad \frac{z_1 - z}{l} = \cos \gamma$$

то

$$\lambda = (\xi_1 - \xi) \cos \alpha + (\eta_1 - \eta) \cos \beta + (\zeta_1 - \zeta) \cos \gamma + f \quad (152)$$

Углы, образуемые стержнемъ ab съ осями координатъ послѣ деформаци получаютъ изъ уравненій:

$$\cos \alpha' = \frac{(x_1 + \xi_1) - (x + \xi)}{l + \lambda}$$

$$\begin{aligned}\cos\beta' &= \frac{(y_1 + \gamma_1) - (y + \gamma)}{l + \lambda} \\ \cos\gamma' &= \frac{(z_1 + \zeta_1) - (z + \zeta)}{l + \lambda} \dots\dots\dots (153)\end{aligned}$$

Выраженія справа знака уравненія могутъ быть развиты въ ряды, сходящіеся по величинамъ $\xi_1 - \xi$, $\gamma_1 - \gamma$, $\zeta_1 - \zeta$. Если сумму членовъ, содержащихъ эти величины, означимъ черезъ φ_x , φ_y и φ_z , то можно написать

$$\begin{aligned}\cos\alpha' &= \frac{x_1 - x}{l} + \varphi_x = \cos\alpha + \varphi_x \\ \cos\beta' &= \frac{y_1 - y}{l} + \varphi_y = \cos\beta + \varphi_y \dots\dots\dots (154)\end{aligned}$$

$$\cos\gamma' = \frac{z_1 - z}{l} + \varphi_z = \cos\gamma + \varphi_z$$

§ 49.

Условія равновѣсія сочлененныхъ системъ.—Когда система, подверженная дѣйствію внѣшнихъ силъ, измѣнила свою форму и пришла въ состояніе покоя, то совокупность силъ, дѣйствующихъ на какую нибудь ея точку, находится въ состояніи равновѣсія. Къ этимъ силамъ принадлежатъ приложенныя къ точкѣ внѣшнія силы и сопротивленія сходящихся въ ней стержней. Такъ, напр., сила P_1 , дѣйствующая на точку a (черт. 33), находится въ равновѣсіи съ сопротивленіями стержней $a1$, $a2$, $a3$ и $a4$, выходящихъ изъ узла a . Если вырѣжемъ этотъ узелъ произвольнымъ сѣченіемъ mnp и къ мѣстамъ разрѣзовъ приложимъ такія внѣшнія силы N_1 , N_2 , N_3 , N_4 , которыя на отсѣченныя части $a\alpha$, $a\beta$, $a\gamma$ и $a\delta$ произведутъ точно такое дѣйствіе, какое производили на нихъ сопротивленія стержней $a1$, $a2$, $a3$, $a4$ передъ разрѣзомъ, то въ состояніи равновѣсія узла a ничего не измѣнится, изъ чего слѣдуетъ, что силы G , N_1 , N_2 , N_3 и N_4 , дѣйствующие на узелъ a , удовлетворяютъ условіямъ равновѣсія.

Если означимъ черезъ

α' , β' , γ' — углы, образуемые сопротивленіемъ N съ осями координатъ OX , OY , OZ послѣ деформаціи,

X , Y , Z — слагающія внѣшней силы G , взятая по направленіямъ этихъ осей,

то изъ условій равновѣсія получимъ:

$$X + N_1 \cos\alpha'_1 + N_2 \cos\alpha'_2 + N_3 \cos\alpha'_3 + \dots\dots\dots = 0$$

$$V + N_1 \cos \beta_1' + N_2 \cos \beta_2' + N_3 \cos \beta_3' + \dots = 0$$

$$Z + N_1 \cos \gamma_1' + N_2 \cos \gamma_2' + N_3 \cos \gamma_3' + \dots = 0$$

или короче

$$X + \sum N \cos \alpha' = 0$$

$$V + \sum N \cos \beta' = 0 \quad \dots \dots \dots (155)$$

$$Z + \sum N \cos \gamma' = 0$$

Углы α' , β' , γ' опредѣляются уравненіями (154). Каждая изъ сумм Σ содержитъ столько членовъ, сколько отъ соотвѣтственнаго узла выходитъ стержней.

Для каждого узла можно составить 3 уравненія вида (155); когда система имѣетъ n узловъ, то условія равновѣсія дадутъ $3n$ такихъ уравненій, и они могутъ служить для опредѣленія неизвѣстныхъ.

Система называется *статически опредѣленной*, если при данныхъ внѣшнихъ силахъ и извѣстной формѣ системы по наступленіи равновѣсія, сопротивленія всѣхъ ея стержней и опоръ могутъ быть опредѣлены. Въ противномъ случаѣ система называется *статически неопредѣленной*.

Если число стержней, составляющихъ систему, s , а число ея опорныхъ стержней— r , то въ случаѣ, когда форма равновѣсія системы извѣстна, неизвѣстными въ уравненіяхъ (155) будутъ только сопротивленія N ; система будетъ поэтому статически опредѣленной, если

$$s + r = 3n \quad \dots \dots \dots (156)$$

Но исполненіе этого одного условія недостаточно для того, чтобы система была статически опредѣленной и необходимо, чтобы уравненія (155), которыхъ число $= 3n$, были такого рода, чтобы $s + r$ неизвѣстныхъ могли изъ нихъ быть опредѣлены. Исслѣдованія показываютъ, что послѣднее условіе исполнено только тогда, когда система не имѣетъ ни одного добавочнаго стержня, т. е. не имѣетъ ни одного такого стержня, который могъ бы быть устраненъ не нарушая той неизмѣняемости системы, какой она обладала передъ устраненіемъ его.

Такъ какъ число нужныхъ стержней устойчивой неизмѣняемой системы (включая опорные стержни) $= 3n$, то слѣдуетъ, что неизмѣняемая система, не имѣющая добавочныхъ стержней— всегда статически опредѣленная.

Когда система при n узлахъ имѣетъ менѣе чѣмъ $3n$ нужныхъ стержней, то она не имѣетъ свойства неизмѣняемости. Условія равновѣсія даютъ для такой системы $3n$ уравненій: число уравненій будетъ поэтому больше числа стержней. А такъ какъ $r + s$

неизвѣстныхъ могутъ быть опредѣлены только изъ $r+s$ уравненій, то для равновѣсія такая система должна удовлетворять $3n-(r+s)$ условіямъ положенія, опредѣляющимъ ея форму равновѣсія.

§ 50.

Общія уравненія сочлененныхъ системъ.—Уравненія (155) содержатъ кромѣ $r+s$ неизвѣстныхъ сопротивленій еще $3n$ неизвѣстныхъ перемѣщеній узловъ. Если поэтому видъ системы послѣ деформации неизвѣстенъ, то для опредѣленія $r+s$ сопротивленій ея стержней нужно опредѣлять $r+s+3n$ неизвѣстныхъ, для чего необходимо имѣть $r+s+3n$ независимыхъ уравненій.

Условія равновѣсія даютъ только $3n$ уравненій, недостающія $r+s$ уравненій нужно поэтому искать въ геометрическихъ условіяхъ системы, которыя опредѣлены уравненіями вида (152). Такъ какъ по (150)

$$N = c\lambda,$$

то уравненіе (152) можно написать такъ:

$$N = c[(\xi_1 - \xi)\cos\alpha + (\eta_1 - \eta)\cos\beta + (\zeta_1 - \zeta)\cos\gamma + f] \quad (157)$$

Такое уравненіе можно составить для каждаго стержня системы, какъ нужнаго, такъ и добавочнаго, слѣдовательно число уравненій вида (157) будетъ $r+s$. Поэтому уравненія (155), въ соединеніи съ уравненіями (157), достаточны для рѣшенія всякой системы, какъ статически опредѣленной, такъ и статически неопредѣленной.

§ 51.

Упрощеніе общихъ уравненій для неизмѣняемыхъ системъ.—Въ неизмѣняемыхъ системахъ возможны только такія перемѣщенія, которыя обусловлены упругостью стержней. Такъ какъ напряженія въ сооруженияхъ не должны превышать предѣла упругости, то измѣненія длинъ стержней не будутъ превышать предѣльныхъ упругихъ удлиненій, а послѣднія для строительныхъ матеріаловъ, сравнительно съ первоначальными длинами, всегда такъ малы, что, не умаляя практическаго значенія результатовъ, величинами f въ уравненіяхъ (157), содержащими высшія степени разностей $\xi_1 - \xi$, $\eta_1 - \eta$ и $\zeta_1 - \zeta$, и величинами φ_x , φ_y , φ_z въ уравненіяхъ (154), содержащими отношенія первой и высшихъ степеней тѣхъ же разностей къ длинѣ $l+\lambda$, можно пренебречь.

Для неизмѣняемыхъ системъ можно поэтому написать:

$$\begin{aligned} \cos \alpha' &= \cos \alpha, \quad \cos \beta' = \cos \beta, \quad \cos \gamma' = \cos \gamma \\ \lambda &= (\xi_1 - \xi) \cos \alpha + (\eta_1 - \eta) \cos \beta + (\zeta_1 - \zeta) \cos \gamma \end{aligned} \quad (158)$$

Для рѣшенія неизмѣняемыхъ системъ будемъ, слѣдовательно, вмѣсто уравненій (155) и (157) имѣть слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} X + \sum N \cos \alpha &= 0 \\ Y + \sum N \cos \beta &= 0 \\ Z + \sum N \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

$$N = c[(\xi_1 - \xi) \cos \alpha + (\eta_1 - \eta) \cos \beta + (\zeta_1 - \zeta) \cos \gamma] \quad (160)$$

Эти уравненія дѣйствительны для неизмѣняемыхъ системъ безъ исключенія.

§ 52.

Выраженіе работы деформации въ функціи вѣшнихъ силъ.—Работа деформации упругаго тѣла опредѣляется уравненіемъ (18). Когда стержень подвергается одному только нормальному напряженію (растяженію или сжатію), то за исключеніемъ σ всѣ другія напряженія σ и τ равны нулю, такъ что въ этомъ случаѣ уравненіе (18) получаетъ видъ:

$$\delta = \frac{1}{2E} \int \sigma^2 dV \quad (161)$$

Для призматическаго стержня σ_x постоянно и равно $\frac{N}{\Omega}$ (гдѣ N —сопротивленіе и Ω —площадь сѣченія стержня). Такъ какъ

$$dV = \Omega dx,$$

то

$$\delta = \frac{N^2}{2E\Omega^2} \cdot \Omega \int_0^l dx = \frac{N^2 l}{2E\Omega} \quad (162)$$

По (6)

$$\lambda = \frac{Nl}{E\Omega},$$

поэтому

$$\delta = \frac{N\lambda}{2} \quad (163)$$

По (158)

$$\lambda = (\xi_1 - \xi) \cos \alpha + (\eta_1 - \eta) \cos \beta + (\zeta_1 - \zeta) \cos \gamma.$$

Если $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ —углы, образуемые верхнимъ концомъ стержня съ осями координатъ (черт. 32), то

$$\alpha_1 = 180 - \alpha, \quad \beta_1 = 180 - \beta, \quad \gamma_1 = 180 - \gamma.$$

Уравненіе (158) можно поэтому написать такъ:

$$\lambda = -\xi_1 \cos \alpha_1 - \eta_1 \cos \beta_1 - \zeta_1 \cos \gamma_1 - \xi \cos \alpha - \eta \cos \beta - \zeta \cos \gamma.$$

Умножимъ это уравненіе на $\frac{N}{2}$,

$$\begin{aligned} \frac{N\lambda}{2} + \frac{N}{2} \xi \cos \alpha + \frac{N}{2} \eta \cos \beta + \frac{N}{2} \zeta \cos \gamma + \frac{N}{2} \xi_1 \cos \alpha_1 + \\ \frac{N}{2} \eta_1 \cos \beta_1 + \frac{N}{2} \zeta_1 \cos \gamma_1 = 0. \end{aligned}$$

Если такое выраженіе составимъ для всѣхъ стержней системы и сложимъ ихъ, то получимъ:

$$\begin{aligned} \sum \frac{N\lambda}{2} + \sum \frac{N}{2} \xi \cos \alpha + \sum \frac{N}{2} \eta \cos \beta + \sum \frac{N}{2} \zeta \cos \gamma + \\ + \sum \frac{N}{2} \xi_1 \cos \alpha_1 + \sum \frac{N}{2} \eta_1 \cos \beta_1 + \sum \frac{N}{2} \zeta_1 \cos \gamma_1 = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sum \frac{N\lambda}{2} + \frac{1}{2} \left(\sum \xi N \cos \alpha + \sum \xi_1 N \cos \alpha_1 \right) + \frac{1}{2} \left(\sum \eta N \cos \beta + \right. \\ \left. + \sum \eta_1 N \cos \beta_1 \right) + \frac{1}{2} \left(\sum \zeta N \cos \gamma + \sum \zeta_1 N \cos \gamma_1 \right) = 0. \quad (164) \end{aligned}$$

Чтобы получить выраженіе $\sum \xi N \cos \alpha + \sum \xi_1 N \cos \alpha_1$ нужно перемѣщенія верхнихъ и нижнихъ концовъ стержней, взятыя по направленію оси OX , умножить на слагающія ихъ напряженій, взятыя по направленію той же оси, и полученные такимъ образомъ для всѣхъ стержней выраженія вида $\xi N \cos \alpha + \xi_1 N \cos \alpha_1$ сложить въ одну сумму. Такъ какъ концы всѣхъ стержней, выходящихъ изъ одного и того же узла, перемѣщаются на одинаковую величину, то, обозначивъ перемѣщеніе узла m по направленію OX , черезъ ξ_m , а сумму слагающихъ напряженій стержней, выходящихъ изъ этого узла, для оси OX —черезъ $\sum_m N \cos \alpha$, получимъ для системы, которой узлы обозначены буквами $a, b, c, \dots$

$$\begin{aligned} \sum \xi N \cos \alpha + \sum \xi_1 N \cos \alpha_1 = \xi_a \sum N \cos \alpha + \xi_b \sum N \cos \alpha + \\ + \xi_c \sum N \cos \alpha + \dots \end{aligned}$$

По (159)

$$\sum N \cos \alpha = -X,$$

слѣдовательно

$$\sum \xi N \cos \alpha + \sum \xi_1 N \cos \alpha_1 = -\xi_a X_a - \xi_b X_b - \xi_c X_c - \dots = -\sum X \xi.$$

Точно такимъ образомъ получимъ

$$\Sigma \eta N \cos \beta + \Sigma \eta_1 N \cos \beta_1 = -\Sigma Y \eta$$

$$\Sigma \zeta N \cos \gamma + \Sigma \zeta_1 N \cos \gamma_1 = -\Sigma Z \zeta.$$

Помощію этихъ значеній уравненіе (164) получаетъ видъ

$$\Sigma \frac{N\lambda}{2} = \frac{1}{2} \Sigma (X\xi + Y\eta + Z\zeta) \quad . \quad . \quad (165)$$

Такъ какъ $\Sigma \frac{N\lambda}{2}$ выражаетъ работу деформаціи всей системы, то послѣднее уравненіе опредѣляетъ эту работу въ функціи внѣшнихъ силъ, и оно показываетъ, что работа деформаціи системы зависитъ только отъ конечныхъ значеній внѣшнихъ силъ.

Если означимъ черезъ

P_m — равнодѣйствующую внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на узелъ m ,

u, v, w — углы этой равнодѣйствующей съ осями координатъ,

p_m — перемѣщеніе узла m по направленію линіи дѣйствія силы P_m ,

$\delta, \epsilon, \varphi$ — углы, образуемые перемѣщеніемъ p_m съ осями координатъ,

то

$$X_m = P_m \cos u, \quad Y_m = P_m \cos v, \quad Z_m = P_m \cos w,$$

$$\xi_m = p_m \cos \delta, \quad \eta_m = p_m \cos \epsilon, \quad \zeta_m = p_m \cos \varphi.$$

Слѣдовательно

$$X_m \xi_m + Y_m \eta_m + Z_m \zeta_m = P_m p_m (\cos u \cos \delta + \cos v \cos \epsilon + \cos w \cos \varphi).$$

Но

$$\cos u \cos \delta + \cos v \cos \epsilon + \cos w \cos \varphi = \cos \rho,$$

гдѣ ρ — уголъ, образуемый P_m съ p_m ,

поэтому

$$X_m \xi_m + Y_m \eta_m + Z_m \zeta_m = P_m p_m \cos \rho$$

$p_m \cos \rho$ есть проеція перемѣщенія p_m на направленіе силы P_m ; если эту проецію означимъ черезъ π_m , то уравненіе (165) получить видъ:

$$\Sigma \frac{N\lambda}{2} = \frac{1}{2} \Sigma P \pi \quad . \quad . \quad . \quad (166)$$

Проецію перемѣщенія точки приложенія силы на направленіе этой силы будемъ для краткости называть *относительнымъ перемѣщеніемъ*.

Изъ уравненія (166) получаемъ слѣдующее правило: работа деформации упругой сочлененной системы равняется полусуммѣ произведеній, которыя получаются, если каждую изъ дѣйствующихъ на систему вѣншнихъ силъ умножимъ на относительное перемѣщеніе ея точки приложенія.

Когда $\rho > 90^\circ$, то $\cos \rho$, а слѣдовательно и π , получаетъ отрицательный знакъ, изъ чего слѣдуетъ, что относительное перемѣщеніе должно быть взято съ положительнымъ или отрицательнымъ знакомъ, смотря по тому, получается-ли проэкція перемѣщенія на направленіи силы или на ея продолженіи въ противоположную сторону.

§ 53.

Производная работа деформации. — Если одна изъ дѣйствующихъ на систему вѣншнихъ силъ P , напр., сила P_m измѣнится на бесконечно малую величину dP_m , то система получитъ бесконечно малое измѣненіе деформации, при которомъ относительныя перемѣщенія π точекъ приложенія силъ P измѣнятся на бесконечно малыя величины $d\pi$. Каждая изъ силъ P исполнитъ во время этой деформации работу $Pd\pi$, поэтому полное измѣненіе работы деформации δ , произведенное бесконечно малымъ измѣненіемъ силы P_m , будетъ

$$\sum P d\pi.$$

Но это измѣненіе опредѣляется выраженіемъ

$$\frac{d\delta}{dP_m} dP_m,$$

поэтому

$$\frac{d\delta}{dP_m} dP_m = \sum P d\pi. \quad (167)$$

Такъ какъ по (166)

$$\delta = \frac{1}{2} \sum P \pi,$$

то

$$\frac{d\delta}{dP_m} = \frac{1}{2} \left[\sum P \frac{d\pi}{dP_m} + \sum \pi \frac{dP}{dP_m} \right].$$

Если силы P независимыя величины,

то

$$\sum \pi \frac{dP}{dP_m} = \pi_m$$

и тогда

$$\frac{d\delta}{dP_m} = \frac{1}{2} \left(\sum P \frac{d\pi}{dP_m} + \pi_m \right),$$

противодѣйствуетъ этому увеличенію, и оно стремится привести узлы въ первоначальное положеніе, изъ чего слѣдуетъ, что для того, чтобы внѣшнія силы, замѣняющія данный стержень, произвели точно такое дѣйствіе, какое производитъ самъ стержень, онѣ должны быть направлены къ тѣмъ узламъ, на которые не дѣйствуютъ (см. стержень ab на черт. 34).

Когда сопротивление стержня — сжатіе, то замѣняющія его внѣшнія силы направлены въ сторону тѣхъ узловъ, на которые онѣ дѣйствуютъ (стержень cd на черт. 34), потому что въ этомъ случаѣ первоначальное разстояніе узловъ устраненнаго стержня уменьшилось, а силы упругости стремятся его величину возстановить, т. е. стремятся измѣненное разстояніе увеличить.

Когда добавочные стержни устранены и замѣнены добавочными силами, то вмѣсто данной статически неопредѣленной системы получаемъ статически опредѣленную, на которую кромѣ данныхъ внѣшнихъ силъ дѣйствуютъ еще добавочныя. Если поэтому выразимъ работу деформации этой статически опредѣленной системы въ функціи внѣшнихъ силъ, то полученное выраженіе будетъ функціей данныхъ внѣшнихъ и неизвѣстныхъ добавочныхъ силъ, въ которой какъ первыя, такъ и послѣднія имѣютъ свойство независимыхъ величинъ.

Производная этой работы, взятая по отношенію къ одной изъ внѣшнихъ силъ (къ которымъ принадлежатъ и добавочныя силы) даетъ относительное перемѣщеніе точки приложенія этой силы.

Если поэтому ab (черт. 34) добавочный стержень и D его сопротивление (а слѣдовательно D и $-D$ замѣняющія его внѣшнія силы) и возьмемъ производную работы деформации по отношенію къ силѣ D , дѣйствующей въ a , то получимъ относительное перемѣщеніе aa_1 точки a , а производная той же работы, взятая по отношенію къ силѣ D , дѣйствующей въ b , дастъ относительное перемѣщеніе bb_1 точки b . Такъ какъ направленія этихъ обѣихъ силъ совпадаютъ и опредѣляются прямой, соединяющей узлы a и b , на которые онѣ дѣйствуютъ, то и относительныя перемѣщенія aa_1 и bb_1 будутъ находиться на этой прямой и ихъ сумма $aa_1 + bb_1$ будетъ ничто другое, какъ измѣненіе разстоянія узловъ a и b , произведенное деформацией. Но въ данной первоначально системѣ, содержащей вмѣсто силъ D стержень ab , котораго сопротивление $= D$, это измѣненіе разстоянія узловъ a и b будетъ равно измѣненію длины стержня ab , произведенному деформацией, которое по (6) $= \frac{Dl}{E\Omega}$, поэтому

$$-\frac{d\delta}{dD_a} - \frac{d\delta}{dD_b} = \overline{aa_1} + \overline{bb_1} = \frac{Dl}{E\Omega} \dots \dots \dots (169)$$

Знакъ—производныхъ $\frac{d\delta}{dD}$ происходитъ оттого, что дѣйствующія въ a и b сопротивленія D направлены въ стороны, противоположныя перемѣщеніямъ точекъ a и b ; такъ какъ въ случаѣ растяженія разстояніе ab увеличивается, а въ случаѣ сжатія—уменьшается, проекціи перемѣщенія въ обоихъ случаяхъ получаются поэтому не на направленіи силъ D , но на ихъ продолженіи.

Такъ какъ D_a и D_b независимы величины и $D_a = D_b = D$, то, по извѣстному правилу,

$$\frac{d\delta}{dD_a} + \frac{d\delta}{dD_b} = \frac{d\delta}{dD}.$$

Уравненіе (169) можно поэтому написать такъ:

$$-\frac{d\delta}{dD} = \frac{Dl}{E\Omega},$$

$$\text{или } \frac{d\delta}{dD} + \frac{Dl}{E\Omega} = 0 \quad (170)$$

Это уравненіе имѣетъ тѣже неизвѣстныя, что и функція δ , и такихъ уравненій можно составить столько, сколько система имѣетъ добавочныхъ силъ, или что одно и тоже, сколько она имѣетъ добавочныхъ стержней.

Если неизмѣняемая система имѣетъ n узловъ и s стержней (включая и воображаемые опорные стержни) и $s > 3n$, то она имѣетъ $s - 3n$ добавочныхъ стержней. Число неизвѣстныхъ напряженій $= s$; для ихъ опредѣленія даютъ условія равновѣсія $3n$, а условія производной работы $-(s - 3n)$ уравненій, число всѣхъ уравненій для опредѣленія s неизвѣстныхъ поэтому $= 3n + (s - 3n) = s$. Изъ уравненій (159) и (170) могутъ, слѣдовательно, всѣ неизвѣстныя быть опредѣлены.

Приложеніе принципа производной работы, выраженнаго уравненіемъ (170), къ расчету статически неопредѣленныхъ системъ значительно упрощаетъ этотъ расчетъ. При употребленіи правила, даннаго въ § 50, нужно s неизвѣстныхъ сопротивленій опредѣлять изъ $s + 3n$ уравненій, такъ какъ въ уравненіяхъ (157) или (160) къ s неизвѣстнымъ, опредѣленіе которыхъ требуется, прибавляются $3n$ (а въ случаѣ плоскихъ системъ— $2n$) перемѣщеній узловъ. При замѣнѣ этихъ уравненій уравненіями (170) число неизвѣстныхъ остается $= s$, такъ какъ уравненія (170) содержатъ только тѣ неизвѣстныя, что и уравненія (159), поэтому для опредѣленія s сопротивленій нужно не болѣе s уравненій.

§ 55.

Системы, которыя уже въ ненагруженномъ состояніи испытываютъ напряженія.—Длины нужныхъ стержней въ извѣстныхъ предѣлахъ независимы другъ отъ друга; при измѣненіи этихъ длинъ измѣняется видъ системы и этому измѣненію не противоѣдствуетъ никакое препятствіе. Но этотъ видъ нужными стержнями вполне опредѣленъ, поэтому длины добавочныхъ стержней не произвольны, а опредѣлены разстояніями узловъ системы, составленной изъ нужныхъ стержней.

Когда система состоитъ изъ однихъ только нужныхъ стержней то въ ненагруженномъ состояніи она не испытываетъ никакихъ напряженій и перемѣна температуры не имѣетъ на нее никакого вліянія. При измѣненіи длинъ, произведенныхъ перемѣной температуры, система измѣняетъ свой видъ соотвѣтственно новымъ длинамъ стержней, а такъ какъ эти длины независимы другъ отъ друга, то система въ новомъ видѣ будетъ свободна отъ напряженій, также какъ и въ первоначальномъ.

Если въ неизмѣняемую систему, представленную на черт. 35, желаемъ ввести добавочный стержень ab , котораго длина не точно равна разстоянію ab , то это будетъ возможно только посредствомъ измѣненія разстоянія ab и длины $\alpha\beta$ добавочнаго стержня. Но въ неизмѣняемой системѣ возможны лишь такія измѣненія, которыя обусловлены упругостью матеріала; это измѣненіе можетъ поэтому быть достигнуто только помощію упругихъ удлинений и укороченій нужныхъ стержней; а такъ какъ всякое упругое измѣненіе длины вызываетъ сопротивленіе, то слѣдуетъ, что система, имѣющая добавочный стержень, котораго длина не соотвѣтствуетъ разстоянію соединяемыхъ имъ узловъ, опредѣленному длинами нужныхъ стержней, находится въ такъ называемомъ *принужденномъ состояніи*, и испытываетъ напряженія и при отсутствіи нагрузки.

Если $\alpha\beta$ (черт. 35)—длина добавочнаго стержня и $\alpha\beta < ab$, то его можно ввести въ систему такимъ образомъ, что приблизимъ a къ α и b къ β , и прикрѣпимъ концы α и β стержня къ узламъ a и b системы. Если теперь предоставимъ систему самой себѣ, то вслѣдствіе упругости она будетъ стремиться принять первоначальный видъ, чему будетъ противоѣдствовать сопротивленіе стержня $\alpha\beta$, вслѣдствіе чего возстановленіе вида будетъ возможно только отчасти и узлы a и b займутъ новое положеніе равновѣсія a_1 и b_1 , при чемъ длина стержня $\alpha\beta$ измѣнится на $\alpha a_1 + \beta b_1$. Если означимъ $\alpha a_1 + \beta b_1$ черезъ Δl и поло-

жимъ, что Δl не превышаетъ предѣльнаго упругаго измѣненія, то стержень $\alpha\beta$ будетъ испытывать напряженіе, по (4),

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l},$$

слѣдовательно его сопротивленіе

$$D_1 = E \Omega \frac{\Delta l}{l},$$

откуда

$$\Delta l = \overline{\alpha a_1} + \overline{\beta b_1} = \frac{D_1 l}{E \Omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171)$$

Если въ статически неопредѣленной системѣ добавочные стержни устранимъ, поставимъ на ихъ мѣсто добавочныя силы, и выразимъ работу деформаціи системы въ функціи внѣшнихъ и добавочныхъ силъ, то производная этой работы, взятая по отношенію къ одной изъ силъ, равна относительному перемѣщенію точки приложенія этой силы. Слѣдовательно, производная, взятая по отношенію къ добавочной силѣ D_1 , даетъ перемѣщенія aa_1 и bb_1 точекъ приложенія силъ D_1 , дѣйствующихъ въ a и b , т. е.

$$\frac{d\delta}{dD_1} = \overline{aa_1} + \overline{bb_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172)$$

Здѣсь производная положительна, потому что стержень $\alpha\beta$ растягивается, когда разстояніе ab уменьшается, и сжимается—когда это разстояніе увеличивается.

Если разницу $\overline{ab} - \overline{\alpha\beta}$, на которую длина добавочнаго стержня $\alpha\beta$ больше или меньше разстоянія ab соединяемыхъ имъ узловъ, означимъ черезъ δ , то

$$\delta = (\overline{aa_1} + \overline{bb_1}) + (\overline{a_1\alpha} + \overline{b_1\beta})$$

и принимая во вниманіе уравненія (171) и (172)

$$\delta = \frac{d\delta}{dD_1} D_1 + D_1 \frac{l}{E \Omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173)$$

Такихъ уравненій можно составить столько, сколько система имѣетъ добавочныхъ стержней, они поэтому въ соединеніи съ уравненіями (159) всегда достаточны для опредѣленія напряженій всѣхъ стержней.

При $\delta = 0$,—т. е. когда длина добавочнаго стержня равна разстоянію соединяемыхъ имъ узловъ,—формула (173) переходитъ въ формулу (170). Формулу (173) можно поэтому разсматривать какъ общее выраженіе правила производной работы,

§ 56.

Вліяніе перемѣнъ температуры.—Вліяніе перемѣнъ температуры на напряженія стержней статически неопредѣленной системы опредѣляется точно такимъ образомъ, какъ и вліяніе разности длинъ добавочныхъ стержней и разстояній соединяемыхъ ими узловъ, разсмотрѣнное въ предыдущемъ параграфѣ. При измѣненіи температуры на t градусовъ длина l измѣняется на αtl , гдѣ α —коэффициентъ линейнаго расширенія. Величины αl при данномъ t извѣстны, и помощью ихъ легко опредѣлить измѣненныя разстоянія узловъ и величины δ , на которыя эти разстоянія разнятся отъ новыхъ длинъ добавочныхъ стержней. Напряженія, производимыя перемѣной температуры, опредѣляются слѣдовательно по правилу, выраженному уравненіемъ (173).

§ 57.

Общія правила разчета матеріальныхъ системъ.—Когда матеріальная система послѣ деформаціи пришла въ состояніе равновѣсія, то произвольная часть ея находится въ состояніи равновѣсія, изъ чего слѣдуетъ, что дѣйствующія на эту часть внѣшнія силы и сопротивленія остальныхъ частей, съ которыми она связана, удовлетворяютъ условіямъ равновѣсія. Если всѣ силы и сопротивленія пересѣкаются въ одной точкѣ, то условія равновѣсія даютъ 3 уравненія: сумма слагающихъ, взятыхъ по отношенію къ тремъ непараллельнымъ осямъ и не находящимся въ одной плоскости, должна быть равна нулю для каждой оси порознь, а если онѣ дѣйствуютъ на различныя точки, то къ тремъ уравненіямъ слагающихъ, выражающихъ невозможность поступательнаго движенія, прибавляются еще 3 уравненія моментовъ вращенія, которыхъ сумма, взятая по отношенію къ тѣмъ же тремъ осямъ, должна быть равна нулю для каждой оси порознь.

Когда число уравненій равновѣсія недостаточно для опредѣленія всѣхъ неизвѣстныхъ (т. е. когда система статически неопредѣленная), то недостающія уравненія получаютъ изъ правилъ производной работы.

Въ слѣдующемъ будемъ разсматривать *только плоскія системы и будемъ предполагать, что дѣйствующія на нихъ внѣшнія силы находятся въ плоскости системы*. Въ этомъ случаѣ условія равновѣсія даютъ для силъ, дѣйствующихъ на одну точку, два уравненія: сумма слагающихъ всѣхъ силъ и сопротивленій, взятыхъ по отношенію къ двумъ непараллельнымъ осямъ, должна быть

равна нулю для каждой оси порознь. Когда силы дѣйствуютъ на большее число точекъ, то къ прежнимъ двумъ условіямъ прибавляется еще третье: сумма моментовъ, взятыхъ по отношенію къ какой нибудь точкѣ на плоскости, должна быть равна нулю.

Если число уравненій недостаточно для опредѣленія всѣхъ неизвѣстныхъ, т. е. когда система статически неопредѣленная, то недостающія уравненія получаются изъ правила производной работы.

§ 58.

Практическія правила разсчета статически опредѣленныхъ сочлененныхъ системъ. — Представимъ себѣ, что изъ системы произвольнымъ сѣченіемъ вырѣзана часть *A*. Означимъ для внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на эту вырѣзанную часть: сумму горизонтальныхъ слагающихъ черезъ *H*, вертикальныхъ — черезъ *V*, и сумму моментовъ по отношенію къ какой нибудь точкѣ въ плоскости системы—черезъ *M*. Пусть (черт. 36)

$N_1, N_2, N_3 \dots$ сопротивленія пересѣченныхъ стержней,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ ихъ углы съ горизонтальною,

$n_1, n_2, n_3 \dots$ ихъ разстоянія отъ точки моментовъ, взятой произвольно на плоскости силъ.

Изъ условій равновѣсія получимъ для части *A* уравненія:

$$H + N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 + N_3 \cos \alpha_3 + \dots = 0$$

$$V + N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 + N_3 \sin \alpha_3 + \dots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (174)$$

$$M + N_1 n_1 + N_2 n_2 + N_3 n_3 + \dots = 0$$

Сопротивленіе *N* можетъ быть растяженіе или сжатіе. Такъ какъ родъ этого сопротивленія во время разсчета неизвѣстенъ, то для простоты принимаемъ всѣ неизвѣстныя *N* за растяженія, т. е. ставимъ на ихъ направленія стрѣлки, обращенныя въ стороны узловъ, противоположныхъ тѣмъ, на которые они дѣйствуютъ. Моментъ считаемъ положительнымъ, если онъ вращаетъ вправо (по направленію часовой стрѣлки) и отрицательнымъ—если влѣво.

Растяженія принимаемъ за положительныя, а сжатія—за отрицательныя напряженія. Если поэтому разсчетомъ получится для *N* положительная величина, то соотвѣтственный стержень растягивается, въ противномъ случаѣ—сжимается.

Изъ уравненій (174) можно получить 3 неизвѣстныхъ сопротивленія, но они неудобны тѣмъ, что для опредѣленія одной неизвѣстной нужно рѣшать 3 уравненія. Это неудобство избѣгается соотвѣтственнымъ выборомъ точки моментовъ и на-

правленія слагающихъ, для чего пользуются слѣдующими правилами:

1) Если сѣченіе проведено такимъ образомъ, что разрѣзаны только 3 стержня, коихъ напряженія неизвѣстны, то принимаютъ за точку моментовъ точку пересѣченія тѣхъ двухъ неизвѣстныхъ сопротивленій, величины которыхъ не ищутъ. Тогда моменты этихъ сопротивленій будутъ $=0$, и послѣднее изъ уравненій (174) будетъ имѣть только одну неизвѣстную.

Такъ, если примемъ за точку моментовъ точку пересѣченія сопротивленій N_2 и N_3 , то, означивъ черезъ μ — сумму моментовъ пересѣченныхъ стержней части A , сопротивленія которыхъ извѣстны, получимъ

$$N_1 n_1 + M + \mu = 0.$$

Если точкой вращенія будетъ пересѣченіе силъ N_1 и N_3 :

$$N_2 n_2 + M + \mu = 0,$$

а если — точка пересѣченія силъ N_1 и N_2

$$N_3 n_3 + M + \mu = 0.$$

Каждое изъ этихъ уравненій содержитъ только по одной неизвѣстной. Этотъ способъ выбора точки моментовъ впервые указанъ Риттеромъ.

2) Когда два изъ трехъ пересѣченныхъ стержней, которыхъ сопротивленія N_1 и N_3 неизвѣстны, параллельны между собою (черт. 37), то при опредѣленіи третьяго неизвѣстнаго сопротивленія N_2 по предыдущему правилу точка моментовъ получается въ безконечности. Въ этомъ случаѣ ставимъ сумму слагающихъ, взятыхъ по направленію, перпендикулярному къ параллельнымъ стержнямъ, равной нулю.

Такъ, при опредѣленіи напряженія N_2 , проецируемъ всѣ на отсѣченную часть дѣйствующія силы и сопротивленія на прямую mn , перпендикулярную къ N_1 и N_3 . Проекціи послѣднихъ на эту прямую будутъ равны нулю. Если V — сумма проекцій вѣшнихъ силъ, и $\sum N \sin \alpha$ — сумма проекцій сопротивленій, которыхъ величины извѣстны, на прямую mn , то изъ условій равновѣсія получимъ уравненіе:

$$N_2 \sin \alpha_2 + \sum N \sin \alpha + V = 0.$$

Въ этомъ уравненіи неизвѣстной есть только N_2 .

3) Если пересѣчены только два стержня съ неизвѣстными напряженіями, то при опредѣленіи одного изъ этихъ напряженій беремъ точку моментовъ гдѣ нибудь на направленіи другаго.

4) Если сѣченіе проведено такимъ образомъ, что вырѣзанная

часть содержитъ только одинъ узелъ (черт. 38), то условія равновѣсія даютъ не болѣе двухъ независимыхъ уравненій:

$$H + N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 + \dots = 0$$

$$V + N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 + \dots = 0.$$

Чтобы каждое изъ этихъ уравненій содержало не болѣе одной неизвѣстной, берутъ за направленія проэкцій прямыя, перпендикулярныя къ неизвѣстнымъ сопротивленіямъ. Такъ, для опредѣленія сопротивленія N_x проецируемъ всѣ силы на прямую $y_1 y_2$, перпендикулярную къ другому неизвѣстному сопротивленію N_y . Если ε —уголъ, образуемый напряженіемъ N_x съ $y_1 y_2$ и V —сумма проэкцій данныхъ силъ, дѣйствующихъ на вырѣзанный узелъ A , то

$$N_x \cos \varepsilon + V = 0.$$

Для опредѣленія сопротивленія N_y , проецируемъ всѣ силы на прямую $x_1 x_2$, перпендикулярную къ N_x , и сумму этихъ проэкцій ставимъ $= 0$.

Когда статически опредѣленная система состоитъ изъ однихъ треугольниковъ, то въ ней всегда возможны такія сѣченія, что при одномъ узлѣ вырѣзанная часть будетъ имѣть не болѣе двухъ, а при большемъ числѣ узловъ—не болѣе трехъ стержней, которыхъ сопротивленія неизвѣстны. Приведенныя въ этомъ параграфѣ правила поэтому всегда достаточны для рѣшенія весьма простымъ образомъ треугольных сочлененныхъ системъ.

Глава IV.

Крѣпкія системы.

§ 59.

Крѣпкія системы и ихъ свойства. — Когда брусья системы соединены между собою накрѣпко, т. е. такимъ образомъ, что соединенія на одномъ мѣстѣ достаточно для того, чтобы положеніе бруса по отношенію къ остальной части системы было неизмѣняемо, то система называется *крѣпкой системой*.

Неизмѣняемое положеніе бруса въ плоскости совершенно опредѣлено тремя стержнями, соединяющими по крайней мѣрѣ двѣ точки бруса съ не менѣе чѣмъ двумя точками неподвижной въ плоскости системы (§ 46). Поэтому всякое крѣпкое соединеніе въ плоскости можетъ быть замѣнено тремя стержнями, не пересекающимися въ одной точкѣ.

Также легко узнать, что всякое крѣпкое соединеніе въ пространствѣ можетъ быть замѣнено шестью стержнями, не находящимися въ одной плоскости, соединяющими по крайней мѣрѣ три точки бруса съ не менѣе чѣмъ тремя точками системы.

Не трудно доказать, что всѣ теоремы, выведенныя въ предыдущей главѣ для сочлененныхъ системъ, дѣйствительны и для крѣпкихъ. Эти теоремы основаны на томъ законѣ упругости, что пока напряженія не превышаютъ предѣльныхъ упругихъ напряженій, то измѣненія измѣреній пропорціональны напряженіямъ. Но этому закону подлежатъ и частичныя силы, удерживающія частицы твердаго тѣла въ совокупности; всякое твердое тѣло можно поэтому представить себѣ какъ неизмѣняемую сочлененную систему, которой узлы (частицы) находятся на бесконечно близкихъ другъ отъ друга разстояніяхъ.

Возьмемъ 3 взаимно перпендикулярныя оси координатъ, неизмѣняемо связанныя съ крѣпкой системой, напримѣръ, такимъ образомъ, чтобы началомъ координатъ была одна частица, чтобы

ось OX проходила черезъ другую, а плоскость XOY —черезъ третью частицу. Если эти три частицы представимъ себѣ неподвижными, то при всякомъ измѣненіи положенія остальныхъ частицъ системы, т. е. при всякомъ видоизмѣненіи послѣдней будутъ измѣняться координаты частицъ, между тѣмъ какъ перемѣщеніе системы въ пространствѣ, происходящее безъ видоизмѣненія, не будетъ имѣть на эти координаты никакого вліянія.

Возьмемъ двѣ безконечно близкія частицы a и b (черт. 32), которыхъ координаты передъ деформаціей x, y, z , и x_1, y_1, z_1 , а послѣ деформаціи

$$\begin{array}{lll} x + \xi & y + \eta & z + \zeta \text{ и} \\ x + \xi & y_1 + \eta_1 & z_1 + \zeta_1 \end{array}$$

и означимъ углы, образуемые прямой, соединяющей эти частицы между собою, съ осями OX, OY, OZ передъ деформаціей, черезъ α, γ , а измѣненіе ихъ разстоянія, произведенное деформаціей, че зъ λ , то помощію такихъ же разсужденій какъ въ §§ 48 и 5 получимъ

$$\lambda = (\xi_1 - \xi) \cos \alpha + (\eta_1 - \eta) \cos \beta + (\zeta_1 - \zeta) \cos \gamma. \quad (175)$$

Когда λ меньше предѣльнаго упругаго измѣненія, то величина частичной силы, дѣйствующей между обѣими рассматриваемыми частицами, произведенной измѣненіемъ λ , на основаніи закона пропорціональности напряженій и видоизмѣненій, получится изъ уравненія (160), т. е.

$$N = c[(\xi_1 - \xi) \cos \alpha + (\eta_1 - \eta) \cos \beta + (\zeta_1 - \zeta) \cos \gamma] \quad (176)$$

Когда тѣло (а слѣдовательно и его частицы) находятся въ равновѣсіи, то частичныя силы, дѣйствующія на всякую частицу его, должны удовлетворять условіямъ равновѣсія. На частицу дѣйствуютъ силы N , происходящія отъ окружающихъ ее частицъ, и внѣшнія силы, которыми для частицы, находящейся на поверхности тѣла, могутъ быть приложенныя къ ней внѣшнія силы, а для частицъ, находящихся внутри тѣла—сила тяжести (вѣсъ частицы).

Если сумму слагающихъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на какую нибудь частицу, взятыхъ по направленію осей OX, OY, OZ , означимъ черезъ X, Y, Z , то изъ условій равновѣсія получимъ уравненія:

$$\begin{array}{l} X + \sum N \cos \alpha = 0 \\ Y + \sum N \cos \beta = 0 \dots \dots \dots (177) \\ Z + \sum N \cos \gamma = 0 \end{array}$$

Уравненія 175, 176 и 177 ничѣмъ не отличаются отъ уравненій 158, 160 и 159, полученныхъ для сочлененныхъ системъ, изъ чего слѣдуетъ, что всѣ слѣдствія, выведенныя изъ послѣд-

нихъ для сочлененныхъ системъ, дѣйствительны безъ измѣненія для крѣпкихъ. Повторимъ эти слѣдствія:

1) Работа реформаціи всякаго тѣла опредѣляется въ функціи внѣшнихъ силъ выраженіемъ (166)

$$\delta = \frac{1}{2} \Sigma P \pi.$$

2) Если выразимъ работу деформации въ функціи внѣшнихъ силъ, то производная этой работы, взятая по отношенію къ одной изъ внѣшнихъ силъ, равняется относительному перемѣщенію точки приложенія этой силы. При опредѣленіи производной нужно внѣшнія силы разсматривать какъ независимыя величины.

Эти правила получены при предположеніи такъ малыхъ видоизмѣненій, что величинами f и φ въ уравненіяхъ (152) и (154) можно пренебречь безъ замѣтныхъ практическихъ погрѣшностей. Такъ какъ въ сооруженіяхъ допускаются только такія видоизмѣненія, которыя не превышаютъ предѣльныхъ упругихъ измѣненій, а послѣднія для твердыхъ тѣлъ всегда очень малы, то оба предыдущія правила имѣютъ для сооруженій общее значеніе.

§ 60.

Производная работы деформации, взятая по отношенію къ моменту или парѣ силъ.—При расчетѣ матеріальныхъ системъ, какъ сочлененныхъ, такъ и крѣпкихъ, неизвѣстными суть напряженія стержней или равнодѣйствующихъ и моменты частичныхъ силъ, дѣйствующихъ въ плоскомъ сѣченіи тѣла. Такъ какъ моментъ—функція силы, то работа деформации можетъ быть выражена въ функціи неизвѣстныхъ силъ или моментовъ, и производная этой работы, взятая по отношенію къ силѣ или моменту, можетъ быть употреблена для опредѣленія неизвѣстныхъ. Поэтому важно знать значеніе производной работы деформации, взятой по отношенію въ парѣ силъ или моменту.

Положимъ, что вслѣдствіе дѣйствія пары силъ P и P (черт. 39), которой моментъ $M = Pr$, система получила очень малое вращеніе, при которомъ точки a и b этихъ силъ, находящіяся на перпендикулярѣ ab , перемѣстились въ α и β . Работа пары при этомъ перемѣщеніи равняется

$$Pa\bar{\alpha} + P\bar{b}\beta = P(\bar{a}\alpha + \bar{b}\beta).$$

Если уголъ вращенія $a\alpha$ означимъ черезъ φ , то

$$\bar{a}\alpha = (p-x)\varphi \quad \text{и} \quad \bar{b}\beta = x\varphi,$$

поэтому

$$P(\bar{a}\alpha + \bar{b}\beta) = P[(p-x)\varphi + x\varphi] = Pr\varphi = M\varphi. \dots\dots\dots (178)$$

Если, слѣдовательно, выразимъ работу деформациі въ функціи внѣшнихъ силъ и моментовъ, то будемъ имѣть выраженіе вида

$$\delta = \frac{1}{2} \Sigma P \pi + \Sigma M \varphi = \frac{1}{2} (P_1 \pi_1 + P_2 \pi_2 + \dots) + M_1 \varphi_1 + M_2 \varphi_2 + \dots \quad (179)$$

Когда внѣшнія силы и моменты — независимыя величины, то производная этой работы, взятая по отношенію къ одному изъ моментовъ, будетъ

$$\frac{d\delta}{dM_p} = \varphi_p \dots \dots \dots (180)$$

изъ чего слѣдуетъ:

Если будемъ разсматривать внѣшнія силы и моменты какъ независимыя величины, и выразимъ работу деформациі въ функціи внѣшнихъ силъ и моментовъ, то производная этой работы, взятая по отношенію къ одному изъ моментовъ, даетъ уголъ вращенія пары, образующей взятый моментъ. Этотъ уголъ вращенія будемъ называть относительнымъ вращеніемъ.

Глава V.

Основные начала графическихъ способовъ разсчета.

§ 61.

Введеніе.—При рѣшеніи статическихъ задачъ графическимъ образомъ представляютъ силы по величинѣ и направленію прямыми линіями.

Линія дѣйствія силы извѣстна, когда дано ея направленіе и точка приложенія, а чтобы узнать сторону, въ которую она дѣйствуетъ, снабжаютъ представляющую ее линію стрѣлкой.

Напряженіе силы изображается длиною прямой. Для этого принимаютъ нѣкоторую длину за единицу силы и откладываютъ ее столько разъ, сколько сила содержитъ единицъ. Такъ сила, представленная прямой Ab (черт. 40), для которой длина mb принята за 1 килограммъ, дѣйствуетъ по направленію отъ A къ b и $=5$ килогр.

§ 62.

Сложеніе непараллельныхъ силъ.—Положимъ, что на точку A (черт. 41) дѣйствуютъ двѣ силы P_1 и P_2 , которыхъ величины и направленія даны прямыми Ab и Ac . По извѣстному правилу параллелограмма силъ, равнодѣйствующая этихъ силъ равна діагонали Ad параллелограмма $Abdc$, и она дѣйствуетъ по направленію отъ A къ d .

Половина этого параллелограмма, напр., треугольникъ Abd (черт. 41) называется *треугольникомъ силъ*. Этотъ треугольникъ представленъ отдѣльно на чертежѣ 41_a, изъ котораго видно, что онъ содержитъ какъ данныя силы, такъ и ихъ равнодѣйствующую.

Если заставимъ точку A двигаться по периметру треугольника силъ по направленію, указанному на каждой сторонѣ стрѣлкой, то видимъ, что точка A должна двигаться отъ A къ b , и

отъ b къ d . Въ d кончается движеніе точки, такъ какъ по dA она должна перемѣщаться слѣва вправо, что невозможно. Отсюда заключаемъ: если въ треугольникъ силъ одна сторона представляетъ равнодѣйствующую, то точка, движущаяся по периметру его по направленіямъ стрѣлокъ, не можетъ возвратиться въ первоначальное положеніе.

При противоположномъ направленіи силы Ad , равномъ dA , (черт. 42), три силы: P_1 , P_2 и R находятся въ равновѣсіи. Точка, движущаяся по периметру этого треугольника по направленіямъ стрѣлокъ, поставленныхъ на соотвѣтственныхъ сторонахъ, возвращается въ первоначальное положеніе.

Когда число силъ болѣе двухъ, то равнодѣйствующая получается помощію многоугольника силъ. Чтобы сложить силы P_1, P_2, P_3, P_4 (черт. 43), дѣйствующія на точку A , опредѣляемъ помощію треугольника Abc равнодѣйствующую R_{1-2} силъ P_1 и P_2 , затѣмъ помощію треугольника $Ac d$ — равнодѣйствующую R_{1-3} силъ R_{1-2} и P_3 и, наконецъ, помощію треугольника Adf — равнодѣйствующую R силъ R_{1-3} и P_4 , или, что все равно — равнодѣйствующую силъ P_1, P_2, P_3, P_4 .

Полученный такимъ образомъ многоугольникъ $Abcdf$ называется *многоугольникомъ силъ*. Очевидно, что для опредѣленія R нѣтъ надобности строить промежуточные равнодѣйствующія R_{1-2}, R_{1-3} , и что достаточно строить на данныхъ силахъ многоугольникъ, откладывая каждую слѣдующую силу въ сторону ея направленія отъ конца предыдущей. Прямая, соединяющая послѣднюю точку f съ начальной A , будетъ искомою равнодѣйствующей.

Изъ чертежа 43, видно, что когда одна сторона многоугольника силъ представляетъ равнодѣйствующую, то точка A , движущаяся по его периметру по направленіямъ стрѣлокъ, можетъ пройти всѣ слагающія, но не можетъ возвратиться въ первоначальное положеніе, такъ какъ стрѣлка равнодѣйствующей прерываетъ это движеніе. Такой многоугольникъ силъ называется *многоугольникомъ прерваннаго движенія*.

При построеніи многоугольника силъ можно данныя силы откладывать въ произвольномъ порядкѣ, нужно только соблюдать условіе, чтобы точка могла имѣть по периметру, образованному слагающими, непрерывное движеніе, т. е. каждую слѣдующую силу нужно проводить отъ конца предыдущей въ ту сторону, въ которую указываетъ стрѣлка ея направленія.

Если сила R сдѣлается противоположной (черт. 44), то система силъ P_1, P_2, P_3, P_4, R , представленныхъ сторонами многоугольника $Abcdf$, находится въ равновѣсіи. Изъ черт. 44 видно, что точка, движущаяся по периметру многоугольника, образован-

наго силами, находящимися въ равновѣсїи, можетъ пройти весь периметръ непрерывно.

Такъ какъ въ многоугольникѣ всякая сторона можетъ быть разсматриваема какъ замыкающая сторона многоугольника, образованнаго остальными сторонами, то въ многоугольникѣ прерваннаго движенія всякая сила можетъ быть разсматриваема какъ равнодѣйствующая остальныхъ, а въ многоугольникѣ непрерывнаго движенія всякая сила уравниваетъ остальные.

Сложеніе силъ, дѣйствующихъ на различныя точки. — Когда силы P_1, P_2, P_3, P_4 не пересѣкаются въ одной точкѣ, то ихъ равнодѣйствующая по величинѣ и направленію ищется по-мощію многоугольника силъ точно такимъ образомъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ (черт. 45_а и 45_б).

Положеніе этой равнодѣйствующей опредѣляется слѣдующимъ образомъ: къ произвольной точкѣ A , взятой на силѣ P_1 , приложимъ двѣ силы I и II , уравнивающія эту силу P_1 , которыхъ направленія AE и AB беремъ произвольно. Величины этихъ вспомогательныхъ силъ получаются изъ треугольника aOb въ которомъ

$$aO \parallel AE \text{ и } Ob \parallel AB,$$

а направленія ихъ дѣйствія указаны стрѣлками 1 и 2.

Продолжимъ силу II до пересѣченія съ P_2 въ B и повторимъ для силы P_2 дѣйствіе, исполненное для P_1 , а именно: приложимъ къ B двѣ силы, уравнивающія эту силу P_2 , изъ которыхъ одна должна быть равна и противоположна силѣ II , а другая опредѣляется по величинѣ и направленію третьей стороны $Oс$ треугольника bOc . Направленіе дѣйствія этихъ слагающихъ опредѣляется стрѣлками 2₁ и 3.

Продолжая такимъ образомъ получимъ равновѣсіе въ точкѣ C приложивъ къ точкѣ пересѣченія силъ III и P_3 вспомогательныя силы: одну, равную и противоположную силѣ III , и другую, обозначенную числомъ IV , которой величина и направленіе опредѣлены прямой, соединяющей d съ O . Точно такимъ образомъ прикладываемъ къ точкѣ D , въ которой сила IV встрѣчаетъ P_4 , двѣ силы, уравнивающія силу P_4 , изъ которыхъ одна равна и противоположна IV , а другая $V=eO$.

Продолженія силъ V и I встрѣчаются въ точкѣ E . Если къ этой точкѣ приложимъ три силы: силу R и силы $-I$ и $-V$, равныя и противоположныя силамъ I и V , приложеннымъ къ точкамъ A и D , то по-мощію треугольника aOe узнаемъ, что точка E , при дѣйствіи на нее этихъ трехъ силъ, находится въ равновѣсїи.

Каждая изъ точекъ A, B, C, D, E находится теперь въ равновѣсїи подѣ дѣйствіемъ трехъ силъ. Но изъ этихъ силъ — равныя и противоположныя силы I и $-I$, дѣйствующія въ A и E ,

II и—II, дѣйствующія въ A и B , и т. д. взаимно уничтожаются, изъ чего слѣдуетъ, что сила R , проходящая черезъ точку E и имѣющая направленье En , уравниваетъ силы P_1, P_2, P_3, P_4 .

Можно себѣ представить, что многоугольникъ $ABCDE$ образованъ веревкой, на которую въ точкахъ A, B, C, D и E дѣйствуютъ силы P_1, P_2, P_3, P_4 и R . Этотъ многоугольникъ называютъ поэтому часто *веревочнымъ многоугольникомъ*. Но такое названіе его не совсѣмъ правильно, потому что если бы силы P_1, P_2, P_3, P_4 сдѣлались противоположными, то въ сторонахъ AB, BC, CD, DE и EA дѣйствовали бы сжатія, и тогда они не могли бы быть замѣнены веревкой.

Прямые $Oa, Ob, Oc...$ въ многоугольникѣ силъ называются *веревочными лучами*, а точка O —*полюсомъ*. Разстояніе полюса отъ какой-нибудь изъ силъ, образующихъ очертаніе многоугольника силъ, называется *полоснымъ разстояніемъ*.

Изъ предыдущаго получается для опредѣленія положенія равнодѣйствующей слѣдующее правило:

На данныхъ силахъ строимъ многоугольникъ силъ, котораго замыкающая сторона даетъ величину и направленье равнодѣйствующей. Беремъ произвольный полюсъ O , проводимъ веревочные лучи I, II, III... и строимъ веревочный многоугольникъ $ABCD...$ такимъ образомъ, чтобы каждая двѣ стороны встрѣчались на той силѣ P , которая въ многоугольникѣ силъ съ лучами, имѣя параллельными, образуетъ треугольникъ. Равнодѣйствующая R проходитъ черезъ точку, въ которой пересѣкаются первая и послѣдняя сторона полученнаго такимъ образомъ веревочнаго многоугольника.

Первую и послѣднюю сторону веревочнаго многоугольника будемъ называть *крайними сторонами для данной группы силъ*. Такъ, напр., стороны III и V суть крайнія стороны для группы силъ P_3 и P_4 .

§ 63.

Параллельныя силы.

а) *Сложеніе параллельныхъ силъ*.—Когда силы P_1, P_2, P_3, P_4 (черт. 46_а и 46_б) параллельны, то построенный на нихъ по предыдущимъ правиламъ многоугольникъ силъ будетъ прямая ae . Равнодѣйствующая этихъ силъ—по величинѣ и направленію— $=ae$, а чтобы получить ея положеніе беремъ произвольный полюсъ O , проводимъ лучи $Oa, Ob, Oc...$ и помощію ихъ строимъ веревочный многоугольникъ E_1ABCDE_2 . Если продолжимъ крайнія стороны E_1A и E_2D до пересѣченія въ E , то черезъ E проходитъ равнодѣйствующая R .

б) *Определение центра тяжести произвольной плоской фигуры.*—Если данную фигуру разделим на части $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \dots$ и представимъ себѣ, что въ центрѣ тяжести каждой части дѣйствуетъ вѣсъ, пропорціональный ея площади, то центръ тяжести фигуры будетъ находиться на равнодѣйствующей этихъ вѣсовъ, рассматриваемыхъ какъ параллельныя силы.

Поэтому данную фигуру (черт. 47) дѣлимъ на такія части, чтобы площадь $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \dots$ и центръ тяжести $z_1, z_2, z_3 \dots$ каждой части легко было опредѣлить. При дѣленіи параллельными линиями получаются треугольники, трапеціи и параллелограммы *). Принимаемъ, что вѣсъ дѣйствуетъ по какому нибудь направленію mn . Отложивъ на mn силы, пропорціональныя площадямъ $\Omega_1, \Omega_2 \dots$, беремъ произвольный полюсъ O , строимъ помощію его веревочную линію и получаемъ въ пересѣченіи крайнихъ сторонъ точку E равнодѣйствующей EE_1 , которая параллельна mn . Затѣмъ повторяемъ тоже дѣйствіе при предположеніи, что направленіе тѣхъ же вѣсовъ, дѣйствующихъ въ тѣхъ же точкахъ $z_1, z_2 \dots$, параллельно какой нибудь другой прямой pq , и получаемъ FF_1 какъ линію равнодѣйствующей. Центръ тяжести фигуры находится на линіи EE_1 и на линіи FF_1 , т. е. въ точкѣ пересѣченія z этихъ обѣихъ линій.

Такъ какъ при построеніи многоугольника силъ (черт. 47_b) вѣсы частей, на которыя разбита данная фигура, представляются длинами, пропорціональными этимъ площадямъ, то, превративъ фигуры этихъ частей въ треугольники съ однимъ общимъ основаніемъ, можно площади $\Omega_1, \Omega_2 \dots$ замѣнить соотвѣтственными высотами этихъ треугольниковъ **).

*) *Центръ тяжести треугольника* (черт. 48). Одну изъ сторонъ, напр. ac , дѣлимъ въ d пополамъ, соединяемъ точку дѣленія съ противоположной вершиной b и дѣлимъ db на 3 равныя части. Первая точка дѣленія, считая отъ d , есть искомый центръ тяжести z .

Центръ тяжести трапеціи (черт. 49). Параллельныя стороны ab и cd дѣлимъ въ α и β пополамъ и соединяемъ α съ β прямой $\alpha\beta$. Продолжаемъ ab и cd въ противоположныя стороны; на продолженіи ab откладываемъ $bc_1 = dc$, а на продолженіи cd — $ca_1 = ba$, и соединяемъ c_1 съ a_1 . Точка z , въ которой a_1b_1 пересѣкаетъ $\alpha\beta$, есть центръ тяжести трапеціи.

Центръ тяжести параллелограмма находится въ пересѣченіи его діагоналей.

**) *Превратить треугольникъ abc* (черт. 50) *въ другой съ основаніемъ cm .* Соединяемъ m съ b , и черезъ a проводимъ прямую aM , параллельную mb до пересѣченія со стороною bc (или съ ея продолженіемъ) въ M . Треугольникъ mMc будетъ искомымъ.

Превратить четырехугольникъ $abcd$ въ треугольникъ съ основаніемъ cm (черт. 51). Сначала превращаемъ четырехугольникъ въ треугольникъ. Для этого соединяемъ a съ d , проводимъ черезъ b прямую ba_1 , параллельно da до пересѣченія съ ca въ a_1 и соединяемъ a_1 съ d . Затѣмъ превращаемъ треугольникъ a_1dc въ другой съ основаніемъ cm .

§ 64.

Условія равновѣсія силъ въ плоскости, не пересѣкающихся въ одной точкѣ.—Когда силы P_1, P_2, P_3, P_4 , дѣйствующія на различныя точки въ плоскости, составляютъ замкнутый многоугольникъ силъ, то ихъ равнодѣйствующая равна нулю. Если для этихъ силъ построимъ веревочный многоугольникъ, то онъ вообще не будетъ замкнутъ, и крайнія стороны его I и I' (черт. 52) встрѣтятся въ безконечности. Предполагая, что силы $P_1, P_2, \dots$ дѣйствуютъ на веревку $E_1 ABCDE_2$ видимъ, что натяженія въ частяхъ II, III и IV взаимно уничтожаются, и что для равновѣсія нужно къ A и D приложить силы, равныя и противоположныя дѣйствующимъ на эти точки натяженіямъ I и I' . Матеріальная система, на которую дѣйствуютъ силы P_1, P_2, P_3, P_4 не будетъ поэтому находиться въ равновѣсіи не смотря на то, что ихъ равнодѣйствующая равна нулю, потому что точка приложенія равнодѣйствующей (точка пересѣченія крайнихъ сторонъ AE_1 и DE_2) находится въ безконечности. Такія силы приводятся къ парѣ силъ, которыхъ разстояніе h другъ отъ друга называется *плечомъ*, а произведеніе $I \times h$ изъ силы на плечо—*моментомъ пары силъ*.

Если передвинемъ силу P_4 параллельно самой себѣ настолько, чтобы она проходила черезъ точку H , въ которой пересѣкаются стороны I и I' веревочнаго многоугольника, то веревочный многоугольникъ замыкается. Обѣ силы I и I' уничтожаются и силы P_1, P_2, P_3, P_4 находятся между собою въ равновѣсіи. Вслѣдствіе перемѣщенія силы P_4 въ H моментъ Ih сдѣлался $= 0$.

Изъ этого слѣдуетъ, что *силы, дѣйствующія на различныя точки въ плоскости, находятся тогда въ равновѣсіи, когда онѣ даютъ замкнутый многоугольникъ силъ и замкнутый веревочный многоугольникъ.*

§ 65.

Разложеніе силъ.

а) *Разложить силу R на двѣ слагающія, параллельныя прямымъ l и m (черт. 53).* Строимъ треугольникъ abc , котораго одна сторона $= R$, а двѣ другія—параллельны прямымъ l и m . Искомыя слагающія вполне опредѣлены прямыми ab и bc , направленія ихъ дѣйствія даны стрѣлками, поставленными на сторонахъ такимъ образомъ, чтобы онѣ образовали треугольникъ прерваннаго движенія.

Если-бы требовалось найти двѣ силы, параллельныя двумъ даннымъ прямымъ, уравновѣшивающія силу R , то было бы нужно построить треугольникъ непрерывнаго движенія (черт. 53_а).

Задача дѣлается неопредѣленною и допускаетъ безконечно большое число рѣшеній, когда число слагающихъ, на которыя должна быть разложена данная сила, болѣе двухъ.

б) Данную силу P разложить на двѣ, ей параллельныя слагающія A и B , проходящія черезъ точки a и b (черт. 54). Для рѣшенія этой задачи нужно построить многоугольникъ силъ и веревочный многоугольникъ.

Искомыя силы будутъ дѣйствовать вдоль прямыхъ aa_1 и bb_1 , проведенныхъ черезъ a и b параллельно P . Чтобы получить ихъ величины, проводимъ прямую mn параллельно P и откладываемъ на ней $mn=P$. Беремъ произвольный полюсъ O , проводимъ лучи I и II, пересѣкающіе aa_1 и bb_1 въ a и b , и соединяемъ a съ b . Черезъ O проводимъ $Oz \parallel ab$ до пересѣченія съ mn въ z , то $mz=A$ и $nz=B$.

На чертежѣ 54 рѣшена таже задача для случая, когда обѣ слагающія находятся по одну сторону данной равнодѣйствующей P . Какъ изъ чертежа видно, слагающія A и B дѣйствуютъ по противоположнымъ направленіямъ.

в) Даны направленія двухъ параллельныхъ силъ A и B ; опредѣлить напряженія этихъ силъ такимъ образомъ, чтобы онѣ уравновѣшивали данныя силы P_1, P_2, P_3, P_4 . — На данныхъ силахъ P_1, P_2, P_3, P_4 , строимъ многоугольникъ силъ (черт. 55_а). Беремъ произвольный полюсъ O , и строимъ веревочный многоугольникъ, котораго крайнія стороны I и V пересѣкаютъ направленія силъ A и B въ точкахъ a и b . Равнодѣйствующая R данныхъ силъ, которая равна $m4$, проходитъ черезъ точку c , въ которой встрѣчаются крайнія стороны I и V веревочнаго многоугольника.

Силу R разлагаемъ на двѣ по направленіямъ прямыхъ A и B . Для этого, по указаніямъ предыдущей задачи, соединяемъ a съ b , а черезъ O проводимъ Oz параллельно ab до пересѣченія съ многоугольникомъ силъ $m1234$ въ z . Прямая Oz дѣлитъ равнодѣйствующую $m4$ на двѣ части, такъ что получаемъ замкнутый многоугольникъ $m1234zm$, котораго углы при m и 4 равны нулю, а каждый изъ остальныхъ $=180^\circ$. Сила mz составляетъ треугольникъ съ лучами I и r , а такъ какъ параллельные имъ веревочные лучи встрѣчаются на линіи A , то слѣдуетъ, что

$$A = mz \text{ и } B = z4.$$

2) Дана сила R и положеніе трехъ другихъ силъ x, y и z , не пересѣкающихся въ одной точкѣ; опредѣлить величины послѣднихъ такимъ образомъ, чтобы онѣ уравновѣшивали силу R .

Когда 4 силы находятся въ равновѣсіи, то сила, уравновѣшивающая двѣ изъ нихъ, равна и противоположна силѣ, уравно-

вѣшивающей двѣ остальные. Если поэтому продолжимъ R и z до пересѣченія въ b , а x и y — до пересѣченія въ a , то эта уравновѣшивающая сила проходитъ какъ черезъ точку a , такъ и черезъ точку b , т. е. она будетъ находиться на прямой ab .

Чтобы получить ея величину нужно на силѣ R и на прямыхъ ba и z построить треугольникъ bcd непрерывнаго движенія. Затѣмъ отеладываемъ на продолженіи ba

$$\overline{af} = \overline{db}$$

въ сторону противоположную направленію силы db , и строимъ на af и на прямыхъ y и x треугольникъ непрерывнаго движенія afg . Величины искомымъ силъ будутъ:

$$z = \overline{ed}, \quad x = \overline{ga}, \quad y = \overline{fg}.$$

§ 66.

Статическіе моменты силъ.—Статическимъ моментомъ силы P по отношенію къ точкѣ вращенія t (черт. 56) называютъ произведеніе этой силы на ея разстояніе p отъ этой точки. Если поэтому статическій моментъ означимъ черезъ P , то

$$M = P.p.$$

Перпендикуляръ p называютъ *плечомъ* силы P . Если себѣ представимъ, что это плечо — твердый рычагъ, вращающійся около оси t , то сила P стремится повернуть этотъ рычагъ около t . Мы будемъ считать моментъ положительнымъ, когда сила стремится вращать плечо слѣва вправо (по направленію часовой стрѣлки) и отрицательнымъ — при прямопротивоположномъ направленіи вращенія.

а) *Найти моментъ силъ P_1, P_2, P_3, P_4 по отношенію къ точкѣ t .* Такъ какъ моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ моментовъ слагающихъ, то задача будетъ рѣшена, если найдемъ моментъ равнодѣйствующей данныхъ силъ по отношенію къ точкѣ t .

Поэтому опредѣляемъ равнодѣйствующую данныхъ силъ, для чего строимъ многоугольникъ силъ $m1234$ (черт. 57) и затѣмъ помощію произвольнаго полюса O —веревочный многоугольникъ. Искомая равнодѣйствующая R равна и параллельна $m4$, и проходитъ черезъ точку s , въ которой пересѣкаются продолженія крайнихъ сторонъ I и V веревочнаго многоугольника.

Проведемъ черезъ t прямую FJ , параллельную R , до пересѣченія съ крайними сторонами веревочнаго многоугольника въ F и J , и опустимъ изъ O перпендикуляръ H на $m4$. Изъ подобія треугольниковъ FEJ и $mO4$ получаемъ:

$$\frac{\overline{FJ}}{m4} = \frac{r}{H},$$

откуда, такъ какъ $m4 = R$,

$$\overline{FJ} = \frac{Rr}{H},$$

или, означивъ моментъ Rr черезъ M , а отрѣзокъ FJ черезъ y

$$y = \frac{M}{H},$$

откуда

$$M = H.y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (181)$$

Послѣднее уравненіе даетъ слѣдующее правило: *если черезъ центръ вращенія проведемъ прямую, параллельную равнодѣйствующей данныхъ силъ, то отрѣзокъ y этой прямой, отсѣченный крайними сторонами веревочнаго многоугольника, умноженный на полюсное разстояніе H , равенъ статическому моменту этихъ силъ.*

Принимая $H=1$, получимъ

$$M = y.$$

Въ произведеніи Rr нужно R выразить въ единицахъ силы (напр. въ килограммахъ), а r —въ единицахъ длины (напр. въ метрахъ). При опредѣленіи произведенія Hu можно H измѣрять по масштабу силъ, а y —по масштабу длинъ, или наоборотъ.

Чтобы получить моментъ силъ P_2 и P_3 по отношенію къ точкѣ t , нужно по предыдущему правилу провести равнодѣйствующую 13 этихъ силъ (черт. 57), опустить изъ O на 13 перпендикуляръ H_1 , провести черезъ t прямую $\overline{fi} \parallel 13$, и опредѣлить ея пересѣченія f и i съ крайними сторонами II и IV веревочнаго многоугольника, построеннаго на силахъ P_2 и P_3 . Искомый моментъ

$$M_1 = \overline{fi} \times H_1.$$

б) *Найти моментъ параллельныхъ силъ A , P_1 и P_2 по отношенію къ точкѣ t (черт. 58).*—На данныхъ силахъ строимъ многоугольникъ силъ $ma12$, откладывая силы A , P_1 и P_2 по правилу непрерывнаго движенія.

Беремъ произвольный полюсъ O , проводимъ лучи I, II, III, z , и строимъ веревочный многоугольникъ $Ea\alpha\beta E_1$. Если черезъ t проведемъ прямую, параллельную даннымъ силамъ, и означимъ ея точки пересѣченія съ крайними веревочными сторонами Ea

и βE_1 через F и J , а полюсное разстояніе—через H , то

$$M = \overline{FJ} \times H.$$

Этотъ моментъ положительный, потому что равнодѣйствующая силъ A , P_1 и P_2 проходитъ черезъ точку пересѣченія крайнихъ веревочныхъ сторонъ, которая получается слѣва t , а такъ какъ

$$A > P_1 + P_2,$$

то равнодѣйствующая направлена вверхъ, она вращаетъ поэтому около t вправо.

в) Даны параллельныя силы $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$; определить по отношенію къ какой бы то ни было точкѣ на плоскости моментъ силъ, находящихся слѣва точки вращенія (черт. 59).— На черт. 59_a построенъ многоугольникъ силъ, который въ этомъ случаѣ имѣетъ видъ прямой $тб$. Въ $б$ возставленъ къ $тб$ перпендикуляръ; на этомъ перпендикулярѣ взять полюсъ O и построенъ веревочный многоугольникъ (чертежъ 59). Если продолжимъ крайнюю сторону этого многоугольника, то отрѣзокъ всякой прямой параллельной $тб$, заключенный между веревочнымъ многоугольникомъ и этой продолженной стороной, умноженный на полюсное разстояніе H , будетъ равенъ требуемому моменту.

Такъ произведеніе $\overline{ab} \times H$ —моменту силъ P_4, P_5 и P_6 , взятому по отношенію къ какой нибудь точкѣ на ab , потому что отрѣзокъ ab заключенъ между сторонами IV и VII, которыя для веревочнаго многоугольника, построеннаго на силахъ P_4, P_5, P_6 , суть крайними сторонами.

г) Даны вертикальныя силы P_1, P_2, P_3, P_4 . Найти силы A и B , уравновѣшивающія данныя, и определить для какой нибудь точки, взятой между A и B , моментъ силъ, находящихся по одну сторону точки моментовъ (черт. 60). — Силы A и B опредѣлены посредствомъ построенія, указаннаго въ § 65_b.

Если въ полученномъ такимъ образомъ веревочномъ многоугольникѣ проведемъ произвольную вертикаль vv_1 и означимъ ея точки пересѣченія съ веревочными сторонами черезъ α и β , то произведеніе $\overline{\alpha\beta} \times H$ —статическому моменту лѣвыхъ силъ A, P_1, P_2 , взятому по отношенію къ какой нибудь точкѣ на v_1v_2 , потому что точки α и β находятся на крайнихъ сторонахъ z и III веревочнаго многоугольника, построеннаго на силахъ A, P_1, P_2 . Но $\overline{\alpha\beta} \times H$ равняется также моменту правыхъ силъ B, P_4 и P_3 , взятому по отношенію къ той же точкѣ, потому что z и c можно разсматривать какъ крайнія стороны веревочнаго многоугольника, построеннаго на силахъ B, P_4 и P_3 .

§ 67.

Непрерывная нагрузка. Единичный грузъ.—Когда поверхность тѣла покрыта сплошной нагрузкой такимъ образомъ, что на очень малую часть ея $\Delta\Omega$, ограниченную замкнутой линіей, дѣйствуетъ нагрузка P , то частное

$$\frac{P}{\Delta\Omega}$$

называютъ средней нагрузкой на единицу поверхности элемента $\Delta\Omega$. При бесконечно маломъ $\Delta\Omega$ эта часть поверхности превращается въ точку $d\Omega$, и тогда

$$p = \frac{P}{d\Omega}$$

выражаетъ нагрузку этой точки, отнесенную къ единицѣ площади. Величина p не означаетъ поэтому силу, но *отношеніе силы къ площади*.

Если нагрузка распределѣна непрерывно вдоль линіи l , и элементу dl этой линіи соотвѣтствуетъ грузъ P , то частное $p = \frac{P}{dl}$ будетъ средняя нагрузка этого элемента на единицу длины, или *единичная нагрузка* точки, соотвѣтствующей элементу dl . Единичная нагрузка не означаетъ поэтому силу, но отношеніе силы къ длинѣ.

Положимъ, что линія l —прямая, и что нагрузка p во всякой точкѣ перпендикулярна къ этой линіи. Примемъ l за ось абсциссъ и на перпендикулярахъ, возставленныхъ къ ней въ различныхъ точкахъ, отложимъ ординаты $aa_1, bb_1, \dots$ равныя единичнымъ грузамъ p этихъ точекъ. Полученная такимъ образомъ линія tb_1t_1 (черт. 61) называется *линіей нагрузки*.

На всякій элементъ ds этой линіи дѣйствуетъ грузъ $p \cdot ds$ и изъ фигуры видно, что

$$p \cdot ds = \overline{mn} \times \overline{mn_1}$$

равняется площади полосы mn_1m_1 , соотвѣтствующей элементу mn . Изъ этого слѣдуетъ, что площадь abb_1a_1 , соотвѣтствующая отрѣзку ab линіи mn , равна нагрузкѣ этого отрѣзка; эту площадь называютъ поэтому *площадью нагрузки*.

Если прямая MN нагружена равномерно, то линія tb_1t_1 превращается въ прямую, параллельную MN , и площадь нагрузки имѣетъ видъ прямоугольника.

Когда нагрузка перемѣнна, то въ нѣкоторыхъ точкахъ она

можетъ быть положительной, а въ другихъ отрицательной; тогда отрицательные единичные грузы p нужно откладывать отъ оси MN въ сторону, противоположную p . Вертикальную нагрузку будемъ считать положительной, если она направлена внизъ, и отрицательной—если направлена вверхъ.

§ 68.

Веревочный многоугольникъ непрерывной нагрузки.—Площадь нагрузки дѣлимъ прямыми $m_1, n_2, p_3 \dots$ (черт. 62) на части $оm_1, 1mn_2, 2np_3 \dots$ и замѣняемъ каждую часть равнодѣйствующей $P_1, P_2, P_3 \dots$ равной ея площади, которой точка приложенія находится въ центрѣ тяжести соотвѣтственной площади. Такъ, на примѣръ, сила P_3 = площади четырехугольника $2np_3$, и дѣйствуетъ въ центрѣ тяжести z этого четырехугольника.

Строимъ веревочный многоугольникъ для нагрузки, составленной изъ силъ $P_1, P_2, P_3 \dots$. Точки $\alpha, \mu, r \dots$ этой линіи, находящіяся на продолженіи дѣлящихъ прямыхъ $ao, m_1, n_2 \dots$ лежатъ на искомой веревочной линіи, потому что если возьмемъ ординаты этой линіи по отношенію къ сторонѣ Ea (т. е. принявъ Ea за ось абсциссъ), то по § 66 эти ординаты, умноженные на полюсное разстояніе H , равны моментамъ силъ, находящихся слѣва соотвѣтственныхъ ординатъ. Поэтому, на примѣръ, произведеніе $\pi\pi_1 H$ равно моменту силъ P_1, P_2, P_3 , взятому по отношенію къ точкѣ 3, а такъ какъ моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ моментовъ слагающихъ, то слѣдуетъ, что моментъ нагрузки $оарq_4o$ по отношенію къ точкѣ 3 равенъ тоже $\pi\pi_1 H$.

Такъ какъ непрерывную нагрузку можно себѣ представить состоящей изъ сосредоточенныхъ грузовъ, находящихся на безконечно близкихъ другъ отъ друга разстояніяхъ, а вершины веревочнаго многоугольника лежатъ на линіяхъ дѣйствія его грузовъ, то слѣдуетъ, что вершины веревочнаго многоугольника для непрерывной нагрузки находятся на безконечно близкихъ другъ отъ друга разстояніяхъ, т. е. многоугольникъ имѣетъ видъ кривой линіи.

Изъ предыдущаго заключаемъ: стороны веревочнаго многоугольника, построеннаго на равнодѣйствующихъ $P_1, P_2, P_3 \dots$ (черт. 62),—касательны къ дѣйствительной веревочной линіи и точки касанія находятся на продолженіи дѣлящихъ прямыхъ $oa, 1m, 2n \dots$.

§ 69.

Веревочная линія равномерной непрерывной нагрузки.—Раздѣлимъ площадь $AabB$ нагрузки (черт. 63) прямой mn пополамъ и замѣнимъ площади $Aamn$ и mbB соотвѣтственными

силами P_1 и P_2 , дѣйствующими въ центрахъ тяжести z_1 и z_2 этихъ площадей. Очевидно, что направленія этихъ силъ P_1 и P_2 раздѣлятъ An и nB пополамъ.

Построимъ для P_1 и P_2 веревочный многоугольникъ A_1stB_1 ; его стороны A_1s , st и tB_1 , по полученному въ предыдущемъ § правилу, суть касательныя къ искомой веревочной кривой, и ихъ точки касанія находятся на продолженіи вертикалей Aa , mn и Bb въ A_1 , k и B_1 . Такъ какъ mn проходитъ черезъ середину разстоянія z_1z_2 , то k дѣлитъ отрезокъ st пополамъ и изъ построенія слѣдуетъ, что

$$As=sc \text{ и } ct=tB.$$

На чертежѣ 64 нагрузка $AabB$ раздѣлена вертикалями mn и pq на три равныя части, для которыхъ построень веревочный многоугольникъ $A_1\pi 2_1B_1$. Легко узнать, что продолженія сторонъ 1π и $\pi 2_1$ дѣлятъ A_1c и cB_1 на 3 равныя части и что точки 2 и 1_1 находятся, точно также какъ и точки касанія k_1 и k_2 искомой веревочной кривой, на продолженіи дѣлящихъ вертикалей mn и pq .

Если поэтому раздѣлимъ A_1c и cB_1 на n равныхъ частей и обозначимъ точки дѣленія на A_1c отъ A_1 къ c , и на cB_1 —отъ c къ B_1 , цифрами 1, 2, 3.... то соединивъ одноименныя точки дѣленія прямыми линиями, получимъ веревочный многоугольникъ, соотвѣтствующій раздѣленію площади нагрузки на n равныхъ частей.

На черт. 65 $n=6$. Вершины $\omega_1, \omega_2...$ веревочнаго многоугольника находятся на вертикаляхъ точекъ дѣленій 1, 3, 5, 1... а точки касанія $k_0, k_1, k_2...$ на вертикаляхъ остальныхъ точекъ дѣленія прямыхъ A_1c и cB_1 .

§ 70.

Алгебраическое значеніе веревочнаго многоугольника.— Для лучшаго ознакомленія со свойствами веревочнаго многоугольника укажемъ его алгебраическое значеніе.

Положимъ, что требуется найти графически слѣдующую алгебраическую сумму:

$$x = \frac{a_1 b_1}{c_1} + \frac{a_2 b_2}{c_2} + \frac{a_3 b_3}{c_3} - \frac{a_4 b_4}{c_4}.$$

Мы предполагаемъ, что въ этомъ уравненіи знакъ $+$ или $-$ зависитъ только отъ величинъ b , что поэтому величины a и c всегда положительны.

На произвольной горизонтали OX (черт. 66) наносимъ въ непрерывномъ порядкѣ множители $a_1, a_2...$, т. е. откладываемъ

$$\overline{oa_1}=a_1, \quad \overline{a_1a_2}=a_2, \quad \overline{a_2a_3}=a_3, \quad \overline{a_3a_4}=a_4$$

и черезъ точки o, a_1, a_2, a_3, a_4 проводимъ вертикали v, v_1, v_2, v_3, v_4 .

На произвольной вертикали MN наносимъ въ непрерывномъ порядкѣ множители $b_1, b_2, b_3, \dots$, положительные—внизъ, а отрицательные—вверхъ, т. е. откладываемъ

$$\overline{bb_1}=b_1, \quad \overline{b_1b_2}=b_2, \quad \overline{b_2b_3}=b_3, \quad \overline{b_3b_4}=-b_4.$$

На разстояніи c_1 отъ MN беремъ точку π_1 и соединяемъ ее съ b и b_1 ; на $b_1\pi_1$ беремъ точку π_2 , отстоящую отъ MN на c_2 , и соединяемъ π_2 съ b_2 ; на π_2b_2 беремъ точку π_3 , отстоящую отъ MN на разстояніи c_3 , соединяемъ π_3 съ c_3 , и наконецъ на π_3c_3 беремъ точку π_4 , отстоящую отъ MN на разстояніи c_4 , и соединяемъ π_4 съ b_4 .

Принимаемъ $b_1\pi_1, b_2\pi_2, b_3\pi_3$ и $b_4\pi_4$ за лучи многоугольника силъ и $bb_1, b_1b_2, \dots$ за соотвѣтствующія имъ силы, дѣйствующія вдоль линій $v_1, v_2, v_3, \dots$ и строимъ, по данному въ § 62 правилу, веревочный многоугольникъ I II III..., въ которомъ на вертикали v_1 пересѣкаются стороны I и II, параллельныя лучамъ 1 и 2, составляющимъ съ bb_1 треугольникъ; на v_2 пересѣкаются стороны II и III, параллельныя лучамъ 2 и 3, составляющимъ съ b_1b_2 треугольникъ, и т. д.

Продолжимъ стороны I, II, III, IV, V веревочнаго многоугольника до пересѣченія съ вертикалью v въ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ и α_5 .

Изъ построенія слѣдуетъ:

$$\Delta\alpha_1w_1\alpha_2 \sim \Delta bb_1\pi$$

$$\frac{\overline{\alpha_1\alpha_2}}{a_1} = \frac{\overline{bb_1}}{c_1}, \quad \text{или} \quad \frac{\overline{\alpha_1\alpha_2}}{a_1} = \frac{b_1}{c_1},$$

откуда

$$\overline{\alpha_1\alpha_2} = \frac{a_1b_1}{c_1}.$$

Такимъ же образомъ получаемъ

$$\overline{\alpha_2\alpha_3} = \frac{a_2b_2}{c_2}, \quad \overline{\alpha_3\alpha_4} = \frac{a_3b_3}{c_3}, \quad \overline{\alpha_4\alpha_5} = \frac{a_4b_4}{c_4},$$

поэтому

$$\overline{\alpha_1\alpha_3} = \frac{a_1b_1}{c_1} + \frac{a_2b_2}{c_2},$$

$$\overline{\alpha_1\alpha_4} = \frac{a_1b_1}{c_1} + \frac{a_2b_2}{c_2} + \frac{a_3b_3}{c_3},$$

$$\overline{\alpha_1\alpha_5} = \frac{a_1b_1}{c_1} + \frac{a_2b_2}{c_2} + \frac{a_3b_3}{c_3} + \frac{a_4b_4}{c_4}.$$

Если проведемъ какую нибудь другую вертикаль EF , пересекающую стороны I, II, III..., (или ихъ продолженія) въ $\beta_1 \beta_2, \beta_3...$ то, означивъ разстоянія вертикалей $v_1, v_2, v_3...$ отъ EF черезъ $e_1, e_2, e_3...$, получимъ такимъ же образомъ какъ прежде

$$\beta_1\beta_2 = \frac{e_1 b_1}{c_1},$$

$$\beta_1\beta_3 = \frac{e_1 b_1}{c_1} + \frac{e_2 b_2}{c_2},$$

$$\beta_1\beta_4 = \frac{e_1 b_1}{c_1} + \frac{e_2 b_2}{c_2} + \frac{e_3 b_3}{c_3},$$

$$\beta_1\beta_5 = \frac{e_1 b_1}{c_1} + \frac{e_2 b_2}{c_2} + \frac{e_3 b_3}{c_3} - \frac{e_4 b_4}{c_4}.$$

Когда $c_1=c_2=c_3=c_4=H$, то точки $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ совпадутъ въ одну точку π . Тогда будетъ (черт. 67)

$$\overline{\gamma_1\gamma_4} = \frac{1}{H} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4)$$

и для $H=1$

$$\overline{\gamma_1\gamma_5} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4.$$

Если b_1, b_2, b_3, b_4 —силы, $a, a_1, a_2...$ ихъ разстоянія отъ одной и той же точки t , то $\gamma_1\gamma_5$ —моментъ этихъ силъ по отношенію къ точкѣ t , и многоугольникъ $ww_1w_2...$ будетъ ничто другое, какъ веревочный многоугольникъ. Веревоочный многоугольникъ можно поэтому построить безъ помощи многоугольника силъ слѣдующимъ образомъ:

Проводимъ произвольную прямую EF (черт. 68) параллельную даннымъ силамъ $P_1, P_2...$, и измѣряемъ разстоянія $p_1, p_2...$, этихъ силъ отъ EF . Вычисляемъ произведенія $P_1 p_1, P_2 p_2...$ принимая во вниманіе направленіе силъ и сторону, на которой онѣ находятся по отношенію къ EF . Если силы дѣйствующія внизъ будемъ считать положительными, то силы дѣйствующія вверхъ должны получить отрицательный знакъ; если примемъ, что для силъ, находящихся справа EF , разстояніе p положительно, то его нужно считать отрицательнымъ, если сила находится слѣва EF .

Отъ произвольной точки g на EF откладываемъ

$$\overline{g1} = P_1 p_1, \quad \overline{12} = P_2 p_2, \quad \overline{23} = P_3 p_3, \quad \overline{34} = P_4 p_4.$$

Беремъ на P_1 произвольную точку w_1 и соединяемъ ее съ g и 1. Продолжаемъ $1w_1$ до пересѣченія съ P_2 въ w_2 и соединяемъ w_2 съ 2; продолжаемъ $w_2 2$ до пересѣченія съ P_3 въ w_3 и т. д.

Многоугольникъ $gw_1w_2w_3w_4\dots$ будетъ веревочный многоугольникъ данныхъ силъ $P_1, P_2\dots$ котораго полюсное разстояніе $H=1$.

Если проведемъ произвольную прямую GH параллельную EF , означимъ ея разстоянія отъ силъ $P_1, P_2\dots$ черезъ $q_1, q_2\dots$ и продолжимъ стороны $gw_1, w_1w_2\dots$ до пересѣченія съ GH въ $g', 1', 2' \dots$, то легко узнать, что

$$\overline{g'1'} = P_1q_1, \quad \overline{1'2'} = P_2q_2, \quad \overline{2'3'} = P_3q_3, \quad \overline{3'4'} = P_4q_4$$

$$\overline{g'4'} = P_1q_1 + P_2q_2 + P_3q_3 - P_4q_4.$$

Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда отъ веревочнаго многоугольника требуется большая точность, слѣдуетъ его строить безъ помощи многоугольника силъ по указанному въ этомъ параграфѣ способу.

Инфлуентныя линіи.

§ 71.

Введеніе.—Когда на сооруженіе дѣйствуетъ подвижная нагрузка, то ея дѣйствіе измѣняется вмѣстѣ съ ея положеніемъ. Поэтому опредѣленіе вліянія подвижнаго груза на величину искомой неизвѣстной (которой можетъ быть напряженіе, моментъ, срѣзывающее усиліе, перемѣщеніе и т. д.) составляетъ одну изъ важнѣйшихъ задачъ, относящихся къ расчету сооружений. Это вліяніе опредѣляется всего проще помощію *линій вліянія* или *инфлуентныхъ линій* (называемыхъ также линіями груза).

Если возьмемъ какую нибудь прямую за ось абсциссъ и будемъ откладывать отъ этой оси на прямыхъ къ ней перпендикулярныхъ дѣйствіяхъ, производимыхъ силой $=1$ въ одной и той же точкѣ t бруса во время, когда точка приложенія этой силы находится на продолженіи соотвѣтственнаго перпендикуляра, какъ ординаты, то образованная полученными точками линія называется инфлуентной линіей точки t .

Инфлуентная линія относится поэтому всегда къ опредѣленной точкѣ тѣла; когда грузъ производитъ во всѣхъ точкахъ сѣченія одинаковое дѣйствіе, то инфлуентную линію относятъ къ сѣченію, а если его дѣйствіе во всѣхъ сѣченіяхъ стержня постоянно,—то ее относятъ къ стержню.

Противоположныя дѣйствія нужно откладывать какъ ординаты въ противоположныя стороны.

Примѣры.—1) Построить инфлуентную линію напряженій сѣченія C (черт. 68) прямолинейнаго стержня AB , произведенныхъ растягивающимъ грузомъ 1.

За ось абсциссъ примемъ прямую OX , параллельную оси стержня. Если площадь сѣченія C означимъ черезъ Ω , то для всякаго положенія точки приложенія груза между A и C напряженіе въ C постоянно и равно $\frac{1}{\Omega}$, а для всякаго другаго положенія этой точки напряженіе равно нулю. Инфлуентная линія будетъ поэтому прямая np , параллельная OX , отстоящая отъ OX на разстояніи $\overline{mn} = \frac{1}{\Omega}$, которой крайнія ординаты mn и qp соотвѣтствуютъ сѣченіямъ C и A .

2) Построить инфлуентную линію удлиненій призматическаго стержня AB , произведенныхъ растягивающей силой 1 (черт. 69).

Когда сила 1 приложена (по направленію оси AB) къ точкѣ C , отстоящей отъ B на разстояніи x , то произведенное ею удлиненіе

$$y = \frac{x}{E\Omega},$$

гдѣ E —модуль упругости и Ω —площадь поперечнаго сѣченія стержня.

Это уравненіе дѣйствительно для всѣхъ точекъ приложенія груза, взятыхъ на оси стержня, и изъ него имѣемъ

$$\text{для } x=0, y=0$$

$$\text{и } x=l \quad y = \frac{l}{E\Omega}$$

Инфлуентная линія будетъ поэтому прямая, проходящая черезъ точку B , которая наклонена къ оси OX подъ угломъ, опредѣляемымъ изъ выраженія

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{qp}}{\overline{bq}} = \frac{1}{E\Omega}.$$

§ 72.

Свойства инфлуентныхъ линій.—Пусть $abcdfg$ —инфлуентная линія, относящаяся къ какому нибудь сѣченію бруса. Требуется опредѣлить дѣйствіе, производимое силами P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , во время, когда они занимаютъ на брусѣ положеніе, указанное на черт. 70.

Если означимъ черезъ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 —ординаты инфлуентной линіи, соотвѣтствующія точкамъ приложенія силъ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , то $y_1, y_2, \dots$ выражаютъ дѣйствія, производимыя силами $P_1, P_2, \dots$ въ соотвѣтственномъ сѣченіи въ случаѣ, когда каждая изъ нихъ равна 1.

Такъ какъ дѣйствія силъ пропорціональны силамъ, то сила P_1 , содержащая P_1 единицъ, произведетъ дѣйствіе $P_1 y_1$, сила P_2 —дѣйствіе $P_2 y_2$, и т. д. Если всѣ эти силы дѣйствуютъ на брусъ одновременно, то, по извѣстному закону слаганія дѣйствія силъ, онѣ произведутъ въ разсматриваемомъ сѣченіи дѣйствіе

$$N = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 - P_5 y_5 \dots \dots \dots (182)$$

Послѣдній членъ этой суммы отрицателенъ, потому что ордината y_5 , какъ изъ чертежа видно, отрицательна.

Помощію инфлуентной линіи легко поэтому опредѣлить дѣйствіе, производимое произвольной системой силъ въ данномъ сѣченіи или стержнѣ при всякомъ положеніи ея. Для этого нужно только измѣрить ординаты $y_1, y_2 \dots$ инфлуентной линіи, соотвѣтствующія точкамъ приложенія силъ $P_1, P_2 \dots$ и составить уравненіе (182).

§ 73.

Опредѣленіе опаснаго положенія системы грузовъ въ случаѣ когда инфлуентная линія имѣетъ видъ многоугольника.—Системой грузовъ называютъ болѣе или менѣе значительное число подвижныхъ грузовъ постоянной величины, связанныхъ между собою такимъ образомъ, что ихъ относительныя разстоянія измѣняться не могутъ. Такъ, напримѣръ, поѣздъ, составленный изъ вагоновъ, представляетъ подвижную систему грузовъ, состоящихъ изъ давленій колесъ.

Пусть $ABCDE$ (черт. 71)—инфлуентная линія и $P_1, P_2, P_3 \dots P_9$ —система грузовъ, занимающая въ какой нибудь моментъ положеніе, указанное на чертежѣ.

Означимъ черезъ $y_1, y_2 \dots$ ординаты инфлуентной линіи, соотвѣтствующія грузамъ $P_1, P_2 \dots$ и черезъ N —дѣйствіе, производимое системой этихъ грузовъ въ точкѣ, сѣченіи или стержнѣ, въ которомъ инфлуентная линія относится. По (182)

$$N = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 + P_5 y_5 + P_6 y_6 - P_7 y_7 - P_8 y_8 - P_9 y_9.$$

Передвинемъ систему вправо на произвольную величину Δx , относительно которой ставимъ только условіе, чтобы во время передвиженія ни одинъ грузъ не перешелъ черезъ вершину инфлуентной линіи. Грузы будутъ послѣ перемѣщенія помѣщаться между тѣми же вершинами, между которыми они находились до перемѣщенія, но ихъ ординаты $y_1, y_2 \dots$ измѣнятся на $\Delta y_1, \Delta y_2 \dots$ и производимое ими дѣйствіе послѣ перемѣщенія будетъ отличаться отъ прежняго на

$$N = \Delta_1 P \Delta y_1 + P_2 \Delta y_2 + P_3 \Delta y_3 - \Delta P_4 y_4 - P_5 \Delta y_5 - P_6 \Delta y_6 - P_7 \Delta y_7 + \\ + P_8 \Delta y_8 + P_9 \Delta y_9.$$

Если углы, образуемые сторонами OA , AB , BC , CD и DE съ OX означимъ черезъ α , β , γ , δ , ε ,

то

$$\Delta y_1 = \Delta x \operatorname{tg} \alpha, \Delta y_2 = \Delta y_3 = \Delta x \operatorname{tg} \beta, \Delta y_4 = \Delta y_5 = \Delta y_6 = \Delta x \operatorname{tg} \gamma \text{ и т. д.}$$

Поэтому

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + (P_2 + P_3) \operatorname{tg} \beta - (P_4 + P_5 + P_6) \operatorname{tg} \gamma - P_7 \operatorname{tg} \delta + (P_8 + P_9) \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Это выраженіе легко построить. На прямой $O_1 X_1$ (черт. 71_а), параллельной OX , откладываемъ отъ O вправо

$$\overline{O_1 1} = P_1, \overline{1 2} = P_2, \overline{2 3} = P_3 \dots$$

Черезъ точки 1, 2, 3... проводимъ перпендикуляры къ $O_1 X_1$ и строимъ, начиная отъ O_1 , многоугольникъ $01'3'6'8'9'$ такимъ образомъ, чтобы его вершины находились на этихъ перпендикулярахъ, а стороны, находящіяся надъ силами P_m , P_n ... были параллельны тѣмъ сторонамъ инфлуентной линіи, которыя пересекаются силами P_m , P_n ... Этотъ многоугольникъ называютъ *вспомогательнымъ многоугольникомъ*.

Поэтому проводимъ

$$\overline{O_1 1'} \parallel OA, \overline{1' 3'} \parallel AB, \overline{3' 6'} \parallel BC, \overline{6' 8'} \parallel CD, \overline{8' 9'} \parallel DE.$$

Изъ этого построения видно, что

$$\overline{1 1'} = P_1 \operatorname{tg} \alpha$$

$$\overline{3 3'} = \overline{3 a} + \overline{a 3'} = \overline{P_1} \operatorname{tg} \alpha + (P_2 + P_3) \operatorname{tg} \beta$$

$$\overline{6 6'} = \overline{6 c} - \overline{6' c} = P_1 \operatorname{tg} \alpha + (P_2 + P_3) \operatorname{tg} \beta - (P_4 + P_5 + P_6) \operatorname{tg} \gamma$$

$$\overline{9 9'} = P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + (P_2 + P_3) \operatorname{tg} \beta - (P_4 + P_5 + P_6) \operatorname{tg} \gamma + (P_7 + P_8) \operatorname{tg} \delta - P_9 \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Слѣдовательно

$$\Delta N = \overline{9 9'} \times \Delta x$$

Такъ какъ точка $9'$ получилась на сторонѣ положительныхъ ординатъ, то измѣненіе ΔN , которое равно $\Delta x \cdot \overline{9 9'}$ — положительное, т. е. при движеніи системы грузовъ вправо производимое ею дѣйствіе увеличивается. Когда грузы находятся между тѣмъ же вершинами A, B, C ... инфлуентной линіи, между которыми они находились въ началѣ, то при продолженіи движенія вправо величина $\overline{9 9'}$ остается неизмѣнной, но Δx увеличивается, вслѣд-

ствіе чего и ΔN увеличивается. ΔN достигнетъ наибольшаго значенія, когда одинъ изъ грузовъ встрѣтитъ вершину инфлуентной линіи.

Въ данномъ случаѣ, при движеніи вправо, переходитъ черезъ вершину прежде всѣхъ грузовъ P_6 . Когда этотъ грузъ перейдетъ вершину и будетъ находиться очень близко справа C , то вспомогательный многоугольникъ получить видъ $O_1 1' 3' 5_2 8_2 9_2$, и измѣненіе при передвиженіи на Δx вправо теперь будетъ

$$\Delta N = x \cdot \overline{99_2},$$

которое тоже положительно.

При дальнѣйшемъ продолженіи движенія системы вправо встрѣчаетъ грузъ P_1 вершину A . Когда этотъ грузъ будетъ находиться очень близко справа A , то помощію новаго вспомогательнаго многоугольника $O_1 3_3 5_3 8_3 9_3$ получаемъ

$$\Delta N = -\Delta x \cdot \overline{99_3}.$$

Такъ какъ $\overline{99_3}$ отрицательно, то слѣдуетъ, что въ моментъ, когда грузъ P_1 переходилъ черезъ вершину A , измѣненіе ΔN было максимумъ, что поэтому система произведетъ наибольшее дѣйствіе тогда, когда она имѣетъ такое положеніе, что грузъ P_1 проходитъ черезъ вершину A инфлуентной линіи. Если ординаты инфлуентной линіи, соотвѣтствующія грузамъ $P_1, P_2, \dots$ при этомъ положеніи означимъ черезъ $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ то

$$\max N = P_1 \gamma_1 + P_2 \gamma_2 + P_3 \gamma_3 + P_4 \gamma_4 + P_5 \gamma_5 + P_6 \gamma_6 - P_7 \gamma_7 - P_8 \gamma_8 + P_9 \gamma_9.$$

При передвиженіи системы удобно пользоваться полоской бумаги, на которой отмѣчены разстоянія грузовъ другъ отъ друга.

Изъ предыдущаго видно, что N можетъ достигнуть наибольшаго значенія только тогда, когда одинъ изъ грузовъ проходитъ черезъ вершину инфлуентной линіи. Для опредѣленія опаснаго положенія системы грузовъ получаемъ слѣдующее правило.

Устанавливаемъ систему такимъ образомъ, чтобы наиболѣе тяжелымъ грузамъ соотвѣтствовали по возможности большіе ординаты инфлуентной линіи, и чтобы одинъ изъ нихъ, который означимъ черезъ G , находился вполоть слѣва одной вершины. Строимъ для этого положенія вспомогательный многоугольникъ. Затѣмъ ставимъ грузъ G вполоть справа той же вершины, и строимъ вспомогательный многоугольникъ для этого втораго положенія системы грузовъ. Если послѣднія точки этихъ вспомогательныхъ многоугольниковъ получатся по разнымъ сторонамъ оси OX , то дѣйствіе N достигаетъ максимума въ моментъ, когда система имѣетъ такое положеніе, что грузъ G проходитъ черезъ

разсматриваемую вершину. Въ противномъ случаѣ, если, напри-
мѣръ, обѣ эти точки получатся выше оси абсциссъ, то нужно
систему двигать дальше вправо до тѣхъ поръ, пока какой ни-
будь другой грузъ не встрѣтитъ одну изъ вершинъ инфлуентной
линіи (при этомъ могутъ изъ сооруженія сходить грузы, или
входить на него новые) и опредѣлить для этой вершины по-
слѣднія ординаты вспомогательныхъ многоугольниковъ при по-
ложеніи груза вполнѣ справа и вполнѣ слѣва ея, и т. д.

§ 73.

**Опредѣленіе опаснаго положенія системы грузовъ въ слу-
чаѣ, когда инфлуентная линія имѣетъ криволинейный видъ.**—
Положимъ, что инфлуентная линія имѣетъ видъ криволинейнаго
многоугольника, представленнаго на черт. 72. Если P_1, P_2, P_3, P_4 —
грузы, и y_1, y_2, y_3, y_4 —соотвѣтствующія имъ ординаты инфлу-
ентной линіи, то произведенное этими грузами дѣйствіе въ
данномъ положеніи

$$N = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4,$$

или вообще

$$N = \sum P y.$$

Представимъ себѣ, что вмѣсто данныхъ грузовъ движутся
вертикальныя прямыя $y_1, y_2, \dots$ связанныя между собою неизмѣ-
няемымъ образомъ, имѣющія на концахъ маленькія колеса $k_1, k_2, \dots$
которыя катятся по инфлуентной линіи, и что давленія этихъ
колесъ равны соотвѣтственнымъ грузамъ. Нагрузка колесами
будетъ отличаться отъ данной только тѣмъ, что точки прило-
женія грузовъ $P_1, P_2, \dots$ при всякомъ ихъ положеніи будутъ на-
ходиться не въ точкахъ 1, 2..., но вертикально подъ ними на
инфлуентной линіи.

Возьмемъ произвольную точку O на OX за начало коорди-
нать, означимъ черезъ $x_1, x_2, \dots$ разстоянія грузовъ $P_1, P_2, \dots$ отъ O ,
и черезъ $y_1, y_2, \dots$ соотвѣтствующія имъ ординаты инфлуентной
линіи, т. е. ординаты точекъ приложенія воображаемыхъ гру-
зовъ $k_1, k_2, \dots$

Если ξ, η —координаты центра тяжести g этой воображаемой
нагрузки, то

$$\xi(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4,$$

или вообще

$$\xi \sum P = \sum P x$$

и точно также

$$\eta \sum P = \sum P y,$$

Такъ какъ

$$\Sigma Py = N. \quad (183)$$

то

$$N = \eta \Sigma P.$$

Поэтому

$$\xi = \frac{\Sigma Px}{P} \quad (184)$$

$$\eta = \frac{\Sigma Py}{P} \quad (185)$$

Уравненія (184) и (185) опредѣляютъ вполне траекторію центра тяжести Z .

Уравненіе (184) опредѣляетъ положеніе вертикали центра тяжести Z ; эта вертикаль неизмѣнимо связана съ системой грузовъ, и для всякаго положенія послѣдней получается весьма просто посредствомъ веревочнаго многоугольника. Абсцисса ξ , слѣдовательно, для всякаго положенія нагрузки извѣстна, а ордината η зависитъ отъ формы инфлуентной линіи.

Изъ уравненія

$$\Sigma Py = \eta \Sigma P,$$

въ которомъ ΣP —величина постоянная, слѣдуетъ, что N достигаетъ наибольшаго значенія вмѣстѣ съ η , что поэтому, *система грузовъ производитъ наибольшее дѣйствіе тогда, когда центр тяжести воображаемой системы имѣетъ наивысшее или наинизшее положеніе.*

Когда система двинется на бесконечно малую величину, и ни одинъ грузъ не перейдетъ при томъ черезъ вершину инфлуентной линіи, то всѣ y измѣнятся на бесконечно малыя величины, а слѣдовательно и η измѣнится на бесконечно малую величину, т. е. центръ тяжести z будетъ описывать непрерывную кривую. Но какъ только одинъ изъ грузовъ перейдетъ какую-нибудь вершину, то непрерывность нарушается внезапно. Ломаной криволинейной инфлуентной линіи соотвѣтствуетъ поэтому тоже ломаная криволинейная траекторія центра тяжести z , и ея вершины соотвѣтствуютъ тѣмъ положеніямъ системы, при которыхъ одинъ изъ грузовъ переходитъ черезъ вершину инфлуентной линіи. Этотъ центръ занимаетъ, слѣдовательно, наивысшее или наинизшее положеніе тогда, когда одинъ изъ грузовъ проходитъ черезъ вершину инфлуентной линіи, а такъ какъ этимъ положеніямъ центра z соотвѣтствуетъ наибольшее дѣйствіе нагрузки, то можно сказать:

Положеніе системы грузовъ можетъ быть опаснымъ только тогда, когда направленіе одного изъ грузовъ системы проходитъ черезъ вершину инфлуентной линіи.

Въ многихъ случаяхъ то положеніе системы грузовъ, при которомъ центръ тяжести z занимаетъ наивысшее или наинизшее положеніе можетъ приблизительно быть опредѣлено на глазъ. Такъ если C (черт. 72)—наивысшая точка инфлуентной линіи и положимъ, что система грузовъ движется слѣва вправо, то когда всѣ грузы находятся слѣва C , центръ тяжести z воображаемой нагрузки будетъ постоянно подниматься, а когда справа C —постоянно понижаться, и легко узнать, что наивысшее положеніе этотъ центръ будетъ занимать тогда, когда одни грузы будутъ находиться слѣва, а другіе справа вершины C .

Построеніе для точнаго опредѣленія опаснаго положенія получается слѣдующимъ образомъ:

Пусть $ABCDE$ —(черт. 73)—инфлуентная линія, P_1, P_2, P_3, P_4 —грузы, k_1, k_2, k_3, k_4 —точки, въ которыхъ вертикали точекъ приложенія этихъ грузовъ встрѣчаютъ инфлуентную линію. Дѣйствіе, производимое этой системой грузовъ въ принятомъ на чертежѣ положеніи будетъ по (182)

$$N = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4.$$

Когда система передвинется на очень малую величину dx вправо, то N измѣнится на dN , при чемъ

$$dN = P_1 dy_1 + P_2 dy_2 + P_3 dy_3 + P_4 dy_4$$

$$dN = \left(P_1 \frac{dy_1}{dx} + P_2 \frac{dy_2}{dx} + P_3 \frac{dy_3}{dx} + P_4 \frac{dy_4}{dx} \right) dx.$$

Если углы, образуемые касательными въ точкахъ k_1, k_2, k_3, k_4 , означимъ черезъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, то

$$\frac{dN}{dx} = (P_1 tg\alpha_1 + P_2 tg\alpha_2 + P_3 tg\alpha_3 + P_4 tg\alpha_4).$$

Для построенія этого выраженія откладываемъ на горизонтали OX (черт. 74) грузы P_1, P_2, P_3, P_4 , и черезъ полученныя точки 1, 2, 3, 4 проводимъ вертикальныя линіи. Строимъ, начиная отъ O , вспомогательный многоугольникъ такимъ образомъ, чтобы его вершины находились на этихъ вертикаляхъ, а стороны были параллельны касательнымъ тѣхъ точекъ инфлуентной линіи, въ которыхъ она пересѣкается грузами, находящимися противъ этихъ сторонъ.

Для этого проводимъ: черезъ O — $\overline{O1}$, параллельно касательной

точки k_1 до пересѣченія съ вертикалью точки 1 въ 1_1 , черезъ $1_1 - 1_2$, параллельно касательной точки k_2 до пересѣченія съ вертикалью точки 2 въ 2_1 ; черезъ $2_1 - 2_1 3_1$ параллельно касательной точки k_3 , и черезъ $3_1 - 3_1 4_1$ параллельно касательной точки k_4 . Изъ этого построенія легко узнать, что отрѣзокъ на послѣдней вертикали

$$\overline{44_1} = P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + P_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + P_3 \operatorname{tg} \alpha_3 + P_4 \operatorname{tg} \alpha_4$$

$$\text{т. е. } \overline{44_1} = \frac{dN}{dx}.$$

Для построенія опаснаго положенія данной системы грузовъ получаемъ изъ предыдущаго слѣдующее правило.

Чтобы получить наибольшее положительное напряженіе, устанавливаемъ нагрузку такимъ образомъ, чтобы центръ тяжести воображаемыхъ грузовъ $k_1, k_2, k_3 \dots$ находился по возможности высоко, т. е., чтобы одинъ тяжелый грузъ, который означимъ черезъ P_m , проходилъ черезъ наивысшую вершину D , и чтобы другіе тяжелые грузы были расположены по обѣимъ сторонамъ ординаты DD' по возможности близко къ ней.

Ставимъ P_m очень близко слѣва DD' , и строимъ для этого положенія нагрузки вспомогательный многоугольникъ $O1_1 2_1 3_1 4_1$ (черт. 74); получаемъ на послѣдней вертикали отрѣзокъ $\overline{44_1}$. Такъ какъ этотъ отрѣзокъ положительный, то приращеніе

$$dN = dx \overline{44_1}$$

положительно, т. е. при движеніи системы вправо дѣйствіе N увеличивается, поэтому нагрузка должна быть двинута вправо. Двинемъ ее настолько, чтобы грузъ P_m находился очень близко справа DD' и построимъ для этого новаго положенія вспомогательный многоугольникъ. Отрѣзокъ $\overline{44_2}$ получился теперь отрицательный, изъ чего слѣдуетъ, что въ моментъ, когда грузъ P_m переходилъ черезъ вершину D , приращеніе достигло максимума, что поэтому нагрузка произведетъ наибольшее дѣйствіе тогда, когда грузъ P_m находится на вертикали DD' .

Если бы и при этомъ второмъ положеніи нагрузки получилось положительное приращеніе, то это значило бы, что система должна перемѣщаться дальше вправо; тогда мы двинули бы ее на столько вправо, чтобы слѣдующій грузъ P_{m-1} находился вполнѣ слѣва DD' и повторили бы для этого груза дѣйствіе, уясненное для груза P_m .

При опредѣленіи опаснаго положенія для отрицательнаго дѣйствія было бы нужно замѣнить вершину D вершиной B , т. е.

установить систему грузовъ такимъ образомъ, чтобы одинъ изъ тяжелыхъ грузовъ находился вплоть слѣва B , а прочіе тяжелые грузы — по возможности близко справа и слѣва B , и посредствомъ вспомогательнаго многоугольника опредѣлить, точно такимъ образомъ какъ въ предыдущемъ случаѣ, такое положеніе нагрузки, при которомъ приращеніе ΔN достигаетъ максимума.

§ 74.

Опредѣленіе дѣйствія, производимаго непрерывной нагрузкой.—Когда нагрузка непрерывна, то можно себѣ представить, что на каждый элементъ dx бруса, покрытый нагрузкой, дѣйствуетъ сила pdx . Если y — соотвѣтствующая этому элементу ордината инфлуентной линіи (черт. 75), то производимое грузомъ pdx дѣйствіе

$$dN = y \cdot pdx.$$

Когда длина нагрузки — d , то, на основаніи закона слаганія дѣйствія силъ, дѣйствіе, производимое всей нагрузкой, будетъ

$$N = \int_0^d pydx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (186)$$

и въ случаѣ равномерной нагрузки

$$N = p \int_0^d ydx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

Интегралъ справа знака уравненія выражаетъ площадь инфлуентной линіи, заключенную между ординатами y_0 и y_n , соотвѣтствующими концамъ p и q непрерывной нагрузки. Уравненіе (187) даетъ поэтому слѣдующее правило.

Дѣйствіе, производимое непрерывной нагрузкой, равняется площади инфлуентной линіи, заключенной между ординатами, соотвѣтствующими конечнымъ точкамъ нагрузки, умноженной на единичный грузъ p .

§ 75.

Опредѣленіе опаснаго положенія непрерывной нагрузки.—Опасное положеніе непрерывной нагрузки, состоящей изъ частей переменныхъ длинъ и переменныхъ взаимныхъ разстояній, опредѣляется непосредственно формой инфлуентной линіи. Очевидно, что наибольшее положительное дѣйствіе будетъ имѣть мѣсто

Тогда, когда ни одна из слагающих $p y dx$ не будет отрицательной, т. е. когда при положительных единичных грузах p все y положительны; для наибольшего отрицательного действия все y должны быть отрицательны.

Такъ если инфлуентная линия имѣетъ видъ $\alpha\beta\gamma\gamma\delta\sigma\tau\xi$ (черт. 75а), то для положительнаго максимумъ должны быть нагружены части $\beta\gamma$ и $\delta\tau$ (черт. 75б), а для отрицательнаго — части $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$. Тогда, на основаніи правила, полученнаго въ предыдущемъ §, будемъ:

наибольшее положительное дѣйствіе

$$\max N = p (\text{площадь } \beta\gamma + \text{площадь } \delta\tau),$$

наибольшее отрицательное дѣйствіе

$$\max(-N) = p [\text{площадь } \alpha\beta + \text{плоч. } \gamma\delta + \text{плоч. } \tau\xi\zeta].$$

Глава VI.

Упругость при сгибаніи.

§ 76.

Введение. — Въ этой главѣ мы будемъ разсматривать сопротивленія брусевъ при слѣдующихъ предположеніяхъ:

- 1) ось бруса прямолинейна,
- 2) дѣйствующія на брусъ внѣшнія силы имѣютъ произвольное направленіе, слѣдовательно вообще непараллельны оси бруса,
- 3) внѣшнія силы пересѣкаютъ ось бруса, т. е. скручивающій моментъ $M_x = 0$,
- 4) брусъ имѣетъ неизмѣняемое положеніе въ пространствѣ, и допускаетъ только такое перемѣщеніе его точекъ, которое обусловлено упругостью матеріала (измѣненіемъ длины его волоконъ).

Если точки a и b бруса $cdfg$ (черт. 76) неподвижны, то вслѣдствіе дѣйствія внѣшнихъ силъ P_1, P_2, P_3 , точки приложенія m, n, p этихъ силъ перемѣстятся въ m_1, n_1, p_1 , и брусъ займетъ новое положеніе $c_1g_1h_1d_1$, при которомъ дѣйствіе внѣшнихъ силъ уравнивается внутренними силами матеріала. Прямолинейная ось ufl бруса получитъ криволинейный или изогнутый видъ $u_1f_1l_1$, т. е. брусъ изогнется, и въ его волокнахъ будутъ дѣйствовать сопротивленія изгибу.

Брусъ, на который дѣйствуютъ сгибающія силы, называется *балкой*. Линія, образуемая осью балки послѣ изгиба, называется *упругой линіей*; поверхность, составленная касательными къ упругой линіи — *поверхностью изгиба*; перпендикуляръ къ этой поверхности, возстановленный въ произвольной точкѣ упругой линіи — *осью изгиба*, а поверхность, образуемая осями изгиба — *упругой поверхностью*. Упругая линія есть слѣдовательно пересѣченіе упругой поверхности съ поверхностью изгиба.

въ точкѣ пересѣченія продолженій прямыхъ $\alpha_1\delta_1$ и $\beta_1\gamma_1$. Радиусъ $\varepsilon z = \varphi z$ этой дуги означимъ черезъ ρ .

Если r_1s_1 —волокно, находящееся на разстояніи v отъ упругой линіи $\varepsilon\varphi$, и означимъ черезъ e_0 —относительное измѣненіе длины элемента $\varepsilon\varphi$, а черезъ e —элемента r_1s_1 , то, принимая во вниманіе, что передъ деформаціей всѣ волокна имѣли одинаковую длину, будетъ

$$\overline{\varepsilon_1\varphi_1} = dx (1 + e_0), \quad \overline{r_1s_1} = dx(1 + e).$$

Изъ черт. 77 получаемъ

$$\frac{\overline{r_1s_1}}{\overline{\varepsilon\varphi}} = \frac{\overline{r_1z}}{\overline{\varepsilon z}},$$

или

$$\frac{dx(1+e)}{dx(1+e_0)} = \frac{\rho + v}{\rho},$$

откуда, пренебрегая очень малой величиной ve_0 ,

$$e = e_0 + \frac{v}{\rho}. \quad (190)$$

Напряженіе волокна rs , по (4),

$$\sigma = Ee = E\left(e_0 + \frac{v}{\rho}\right). \quad (191)$$

Для различныхъ волоконъ элемента $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ балки, измѣняется въ этомъ уравненіи только v , изъ чего слѣдуетъ, что во всѣхъ точкахъ сѣченія, находящихся на прямой, параллельной оси изгиба, напряженія имѣютъ одинаковую величину. Геометрическое мѣсто точекъ сѣченія, которыхъ напряженія=0, есть поэтому прямая, параллельная оси изгиба. Эта прямая называется *нейтральной осью* сѣченія.

Помощію уравненія (191) можно опредѣлять напряженія точекъ, находящихся на разстояніи v отъ оси изгиба, для чего нужно знать:

- 1) ось изгиба, или форму упругой линіи,
- 2) радиусъ кривизны этой линіи,
- 3) относительныя удлиненія e_0 оси изгиба.

Займемся опредѣленіемъ этихъ величинъ.

Пусть a и b (черт. 76) опорныя точки балки. Замѣнимъ дѣйствіе опоръ соотвѣстственными стержнями aa_1 , aa_2 , bb_1 ... и вырѣжемъ изъ балки сѣченіемъ $s\alpha_1\delta_1t$ часть $a\alpha_1\delta_1$. Чтобы эта часть и послѣ разрѣза находилась въ томъ же состояніи, въ какомъ она была до разрѣза, нужно къ сѣченіямъ $\alpha_1\delta_1$, r , t ... приложить силы, которыя производили бы точно такое дѣйствіе, ка-

кое до разрыва производили на них внутреннія силы их отсѣченныхъ частей.

Такъ какъ отсѣченная часть находится въ равновѣсіи, то эти внутреннія силы вмѣстѣ съ дѣйствующей на нее нагрузкой должны удовлетворять условіямъ равновѣсія. Возьмемъ 3 прямоугольныя оси координатъ такимъ образомъ, чтобы начало координатъ находилось въ центрѣ тяжести O сѣченія $\alpha_1\delta_1$ (черт. 78) и чтобы ось OX совпала съ касательной къ упругой линіи въ O , а ось OY —имѣла направленіе оси изгиба; ось OZ будетъ тогда находиться въ плоскости сѣченія.

Разложимъ силы, дѣйствующія на часть $\alpha_1\delta_1$ по направленіямъ осей координатъ и означимъ суммы слагающихъ внѣшнихъ силъ P_1, P_2 и сопротивленій опорныхъ стержней aa_1, a_1a_2 , параллельныхъ осямъ OX, OY, OZ , черезъ X, Y, Z , а моменты этихъ силъ, взятые по отношенію къ тѣмъ же осямъ, черезъ M_x, M_y, M_z .

Силы будемъ считать положительными, если онѣ дѣйствуютъ по направленію положительныхъ осей координатъ, т. е. по направленію оси OX —вправо, оси OZ —вверхъ, и оси OY —отъ плоскости XOZ къ читателю.

Направленіе вращенія будемъ считать положительнымъ, когда оно совпадаетъ съ направленіемъ часовой стрѣлки циферблата, установленнаго перпендикулярно къ оси вращенія, и обращеннаго къ ея положительному концу.

Означимъ частичную силу, дѣйствующую на безконечно малый элементъ $d\Omega$ (черт. 79) сѣченія $\alpha_1\delta_1$ —черезъ $q d\Omega$, а ея слагающія по направленіямъ осей ox, oy, oz —черезъ $\sigma d\Omega, \tau_y d\Omega$ и $\tau_z d\Omega$, то σ —нормальное, а τ_y и τ_z —скалывающія напряженія этого элемента.

Мы будемъ разсматривать только тотъ случай изгиба, когда напряжения ν и τ_y (черт. 7) въ сравненіи съ σ такъ малы, что ими можно пренебречь, и когда при томъ искривленіе упругой линіи столь незначительно, что ее можно принимать за прямую линію. На практикѣ приходится обыкновенно имѣть дѣло со случаями, удовлетворяющими этимъ обоимъ условіямъ. Эти предположенія допустимы тѣмъ болѣе, что формулы, такимъ путемъ выведенныя, даютъ результаты, согласные съ опытами.

Положительное напряженіе σ вращаетъ около оси oy въ положительную, а около оси oz —въ отрицательную сторону, и условія равновѣсія дадутъ, принимая во вниманіе, что внѣшнія силы пересекаютъ упругую линію, слѣдующія уравненія;

$$\begin{aligned} Y=0, \quad Z=0, \quad M_x=0, \\ \int \sigma d\Omega = X. \end{aligned} \quad (192)$$

$$\int \sigma d\Omega z = M_y \dots \dots \dots (193)$$

$$-\int \sigma d\Omega y = M_x \dots \dots \dots (194)$$

Означимъ координаты точки $d\Omega$ черезъ y и z ; пусть BoB_1 (черт. 79)—ось изгиба, β — уголъ, образуемый ею съ осью oy и v —длина перпендикуляра, опущеннаго изъ $d\Omega$ на OB . Изъ черт. 79 имѣемъ

$$v = z \cos \beta - y \sin \beta.$$

Уравненіе (191) можно поэтому написать такъ:

$$\sigma = E \left(e_0 + \frac{z \cos \beta - y \sin \beta}{\rho} \right) d\Omega \dots \dots \dots (195)$$

Подставимъ это значеніе въ (192), получимъ

$$\int E \left(e_0 + \frac{z \cos \beta - y \sin \beta}{\rho} \right) d\Omega = X,$$

$$E e_0 \int d\Omega + E \frac{\cos \beta}{\rho} \int z d\Omega - E \frac{\sin \beta}{\rho} \int y d\Omega = X.$$

Такъ какъ начало координатъ принято въ центрѣ тяжести сѣченія, то

$$\int z d\Omega = 0, \quad \int y d\Omega = 0,$$

слѣдовательно

$$E e_0 \int d\Omega = X,$$

или

$$E e_0 \Omega = X \dots \dots \dots (196)$$

откуда

$$e_0 = \frac{X}{E\Omega} \dots \dots \dots (197)$$

Помощію этого значенія уравненіе (195) получить видъ

$$\sigma = E \left(\frac{X}{E\Omega} + \frac{z \cos \beta - y \sin \beta}{\rho} \right) \dots \dots \dots (198)$$

Подставимъ въ (193) и (194) для σ его значеніе (198)

$$M_y = E \left[\frac{X}{\Omega} \int z d\Omega + \frac{1}{\rho} \left(\cos \beta \int z^2 d\Omega - \sin \beta \int y z d\Omega \right) \right]$$

$$M = -E \left[\frac{X}{\Omega} \int y d\Omega + \frac{1}{\rho} \left(\cos \beta \int y z d\Omega - \sin \beta \int y^2 d\Omega \right) \right] \quad (199)$$

Въ этихъ уравненіяхъ $\int d\Omega z^2$ и $\int d\Omega y^2$ суть моменты инерціи стѣненія $\alpha\delta$ по отношенію къ осямъ ou и oz , проходящихъ черезъ ея центръ тяжести; если эти моменты означимъ черезъ J_y и J_z , а $\int yz d\Omega$ — черезъ S , то такъ какъ

$$\int z d\Omega = \int y d\Omega = 0,$$

уравненія (199) получаютъ видъ:

$$M_y = E \left(\frac{J_y \cos \beta - S \sin \beta}{\rho} \right)$$

$$M_z = E \left(\frac{J_z \sin \beta - S \cos \beta}{\rho} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (200)$$

Опредѣливъ изъ этихъ уравненій ρ и уголь β , и подставивъ ихъ значенія въ (198), получимъ напряженіе σ въ точкѣ $d\Omega$.

Уравненія (198) и (200) содержатъ тригонометрическія величины, вслѣдствіе чего они не совсѣмъ удобны для практики, но ихъ можно упростить посредствомъ соответственнаго выбора положенія осей OU и OZ . Чтобы найти такое положеніе для произвольной плоской фигуры (черт. 80), отнесемъ ее къ прямоугольнымъ осямъ ou и oz , проведеннымъ произвольно на плоскости фигуры.

Проведемъ черезъ o произвольную прямую mn , означимъ уголь, образуемый ее съ осью ou черезъ α , а моментъ инерціи фигуры по отношенію къ mn — черезъ J . Отложимъ отъ o на om отръзокъ

$$\overline{oi} = \frac{1}{\sqrt{J}}.$$

Исполнимъ тоже дѣйствіе для другихъ прямыхъ, проведенныхъ черезъ o , и опредѣлимъ геометрическое мѣсто точекъ i . Если координаты точекъ, взятыхъ на плоскости фигуры, означимъ черезъ y и z , ихъ разстоянія отъ mn — черезъ v , а моменты инерціи фигуры по отношенію къ осямъ ou и oz — черезъ J_y и J_z , то

$$v = z \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$J = \int v^2 d\Omega = \int (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 d\Omega = J_y \cos^2 \alpha + J_z \sin^2 \alpha - 2S \sin \alpha \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (201)$$

Означимъ координаты точки i черезъ y_1 и z_1 , то

$$y_1 = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{J}}, \quad z_1 = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{J}},$$

поэтому

$$J = J_y z_1^2 J + J_z y_1^2 J - 2S y_1 z_1 J,$$

или

$$J_y z_1^2 + J_z y_1^2 - 2S y_1 z_1 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (202)$$

Для различных точек i величины J_y , J_z и S постоянны, уравнение (201) есть, следовательно, уравнение эллипсиса по отношению къ прямоугольнымъ осямъ, проходящимъ черезъ его центръ. Если эти оси повернемъ на столько, чтобы онѣ совпали съ главными осями эллипсиса, то его уравнение будетъ (такъ какъ S для главныхъ осей $= 0$)

$$J_a z_1^2 + J_b y_1^2 = 1,$$

гдѣ J_a и J_b — моменты инерціи по отношенію къ главнымъ осямъ a и b .

Такъ какъ одна изъ главныхъ осей — наибольшій, а другая — наименьшій радіусъ векторъ эллипсиса (а каждый радіусъ векторъ разсматриваемаго эллипсиса $= \frac{1}{\sqrt{J}}$), то слѣдуетъ, что одинъ изъ моментовъ инерціи J_a и J_b будетъ наименьшій, а другой — наибольшій изъ всѣхъ возможныхъ моментовъ инерціи J_y и J_z .

Черезъ всякую точку, взятую на плоскости фигуры, можно поэтому всегда провести двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя такого свойства, что моментъ инерціи фигуры по отношенію къ одной изъ нихъ будетъ бѣльшій, а по отношенію къ другой — меньшій, чѣмъ по отношенію къ всякой другой прямой, проведенной черезъ ту же точку. Положеніе этихъ прямыхъ опредѣляется уравненіемъ

$$S = \int y_1 z_1 d\Omega = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (203)$$

и ихъ называютъ *главными осями инерціи*, или, короче, *главными осями* фигуры для точки o , а соответствующіе имъ моменты инерціи — *главными моментами инерціи*.

Когда фигура имѣетъ двѣ перпендикулярныя оси симметріи, то эти оси имѣютъ свойство главныхъ, такъ какъ для нихъ условіе (202) всегда исполнено. Въ кругѣ всѣ діаметры суть главные оси.

Если черезъ J означимъ моментъ инерціи по отношенію къ произвольной оси, составляющей съ осью ou уголъ α , то по (201)

$$J = J_a \cos^2 \alpha + J_b \sin^2 \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (204)$$

§ 78.

Продолженіе.—Въ частномъ случаѣ, когда главные оси имѣютъ начало въ центрѣ тяжести фигуры, по (200) будетъ:

$$M_a = E \frac{J_a \cos \beta}{\rho} \quad M_b = E \frac{J_b \sin \beta}{\rho} \quad (205)$$

Если поэтому оси ou и oz (черт. 79), проходящія черезъ центрѣ тяжести o сѣченія, совпадаютъ съ главными осями, то

$$M_y = E \frac{J_y \cos \beta}{\rho} \quad M_z = E \frac{J_z \sin \beta}{\rho} \quad (206)$$

гдѣ β —уголъ, образуемый осью изгиба съ главной осью ou .

Изъ (206) имѣемъ

$$\cos \beta = \frac{\rho M_y}{E J_y}, \quad \sin \beta = \frac{\rho M_z}{E J_z}.$$

Вставивъ эти значенія въ (198) получимъ для напряженія σ выраженіе:

$$\sigma = E \left[-\frac{X}{E \Omega} + \frac{M_y z}{E J_y} - \frac{M_z y}{E J_z} \right].$$

или

$$\sigma = \frac{X}{\Omega} + \frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z} \quad (207)$$

Въ этомъ уравненіи величины Ω , J_y и J_z абсолютны, а относительно знаковъ величинъ y , z , M_y и M_z дѣйствительны условія, поставленныя въ предыдущемъ параграфѣ.

§ 79.

Частный случай изгиба. Нейтральная ось.—Къ предположеніямъ, сдѣланнымъ въ § 77, прибавимъ еще слѣдующія:

1) Форма балки симметрична по отношенію къ плоскости XZ , Въ этомъ случаѣ одна изъ главныхъ осей всякаго сѣченія балки, а слѣдовательно и упругая линія, находится въ этой плоскости, которая есть уже вмѣстѣ плоскостью изгиба. Упругая поверхность, имѣющая теперь цилиндрическій видъ, перпендикулярна къ плоскости XZ , слѣдовательно $\beta=0$.

2) Всѣ, на балку дѣйствующія, силы находятся въ той же плоскости XZ , т. е. $M_z=0$.

Если нормальную силу X и моментъ M_y для этого частнаго,

но на практикѣ всего чаще встрѣчающагося случая, означимъ черезъ N и M , то изъ уравненій (206) и (207) получимъ

$$M = \frac{EJ}{\rho} \quad (208)$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{Mv}{J} \quad (209)$$

Послѣднее уравненіе даетъ нормальное напряженіе σ въ точкѣ балки, отстоящей отъ оси центра тяжести сѣченія на разстояніи v , если площадь этого сѣченія Ω , его нормальная сила N , сгибающій моментъ— M и моментъ инерціи по отношенію къ оси центра тяжести, перпендикулярной къ плоскости изгиба— J .

Для различныхъ точекъ одного и того же сѣченія величины N , Ω , M и J постоянны, уравненіе (209) можно поэтому представить въ видѣ

$$\sigma = a + bv \quad (210)$$

гдѣ a и b —постоянные коэффициенты.

Изъ (210) слѣдуетъ, что напряженія σ данного сѣченія изображаются прямой линіей, пересекающей ось координатъ въ точкѣ, которой разстояніе отъ оси центра тяжести

$$v_1 = -\frac{b}{a}.$$

Эта линія представлена на чертежѣ 81, на которомъ σ отложены отъ прямой zz_1 , параллельной главной оси AB сѣченія, по направленію, перпендикулярному къ zz_1 . Изъ чертежа видно, что крайнимъ волокнамъ A и B , которыхъ разстоянія v означены черезъ e_1 и e_2 , соответствуютъ наибольшія напряженія $\sigma_1 = an_1$ и $\sigma_2 = be_2$ и что во всѣхъ точкахъ прямой ns не дѣйствуетъ никакое напряженіе.

По (209) имѣемъ

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{\Omega} + \frac{Me_1}{J} \\ \sigma_2 &= \frac{N}{\Omega} - \frac{Me_2}{J} \end{aligned} \quad (211)$$

Такъ какъ наибольшее напряженіе, производимое внѣшними силами, не должно быть болѣе допускаемаго напряженія k , то слѣдуетъ, что когда

$$\sigma_1 > \sigma_2$$

должно

$$\sigma_1 \leq k,$$

а если $\sigma_2 > \sigma_1$, то должно $\sigma_2 \leq k$.

или

$$\eta = \frac{\Sigma \omega y}{\Omega} \quad (218)$$

гдѣ Ω —площадь всей фигуры.

Центръ тяжести фигуръ, имѣющихъ двѣ оси симметріи, находится въ точкѣ пересѣченія этихъ осей.

§ 81.

Опредѣленіе моментовъ инерціи.—Часто оказывается удобнымъ опредѣлить моментъ инерціи J_1 по отношенію къ какой-нибудь оси, параллельной оси изгиба. Моментъ инерціи J по отношенію къ оси изгиба получается тогда слѣдующимъ образомъ:

Если z —центръ тяжести фигуры MN (черт. 83), ss_1 —ось изгиба, AB —произвольная прямая, параллельная этой оси, отстоящая отъ нея на разстояніи η , и означимъ черезъ

Ω —площадь фигуры MN ,

$d\Omega$ —площадь безконечно узкой полосы ея, параллельной ss_1 , отстоящей отъ ss_1 на разстояніи y ,

J —моментъ инерціи фигуры по отношенію къ оси ss_1 , проходящей черезъ ея центръ тяжести,

J_1 —моментъ инерціи по отношенію къ оси AB ,

то

$$J_1 = \int d\Omega (\eta + y)^2 = \eta^2 \int d\Omega + 2\eta \int y d\Omega + \int y^2 d\Omega.$$

Но

$$\int d\Omega = \Omega, \quad \int y d\Omega = 0, \quad \int y^2 d\Omega = J,$$

слѣдовательно

$$J_1 = \Omega \eta^2 + J \quad (219)$$

откуда

$$J = J_1 - \Omega \eta^2 \quad (220)$$

т. е. моментъ инерціи по отношенію къ оси изгиба, проходящей черезъ центръ тяжести, равняется моменту инерціи по отношенію къ произвольной, ей параллельной оси, уменьшенному на произведение изъ площади фигуры на квадратъ разстоянія обѣихъ осей.

Если фигуру разобьемъ на произвольныя части и опредѣлимъ моменты инерціи каждой части по отношенію къ какой-нибудь оси, то моментъ инерціи всей фигуры равенъ суммѣ моментовъ инерціи отдѣльныхъ частей.

§ 82.

Моменты инерціи простѣйшихъ фигуръ.—а) *Сѣченія, симметричныя по отношенію къ оси изгиба.*

1) *Прямоугольникъ.*—Если b —основаніе и h —высота прямоугольника (черт. 85), то

$$J = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} b dy \cdot y^2 = \frac{bh^3}{12} \quad . \quad . \quad . \quad (221)$$

Моментъ инерціи по отношенію къ оси ab , проходящей черезъ основаніе прямоугольника, по (219)

$$J_1 = J + \Omega \eta^2 = \frac{1}{12} bh^3 + bh \left(\frac{h}{2} \right)^2, \\ J_1 = \frac{1}{3} bh^3 \quad . \quad . \quad . \quad (222)$$

2) *Крестообразное сѣченіе.*—(Черт. 86).—Это сѣченіе можно разбить на 3 прямоугольника: $abgf$, $cdkh$ и $ikml$, поэтому его моментъ инерціи по отношенію къ оси центра тяжести ox будетъ:

$$J = \frac{1}{12} (b - \delta) \delta_1^3 + \frac{1}{12} \delta h^3, \quad \eta = \frac{1}{2} h \quad . \quad . \quad (223)$$

3) *Дзутавровое, и прямоугольное, внутри пустое сѣченіе* (черт. 87 и 87а).

$$J = \frac{1}{12} bh^3 - \frac{1}{12} (b - \delta)(h - 2\delta_1)^3 \quad . \quad . \quad (224)$$

4) *Двойное прямоугольное сѣченіе* (черт. 88)

$$J = \frac{1}{12} \left[bh^3 - b(h - 2\delta_1)^3 \right] \quad . \quad . \quad . \quad (225)$$

б) *Сѣченія, несимметричныя по отношенію къ оси изгиба.*

Треугольникъ.—(Черт. 89). Моментъ инерціи по отношенію къ основанію ab

$$J_1 = \int_0^h x dy \cdot y^2.$$

Такъ какъ

$$x = \frac{b}{h} (h - y),$$

то

$$J_1 = \frac{b}{h} \left[\int_0^h hy^2 dy - \int_0^h y^3 dy \right] = \frac{b}{h} \frac{h^4}{12} =$$

$$J_1 = \frac{1}{12} bh^3, \quad \eta = \frac{1}{3}. \quad (226)$$

Моментъ инерціи по отношенію къ оси центра тяжести

$$J = J_1 - \Omega \eta^2 = \frac{1}{12} bh^3 - \frac{bh}{2} \left(\frac{h}{3} \right)^2,$$

$$J = \frac{1}{36} bh^3. \quad (227)$$

и по отношенію къ оси fd , проведенной черезъ вершину c параллельно ab

$$J_2 = J + \Omega \eta_1^2 = \frac{1}{36} bh^3 + \frac{bh}{2} \left(\frac{2}{3} h \right)^2.$$

$$J_2 = \frac{1}{4} bh^3. \quad (228)$$

в) *Правильныя фигуры.*

1) *Правильный многоугольникъ* (черт. 90). Пусть $abcde$ часть

правильнаго многоугольника, и означимъ черезъ

s — длину его сторонъ,

r — радіусъ вписаннаго и

r_1 — радіусъ описаннаго круга.

Черезъ центръ o этого многоугольника проведемъ двѣ прямоугольныя оси ox и oy ; раздѣлимъ сторону bc въ точкѣ q пополамъ, опустимъ изъ точекъ b , q и c на ox — перпендикуляры bb_1 , qq_1 , cc_1 , и на oy — перпендикуляры bb_2 , qq_2 и cc_2 .

Означимъ уголъ, образуемый прямо qo съ ox черезъ α , а проеціи стороны bc на ox и oy — черезъ s_1 и s_2 . Проведемъ радіусъ векторы bo и co , и продолжимъ bc до пересѣченія съ ox въ m . Если моментъ инерціи треугольника obc по отношенію къ оси ox означимъ черезъ i , то

$$i = \frac{1}{12} \overline{om} (\overline{bb_1^3} - \overline{cc_1^3}).$$

Изъ чертежа 90 имѣемъ:

$$\overline{om} = \frac{r}{\cos \alpha}, \quad \overline{bb_1} = r \sin \alpha + \frac{s}{2} \cos \alpha, \quad \overline{cc_1} = r \sin \alpha - \frac{s}{2} \cos \alpha.$$

Слѣдовательно

$$i = \frac{1}{12} \frac{r}{\cos \alpha} \left[(r \sin \alpha + \frac{s}{2} \cos \alpha)^3 - (r \sin \alpha - \frac{s}{2} \cos \alpha)^3 \right],$$

откуда, послѣ соответственнаго сокращенія, получаемъ

$$i = \frac{r}{12 \cos \alpha} \left[6r^2 \frac{s}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{s^3}{4} \cos^3 \alpha \right]$$

или

$$i = \frac{1}{12} \left[3r^2 \cdot r \sin \alpha \cdot s \sin \alpha + \frac{s^2}{4} r \cos \alpha \cdot s \cos \alpha \right].$$

Если координаты точки q означимъ черезъ x и y , то

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha.$$

Кромѣ того

$$s_1 = s \sin \alpha, \quad s_2 = s \cos \alpha,$$

поэтому

$$i = \frac{1}{12} \left(3r^2 y s_1 + \frac{s^2}{4} x s_2 \right).$$

Когда многоугольникъ имѣетъ n сторонъ, то помощію радіусовъ, проведенныхъ ко всѣмъ его вершинамъ, онъ раздѣлится на n равныхъ треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину o . Слѣдовательно моментъ инерціи всего многоугольника по отношенію къ оси ox будетъ

$$J = \frac{1}{12} \left[3r^2 \Sigma (s_1 y) + \frac{s^2}{4} \Sigma (s_2 x) \right],$$

но изъ фигуры видно что $\Sigma (s_1 y) = \Sigma (s_2 x) =$ площади многоугольника. Если эту площадь означимъ черезъ Ω , то

$$J = \frac{\Omega}{12} \left(3r^2 + \frac{s^2}{4} \right) \dots \dots \dots (229)$$

$$\text{Но } r_1 = \sqrt{r^2 + \frac{s^2}{4}},$$

слѣдовательно

$$J = \frac{\Omega}{12} \left(3r_1^2 - \frac{s^2}{2} \right) \dots \dots \dots (230)$$

Уравненія 229 и 230 не содержатъ угла α , изъ чего слѣдуетъ, что моментъ инерціи правильнаго многоугольника имѣетъ для всѣхъ осей, проходящихъ черезъ его центръ, одинаковое значеніе.

2) *Сплошной кругъ*.—Окружность можно разсматривать какъ многоугольникъ съ безконечно большимъ числомъ безконечно

малыхъ сторонъ, поэтому моментъ инерціи круга по отношенію къ оси, проходящей черезъ его центръ, получится изъ уравненія (230), если въ немъ поставимъ

$$s = 0 \text{ и } r_1 = r,$$

Слѣдовательно

$$J = \frac{\Omega}{12} 3r^2 = \frac{r^2}{4} \frac{d^2\pi}{4} = \frac{r^2}{4} r^2\pi,$$

$$J = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi r^4}{4} \dots \dots \dots (231)$$

3) *Кольцеобразное сѣченіе* (черт. 91). По (231)

$$J = \frac{\pi}{4} \left[r^4 - (r - \delta)^4 \right]$$

$$J = \frac{\pi}{64} \left[d^4 - (d - 2\delta)^4 \right] \dots \dots \dots (232)$$

4) *Эллипсисъ* (черт. 92).— На большой оси AB опишемъ окружность и раздѣлимъ эллипсисъ на безконечно узкія полосы, перпендикулярныя къ AB . Если M и m —точка круга и эллипсиса, имѣющія общую абсциссу or , и означимъ ординату Mr точки M черезъ y , ординату mr эллипсиса — черезъ y_1 , а большую и малую полуось его—черезъ a и b , то

$$y_1 = \frac{b}{a} y$$

моментъ инерціи эллипсиса по отношенію къ оси AB

$$J = 4 \int_0^a y_1 dx \left(\frac{y_1}{2} \right)^2 = 4 \int_0^a \frac{b}{a} y dx \left(\frac{b}{a} y \right)^2 = 4 \frac{b^3}{a^3} \int_0^a y dx \left(\frac{y}{2} \right)^2,$$

Но $4 \int_0^a y dx \left(\frac{y}{2} \right)^2$ = моменту инерціи круга, описаннаго на оси $AB=2a$, поэтому

$$J = \frac{b^3}{a^3} \frac{\pi}{4} a^4,$$

$$J = \frac{\pi}{4} ab^3 \dots \dots \dots (233)$$

г) *Сѣченія, не симметричныя по отношенію къ оси изгиба, но симметричныя по отношенію къ оси центра тяжести, перпендикулярной къ оси изгиба.*

1) *Дзугтавровое сѣченіе* (черт. 93).—Для опредѣленія оси центра тяжести раздѣлимъ данную фигуру на 3 прямоугольника: $abcd$, $efgh$ и $kilm$.

Площадь фигуры

$$\Omega = bt + BT + \delta(h - t - T).$$

Принимая ml за ось статическихъ моментовъ, получимъ по (218)

$$\eta = \frac{bt\left(h - \frac{t}{2}\right) + \delta(h - t - T)\left(\frac{h - t - T}{2} + T\right) + BT\frac{T}{2}}{bt + BT + \delta(h - t - T)}$$

Моментъ инерціи по отношенію къ оси zt , проходящей черезъ центръ тяжести фигуры

$$J = \frac{1}{3}b(h - d)^3 - \frac{1}{3}(b - \delta)(h - d - t)^3 + \frac{1}{3}Bd^3 - \frac{1}{3}(B - \delta)(d - T)^3. \quad (234)$$

2) *Однотавровое сѣченіе* (черт. 94).—Эта форма сѣченія получается изъ предыдущей, если сдѣлаемъ

$$b = \delta \text{ и } t = 0.$$

Поэтому

$$\eta = \frac{\delta(h - T)\left(\frac{h + T}{2}\right) + BT\frac{T}{2}}{BT + \delta(h - T)}$$

$$J = \frac{1}{3}\delta(h - d)^3 + \frac{1}{3}Bd^3 - \frac{1}{3}(B - \delta)(d - T)^3. \quad (235)$$

Двойное прямоугольное сѣченіе (черт. 95). Чтобы для этого случая получить η и J нужно въ уравненіи (234) поставить $\delta = 0$

$$\eta = \frac{bt\left(h - \frac{t}{2}\right) + \frac{BT^2}{2}}{bt + BT}.$$

$$J = \frac{1}{3}\left[b(h - d)^3 - b(h - d - t)^3 + Bd^3 - B(d - T)^3\right]. \quad (236)$$

д) *Фигуры произвольнаго очертанія* (черт. 96).—Если x и y —координаты произвольной кривой acd и x_1 и x_2 —ея крайнія абсциссы, то

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx$$

можетъ быть полученъ по правилу Симпсона слѣдующимъ образомъ:

Дѣлимъ длину $\alpha\delta = x_2 - x_1$ на n равныхъ частей, и черезъ точки дѣленія проводимъ ординаты $y_1, y_2 \dots y_n$. Если n —число четное, и означимъ ординату начальной точки a черезъ y_0 , а длину $\alpha\delta$ —черезъ b , то

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{1b}{3n} \left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) \right] \quad (237)$$

Это выраженіе даетъ интегралъ съ такой точностью, съ какой часть кривой, заключенная между двумя смежными ординатами, можетъ быть принимаема за прямую.

Помощію формулы (237) можно опредѣлять площади, статическіе моменты и моменты инерціи фигуръ, имѣющихъ произвольное очертаніе.

Означимъ площадь фигуры $acdf\delta\alpha$, ограниченную кривой, осью абсциссъ и крайними ординатами, черезъ Ω , ея статическій моментъ по отношенію къ оси ou —черезъ S , и моментъ инерціи по отношенію къ той же оси—черезъ J , то

$$\Omega = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{1b}{3n} \left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) \right] \quad (238)$$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y dx \cdot x = \int_{x_1}^{x_2} (yx) dx.$$

Если положимъ

$$yx = r,$$

то

$$S = \int_{x_1}^{x_2} r dx,$$

и по (237) будетъ

$$J = \frac{b}{3n} \left[r_0 + r_n + 4(r_1 + r_3 + \dots + r_{n-1}) + 2(r_2 + r_4 + \dots + r_{n-2}) \right]. \quad (239)$$

Въ этомъ уравненіи нужно поставить

$$r_0 = y_0 x_0, \quad r_1 = y_1 x_1, \quad r_2 = y_2 x_2 \quad \text{и т. д.,}$$

гдѣ

$$x_1 = x_0 + e, \quad x_2 = x_0 + 2e, \quad x_3 = x_0 + 3e \dots$$

Изъ подобія треугольниковъ $1\pi_12$ и $1'\alpha'2'$ имѣемъ

$$\frac{\overline{1'2'}}{y_1} = \frac{\overline{12}}{H_1},$$

или, такъ какъ

$$\overline{12} = \frac{\omega_1 y_1}{H},$$

$$\text{то } \overline{1'2'} = \frac{\omega_1 y_1^2}{HH_1}.$$

Точно такимъ образомъ получимъ

$$\overline{2'3'} = \frac{\omega_2 y_2^2}{HH_1} \quad \overline{3'4'} = \frac{\omega_3 y_3^2}{HH_1}$$

поэтому

$$\overline{1'10'} = \frac{1}{H.H_1} (\omega_1 y_1^2 + \omega_2 y_2^2 + \omega_3 y_3^2 + \dots) = \frac{1}{HH_1} \Sigma \omega y^2.$$

Если площади $\omega_1, \omega_2 \dots$ бесконечно малы и равны $d\Omega$, то послѣднее уравненіе получить видъ

$$\overline{1'10'} = \frac{1}{HH_1} \int d\Omega \cdot y^2 = \frac{J_1}{HH_1} \quad (244)$$

и мѣсто веревочнаго многоугольника займетъ веревочная кривая.

Изъ (244) получаемъ, если отрѣзокъ оси OX между крайними сторонами веревочной кривой означимъ черезъ l ,

$$J_1 = H.H_1.l \quad (245)$$

т. е. моментъ инерціи фигуры по отношенію къ оси OX = отрѣзку этой оси, заключенному между крайними сторонами второй линіи моментовъ, умноженному на произведеніе HH_1 обоихъ полюсныхъ разстояній.

Такимъ же образомъ получимъ, что моментъ инерціи по отношенію къ оси центра тяжести = отрѣзку этой оси, отсѣченному крайними сторонами второй веревочной линіи, умноженному на произведеніе HH_1 полюсныхъ разстояній. Ось центра тяжести проходитъ черезъ точку E , въ которой пересѣкаются крайнія стороны первой веревочной линіи.

§ 84.

Механическое опредѣленіе площадей, статическихъ моментовъ и моментовъ инерціи плоскихъ фигуръ посредствомъ

Такъ какъ φ , $d\varphi$ и dx въ этихъ интегралахъ — величины постоянныя, то

$$d\Omega = dx \int_0^{y_1} dy + \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_0^{y_1} y dy$$

$$d\Omega = dx \cdot y_1 + \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{y_1^2}{2},$$

но $y_1 = l \sin \varphi$,

поэтому

$$d\Omega = l \sin \varphi dx + \frac{l^2}{2} d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (249)$$

Статическій моментъ элемента AA_1B_1B

$$d\sigma = \int_0^{y_1} d\omega \cdot y = dx \int_0^{y_1} y dy + \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_0^{y_1} y^2 dy = \frac{dx \cdot y_1^2}{2} + \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{y_1^3}{3}$$

$$d\sigma = \frac{l^3}{2} \sin^2 \varphi dx + \frac{l^3}{3} \sin \varphi \cdot d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (250)$$

Моментъ инерціи того же элемента AA_1B_1B

$$di = \int_0^{y_1} d\omega \cdot y^2 = dx \int_0^{y_1} y^2 dy + \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_0^{y_1} y^3 dy = \frac{dx y_1^3}{3} + \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{y_1^4}{4}$$

$$di = \frac{l^3}{3} \sin^3 \varphi dx + \frac{l^4}{4} \sin^2 \varphi d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (251)$$

Когда стержень AB движется отъ F черезъ B къ G , то онъ описываетъ площадь $\Omega_1 = \text{плоч. } (FMNGBF)$, а при продолженіи движенія отъ G черезъ L къ F — площадь $\Omega_2 = \text{плоч. } (FMNGLF)$. Такъ какъ при этомъ движеніи стержень возвращается въ первоначальное положеніе, то

$$\int d\varphi = 0, \quad \int \sin \varphi d\varphi = 0, \quad \int \sin^2 \varphi d\varphi = 0.$$

Если, поэтому, означимъ черезъ

Ω — площадь фигуры $FCGLF$, по контуру которой движется конецъ B стержня,

S_m — ея статическій моментъ по отношенію къ оси XX ,

J_1 — ея моментъ инерціи по отношенію къ той же оси, то

$$\Omega = l \int \sin \varphi dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (252)$$

$$S_m = \frac{l^2}{2} \int \sin^2 \varphi dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (253)$$

$$J_1 = \frac{l^3}{3} \int \sin^3 \varphi dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (254)$$

Изъ (252) и (248) слѣдуетъ

$$\Omega = l.s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (255)$$

т. е. площадь Ω прямо пропорціональна числу оборотовъ ролика R .

Такъ какъ

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \varphi)$$

$$\text{и } \sin^3 \varphi = \frac{1}{4} (3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi),$$

то

$$S_m = \frac{l^2}{2} \int (1 - \cos 2 \varphi) dx$$

$$J_1 = \frac{l^3}{3} \frac{1}{4} \int (3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi) dx.$$

Когда конецъ B стержня AB пройдетъ весь периметръ фигуры, то онъ возвратится въ первоначальное положеніе, и пройденный концомъ A путь $\int dx = 0$.

Вслѣдствіе того

$$S_m = - \frac{l^2}{4} \int \cos^2 \varphi dx = - \frac{l^2}{4} \int \sin(90 - 2 \varphi) dx \quad . \quad (256)$$

$$J_1 = \frac{l^3}{12} \int (3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi) dx = - \frac{l^3}{4} \Omega - \frac{l^3}{12} \int \sin 3 \varphi dx \quad . \quad (257)$$

Планиметръ Амслера имѣетъ такое устройство, что даетъ возможность опредѣлять S_m и J_1 механически. Для этого кромѣ ролика R онъ имѣетъ еще два ролика S и J , устроенные такимъ образомъ, что во время, когда R поворачивается на уголъ φ , S поворачивается на уголъ 2φ , а J — на уголъ 3φ . Устройство планиметра Амслера видно изъ чертежа 100. Онъ состоитъ изъ линейки KL , которая, посредствомъ стержней KX и LX , устанавливается параллельно оси XX_1 . Въ продольной выемкѣ этой линейки движутся маленькія колеса k_1 и k_2 телѣжки r_1, r_2 такимъ образомъ, что ось tt_1 телѣжки, при всякомъ положеніи ея, остается параллельной XX_1 .

Къ телѣжкѣ прикрѣплена ось A двойнаго сектора EF , ко-

торый около этой оси может вращаться. Эта ось образуетъ конецъ A вышеупомянутаго стержня AB , котораго другой конецъ B снабженъ штифтикомъ. Когда штифтикъ скользитъ остриемъ по периметру фигуры, то точка A перемѣщается посредствомъ тележки по прямой XX_1 .

Къ стержню AB прикрѣплена ось ролика R , служащаго для опредѣленія площади Ω , а съ зубчатыми секторами E и F находятся въ зацѣпленіи зубчатые колеса E_1 и F_1 , на которыхъ устроены оси роликовъ S и J , проходящія черезъ центры C и D этихъ колесъ. Когда AB находится на XX ($\varphi=0$), то оси роликовъ R и J — параллельны, а ось ролика S — перпендикулярна къ XX .

Такъ какъ ролики S и J должны поворачиваться на углы вдвое и втрое большіе чѣмъ роликъ R , то радіусы секторовъ E и F вдвое и втрое больше радіусовъ находящихся съ ними въ зацѣпленіи колесъ E_1 и F_1 . Всѣ 3 ролика R , S и J должны лежать ободами на бумагѣ.

Противовѣсъ W служитъ для перенесенія вѣса всей подвижной части прибора на каточки r_1 и r_2 , чтобы облегчить ея движеніе.

Если дуги, описанныя роликами R , S и J означимъ черезъ s , σ и i , то по предыдущему

$$s = \int \sin \varphi dx, \quad \sigma = \int \sin(90 - 2\varphi) dx, \quad i = \int \sin 3\varphi dx.$$

Слѣдовательно, по (252), (256) и (257)

$$\Omega = ls, \quad S_m = -\frac{l^2}{4} \sigma, \quad J_1 = \frac{l^3}{4} s - \frac{l^3}{12} i.$$

Обозначимъ радіусы роликовъ R , S и J черезъ ρ , ρ_1 и ρ_2 , а числа оборотовъ, сдѣланныхъ ими во время, когда штифтикъ B , пройдетъ периметръ фигуры,—черезъ n , n_1 и n_2 , то

$$s = 2\rho\pi n, \quad \sigma = 2\rho_1\pi n_1, \quad i = 2\rho_2\pi n_2.$$

Поэтому

$$\Omega = 2\rho\pi ln, \quad S_m = -2\rho_1\pi \frac{l^2}{4} n_1, \quad J_1 = 2\rho\pi \frac{l^3}{4} n - 2\rho_2\pi \frac{l^3}{12} n_2.$$

Дѣленіе ролика S сдѣлано противоположнымъ дѣленію ролика R , черезъ что дугу σ и число n_1 нужно ввести въ формулы съ отрицательнымъ знакомъ.

Частямъ прибора даютъ такіе размѣры, чтобы

$$2\rho l = 1, \quad \frac{\pi\rho}{2} l^3 = 1, \quad \frac{\pi\rho_1}{2} l^3 = 0.6, \quad \frac{\pi\rho_2}{6} l^3 = 0.4.$$

Обыкновенно

$$l = 2 \text{ дециметр.}$$

Тогда

$$\rho = \frac{1}{4\pi} = 0.0795 \text{ дм.} \quad \rho_1 = \rho_2 = \frac{0.3}{\pi} = 0.0956 \text{ дм.}$$

$$\Omega = n_{\text{дм}}, \quad S_m = 0.6n_1, \quad J_1 = n - 0.4n_2. \quad (258)$$

гдѣ Ω , S_m и J выражены въ дециметрахъ.

Ось XX берутъ параллельно той оси центра тяжести, по отношенію къ которой моментъ инерціи требуется опредѣлить. Когда Ω , S и J_1 опредѣленіе, то разстояніе оси центра тяжести отъ XX₁

$$\eta = \frac{S_m}{\Omega}$$

и моментъ инерціи по отношенію къ этой оси

$$J = J_1 - \Omega \eta^2.$$

Уравненія (258) даютъ Ω , S_m и J въ дециметрахъ. Если бы требовалось имѣть эти величины въ сантиметрахъ, то было бы нужно умножить ихъ на 100, 1000 и 10000.

Показанія нониусовъ на роликахъ точны до $\frac{1}{1000}$ окружности ролика, что составляетъ для площадей точность до $\frac{1}{10}$ квадратнаго сантиметра, а для моментовъ инерціи— $\frac{1}{1000}$ дециметра. Эти степени точности для практики совершенно достаточны.

Во избѣжаніе вліянія мертваго хода слѣдуетъ наблюденія производить въ обѣ стороны

а) объѣзжая фигуру нѣсколько разъ послѣдовательно въ сторону увеличенія дѣленій, и затѣмъ въ столько же разъ въ обратномъ направленіи, или,

б) поочередно объѣзжая въ томъ и другомъ направленіи, или-же,

в) слѣдуя методу повторенія читать показанія послѣ извѣстнаго числа объѣздовъ, и все-таки по обоимъ направленіямъ.

Среднія величины получаются одинаковы при всѣхъ этихъ способахъ.

Въ таблицѣ VIII приведены для наиболѣе употребляемыхъ формъ сѣченія моменты инерціи по отношенію къ оси центра тяжести, и разстоянія e этой оси отъ наиболѣе удаленныхъ верхнихъ волоконъ.

§ 85.

Работа деформации изгибаемой матеріальной системы или балки.—Когда на балку дѣйствуютъ сгибающія силы, то работа

нормальныхъ напряженіи σ_x , параллельныхъ оси балки, сравнительно съ работою всѣхъ другихъ напряженій, обыкновенно столь значительна, что въ уравненіи (18) всѣ σ и τ , за исключеніемъ σ_x , можно поставить $=0$. Если для этого случая означимъ σ_x черезъ σ , то по (18).

$$\tau = \int \frac{\sigma^2}{2E} dV.$$

Такъ какъ для одного и того же матеріала E —величина постоянная, то

$$\tau = \frac{1}{2E} \int \sigma^2 dV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (259)$$

Разобъемъ балку сѣченіями $ab, cd...$ (черт. 101) проведенными на бесконечно близкихъ разстояніяхъ dx другъ отъ друга, на бесконечно короткія призмы $abdc...$, и затѣмъ каждую такую элементарную призму—сѣченіями $mn, pq...$, параллельными оси изгиба, на бесконечно узкія матеріальныя полосы $mnpq...$. Если объемъ такой полосы означимъ черезъ dV , а площадь $mnpq$ —черезъ $d\Omega_1$, то

$$dV = dx \cdot d\Omega.$$

Подставивъ это значеніе въ (259) получимъ для работы деформации нормальныхъ напряженій σ выраженіе

$$\tau_1 = \frac{1}{2E} \int dx \int \sigma^2 d\Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (260)$$

въ которомъ $\int \sigma^2 d\Omega$ нужно распространить на все сѣченіе, а второй интегралъ—на всю длину балки.

При измѣненіи температуры изогнутой балки на t градусовъ длина элемента dx измѣняется на $\alpha t dx$, гдѣ α —коэффициентъ линейнаго расширенія матеріала. Дѣйствующая въ элементарной полосѣ упругая сила $\sigma d\Omega$ совершаетъ при этомъ работу $\sigma d\Omega \cdot \alpha t dx$, слѣдовательно при измѣненіи температуры на t градусовъ нормальныя силы исполняютъ работу.

$$\tau_2 = \alpha \int dx \int \sigma t d\Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (261)$$

Поэтому полная работа деформаций

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2E} \int dx \int \sigma^2 d\Omega + \alpha \int dx \int \sigma t d\Omega \quad . \quad . \quad (262)$$

Мы будемъ предполагать, что измѣненія температуры отдѣльныхъ волоконъ зависятъ только отъ ихъ разстояній отъ оси

Относительныя перемѣщенія и относительныя вращенія. (*Производная работы деформации*).—Въ § 50 было доказано, что уравненія 159 и 160 достаточны для опредѣленія сопротивленій всякаго сооруженія, какъ простаго, такъ и сложнаго. Когда сооруженіе имѣетъ свойства статически опредѣленной системы, то уравненія 160 излишны, и всѣ неизвѣстныя получаются изъ уравненій 159; такъ какъ эти уравненія—линейныя функціи внѣшнихъ силъ, то получаемыя изъ нихъ напряжения будутъ тоже линейныя функціи внѣшнихъ силъ; для опредѣленія неизвѣстныхъ нужно поэтому рѣшать простыя уравненія первой степени.

Когда система статически неопредѣленная, то уравненія 159 недостаточны для опредѣленія неизвѣстныхъ сопротивленій. Недостающія уравненія получаются изъ правила, выраженнаго уравненіемъ 173 (которое для частнаго случая: $\delta=0$, имѣетъ видъ 170). Это уравненіе—тоже линейная функція внѣшнихъ силъ, потому что работа деформации—функція второй степени внѣшнихъ и добавочныхъ силъ, а слѣдовательно производная этой работы, взятая по отношенію къ одной изъ внѣшнихъ или добавочныхъ силъ, разсматриваемыхъ какъ независимыя величины, будетъ содержать только первыя степени этихъ силъ.

Если поэтому

$P_1, P_2, P_3 \dots P_q \dots$ внѣшнія силы, дѣйствующія на точки $1, 2, 3 \dots q$.
 $D_\alpha, D_\beta \dots D_\omega \dots$ добавочныя силы (§ 54), дѣйствующія на точки
 α и α_1, β и $\beta_1 \dots \omega$ и $\omega_1 \dots$

$s_{r1}, s_{r2} \dots s_{r\alpha}, s_{r\beta} \dots$ — постоянныя коэффициенты, то дѣйствіе S_r , произведенное этими силами на мѣстѣ r , (r можетъ означать точку, сѣченіе или стержень) можно выразить уравненіемъ:

$$S_r = s_{r1}P_1 + s_{r2}P_2 + \dots + s_{rq}P_q + \dots + s_{r\alpha}D_\alpha + s_{r\beta}D_\beta + \dots + s_{r\omega}D_\omega + \dots \quad (267)$$

Значеніе коэффициентовъ s слѣдующее:

Если всѣ силы P и D , за исключеніемъ одной силы P_q , равны нулю, и при томъ $P_q=1$, то

$$S_r = s_{rq}$$

Коэффициентъ s_{rq} означаетъ поэтому дѣйствіе произведенное на мѣстѣ r внѣшней силой $=1$, дѣйствующей въ точкѣ q матеріальной системы.

Если всѣ силы P и D , за исключеніемъ одной силы D_ω , равны нулю, и при томъ $D_\omega=1$, то

$$S_r = s_{r\omega}$$

Коэффициентъ $s_{r\omega}$ означаетъ поэтому дѣйствіе, произведенное на мѣстѣ r добавочной силой $=1$ (т. е. двумя противоположными силами, равными 1) дѣйствующей на точки ω и ω_1 матеріальной системы.

Дѣйствіе S можетъ быть сопротивленіе, моментъ, перемѣщеніе и проч. Дѣйствія s однородны съ дѣйствіемъ S , такъ, напр. если S —сопротивленіе, то и s —сопротивленіе; если S —моментъ, то и s —моментъ.

Первый изъ показателей коэффициентовъ s означаетъ мѣсто матеріальной системы, къ коему дѣйствіе s относится, послѣдній—точку приложенія силы, производящей это дѣйствіе. Такъ, напр., если s —напряженіе, то sr_q означаетъ напряженіе въ точкѣ или сѣченіи, или стержнѣ r , произведенное силой 1, приложенной къ точкѣ q .

Показатели силъ P и D опредѣляютъ ихъ точки приложенія, а показатель дѣйствія S —мѣсто, къ которому это дѣйствіе относится.

Такъ какъ всякая сила можетъ быть замѣнена другой силой, ей равной и параллельной, дѣйствующей на произвольную точку тѣла, и соотвѣтственнымъ моментомъ (парой силъ), то *нѣкоторыя изъ величинъ P и D могутъ быть не силы, а моменты силъ.*

Если дѣйствіе, произведенное на мѣстѣ r однѣми только внѣшними силами, означимъ черезъ $\mathfrak{B}_r$, то

$$\mathfrak{B}_r = sr_1P_1 + sr_2P_2 + \dots$$

Уравненіе 267 можно поэтому написать такъ:

$$Sr = \mathfrak{B}_r + sr_\alpha D_\alpha + sr_\beta D_\beta + \dots \quad (268)$$

Когда всѣ $D=0$, то

$$Sr = \mathfrak{B}_r$$

$\mathfrak{B}_r$ есть, слѣдовательно, дѣйствіе, произведенное внѣшними силами на мѣстѣ r такой матеріальной системы, которой всѣ добавочные стержни не напряжены, или, что одно и тоже, *которая добавочныхъ стержней не имѣетъ.*

Изъ сего слѣдуетъ, что s и $\mathfrak{B}$ —статически опредѣленныя величины, что, поэтому, для ихъ опредѣленія нужно устранить всѣ добавочные стержни, т. е. превратить статически неопредѣленную матеріальную систему въ статически опредѣленную.

Если къ точкѣ q полученной такимъ образомъ системы (не имѣющей добавочныхъ стержней) приложимъ силу=1, то произведенное ее на мѣстѣ r дѣйствіе будетъ величина sr_q .

Если къ точкамъ ω и ω_1 тойже системы приложимъ добавочную силу 1, и опредѣлимъ дѣйствіе, произведенное ее на мѣстѣ r , то получимъ величину sr_ω . А чтобы получить $\mathfrak{B}_r$ нужно опредѣлить дѣйствіе, произведенное на мѣстѣ r тойже матеріальной системы данной нагрузкой, т. е. силами $P_1, P_2, \dots$

Всѣ $\mathfrak{B}$ и s опредѣляются поэтому легко аналитическимъ или графическимъ путемъ.

Когда тѣло послѣ деформациі пришло въ состояніе равновѣсія, то какъ внѣшнія, такъ и добавочныя силы могутъ быть разсматриваемы какъ независимыя величины (§ 54). Если поэтому возьмемъ производную дѣйствія S_r , по отношенію къ одной изъ внѣшнихъ или добавочныхъ силъ, то изъ уравненія 267 получимъ:

$$\frac{dS_r}{dP_q} = s_{rq} \quad \frac{dS_r}{dD_\omega} = s_{r\omega} \quad \dots \quad (269)$$

Будемъ обозначать дѣйствія S , $\mathfrak{B}$ и s , когда они означаютъ нормальныя сопротивленія—буквами N , $\mathfrak{N}$ и n , а когда моменты—буквами M , $\mathfrak{M}$ и m .

Для нормальнаго сопротивленія N и момента M будемъ тогда имѣть, по 267 и 268, уравненія:

$$\left. \begin{aligned} N_r &= n_{r_1} P_1 + n_{r_2} P_2 + \dots + n_{r\alpha} D_\alpha + n_{r\beta} D_\beta + \dots \\ N_r &= \mathfrak{N}_r + n_{r\alpha} D_\alpha + n_{r\beta} D_\beta + \dots \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (270)$$

$$\left. \begin{aligned} M_r &= m_{r_1} P_1 + m_{r_2} P_2 + \dots + m_{r\alpha} D_\alpha + m_{r\beta} D_\beta + \dots \\ M_r &= \mathfrak{M}_r + m_{r\alpha} D_\alpha + m_{r\beta} D_\beta + \dots \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (271)$$

Если выразимъ работу деформациі въ функціи внѣшнихъ и добавочныхъ силъ, то получимъ уравненіе 263. Производная этой работы, взятая по отношенію къ внѣшней силѣ P_q , будетъ

$$\frac{d\mathcal{L}}{dP_q} = \frac{N}{E\Omega} \frac{dN}{dP_q} dx + \int \frac{M}{EJ} \frac{dM}{dP_q} dx + \int \alpha t_0 \frac{dN}{dP_q} dx + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} \frac{dM}{dP_q} dx \quad (272)$$

Такъ какъ по (269)

$$\frac{dN}{dP_q} = n_q, \quad \frac{dM}{dP_q} = m_q,$$

то

$$\frac{d\mathcal{L}}{dP_q} = \int \frac{N}{E\Omega} n_q dx + \int \frac{M}{EJ} m_q dx + \int \alpha t_0 n_q dx + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_q dx \quad \dots \quad (273)$$

Если для N и M подставимъ значенія (270 и 271), то получимъ слѣдующія уравненія:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dP_q} &= P_1 \left[\int \frac{n_1 n_q dx}{E\Omega} + \int \frac{m_1 m_q dx}{EJ} \right] + P_2 \left[\int \frac{n_2 n_q dx}{E\Omega} + \int \frac{m_2 m_q dx}{EJ} \right] + \dots \\ &+ D_\alpha \left[\int \frac{n_\alpha n_q dx}{E\Omega} + \int \frac{m_\alpha m_q dx}{EJ} \right] + D_\beta \left[\int \frac{n_\beta n_q dx}{E\Omega} + \int \frac{m_\beta m_q dx}{EJ} \right] + \dots \\ &+ \int \alpha t_0 n_q dx + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_q dx \quad \dots \quad (274) \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dP_q} = \int \frac{Nq dx}{E\Omega} + \int \frac{Mm_q dx}{EJ} + D_\alpha \left[\int \frac{n_\alpha n_q dx}{E\Omega} + \int \frac{m_\alpha m_q dx}{EJ} \right] + \\ + D_\beta \left[\int \frac{n_\beta n_q dx}{E\Omega} + \int \frac{m_\beta m_q dx}{EJ} \right] + \dots + \int \alpha t_0 n_q dx + \int \frac{\alpha \Delta t}{h} m_q dx \dots \quad (274a)$$

Если возьмемъ производную работы деформациі по отношенію къ добавочной силѣ D_ω , то такимъ же образомъ получимъ:

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dD_\omega} = P_1 \left[\int \frac{n_1 n_\omega dx}{E\Omega} + \int \frac{m_1 m_\omega dx}{EJ} \right] + P_2 \left[\int \frac{n_2 n_\omega dx}{E\Omega} + \int \frac{m_2 m_\omega dx}{EJ} \right] + \dots \\ + D_\alpha \left[\int \frac{n_\alpha n_\omega dx}{E\Omega} + \int \frac{m_\alpha m_\omega dx}{EJ} \right] + D_\beta \left[\int \frac{n_\beta n_\omega dx}{E\Omega} + \int \frac{m_\beta m_\omega dx}{EJ} \right] + \dots \\ + \int \alpha t_0 n_\omega dx + \int \frac{\alpha \Delta t}{h} m_\omega dx \dots \quad (275)$$

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dD_\omega} = \int \frac{Nn_\omega dx}{E\Omega} + \int \frac{Mm_\omega dx}{EJ} + D_\alpha \left[\int \frac{n_\alpha n_\omega dx}{E\Omega} + \int \frac{m_\alpha m_\omega dx}{EJ} \right] + \\ + D_\beta \left[\int \frac{n_\beta n_\omega dx}{E\Omega} + \int \frac{m_\beta m_\omega dx}{EJ} \right] + \dots + \int \alpha t_0 n_\omega dx + \int \frac{\alpha \Delta t}{h} m_\omega dx \dots \quad (275a)$$

Когда P_q —сила, то по (168)
 $\frac{d\mathcal{Z}}{dP_q}$ = отношению перемѣ-
 щенію точки приложенія этой
 силы, а когда P_q —моментъ, то
 $\frac{d\mathcal{Z}}{dP_q}$, по (180), равняется углу
 вращенія сѣченія q .

Когда D_ω —сила, то по (173)
 $\frac{d\mathcal{Z}}{dD_\omega} = \delta - \frac{D_\omega}{e_\omega}$, а когда D_ω —
 моментъ, то $\frac{d\mathcal{Z}}{dD_\omega}$ = относи-
 тельному вращенію соотвѣст-
 веннаго сѣченія. Значеніе раз-
 ности $\delta - \frac{D_\omega}{e_\omega}$ уяснено въ § 55.

Частное $\frac{Ndx}{E\Omega}$ равняется, по (6), удлиненію или укороченію
 элемента балки, котораго первоначальная длина dx . Частное
 $\frac{Mdx}{EJ}$ равняется углу $d\varphi$, который образуютъ конечныя сѣченія
 того же элемента по наступленіи равновѣсія, потому что, означивъ
 радіусъ кривизны отръзка упругой линіи, соотвѣтствующаго эле-
 менту dx балки, черезъ ρ , будемъ имѣть (черт. 102)

$$dx = \rho d\varphi$$

и такъ какъ по (208)

$$\rho = \frac{EJ}{M}$$

то

$$d\varphi = \frac{Mdx}{EJ} \dots \dots \dots (276)$$

Также легко узнать что $\alpha t_0 dx$ —измѣненіе $\delta \lambda$ длины, и $\frac{\alpha \Delta t}{h}$ —вращеніе $\delta \varphi$ безконечно малаго элемента dx упругой линіи, происходящія отъ перемѣны температуры.

Уравненія (273) можно поэтому написать такъ:

$$\frac{d\delta}{dP_q} = \int n_q d\lambda + \int m_q d\varphi + \int n_q \delta \lambda + \int m_q \delta \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (274b)$$

$$\frac{d\delta}{dD_\omega} = \int n_\omega d\lambda + \int m_\omega d\varphi + \int n_\omega \delta \lambda + \int m_\omega \delta \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (275b)$$

Если относительныя перемѣщенія точекъ приложенія грузовъ и относительныя вращенія сѣченій, произведенныя нормальными силами, означимъ черезъ y , а сгибающими моментами — черезъ η , то для частныхъ случаевъ получимъ изъ уравненій 274 и 275 выраженія, помѣщенныя въ слѣдующей таблицѣ:

Т а б л и ц а IX.

У С Л О В І Е	Видоизмѣненіе производять:	Относительныя перемѣщенія или относительныя вращенія, произведенныя	
		нормальными со-противленіями	сгибающими моментами
Всѣ D и перемѣны температуры равны нулю.	Величины $P_1, P_2, P_3 \dots$	$y_q = \int \frac{N n_q dx}{E \Omega}$	$\eta_q = \int \frac{M m_q dx}{E J}$
Всѣ P и D , за исключеніемъ P_1 , равны нулю. Перемѣны температуры=0.	одна только величина P_1 , которая=1.	$y_{q1} = \int \frac{n_1 n_q dx}{E \Omega}$	$\eta_{q1} = \int \frac{m_1 m_q dx}{E J}$
Всѣ P и D , за исключеніемъ D_ω , равны нулю. Перемѣны температуры=0.	одна только величина D_ω , которая=1,	$y_{q\omega} = \int \frac{n_\omega n_q dx}{E \Omega}$	$\eta_{q\omega} = \int \frac{m_\omega m_q dx}{E J}$
Всѣ P и D равны нулю безъ исключенія.	одна перемѣна температуры.	$y_{qt} = \int \alpha t_0 n_q dx$	$\eta_{qt} = \int \frac{\alpha \Delta t}{h} m_q dx$

Помощью значеній, помѣщенныхъ въ этой таблицѣ, получимъ вмѣсто уравненій 274 и 275 слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{dP_q} &= P_1(y_{q1} + \eta_{q1}) + P_2(y_{q2} + \eta_{q2}) + \dots + D_\alpha(y_{q\alpha} + \eta_{q\alpha}) + \\ &\quad + D_\beta(y_{q\beta} + \eta_{q\beta}) + \dots + y_{qt} + \eta_{qt} \\ \frac{d\delta}{dP_q} &= (y_q + \eta_q) + D_\alpha(y_{q\alpha} + \eta_{q\alpha}) + D_\beta(y_{q\beta} + \eta_{q\beta}) + \dots + \\ &\quad + (y_{qt} + \eta_{qt}) \end{aligned} \right\} \quad . \quad (274c)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{dD_\omega} &= P_1(y_{\omega_1} + r_{\omega_1}) + P_2(y_{\omega_2} + r_{\omega_2}) + \dots + D\alpha(y_{\omega\alpha} + r_{\omega\alpha} + \\ &\quad + D\beta(y_{\omega\beta} + r_{\omega\beta}) + \dots + y_{\omega t} + r_{\omega t} \\ \frac{d\delta}{dD_\omega} &= (y_\omega + r_\omega) + D\alpha(y_{\omega\alpha} + r_{\omega\alpha}) + D\beta(y_{\omega\beta} + r_{\omega\beta}) + \dots + \\ &\quad + y_{\omega t} + r_{\omega t} \end{aligned} \right\} . \quad (275^c)$$

Уравнения 275, 275а, 275б и 275с суть только повторения уравнений 274, 274а, 274б и 274с; ихъ разница состоитъ въ томъ, что послѣднія относятся къ внѣшней, а первыя—къ добавочной силѣ. Каждое изъ нихъ можетъ быть употреблено для опредѣленія относительнаго перемѣщенія или вращенія; которому слѣдуетъ отдать предпочтеніе, зависитъ отъ свойствъ частнаго случая.

Эти уравненія дѣйствительны для всякаго значенія силы P_q (или D_ω); они дѣйствительны поэтому и для бесконечно малаго значенія этой силы, т. е. для $P_q=0$ (или $D_\omega=0$).

Но если $P_q=0$, то въ уравненіи (274) членъ съ множителемъ P_q исчезнетъ, а n_q и m_q будутъ сопротивленія и моменты произведенные величиной $=1$, поставленной на мѣсто P_q .

Но если $D_\omega=1$, то въ уравненіяхъ (275) членъ съ множителемъ D_ω исчезнетъ, а n_ω и m_ω будутъ сопротивленія и моменты, произведенные добавочной величиной, равной 1, поставленной на мѣсто D_ω .

Для опредѣленія перемѣщеній или вращеній въ такихъ мѣстахъ матеріальной системы, на которыя не дѣйствуетъ никакая сила, получаемъ поэтому слѣдующее правило.

Чтобы получить относительное перемѣщеніе точки q , прикладываемъ къ q по направленію требуемаго перемѣщенія силу $=1$, и опредѣляемъ производимыя ее сопротивленія n_q и моменты m_q . Требуемое перемѣщеніе получится изъ одного изъ уравненій 274а—с или 275а—с.

Чтобы получить вращеніе элемента q упругой линіи, прикладываемъ къ q по направленію искомаго вращенія моментъ $=1$, и опредѣляемъ производимыя имъ сопротивленія n_q и моменты m_q . Требуемое вращеніе получится изъ одного изъ уравненій 274а—с или 275а—с.

§ 87.

Взаимность перемѣщеній и вращеній.—Положимъ, что къ статически опредѣленной системѣ приложена въ точкѣ q по направленію qq_1 сила $P_q=1$ (черт. 103), и требуется опредѣлить перемѣщеніе, произведенное ее въ точкѣ r по направленію rr_1 . Если это перемѣщеніе означимъ черезъ y_{rq} , то по (274)

$$y_{rq} = \int \frac{n_r n_q dx}{E\Omega} + \int \frac{m_r m_q dx}{EJ}.$$

Сдѣлаемъ эту задачу обратной, т. е. положимъ что требуется опредѣлить перемѣщеніе точки q по направленію qq_1 , произведенное силой $=1$, приложенной къ точкѣ r по направленію rr_1 . Означивъ искомое перемѣщеніе въ этомъ случаѣ черезъ y_{qr} получимъ изъ 274

$$y_{qr} = \int \frac{n_q n_r dx}{E\Omega} + \int \frac{m_q m_r dx}{EJ}$$

Послѣднее уравненіе тождественно съ предыдущимъ, изъ чего слѣдуетъ

$$y_{qr} = y_{rq},$$

т. е. сила, дѣйствующая въ точкѣ r по направленію rr_1 перемѣщаетъ точку q по направленію qq_1 на точно такую величину, на какую она перемѣстила бы точку r по направленію rr_1 , если бы была приложена къ точкѣ q по направленію qq_1 .

Такъ какъ углы вращенія опредѣляются тѣми же уравненіями, что и перемѣщенія, то это правило дѣйствительно и для угловъ вращенія, т. е. моментъ, дѣйствующій на элементъ r по направленію rr_1 (черт. 104) вращаетъ элементъ q по направленію qq_1 на точно такую величину, на какую онъ повернулъ бы элементъ r по направленію rr_1 , если бы дѣйствовалъ на элементъ q по направленію qq_1 .

Изъ этого слѣдуетъ непосредственно, что линія перемѣщеній (или вращеній), т. е. линія, которой ординаты представляютъ перемѣщенія (или вращенія) точекъ матеріальной системы, произведенныя силой 1 (или моментомъ 1) приложенной къ точкѣ q , есть инфлуентная линія перемѣщеній (или вращеній) этой точки.

§ 88.

Приблизительный способъ опредѣленія интеграловъ вида:

$\int \frac{Nndx}{E\Omega}$. — Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ; отложимъ разстоянія x какъ абсциссы, а величины $\frac{Nn}{E\Omega}$, соотвѣтствующія точкамъ матеріальной системы, опредѣленнымъ этими разстояніями, какъ ординаты, и соединимъ полученныя точки непрерывной линіей. Площадь, заключенная между этой линіей, ея крайними ординатами и осью абсциссъ, равняется искомому интегралу

$$\int \frac{Nndx}{E\Omega}.$$

Эта площадь можетъ быть опредѣлена съ достаточной точностью по формулѣ Симпсона (237). Для этого дѣлимъ отрѣзокъ оси

абсциссъ, заключенный между крайними ординатами, на четное число n равныхъ частей и проводимъ черезъ точки дѣленія 0, 1, 2, 3... ординаты $y_0, y_1, y_2, y_3...$ (черт. 96). Если длину одного дѣленія на оси абсциссъ означимъ черезъ e , то

$$e = \frac{x_n - x_0}{n},$$

Искомая площадь получается изъ формулы

$$\int y dx = \frac{e}{3} \left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots) + 2(y_2 + y_4 + \dots) \right] \quad (237)$$

Раздѣлимъ ось балки на n равныхъ частей (гдѣ n —произвольное, но четное число), и означимъ соответствующія точкамъ 0, 1, 2, 3...

величины N —черезъ $N_0, N_1, N_2, N_3...$

„ n „ $n_0, n_1, n_2, n_3...$

„ E „ $E_0, E_1, E_2, E_3...$

„ Ω „ $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3...$

то

$$y_0 = \frac{N_0 n_0}{E_0 \Omega_0}, \quad y_1 = \frac{N_1 n_1}{E_1 \Omega_1}, \quad y_2 = \frac{N_2 n_2}{E_2 \Omega_2}, \quad y_3 = \frac{N_3 n_3}{E_3 \Omega_3} \dots$$

Подставивъ эти значенія въ (237) получимъ

$$\begin{aligned} \int \frac{Nn}{E\Omega} dx = \frac{e}{3} & \left[\frac{N_0 n_0}{E_0 \Omega_0} + \frac{N_n n_n}{E_n \Omega_n} + 4 \left(\frac{N_1 n_1}{E_1 \Omega_1} + \frac{N_3 n_3}{E_3 \Omega_3} + \dots \right) + \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{N_2 n_2}{E_2 \Omega_2} + \frac{N_4 n_4}{E_4 \Omega_4} + \dots \right) \right] \quad (277) \end{aligned}$$

Такимъ же образомъ опредѣляются другіе интегралы уравненій 273—275.

Когда вся балка состоитъ изъ одного и того же матеріала, то E —величина постоянная, и тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{Nn}{E\Omega} dx = \frac{e}{3E} & \left[\frac{N_0 n_0}{\Omega_0} + \frac{N_n n_n}{\Omega_n} + 4 \left(\frac{N_1 n_1}{\Omega_1} + \frac{N_3 n_3}{\Omega_3} + \dots \right) + \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{N_2 n_2}{\Omega_2} + \frac{N_4 n_4}{\Omega_4} + \dots \right) \right] \quad (278) \end{aligned}$$

Если, кромѣ того, и сѣченіе балки постоянно, то

$$\begin{aligned} \int \frac{Nn dx}{E\Omega} = \frac{e}{3E\Omega} & \left[N_0 n_0 + N_n n_n + 4 \left(N_1 n_1 + N_3 n_3 + \dots \right) + \right. \\ & \left. + 2 \left(N_2 n_2 + N_4 n_4 + \dots \right) \right] \quad (279) \end{aligned}$$

Площадь, заключенную между кривой, ея крайними ординатами и осью абсциссъ будемъ для краткости называть *площадью Симпсона*.

§ 89.

Превращеніе площади Симпсона въ прямоугольникъ. — Площадь Симпсона опредѣляется всего проще помощію превращенія ограничивающей ея кривой линіи въ прямую. Для этого дѣлимъ основаніе MN (черт. 105), какъ и въ предыдущемъ случаѣ, на четное число равныхъ частей, и проводимъ ординаты $y_0, y_1, y_2 \dots$

Разсматриваемъ отрѣзки кривой, заключенные между четными ординатами y_0 и y_2, y_2 и $y_4 \dots$ какъ параболическія дуги; проводимъ хорды $02, 24, \dots$ дѣлимъ отрѣзки ординатъ y_1, y_3 , заключенные между этими дугами и ихъ хордами, на 3 равныя части, и черезъ первыя точки дѣленія $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5 \dots$ считая отъ кривой, проводимъ прямыя $ab, cd \dots$ параллельныя и равныя хордамъ $02, 24 \dots$ Такъ какъ площадь параболическаго отрѣзка $012 = \frac{2}{3}$ площади параллелограмма $oab2$ (образованнаго хордой, параллельной ей касательной и конечными ординатами этого отрѣзка), то прямая ab замѣняетъ дугу 02 . Такимъ же образомъ узнаемъ, что прямая cd замѣняетъ дугу — 234 .

Соединимъ α_1 съ α_3 прямой $\alpha_1\alpha_3$, означимъ точку пересѣченія $\alpha_1\alpha_3$ съ y_2 черезъ z_2 , и продолжимъ $\alpha_1\alpha_3$ до пересѣченія съ y_0 и y_4 въ A и B . Такъ какъ площадь прямоугольной трапеціи равняется произведенію изъ основанія на ея среднюю линію, то трапеція $MAz_2II = \text{трап. } MabII$
и трапеція $IIz_2BIV = \text{трап. } PcdIV$
слѣдовательно

$$MabII + PcdIV = MAz_2II + IIz_2BIV = MABIV.$$

Такъ какъ IIz_2 дѣлитъ MIV пополамъ, то площадь

$$MABIV = \overline{MIV} + \overline{IIz_2}.$$

Если соединимъ z_2 съ α_5 , и означимъ точку пересѣченія прямой $z_2\alpha_5$ съ ординатой y_4 , общей трапеціямъ $MABIV$ и $IVfgVI$ черезъ z_3 , то такимъ же образомъ получимъ

$$MABIV + IVfgVI = \overline{MVI} \times \overline{IVz_3}.$$

Если затѣмъ соединимъ z_3 съ α_6 , и означимъ точку пересѣченія прямой $z_3\alpha_6$ съ конечной ординатой предыдущей трапеціи, т. е. y_6 , черезъ z_4 , то площадь всей фигуры $Mo13N$, заключен-

ной между кривой $Mo13N$, ея крайними ординатами y_0 и y_n , и основаніемъ MN

$$F = \overline{MN} \times \overline{VI}z_4.$$

Всякая прямая, проведенная через z_4 , замѣняетъ данную кривую $013N$.

Для опредѣленія площади Симпсона получаемъ изъ предыдущаго слѣдующее простое правило: основаніе 0.18 (черт. 106) дѣлимъ на четное число равныхъ частей, проводимъ черезъ точки дѣленія ординаты $y_0, y_1, y_2, \dots$, для дугъ, отсѣченныхъ четными ординатами, проводимъ хорды $02, 24, \dots$ и стрѣлку каждой дуги дѣлимъ на 3 равныя части.

Если означимъ первыя точки дѣленія, считая отъ кривой, черезъ $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots$, то соединяемъ α_1 съ α_3 , и получаемъ на y_2 точку z_2 ; соединяемъ z_2 съ α_5 , получаемъ на y_3 точку z_3 ; соединяемъ z_3 съ α_7 , получаемъ на y_4 точку z_4 и т. д. Такимъ образомъ получимъ наконецъ точку z_m (на черт. 105 это точка z_9), которой ордината z_mt . Искомая площадь равна этой ординатѣ, умноженной на основаніе данной фигуры. Такъ, площадь, заключенная между кривой $o\alpha_1, \alpha_5, \alpha_{11}, \alpha_{18}$, ея крайними ординатами o и $18\alpha_{18}$, и основаніемъ $0,18$.

$$F = 0,18 \times z_9 9.$$

§ 90.

Производная сгибающаго момента. — Какъ балка, такъ и дѣйствующія на нее силы удовлетворяютъ условіямъ, приведеннымъ въ § 80. Возьмемъ въ плоскости силъ прямоугольныя оси координатъ и будемъ считать положительными: ось OX — слѣва вправо, ось OY — сверху внизъ, внѣшнія силы — когда онѣ дѣйствуютъ по направленію положительныхъ осей координатъ, а моменты — если они вращаютъ по направленію часовой стрѣлки.

Означимъ разстояніе оси qs балки (черт. 107) отъ OX черезъ a , а координаты точки приложенія t внѣшней силы P — черезъ α и β . Разрѣжемъ балку сѣченіемъ mn , перпендикулярнымъ къ оси qs , пересѣкающимъ эту ось въ точкѣ s , и замѣнимъ дѣйствіе, производимое лѣвой частью балки на отрѣзанную правую, силами: нормальной N_1 и касательной T_1 , приложенными къ точкѣ s , и сгибающимъ моментомъ M_1 . Перенесемъ всѣ внѣшнія силы, включая и реакцію, дѣйствующія на лѣвую отсѣченную часть балки, въ точку s ; означимъ ихъ равнодѣйствующую черезъ R , нормальную и касательную слагающую этой равнодѣйствующей — черезъ N и T , а моментъ этихъ силъ по отношенію къ точкѣ s —

черезъ M . Внѣшнія силы могутъ быть замѣнены силами N и T , дѣйствующими въ s , и моментомъ M , и изъ условій равновѣсія имѣемъ:

$$N+N_1=0 \quad T+T_1=0 \quad M+M_1=0 \quad . \quad . \quad . \quad (280)$$

Силы T и T_1 , дѣйствующія въ сѣченіи mn по прямопротивоположнымъ направленіямъ, стремятся срѣзать балку по сѣченію mn ; T называется поэтому *срѣзывающей или поперечной силой*. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что *срѣзывающая сила равняется алгебраической суммѣ слагающихся внѣшнихъ силъ (включая реакціи опоръ), взятыхъ по направленію сѣченія*.

Если разложимъ силу P на нормальную и касательную слагающія n и t , то моментъ, произведенный этой силой въ сѣченіи s , отстоящемъ отъ начала координатъ на разстояніи x , будетъ (черт. 107)

$$m = -t(x-a) + n(a-\beta),$$

слѣдовательно $M = \Sigma[-t(x-a) + n(a-\beta)]$.

Если отъ сѣченія mn перейдемъ къ другому m_1n_1 , то въ этомъ уравненіи измѣнится только x , поэтому

$$\frac{dM}{dx} = \Sigma(-t),$$

или, такъ какъ

$$\Sigma t = T,$$

$$\text{то } \frac{dM}{dx} = -T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (281)$$

Моментъ будетъ имѣть наибольшее значеніе въ томъ сѣченіи, для котораго $\frac{dM}{dx} = 0$, а такъ какъ $\frac{dM}{dx} = -T$, то слѣдуетъ:

1) *Наибольшее срѣзывающее усиліе проявляется въ томъ сѣченіи, котораго сгибающій моментъ $= 0$, и наоборотъ: наименьшая срѣзывающая сила дѣйствуетъ въ томъ сѣченіи, котораго сгибающій моментъ наибольшій.*

2) *Когда сгибающіе моменты для всѣхъ сѣченій одинаковы, то срѣзывающія силы равны нулю.*

Глава VII.

Простѣйшій случай сгибанія прямыхъ балокъ.

§ 91.

Основные формулы. — Простѣйшій случай сгибанія имѣеть мѣсто тогда, когда внѣшнія силы и сопротивленія опоръ, дѣйствующія на брусъ съ прямолинейной осью, перпендикулярны къ этой оси, и находятся въ одной съ ней плоскости. Этотъ случай отличается отъ случая, разсмотрѣннаго въ предыдущей главѣ, слѣдовательно, только тѣмъ, что всѣ внѣшнія силы параллельны между собою и перпендикулярны къ оси бруса, вслѣдствіе чего всѣ N и n равны нулю. Если поэтому въ уравненіяхъ, выведенныхъ въ предыдущей главѣ, отбросимъ члены, содержащіе N и n , то получимъ формулы для расчета балокъ, подвергаемыхъ одному изгибу безъ продольнаго растяженія или сжатія. Эти формулы слѣдующія:

$$\sigma = \frac{Mv}{J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (209\alpha)$$

$$\sigma_1 = \frac{Me_1}{J}, \quad \sigma_2 = -\frac{Me_2}{J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (211\alpha)$$

$$\frac{d\delta}{dP_q} = \int \frac{M}{EJ} \frac{dM}{dP_q} dx + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} \frac{dM}{dP_q} dx \quad . \quad . \quad . \quad (272\alpha)$$

$$\frac{d\delta}{dP_q} = \int \frac{M}{EJ} m_q dx + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_q dx \quad . \quad . \quad . \quad (273\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dP_q} = & P_1 \int \frac{m_1 m_q dx}{EJ} + P_2 \int \frac{m_2 m_q dx}{EJ} + \dots + D_\alpha \int \frac{m_\alpha m_q dx}{EJ} + \\ & + D_\beta \int \frac{m_\beta m_q dx}{EJ} + \dots + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_q dx \quad . \quad . \quad . \quad (274\alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dP_q} = \int \frac{M m_q dx}{EJ} + D_\alpha \int \frac{m_\alpha m_q dx}{EJ} + D_\beta \int \frac{m_\beta m_q dx}{EJ} + \dots + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_q dx \quad (274\beta)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{Z}}{dD_\omega} = & P_1 \int \frac{m_1 m_\omega dx}{EJ} + P_2 \int \frac{m_2 m_\omega dx}{EJ} + \dots + D_\alpha \int \frac{m_\alpha m_\omega dx}{EJ} + \\ & + D_\beta \int \frac{m_\beta m_\omega dx}{EJ} + \dots + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_\omega dx. \quad (275\alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dD_\omega} = \int \frac{M m_\omega dx}{EJ} + D_\alpha \int \frac{m_\alpha m_\omega dx}{EJ} + D_\beta \int \frac{m_\beta m_\omega dx}{EJ} + \dots + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_\omega dx \quad (275\beta)$$

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dP_q} = \int m_q d\varphi + \int m_q \delta\varphi \quad (274\gamma)$$

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dD_\omega} = \int m_\omega d\varphi + \int m_\omega \delta\varphi \quad (275\gamma)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathcal{Z}}{dP_q} &= P_1 r_{q1} + P_2 r_{q2} + \dots + D_\alpha r_{q\alpha} + D_\beta r_{q\beta} + \dots + r_{qt} \\ \frac{d\mathcal{Z}}{dP_q} &= y_q + D_\alpha r_{q\alpha} + D_\beta r_{q\beta} + \dots + r_{qt} \end{aligned} \right\} \quad (274\delta)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathcal{Z}}{dD_\omega} &= P_1 r_{\omega 1} + P_2 r_{\omega 2} + \dots + D_\alpha r_{\omega \alpha} + D_\beta r_{\omega \beta} + \dots + r_{\omega t} \\ \frac{d\mathcal{Z}}{dD_\omega} &= y_\omega + D_\alpha r_{\omega \alpha} + D_\beta r_{\omega \beta} + \dots + r_{\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (275\delta)$$

Всѣ эти уравненія, за исключеніемъ первыхъ двухъ: 209 α и 211 α , суть только различные виды одного и того же уравненія.

Помощію уравненій 209 α и 211 α опредѣляются напряженія, а помощію остальныхъ уравненій — видоизмѣненія, т. е. перемѣщенія и вращенія, причемъ въ каждомъ данномъ случаѣ выбираемъ изъ этихъ уравненій то, которое для этого случая окажется наиболѣе удобнымъ.

Изъ 209 α получаемъ

$$\text{для } z=0, \quad \sigma=0,$$

изъ чего слѣдуетъ, что въ случаѣ, когда внѣшнія силы перпендикулярны къ оси балки, нейтральное волокно совпадаетъ съ ея геометрической осью, (т. е. съ прямой, на которой находятся центры тяжести сѣченій).

§ 92.

Продольныя скалывающія напряженія.—Пусть $\alpha\beta\gamma\delta$ (черт. 108) часть балки въ изогнутомъ состояніи, и вырѣжемъ изъ нея от-

рѣзокъ $abcd$ безконечно близкими сѣченіями ad и bc , перпендикулярными къ оси балки, и сѣченіемъ de , параллельнымъ этой оси. Означимъ черезъ

e_1 — разстояніе крайняго волокна, v_1 — разстояніе сѣченія cd , и v — разстояніе произвольнаго элемента сѣченія, отъ оси балки,

β — ширину балки на разстояніи v отъ оси,

σ — напряженіе волокна на этомъ мѣстѣ,

M — сгибающій моментъ сѣченія ad ,

J — моментъ инерціи этого сѣченія по отношенію къ оси изгиба.

Чтобы послѣ устраненія отрѣзка $abcd$ сѣченія ad и bc находились въ такомъ же состояніи, въ какомъ они находились тогда, когда этотъ отрѣзокъ еще не былъ вырѣзанъ, нужно къ элементамъ сѣченій ad и bc , параллельнымъ оси изгиба, которыхъ площади $= \beta dv$, приложить силы $\sigma \beta dv$, замѣняющія дѣйствіе вынутаго отрѣзка. Если равнодѣйствующую этихъ силъ означимъ

для сѣченія ad — черезъ N_1 и

для сѣченія bc — черезъ N_1 , то

$$N = \int_{v_1}^{e_1} \sigma \beta \cdot dv.$$

По (209^a)

$$\sigma = \frac{Mv}{J},$$

поэтому

$$N = \int_{v_1}^{e_1} \frac{Mv}{J} \beta dv,$$

или, такъ M и J , для одного и того же сѣченія, постоянныя величины,

$$N = \frac{M}{J} \int_{v_1}^{e_1} \beta v dv.$$

Интегралъ справа знака уравненія равняется статическому моменту площади dad_1 , взятому по отношенію къ оси центра тяжести. Если этотъ моментъ означимъ черезъ S_m , то

$$N = \frac{M}{J} S_m \dots \dots \dots (282)$$

Положимъ

$$\frac{3T}{2bh} = k, \quad \frac{6T}{bh^3} = l,$$

тогда

$$\tau_v = k - lv^2,$$

гдѣ k и l , для одного и того же сѣченія, постоянныя величины.

Если будемъ отълаживать отъ вертикальной оси z_1 на продолженіяхъ волоконъ ss_1 ихъ напряженія τ_v въ одну и ту же сторону, то получимъ параболу $\alpha\beta\gamma$, изъ которой видно, что для крайнихъ волоконъ

$$\tau = 0$$

и что наибольшее скалывающее напряженіе дѣйствуетъ въ нейтральномъ волокнѣ ($v=0$).

Изъ предыдущаго уравненія получаемъ, для $v=0$

$$\max \tau = \frac{3T}{2bh}.$$

2) Дзугаэровое сѣченіе (черт. 110).

Для средней узкой части

$$\tau_v = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - v^2 \right),$$

а для поясовъ

$$\tau_{v=0} = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - v^2 \right)$$

Линія скалывающихъ напряженій состоитъ поэтому изъ отрѣзковъ двухъ параболъ.

3) Сложное сѣченіе (черт. 111).—Статическій моментъ сложнаго сѣченія получается изъ выраженія

$$S_m = \int \beta dv \cdot v = \int \beta v dv.$$

Разобьемъ сѣченіе горизонтальными плоскостями на четное число полосъ одинаковой ширины, — означимъ длины этихъ полосъ черезъ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$, ихъ разстоянія отъ оси центра тяжести—черезъ $v_0, v_1, v_2, \dots$ а ихъ ширину—черезъ e , то, по правилу Симпсона,

$$S_m = \frac{e}{3} \left[v_0\beta_0 + v_n\beta_n + 4(v_1\beta_1 + v_3\beta_3 + \dots) + 2(v_2\beta_2 + v_4\beta_4 + \dots) \right]$$

и

$$\tau = \frac{TS_m}{\beta J}.$$

§ 94.

Построение скалывающих напряжений.—Опредѣляемъ графически моментъ инерціи J . Для этого, по § 84, строимъ многоугольникъ силъ (черт. 112_b) и веревочную линію (черт. 112_c). Если площадь $azbna$, ограниченную этой линіей и продолженіемъ ея крайнихъ сторонъ, означимъ черезъ Ω , а полюсное разстояніе— черезъ H , то по (243)

$$J=2H\Omega.$$

Чтобы получить скалывающее напряженіе волокна cd (черт. 112_a) нужно построить статическій моментъ J площади cad по отношенію къ оси центра тяжести, которая проходитъ черезъ точку z . Для этого продолжаемъ cd до пересѣченія съ линіей моментовъ въ c_1 , и проводимъ въ c_1 къ этой линіи касательную $c_1\gamma$. Если γ —пересѣченіе этой касательной съ осью zz_1 , проведенною черезъ z параллельно оси изгиба (гдѣ z — точка пересѣченія крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника), и означимъ отѣзокъ $z\gamma$ черезъ ζ , то

$$S_m=H\zeta.$$

Теперь будетъ

$$\tau=\frac{T}{2\Omega}\frac{\zeta}{z}.$$

Строимъ прямой уголъ bcd (черт. 112_d), откладываемъ

$$bc=\frac{T}{2\Omega}, \quad \overline{cd}=\beta,$$

и соединяемъ b съ d .

Откладываемъ на dc отъ d

$$\overline{d\zeta}=\zeta,$$

проводимъ черезъ ζ $\zeta\zeta_1 \parallel bc$ до пересѣченія съ bd въ ζ_1 , получаемъ

$$\tau=\frac{\zeta\zeta_1}{\beta}.$$

§ 95.

Напряженія въ наклонныхъ сѣченіяхъ.—Въ трехъ предыдущихъ параграфахъ указаны способы опредѣленія нормальныхъ напряженій σ и скалывающихъ— τ , проявляющихся въ сѣченіяхъ перпендикулярныхъ къ оси балки.

Для вычисленія нормальныхъ напряженій s и скалывающихъ t , дѣйствующихъ въ сѣченіи, составляющемъ съ осью уголъ α , служатъ уравненія (21) и (22), въ которыхъ, согласно предположенію, сдѣланному въ § 88, нужно ν поставить $=0$. Для элемента ac (черт. 113) будемъ поэтому имѣть

$$s = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (284)$$

$$t = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (285)$$

Разложимъ напряженіе, дѣйствующее на плоскость ac , на горизонтальную слагающую h и вертикальную v , то по (25)

$$v = -\tau \sin \alpha,$$

$$h = -(\sigma \sin \alpha + \tau \cos \alpha).$$

Равнодѣйствующее напряженіе въ ac

$$r = \sqrt{s^2 + t^2} = \sqrt{h^2 + v^2}$$

а углы δ и φ , образуемые имъ съ нормалью къ ac , и съ осью балки получаются изъ уравненій

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{t}{s} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{h}.$$

§ 96.

Главныя напряженія.

а) *Предѣльные нормальныя напряженія* — Наибольшее нормальное напряженіе испытываютъ элементы, наклоненные къ оси балки подъ угломъ α_n , который, по (28), получается изъ уравненія

$$\operatorname{tg} 2\alpha_n = -\frac{\tau}{\frac{\sigma}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad (286)$$

и это напряженіе равняется

$$S = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} \quad . \quad . \quad . \quad (287)$$

Когда уголъ α измѣняется отъ 0 до 180° , то онъ два раза принимаетъ значеніе, удовлетворяющее уравненію (286), и оба его значенія разнятся другъ отъ друга на 90° ; одному изъ нихъ

соотвѣтствуетъ наибольшее, а другому—наименьшее нормальное напряженіе, и по (287)

$$S_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} \quad (287_a)$$

$$S_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}$$

Если σ положительно, то $\max S = S_1$, а если—отрицательно, то $\max S = S_2$. Когда имѣетъ мѣсто первый случай, а когда второй, рѣшаетъ уравненіе (284).

Предѣльные скалывающія напряженія.—Скалывающее напряженіе достигаетъ предѣльнаго значенія въ сѣченіи, наклоненномъ къ оси балки подъ угломъ α_m , который получается изъ уравненія (31)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_m = \frac{\sigma}{t} \quad (288)$$

Величина предѣльнаго напряженія опредѣлена уравненіемъ (32)

$$T = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} \quad (289)$$

Когда уголъ α измѣняется отъ 0 до 180° , то онъ два раза получаетъ значеніе, удовлетворяющее уравненію (288), и эти значенія разнятся другъ отъ друга на 90° , т. е. элементы, въ которыхъ дѣйствуютъ предѣльныя скалывающія напряженія, перпендикулярны между собою. Одному изъ этихъ значеній соотвѣтствуетъ maximum, а другому—минимумъ скалывающаго напряженія, и изъ (289) видно, что абсолютно оба эти значенія равны.

Изъ (287_a) получаемъ

$$S_1 + S_2 = \sigma,$$

$$S_1 - S_2 = \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} = 2T,$$

поэтому

$$T = \frac{S_1 - S_2}{2}.$$

Изъ (286) и (288) слѣдуетъ

$$\alpha_n = 45^\circ + \alpha_m,$$

т. е. плоскости предѣльныхъ нормальныхъ напряженій составляютъ съ плоскостями предѣльныхъ скалывающихъ углы въ 45° .

§ 97.

Правила расчета балокъ. — Размѣры поперечныхъ сѣченій балки должны быть опредѣлены такимъ образомъ, чтобы ихъ наибольшія напряженія ни на какомъ мѣстѣ не превышали допускаемаго напряженія матеріала. Если поэтому, означимъ допускаемое напряженіе

для растяженія—черезъ k_r ,

для давленія—черезъ k_d

и для скалыванія—черезъ k_s

и примемъ растяженіе за положительное, а сжатіе за отрицательное напряженіе, то для всякаго элемента балки должны быть исполнены условія:

$$\max(+S) \leq k_r,$$

$$\max(-S) \leq k_d,$$

$$\max T \leq k_s. \quad (290)$$

Величины S и T даны уравненіями (287) и (289), въ которыхъ для σ и τ нужно подставить значенія 209а и 283.

Чтобы было возможно удовлетворить условіямъ 290 нужно знать тѣ мѣста сѣченій балки, въ которыхъ величины S и T достигаютъ абсолютнаго максимума.

а) *абсолютное максимумъ нормальнаго напряженія въ данномъ сѣченіи.*

По (287)

$$S = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

гдѣ

$$\sigma = \frac{Mv}{J} \text{ и } \tau = \frac{TS_m}{\beta J}.$$

Для крайнихъ волоконъ a и b (черт. 114)

$$S_m = 0, \quad v = e,$$

поэтому

$$\max S = \sigma = \frac{Me}{J}$$

$$\max T = 0,$$

Для волоконъ на упругой поверхности $v=0$,

слѣдовательно

$$\max S = 0,$$

$$\max T = \tau = \frac{TS_m}{\beta J},$$

гдѣ

$$S_m = \int_e v d\Omega.$$

Для волоконъ между упругой поверхностью и крайними волокнами

$$v > 0 \text{ и } v < e$$

$$\max S = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Изъ этого уравненія видно, что $\max S$ больше какъ нормальнаго напряженія σ , такъ и скалывающаго t . Если для σ и τ подставимъ значеніе, то получимъ

$$\max S = \frac{1}{2J} \left(Mv + \sqrt{M^2 v^2 + \frac{4T^2 S_m^2}{\beta^2}} \right) \quad (291)$$

Получаемое изъ этого уравненія максимальное напряженіе вообще меньше напряженія $\frac{Me}{J}$ крайнихъ волоконъ. Но когда β — малая величина, то для волоконъ, близкихъ къ крайнимъ, которыхъ v почти равно e , можетъ уравненіе (291) дать для $\max S$ величину, большую напряженія крайнихъ волоконъ. Тогда наибольшее нормальное напряженіе будетъ проявляться не въ крайнемъ, но въ другихъ волокнахъ, находящихся на близкомъ разстояніи отъ крайняго. Въ этомъ случаѣ расчетъ балки долженъ быть исполненъ по формулѣ (291)

$$k = \frac{1}{2J} \left(Mv + \sqrt{M^2 v^2 + \frac{4T^2 S_m^2}{\beta^2}} \right) \quad (292)$$

въ которой k означаетъ допускаемое напряженіе матеріала.

Напряженіе въ наклонной плоскости можетъ оказаться большимъ напряженія крайнихъ волоконъ въ балкѣ съ тонкой вертикальной стѣнкой и широкими поясами на томъ мѣстѣ, гдѣ стѣнка переходитъ въ пояса.

Такъ какъ при увеличеніи разстоянія v статическій моментъ S_m сѣченія уменьшается, а напряженіе σ — увеличивается, то для волоконъ, близкихъ къ крайнимъ, S_m всегда малая величина, вслѣдствіе чего разниа между нормальнымъ напряженіемъ σ_e край-

ного волокна и абсолютно наибольшимъ напряженіемъ $\max S$ обыкновенно такъ мала, что въ большинствѣ практическихъ случаевъ можно ее принимать за абсолютное максимумъ нормального напряженія въ соответственномъ сѣченіи.

По отношенію къ балкамъ, лежащимъ свободно на двухъ опорахъ, послѣднее заключеніе можно считать вѣрнымъ для всей балки, потому что увеличеніе сгибающаго момента M сопровождается въ такихъ балкахъ уменьшеніемъ срѣзывающаго усилія T ; но для балокъ другого рода, какъ: укрѣпленныхъ однимъ или обоими концами, для непрерывныхъ многоопорныхъ балокъ и др., которыхъ сгибающій моментъ достигаетъ максимума въ томъ же сѣченіи что и срѣзывающее усиліе, оно можетъ дать замѣтную ошибку, поэтому прочность такихъ балокъ въ случаѣ, когда онѣ имѣютъ вертикальную стѣнку, должна быть провѣрена по формулѣ (291).

б) Абсолютное максимумъ скалывающаго напряженія въ данномъ сѣченіи.—Наибольшее скалывающее напряжение волокна, отстоящаго отъ оси балки на разстояніе v , получается изъ уравненія

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

или

$$t = \frac{1}{2J} \sqrt{M^2 v^2 + \frac{4T^2 S_m^2}{\beta^2}} \dots \dots \dots (293)$$

Когда v увеличивается, то S_m уменьшается, и S_m достигаетъ наибольшаго значенія для нейтральнаго волокна. Такъ какъ ширина β на этомъ мѣстѣ обыкновенно меньше, и вообще не больше, чѣмъ въ другихъ мѣстахъ, то можно принять, что наибольшее скалывающее напряжение проявляется всегда въ нейтральной оси, что поэтому

$$\max t = \frac{TS_m}{\beta_0 J} \dots \dots \dots (294)$$

гдѣ β_0 —ширина сѣченія на высотѣ его центра тяжести, и

$$S_m = \int_0^e v d\Omega.$$

§ 98.

Графическій способъ опредѣленія напряженій въ наклонныхъ плоскостяхъ.—Для построенія напряженій s и t нужно, по § 22, отложить на горизонталѣ AB (черт. 115)

$$Az = zB = \frac{\sigma}{2},$$

возставить въ B къ AB перпендикуляръ, отложить на немъ

$$Bd = \tau,$$

описать изъ z радиусомъ zA кругъ I, и на zd какъ на диаметрѣ описать другой кругъ II, который въ этомъ случаѣ будетъ проходить черезъ B .

Чтобы получить напряженія s и t для элемента ab , составляющаго съ осью балки уголъ α , продолжаемъ ab до пересѣченія съ кругомъ I въ n , соединяемъ n съ z прямой nz , встрѣчающей кругъ II въ τ и соединяемъ τ съ d и n . Получаемъ

$$s = \overline{n\tau}, \quad t = \overline{d\tau}, \quad r = \overline{nd}, \quad \delta = \angle dn\tau.$$

Если продолжимъ nd до пересѣченія съ окружностью I въ δ , и соединимъ δ съ A , то δA —направленіе равнодѣйствующаго напряженія r .

Для элемента a_1b_1 , перпендикулярнаго къ ab ,

$$s = \overline{n_1\tau}, \quad t = \overline{d\tau}, \quad r = \overline{n_1d}$$

и $\delta_1 a$ —направленіе равнодѣйствующаго напряженія.

Построеніе предѣльныхъ нормальныхъ напряженій S_1 и S_2 видно изъ черт. 116, а предѣльныхъ скалывающихъ t —изъ черт. 117. Изъ этихъ чертежей получаемъ

$$S_1 = \overline{nd}, \quad S_2 = \overline{n_1d}, \quad \alpha_n = \angle n_1AB,$$

$$\max t = \overline{zd}, \quad \alpha_m = \angle mAB.$$

Скалывающее напряженіе t элемента, составляющаго съ элементомъ ab (черт. 117), въ которомъ дѣйствуетъ наибольшее скалывающее напряженіе, уголъ φ , какъ изъ чертежа видно

$$\overline{\tau d} = \overline{zd} \cos 2\varphi,$$

или

$$t = \max t \cdot \cos 2\varphi$$

t для различныхъ угловъ φ получается поэтому помощію слѣдующаго простаго построенія: на zn какъ на диаметрѣ описываемъ окружность III. Данный элементъ Ad продолжаемъ до пересѣченія съ окружностью I въ δ , и проводимъ радиусъ δz , который пересѣчетъ окружность III въ δ_1 . Изъ построенія слѣдуетъ

$$\overline{\delta_1 z} = \overline{\delta z} \cos 2\varphi,$$

поэтому

$$\overline{\delta z} = t.$$

Если такимъ образомъ построимъ напряженія t для элементовъ, составляющихъ съ AB углы отъ 0 до 180° , и отложимъ ихъ по направленіямъ соотвѣтственныхъ элементовъ отъ точки A , то получимъ кривую $\alpha\beta\gamma\epsilon$, которой произвольный радіусъ векторъ $A\gamma$ будетъ равняться скальвающему напряженію элемента, имѣющаго направленіе $A\gamma$.

Нормальное напряженіе достигаетъ максимума въ элементѣ mn (черт. 117); нормальное напряженіе s элемента Af , составляющаго съ mn уголъ ϵ , равняется γt , и изъ чертежа имѣемъ

$$\overline{\gamma t} = \overline{\gamma z} + \overline{zt},$$

т. е.

$$s = \frac{\sigma}{2} + \max t \cdot \cos 2\epsilon.$$

Напряженія s получаются поэтому помощью слѣдующаго построенія (черт. 116). На прямой zm , составляющей съ AB уголъ $Bzm = 2\alpha_n$, какъ на діаметрѣ, описываемъ изъ центра z_2 окружность III. Чтобы для произвольнаго элемента Af получить s , продолжаемъ Af до пересѣченія съ окружностью I въ γ , проводимъ радіусъ γz , и на продолженіи его откладываемъ $\gamma\gamma_1 = Az$, получаемъ

$$s = \overline{\gamma_1 z}.$$

Если полученные такимъ образомъ величины s отложимъ отъ точки A по направленіямъ соотвѣтственныхъ элементовъ, то получимъ кривую, которая представитъ напряженія s въ данной точкѣ для различныхъ направленій элемента. Произвольный радіусъ векторъ Aq этой кривой равняется нормальному напряженію этой точки въ плоскости, имѣющей направленіе Aq .

§ 99.

Траекторія напряженій. — Опредѣлимъ для произвольной точки a_1 , взятой на сѣченіи m_1n_1 , (черт. 118) направленіе наибольшаго напряженія (нормальнаго или скальвающего), продолжимъ это направленіе до пересѣченія со слѣдующимъ сѣченіемъ m_2n_2 въ точкѣ s_2 , повторимъ тоже дѣйствіе для точки s_2 , и т. д., то получимъ кривую, которая называется *траекторіей наибольшаго нормальнаго или наибольшаго скальвающего напряженія*.

1) Трассаторія наибольших нормальных напряжений.

Наибольшее нормальное напряжение и его уголъ съ осью балки получаются изъ уравненій:

$$\begin{aligned} \max s &= \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \operatorname{tg} 2\alpha_n &= - \frac{2\tau}{\sigma} \\ \sin 2\alpha_n &= \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_n}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_n}} = \frac{- \frac{2\tau}{\sigma}}{\pm \sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{\sigma^2}}} = - \frac{2\tau}{\pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} \quad (295) \\ \cos 2\alpha_n &= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_n}} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \left(\frac{2\tau}{\sigma}\right)^2}} = \frac{\sigma}{\pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}. \end{aligned}$$

а) Трассаторія наибольших растяжений. Въ этомъ случаѣ на мѣсто двойнаго знака $\pm$ нужно въ предыдущихъ уравненіяхъ поставить знакъ $+$, такъ что для опредѣленія трассаторіи наибольшихъ растяженій имѣемъ уравненія:

$$\begin{aligned} \max s &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \\ \sin 2\alpha_n &= - \frac{2\tau}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}, \quad \cos 2\alpha_n = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} \quad (296) \end{aligned}$$

Въ крайнихъ волокнахъ $\tau=0$; если разстояніе крайнихъ растягиваемыхъ волоконъ отъ оси означимъ черезъ e , а крайнихъ сжимаемыхъ — черезъ e_1 , то для первыхъ

$$v = e, \quad \sigma = \frac{Me}{J}, \quad \max s = \sigma$$

и для послѣднихъ

$$v = -e_1, \quad \sigma = -\frac{Me_1}{J}, \quad \max s = -\frac{Me_1}{2J} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{Me_1}{J}\right)^2 + 0} = 0,$$

Для нейтральныхъ волоконъ

$$\sigma = 0, \quad \tau = -\frac{T}{\beta_0 J} \int_0^e v d\Omega.$$

Если эти значенія вставимъ въ предыдущія уравненія, то получимъ:

для крайних растягиваемых волоконъ $\sin 2\alpha_n=0$, $\cos 2\alpha_n=1$,
слѣдовательно $\alpha_n=0$,

для крайних сжимаемых волоконъ: $\sin 2\alpha_n=0$, $\cos 2\alpha_n=-1$,
слѣдовательно $\alpha_n=90^\circ$;

для нейтральных волоконъ: $\sin 2\alpha_n=1$, $\cos 2\alpha_n=0$, слѣдо-
вательно $\alpha_n=45^\circ$.

Во всѣхъ другихъ точкахъ сѣченія $\max$ какъ по величинѣ, такъ и направленію имѣеть значенія, заключенныя между этими предѣльными; эти значенія получаются изъ уравненій 295.

Траекторія наибольшихъ растяженій представлена на черт. 119. Она касательна къ крайнему растягиваемому волокну, пересѣкаетъ нейтральную ось подъ отрицательнымъ угломъ 45° и перпендикулярна къ крайнему сжимаемому волокну.

β) *Траекторія наибольшаго сжатія*. Для этого случая нужно въ уравненіяхъ 295 на мѣсто двойнаго знака $\pm$ поставить знакъ $-$.

$$\max = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sin 2\alpha_n = \frac{-2\tau}{-\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \frac{2\tau}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}, \quad \cos 2\alpha_n = \frac{\sigma}{-\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}.$$

Для крайнихъ растягиваемыхъ волоконъ

$$v=e, \quad \tau=0, \quad \sigma = \frac{Me}{J} \quad \max = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} = 0,$$

$$\sin 2\alpha_n=0, \quad \cos 2\alpha_n=-1, \quad \text{слѣдовательно } \alpha_n=90^\circ.$$

Для крайнихъ сжимаемыхъ волоконъ

$$v=-e_1, \quad \tau=0, \quad \sigma = -\frac{Me_1}{J}, \quad \max = \sigma,$$

$$\sin 2\alpha_n=0, \quad \cos 2\alpha_n=+1, \quad \text{слѣдовательно } \alpha_n=0.$$

Для нейтральныхъ волоконъ

$$v=0, \quad \tau = \frac{T \int_0^{e_1} v d\Omega}{\beta_0 J}$$

$$\sin 2\alpha_n=1, \quad \cos 2\alpha_n=0, \quad \text{слѣдовательно } \alpha_n=45^\circ.$$

Траекторія наибольшаго сжатія касательна, поэтому, къ сжимаемому волокну, перпендикулярна къ растягиваемому, и составляетъ съ нейтральнымъ волокномъ уголъ $+45^\circ$. Во всѣхъ другихъ точкахъ сѣченія наибольшія сжатія имѣють по величинѣ и направленію значенія, заключенныя между этими предѣльными.

Траекторія наибольшаго сжатія представлена на черт. 120.

γ) Траекторія наибольшаго скалыванія.

По (289)

$$\max t = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

и по (288)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_m = \frac{\sigma}{2\tau}$$

слѣдовательно

$$\sin 2\alpha_m = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}, \quad \cos 2\alpha_m = \frac{2\tau}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}.$$

Для крайнихъ растягиваемыхъ волоконъ

$$\tau = 0, \quad \sigma = \frac{Me}{J}, \quad \max t = \frac{1}{2} \sigma = \frac{Me}{2J},$$

$$\sin 2\alpha_m = 1, \quad \cos 2\alpha_m = 0, \quad \text{слѣдовательно } \alpha_m = 45^\circ.$$

Для крайнихъ сжимаемыхъ волоконъ

$$\tau = 0, \quad \sigma = -\frac{Me_1}{J}, \quad \max t = \frac{\sigma}{2} = -\frac{Me_1}{2J}$$

$$\sin 2\alpha_m = -1, \quad \cos 2\alpha_m = 0, \quad \text{слѣдовательно } \alpha_m = -45^\circ.$$

Для нейтральныхъ волоконъ

$$v = 0, \quad \sigma = 0, \quad \tau = \frac{T}{\beta_0 J} \int_0^e v d\Omega, \quad \max t = \tau$$

$$\sin 2\alpha_m = 0, \quad \cos 2\alpha_m = 1, \quad \text{слѣдовательно } \alpha_m = 0.$$

Для всѣхъ другихъ точекъ сѣченія $\max t$ и α_m опредѣляются изъ уравненій (289) и (288).

Траекторія наибольшаго скалыванія представлена на черт. 121; она состоитъ изъ двухъ вѣтвей, сходящихся касательно въ нейтральномъ волокнѣ, и пересѣкающихъ крайнія волокна подъ угломъ 45° .

Во всѣхъ точкахъ сѣченія, котораго сгибающій моментъ равенъ нулю, $\sigma = 0$, поэтому наибольшее скалывающее напряженіе во всѣхъ точкахъ такого сѣченія параллельно оси балки, а наименьшее—перпендикулярно къ этой оси. Изъ (287) и (289) слѣдуетъ, что въ такомъ сѣченіи наибольшее нормальное напряженіе и наибольшее скалывающее имѣютъ одинаковыя значенія.

Во всѣхъ точкахъ сѣченія, котораго срывающее усиліе

$T=0$, $\tau=0$, изъ чего слѣдуетъ, что наибольшее скалывающее напряженіе во всѣхъ точкахъ такого сѣченія наклонено къ оси балки подъ угломъ 45° .

На черт. 122 представлены (приблизительно) траекторіи наибольшихъ растяженій сплошными и траекторіи наибольшихъ сжатій — пунктирными линіями, а на черт. 123 — траекторіи наибольшихъ скалываній. Изъ чертежей легко узнать, что траекторіи наибольшихъ растяженій и сжатій пересѣкаются между собою подъ прямыми углами, и что онѣ пересѣкаютъ траекторіи наибольшихъ скалываній подъ угломъ 45° .

Если черезъ траекторіи наибольшихъ растяженій и сжатій представимъ себѣ проведенными цилиндрическія поверхности, которыхъ образующія перпендикулярны къ плоскости изгиба, то въ элементахъ балки, лежащихъ въ этихъ поверхностяхъ, не дѣйствуютъ никакія скалывающія силы. Элементы одной изъ этихъ поверхностей только растягиваются, а другой — только сжимаются.

§ 100.

Наивыгоднѣйшія формы поперечныхъ сѣченій изгибаемыхъ брусьевъ. — Условія прочности требуютъ, чтобы наибольшее напряженіе, какое можетъ произвести дѣйствующая на балку нагрузка, ни на какомъ мѣстѣ не было больше допускаемаго напряженія матеріала. Размѣры поперечныхъ сѣченій балки должны быть поэтому опредѣлены такимъ образомъ, чтобы условія (290) были исполнены для всѣхъ сѣченій.

Абсолютное максимумъ нормального напряженія можетъ при нѣкоторыхъ обстоятельствахъ проявиться въ наклонныхъ элементахъ волоконъ, находящихся на небольшомъ разстояніи отъ крайнихъ. Но выше было уяснено, что это максимумъ во всѣхъ практическихъ случаяхъ такъ мало разнится отъ нормального напряженія крайняго волокна, что безъ замѣтной погрѣшности можно за наибольшее нормальное напряженіе принимать всегда напряженіе этого волокна. Если, поэтому, e и e_1 = разстояніе крайняго растягиваемаго и крайняго сжимаемаго волокна отъ нейтральной оси, то по 290, для всякаго сѣченія балки должны быть исполнены условія:

$$\begin{aligned} k_r &= \frac{Me}{J}, \\ k_d &= \frac{Me_1}{J} \quad \dots \dots \dots (298) \\ k_s &= \frac{TS_m}{\beta_0 J} \end{aligned}$$

Отношеніе $\frac{J}{e}$, зависящее только отъ размѣровъ поперечнаго сѣченія, но не зависящее отъ нагрузки, называютъ *моментомъ сопротивленія сѣченія*.

Условія (298) можно написать такъ:

$$\frac{J}{e} \geq \frac{M}{k_r}, \quad \frac{J}{e_1} \geq \frac{M}{k_d}, \quad \frac{J\beta_0}{S_m} \geq \frac{T}{k_s}.$$

Для употребляемыхъ на практикѣ формъ поперечнаго сѣченія послѣднее условіе

$$\frac{J\beta_0}{S_m} \geq \frac{T}{k_s}$$

почти всегда исполнено, если первыя два условія исполнены. Только когда ширина β_0 очень мала, можетъ оказаться нужнымъ провѣрить прочность балки на сопротивленіе скалыванію.

Когда сѣченіе симметрично по отношенію къ оси изгиба, то $e=e_1$; если k_r не равно k_d , то балку въ этомъ случаѣ нужно разсчитать на меньшую изъ двухъ величинъ k_r и k_d . Такъ, напр., если

$$k_r < k_d,$$

то расчетъ долженъ быть произведенъ по формулѣ

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k_r},$$

такъ какъ тогда будетъ

$$\frac{J}{e} > \frac{M}{k_d},$$

или

$$k_d > \frac{Me}{J}.$$

т. е. допускаемое напряженіе k_d будетъ больше напряженія, производимаго нагрузкой. Такая балка имѣла бы на сторонѣ сжатія излишнее количество матеріала.

Чтобы при данномъ количествѣ матеріала балка имѣла по возможности большое сопротивленіе, должны ея сѣченія имѣть такую форму, чтобы предѣльныя напряженія достигались на сторонѣ растяженія и на сторонѣ сжатія одновременно. Такое сѣченіе называется *сѣченіемъ равной прочности*. Сѣченіе равной прочности будетъ поэтому то, которое удовлетворяетъ слѣдующимъ двумъ уравненіямъ

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k_r}, \quad \frac{J}{e_1} = \frac{M}{k_d} (229)$$

изъ нихъ получаемъ:

$$\frac{e}{e_1} = \frac{k_r}{k_d},$$

т. е. въ стѣненіи равной прочности разстоянія крайнихъ волоконъ прямо пропорціональны прочнымъ сопротивленіямъ.

Для желѣза

$$k_r = k_d,$$

а для чугуна (приблизительно)

$$k_r = \frac{1}{2} k_d,$$

Сѣченія желѣзныхъ балокъ должны быть поэтому симметричны по отношенію къ нейтральной оси, а въ чугунныхъ балкахъ разстояніе крайнихъ растягиваемыхъ волоконъ отъ нейтральной оси должно быть вдвое меньше разстоянія крайнихъ сжимаемыхъ отъ той же оси.

Такъ какъ M измѣняется вмѣстѣ съ сѣченіемъ, то уравненія (299) дають для различныхъ сѣченій вообще неодинаковые размѣры. Когда балка имѣетъ такую форму, что условія (299) исполнены для всѣхъ ея сѣченій, то она называется *балкой постояннаго сопротивленія*.

Въ многихъ случаяхъ балка получаетъ постоянное сѣченіе. Тогда условія (299) должны быть исполнены для того сѣченія, котораго сгибающій моментъ наибольшій; прочность такой балки въ другихъ сѣченіяхъ будетъ больше требуемой. Если поэтому наибольшій сгибающій моментъ означимъ черезъ $\max M$, то для расчета призматической балки имѣемъ уравненіе:

$$\frac{J}{e} = \frac{\max M}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (300)$$

Очевидно, что форма сѣченія тѣмъ болѣе выгодна, чѣмъ больше, при одной и той же величинѣ площади, ея моментъ сопротивленія $\frac{J}{e}$. Такъ какъ этотъ моментъ—функція второй степени размѣра параллельнаго силамъ, т. е. высоты, и только—первой степени ширины, то слѣдуетъ, что увеличеніе высоты сѣченія увеличиваетъ моментъ сопротивленія въ значительно высшей степени, чѣмъ увеличеніе ширины.

Изъ формулы

$$\sigma = \frac{Mv}{J}$$

видно, что напряженіе волоконъ прямо пропорціонально ихъ

разстояніямъ отъ нейтральной оси. Такъ какъ напряженіе ни на какомъ мѣстѣ не должно быть больше k , а наибольшее напряженіе испытываютъ крайнія волокна, то слѣдуетъ, что въ сѣченіяхъ равной прочности матеріалъ работаетъ полнымъ сопротивленіемъ только въ крайнихъ волокнахъ, а напряженіе другихъ волоконъ тѣмъ меньше, чѣмъ они ближе къ нейтральной оси. Напряженіе распредѣляется поэтому и въ сѣченіи равной прочности весьма неравномѣрно, а такъ какъ наибольшая прочность при данномъ количествѣ матеріала можетъ быть достигнута только при равномѣрномъ распредѣленіи напряженія, то желательно опредѣлить такую форму сѣченія, для котораго неравномѣрность распредѣленія напряженія была бы такъ малая, какъ только возможно.

Если бы было возможно составить балку изъ двухъ горизонтальныхъ бесконечно тонкихъ полосъ (черт. 124), отстоящихъ отъ нейтральной оси на разстояніяхъ e и e_1 , опредѣляемыхъ уравненіями

$$e = \frac{k_r J}{M} \quad e_1 = \frac{k_d J}{M}$$

то напряженія во всѣхъ ея точкахъ были бы одинаковы. и равны предѣльному напряженію матеріала. Такая форма сѣченія была бы, слѣдовательно, наиболѣе выгодной.

Изъ этого разсужденія слѣдуетъ, что *сѣченіе будетъ тѣмъ болѣе выгодно, чѣмъ больше его высота, и чѣмъ болѣе оно приближается къ двумъ бесконечно тонкимъ полосамъ, параллельнымъ оси изгиба.*

Наибольшая высота сѣченія въ дѣйствительности ограничена практическими условіями. Кромѣ того, оно не можетъ состоять изъ двухъ отдѣльныхъ полосъ, такъ какъ изгибаемый брусъ долженъ удовлетворять также условію (283), обѣ полосы должны поэтому быть соединены между собою стѣнкою, которая на всякомъ мѣстѣ имѣла бы достаточное сопротивленіе проявляющимся при изгибѣ срѣзывающимъ силамъ. Наиболѣе выгодное сѣченіе будетъ слѣдовательно состоять изъ двухъ горизонтальныхъ полосъ, находящихся на возможно большемъ разстояніи другъ отъ друга, и изъ вертикальной стѣнки, соединяющей эти полосы. Этимъ условіямъ удовлетворяетъ всего лучше сѣченіе, имѣющее видъ двойнаго T , называемое *двутавровымъ* (черт. 125).

Опредѣлимъ наиболѣе выгодныя практическія формы сѣченія изгибаемыхъ балокъ изъ желѣза, чугуна и дерева.

1) *Желѣзо*. Соотвѣтственно выведеннымъ выше заключеніямъ даютъ желѣзнымъ балкамъ симметричную двутавровую форму (черт. 125). Высоту h двутавровой балки опредѣляютъ, вслѣд-

ствіе практическихъ условій, въ зависимости отъ ея расчетной длины l , при чемъ берутъ

для инженерныхъ сооружений h отъ $\frac{1}{8}l$ до $\frac{1}{16}l$, а для архитектурныхъ—до $\frac{1}{30}l$.

Если

h —высота сѣченія,

b —ширина фланцевъ или поясковъ,

δ —толщина вертикальной стѣнки, и

δ_1 —толщина фланцевъ,

то площадь сѣченія

$$\Omega = 2b\delta_1 + (h - 2\delta_1)\delta$$

и его моментъ инерціи по отношенію къ оси центра тяжести

$$J = \frac{1}{12} \left\{ b[h^3 - (h - 2\delta_1)^3] + \delta(h - 2\delta_1)^3 \right\}$$

Длина этихъ балокъ доходитъ до 14 мтр.

Размѣры поперечнаго сѣченія вычисляются по формулѣ:

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k},$$

или, такъ какъ $e = \frac{1}{2}h$,

$$\frac{2J}{h} = \frac{M}{k},$$

откуда, подставивъ для J значеніе

$$M = \frac{k}{6h} \left\{ b[h^3 - (h - 2\delta_1)^3] + \delta(h - 2\delta_1)^3 \right\}$$

Такъ какъ изъ этого уравненія можетъ быть опредѣлено только одно измѣреніе, то другія измѣренія выбираютъ соотвѣтственно практическимъ условіямъ.

Часто берутъ

$$h = 20\delta, \quad b = 10\delta, \quad \delta_1 = 1.5\delta$$

и ставятъ условіе, чтобы h не превышало 40 сантиметровъ, и δ было не менѣе $\frac{1}{20}h$.

Тогда получается:

$$M=298 \cdot 1 \delta^3 k,$$

откуда

$$\delta=0.15 \sqrt[3]{\frac{M}{k}}.$$

Получаемая изъ этого уравненія толщина δ можетъ только тогда быть приведена въ исполненіе, если она удовлетворяетъ условію (283)

$$k_s = \frac{TS_m}{\delta J}.$$

Желѣзныя прокатныя двутавровыя балки употребляются для мостовъ малыхъ пролетовъ (не болѣе 7 метр.), для половъ и потолковъ въ гражданскихъ постройкахъ и т. д. Въ виду сотрясеній берутъ за прочное сопротивленіе въ мостовыхъ сооруженіяхъ—6, а въ частяхъ съ болѣе покойной нагрузкой (въ гражданскихъ постройкахъ)—7 до 8 килогр. на 1 квадратный миллиметръ.

Кромѣ двутавроваго типа въ строительной практикѣ употребляютъ часто фасонное желѣзо другой формы сѣченія; главнѣйшія изъ этихъ формъ слѣдующія (см. табл. VIII):

- 1) однотавровое желѣзо
- 2) угловое "
- 3) цоресъ "
- 4) волнистое "
- 5) коробчатое "
- 6) корытное "
- 7) трубчатое "
- 8) Z—образное "

Къ желѣзнымъ балкамъ принадлежатъ также балки изъ литаго желѣза или мягкой стали, содержащей не болѣе 0.20% углерода, не принимающей закалки. Сопротивленіе разрыву такого желѣза—отъ 40 до 50 килогр. на 1 квадратный миллиметръ.

2. Чугунъ. Наивыгоднѣйшая форма сѣченія для чугунныхъ балокъ—двутавровая, несимметрическая относительно нейтральной оси (черт. 126). Сопротивленіе чугуна при сжатіи приблизительно вдвое больше его сопротивленія при растяженіи, вслѣдствіе чего берутъ

$$\frac{k_r}{k_d} = \frac{1}{2}.$$

Для сѣченія равной прочности, по (299),

$$\frac{e}{e_1} = \frac{k_r}{k_d} = \frac{1}{2},$$

т. е. разстояніе крайнихъ сжимаемыхъ волоконъ отъ нейтральной оси должно быть вдвое больше разстоянія крайнихъ растягиваемыхъ волоконъ отъ той же оси.

Такъ какъ

$$e + e_1 = h,$$

то

$$e = \frac{1}{3}h, \quad e_1 = \frac{2}{3}h,$$

$$M = \frac{k_r J}{e} = \frac{k_d J}{e_1}$$

$$M = \frac{3k_r J}{h} = \frac{3}{2} \frac{k_d J}{h} \quad \dots \quad (301)$$

Такъ какъ нейтральная ось проходитъ черезъ центръ тяжести сѣченія, то статическіе моменты частей сѣченія, находящихся по обѣимъ сторонамъ этой оси, равны между собою. Поэтому (черт. 126)

$$\frac{\delta e^2}{2} + b_1 \delta_1 \left(e - \frac{\delta_1}{2} \right) = \frac{\delta e_1^2}{2} + b_2 \delta_2 \left(e_1 - \frac{\delta_2}{2} \right)$$

$$\frac{\delta e^2}{2} + 2b_1 \delta_1 e - b_1 \delta_1^2 = \frac{\delta e_1^2}{2} + 2b_2 \delta_2 e_1 - b_2 \delta_2^2.$$

Подставимъ въ это уравненіе вмѣсто e_1 его значеніе $h - e$, и опредѣлимъ изъ него e , получимъ

$$e = \frac{\delta h^2 + 2b_2 \delta_2 h + b_1 \delta_1^2 - b_2 \delta_2^2}{2(\delta h + b_1 \delta_1 + b_2 \delta_2)}$$

$$e_1 = h - e = \frac{\delta h^2 + 2b_1 \delta_1 h + b_2 \delta_2^2 - b_1 \delta_1^2}{2(\delta h + b_1 \delta_1 + b_2 \delta_2)}$$

Поэтому

$$\frac{e}{e_1} = \frac{1}{2} = \frac{\delta h^2 + 2b_2 \delta_2 h + b_1 \delta_1^2 - b_2 \delta_2^2}{\delta h^2 + 2b_1 \delta_1 h + b_2 \delta_2^2 - b_1 \delta_1^2} \quad \dots \quad (302)$$

Изъ 301 и 302 можно опредѣлить двѣ неизвѣстныя, а такъ какъ число неизвѣстныхъ измѣреній 6, то четырьмя нужно задаться сообразно съ условіями практики. Чтобы отливка удалась толщина

стѣнки и фланцевъ не должна быть менѣе 7 миллиметровъ; если зададимся величинами δ , δ_1 , и δ_2 , то изъ уравненій 301 и 302 получимъ b_1 и b_2 ,

Хотя чугуныя балки дешевле желѣзныхъ, но вслѣдствіе малаго сопротивленія чугуна динамическому дѣйствію избѣгаютъ ихъ употребленія въ случаяхъ, когда на балку дѣйствуетъ подвижная нагрузка съ сотрясеніями.

Если $b_2=0$, то двутавровое сѣченіе переходитъ въ однотоуговое. Изъ предыдущихъ уравненій получимъ для тавроваго сѣченія (черт. 127)

$$J = \frac{1}{3} [(b_1 + \delta)e^3 - b_1(e - \delta_1)^3 + \delta e_1^3]$$

$$e = \frac{1}{3} h = \frac{\delta h^2 + b_1 \delta_1^2}{2(\delta h + b_1 \delta_1)}$$

$$e_1 = \frac{2}{3} h = \frac{\delta h^2 + 2b_1 \delta_1 h - b_1 \delta_1^2}{2(\delta h + b_1 \delta_1)}$$

$$M = \frac{kxJ}{e} \dots \dots \dots (301_a)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\delta h^2 + b_1 \delta_1^2}{\delta h^2 + 2b_1 \delta_1 h - b_1 \delta_1^2} \dots \dots \dots (302_a)$$

3) *Дерево*.—Дерево употребляется въ видѣ круглыхъ бревенъ или обтесанныхъ прямоугольныхъ балоковъ. Хотя обтеска уменьшаетъ сопротивленіе бревна, но она улегчаетъ сопряженіе деревянныхъ частей.

Бревна обтесываютъ такимъ образомъ, чтобы моментъ сопротивленія $\frac{J}{e}$ полученнаго обтеской сѣченія, былъ максимумъ. Такъ

какъ

$$J = \frac{1}{12} bh^3 \text{ и } e = \frac{1}{2} h,$$

то

$$W = \frac{J}{e} = \frac{1}{6} bh^2$$

Если d —діаметръ бревна на тонкомъ концѣ, то (черт. 128),

$$h^2 = d^2 - b^2,$$

слѣдовательно

$$W = \frac{1}{6} (d^2 b - b^3).$$

Ширина b , для которой W будетъ максимумъ, получается изъ условія:

$$\frac{dW}{db} = \frac{d^2 - 3b^2}{6} = 0,$$

откуда

$$b = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Поэтому

$$h = \sqrt{d^2 - b^2} = d\sqrt{\frac{2}{3}},$$

слѣдовательно

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

или

$$b:h=5:7.$$

Чтобы получить форму сѣченія, удовлетворяющую послѣднему уравненію, дѣлятъ діаметръ AB (черт. 128) на 3 равныя части, и въ точкахъ дѣленія c и d возсталяютъ къ AB перпендикуляры въ противоположныя стороны, до пересѣченія съ окружностью въ E и F . Искомый прямоугольникъ будетъ $AEBF$, потому что въ прямоугольномъ треугольникѣ AEB .

$$b^2 = AB \cdot AC = d \frac{d}{3} = \frac{d^2}{3}$$

$$h^2 = AB \cdot CB = d \frac{2}{3} d = \frac{2}{3} d^2,$$

слѣдовательно

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{7}$$

Бревно, обтесанное на форму наибольшаго сопротивленія теряетъ около 30% своего сопротивленія въ кругломъ видѣ. Для уменьшенія обтески на практикѣ замѣняютъ часто отношеніе $\frac{5}{7}$ весьма близкимъ ему отношеніемъ 3:4.

Глава VIII.

Общія формулы разсчета горизонтальных балокъ, на которыя дѣйствуетъ вертикальная нагрузка.

§ 101.

Нагрузка балокъ.—На всякую балку дѣйствуетъ *постоянная нагрузка*, состоящая изъ вѣса балки и ея принадлежностей. Въ мостовыхъ и стропильныхъ балкахъ эту нагрузку можно почти всегда принимать за равномерно распределенную по всей длинѣ балки.

Кромѣ постоянной нагрузки дѣйствуетъ часто на балку еще *временная*, дѣйствующая обыкновенно короткое время, но повторяющаяся послѣ болѣе или менѣе значительныхъ промежутковъ, какъ: движущійся по мосту поѣздъ, толпа людей и т. д. Временная нагрузка можетъ быть разсматриваема какъ равномерно распределенная по всей длинѣ только въ стропильныхъ брусьяхъ; въ мостовыхъ балкахъ наиболѣе невыгодной нагрузкой является обыкновенно система сосредоточенныхъ грузовъ, образованныхъ давленіемъ колесъ вагоновъ или повозокъ, или перемѣщающаяся по мосту равномерная нагрузка, состоящая изъ толпы людей и т. д.

Всякая нагрузка можетъ дѣйствовать непосредственно на балку, или она передается ей посредствомъ второстепенныхъ балочекъ только въ точкахъ соединенія ея съ этими балочками. Нагрузку послѣдняго случая будемъ для краткости называть *передаточной*.

Балка, закрѣпленная однимъ концомъ и свободная на другомъ.

§ 102.

Формулы разсчета.—Закрѣпленіе въ стѣнѣ можетъ быть замѣнено вертикальной силой R и моментомъ M , дѣйствующими по направленіямъ, указаннымъ на (черт. 129_а) стрѣлками.

Число неизвѣстныхъ этой балки—два: R и M ; для ихъ опре-

дѣленія условія равновѣсія даютъ два уравненія, изъ чего слѣдуетъ, что такая балка представляетъ статически опредѣленную систему. Для ея разсчета имѣются формулы, приведенныя въ § 92, въ которыхъ величины D и члены, зависящіе отъ температуры, нужно поставить равными нулю, такъ какъ перемены температуры, какъ это выше было уяснено, не имѣютъ на напряженія статически опредѣленной системы никакого вліянія.

Наибольшія напряжения этой балки получаются изъ формулъ (211_а)

$$\sigma_1 = \frac{Me_1}{J}, \quad \sigma_2 = - \frac{Me_2}{J} \quad (303)$$

а ея деформация, изъ уравненія (274_б),

$$\frac{d\delta}{dP_q} = \int \frac{M m_q dx}{EJ} \quad (304)$$

Если въ уравненіяхъ (303) поставимъ

$$\sigma_1 = k_1, \quad \sigma_2 = k_2,$$

то получимъ для опредѣленія размѣровъ поперечныхъ сѣченій уравненія:

$$k_1 = \frac{Me_1}{J}, \quad k_2 = - \frac{Me_2}{J} \quad (305)$$

Начало координатъ будемъ принимать на свободномъ концѣ A балки и первоначальную ось ея—за ось абсциссъ. Абсциссы сѣченій (точекъ оси балки) будемъ обозначать черезъ x , а точекъ приложенія груза (за которыя считаемъ точки пересѣченія направленій грузовъ съ осью балки)—черезъ ξ . Абсциссы будемъ считать положительными слѣва направо, а ординаты—снизу вверхъ (по направленію дѣйствія грузовъ). Силы будемъ считать положительными, когда онѣ дѣйствуютъ по направленію положительныхъ осей координаты, а моменты—если они вращаютъ слѣва направо (по направленію часовой стрѣлки).

§ 103.

Сгибающіе моменты.

α) Моменты отъ сосредоточеннаго груза G *). Для всякаго сѣченія, находящагося между свободнымъ концомъ и грузомъ (черт. 130)

*) Буквой P мы обозначали силы, имѣющія произвольное направленіе; буквою G означаетъ вертикальный грузъ.

$$M=0,$$

а для сѣченія между грузомъ и закрѣпленнымъ концомъ

$$M=-G(x-\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (306)$$

Для $G=1$

$$m=-(x-\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (307)$$

β) Моментъ отъ системы сосредоточенныхъ грузовъ. — Если между свободнымъ концомъ A и сѣченіемъ q находятся грузы $G_1, G_2 \dots G_q$, то моментъ въ этомъ сѣченіи (черт. 131) —

$$M_q = -G_1(x-\xi_1) - G_2(x-\xi_2) - \dots - G_q(x-\xi_q)$$

или

$$M_q = -x(G_1 + G_2 + \dots + G_q) - (G_1\xi_1 + G_2\xi_2 + \dots + G_q\xi_q).$$

Для краткости напомнимъ послѣднее уравненіе въ слѣдующемъ видѣ

$$M_q = -x \sum_1^q G - \sum_1^q G\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (308)$$

γ) Моментъ отъ непрерывной нагрузки. — Когда грузы $G_1, G_2 \dots$ и ихъ разстоянія между собою сдѣлаются безконечно малыми, то система грузовъ превращается въ непрерывную нагрузку. Если g — непрерывная нагрузка, соотвѣтствующая единицѣ длины балки, то въ уравненіи (308)

$$G=g d\xi$$

и знакъ $\sum$ превращается въ интегралъ. Поэтому для непрерывной нагрузки (черт. 132)

$$M_q = \int_{\xi=a}^{\xi=x} g d\xi (x-\xi) = x \int_a^x g d\xi + \int_a^x g \xi d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (309)$$

Если нагрузка распределена равномерно, то g — величина постоянная, и тогда (черт. 133)

$$M = gx \int_a^x d\xi + g \int_a^x \xi d\xi = gx(x-a) + g \left(\frac{x^2 - a^2}{2} \right)$$

$$M = g \frac{(x-a)^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (310)$$

Послѣднее выраженіе можно получить непосредственно помощью извѣстнаго правила, что моментъ равнодѣйствующей ра-

вень суммъ моментовъ слагающихъ. Равнодѣйствующая нагрузкѣ, лежащей на отрѣзкѣ $Aq=g(x-a)$, а ея разстояніе отъ $q = \frac{x-a}{2}$, поэтому

$$M=g(x-a)\left(\frac{x-a}{2}\right)=g\frac{(x-a)^2}{2}.$$

§ 104.

Опредѣленіе сгибающихъ моментовъ графическимъ путемъ.—Такъ какъ сгибающій моментъ сѣченія равенъ статическому моменту силъ, находящихся по одну сторону сѣченія, взятыхъ по отношенію къ его центру тяжести, то графически сгибающіе моменты получаются помощію построеній, указанныхъ въ §§ 66—68. Эти моменты для нагрузокъ, рассмотрѣнныхъ въ подлежащемъ параграфѣ, построены на черт. 130а, 131а, 132а и 133а. Если y_q —ордината веревочной линіи, соотвѣтствующая произвольной точкѣ q оси балки, отнесенная къ крайней сторонѣ aE свободного конца ея, и H —полюсное разстояніе, то сгибающій моментъ въ сѣченіи q

$$M_q=H\times y_q.$$

Ординаты y нужно измѣрять по масштабу силъ, а полюсное разстояніе H —по масштабу разстояній (по которому была отложена длина балки, или на оборотъ).

Изъ чертежей видно, что наибольшіе моменты соотвѣтствуютъ закрѣпленному концу, что поэтому напряженіе достигаетъ наибольшаго значенія въ сѣченіи B . Такое сѣченіе называютъ *опаснымъ*.

§ 105.

Упругая линія.—Если прогибъ въ точкѣ q означимъ черезъ f_q , то, по § 87,

$$\frac{d^2\delta}{dP_q^2}=f_q$$

и по (305)

$$f_q=\int_0^1 \frac{Mm_q dx}{EJ}.$$

гдѣ M —моменты, произведенные данной нагрузкой, а m —грузомъ=1, приложеннымъ къ сѣченію q , котораго прогибъ ищется.

Если на балку дѣйствуетъ одинъ только грузъ G , приложенный къ точкѣ t , то для опредѣленія f_q будемъ имѣть слѣдующія данныя:

Для сѣченій	По черт. 134 _a .	По черт. 134 .	
отъ $x=0$ до $x=v$	$M=0$	$m=0$	$\int_0^v \frac{Mm_q dx}{EJ} = 0$
„ $x=v$ „ $x=\xi$	$M=0$	$m=-(x-v)$	$\int_v^\xi \frac{Mm_q dx}{EJ} = 0$
„ $x=\xi$ „ $x=l$	$M=-G(x-\xi)$	$m=-(x-v)$	$\int_\xi^l \frac{Mm_q dx}{EJ} = \int_\xi^l \frac{G(x-\xi)(x-v) dx}{EJ}$

Слѣдовательно

$$f_q = \int_0^l \frac{Mm_q dx}{EJ} = G \int_\xi^l \frac{(x-\xi)(x-v) dx}{EJ}.$$

Для призматической балки

$$f_q = \frac{G}{EJ} \int_\xi^l (x-\xi)(x-v) dx$$

$$f_q = \frac{G}{EJ} \int_\xi^l x^2 dx - (\xi+v) \int_\xi^l x dx + v\xi \int_\xi^l dx.$$

Проинтегрировавъ это выраженіе, получаемъ послѣ соотвѣт-
ственного сокращенія

$$f_q = \frac{G(l-\xi)^2}{6EJ} (\xi - 3v + 2l) \quad . \quad . \quad . \quad (311)$$

Изъ этого уравненія получается f для всякаго v , если только
 $v < \xi$ и оно показываетъ, что упругая линія между A и t имѣетъ
видъ прямой линіи.

Для $v > \xi$ дѣйствителенъ черт. 135, по которому получаемъ:

Для сѣченій:	M	m	$\int \frac{Mm dx}{EJ}$
отъ $x=0$ до $x=\xi$	0	0	0
„ $x=\xi$ „ $x=v$	$-G(x-\xi)$	0	0
„ $x=v$ „ $x=l$	$-G(x-\xi)$	$-(x-v)$	$\int_0^l \frac{G(x-\xi)(x-v) dx}{EJ}$

Поэтому

$$f_q = G \int_0^1 \frac{(x-\xi)(x-v)dx}{EJ}$$

и для балки постоянного сѣченія

$$f_q = \frac{G}{EJ} \int_v^1 (x-\xi)(x-v)dx,$$

откуда

$$f_q = \frac{G}{6EJ} \left[v^3 - 3\xi v^2 + 3vl(2\xi - l) + l^2(2l - 3\xi) \right] \quad (312)$$

Для $v=\xi$ получаемъ какъ изъ (311), такъ и изъ (312)

$$f_t = \frac{G(l-\xi)^3}{3EJ} \quad (313)$$

Если грузъ приложенъ къ свободному концу, то $\xi=0$ и тогда по (312)

$$f_q = \frac{Gl^3}{6EJ} \left[\left(\frac{v}{l} \right)^3 - 3\frac{v}{l} + 2 \right] \quad (314)$$

Для $v=0$ получаемъ

$$f_a = \frac{Gl^3}{3EJ}.$$

Прогибъ, произведенный большимъ числомъ грузовъ, равенъ суммѣ прогибовъ, произведенныхъ каждымъ грузомъ отдѣльно, при чемъ прогибъ отъ грузовъ, находящихся между свободнымъ концомъ и рассматриваемымъ сѣченіемъ ($\xi < v$) опредѣляется по формулѣ (312), а отъ грузовъ, лежащихъ на балкѣ между этимъ сѣченіемъ и закрѣпленнымъ концомъ—по формулѣ (311). Такъ, прогибъ сѣченія q , произведенный нагрузкой, представленной на черт. 136, будетъ

$$f_q = \frac{G_1}{6EJ} \left[v^3 - 3\xi_1 v^2 + 3vl(2\xi_1 - l) + l^2(2l - 3\xi_1) \right] + \frac{G_2(l-\xi_2)^3}{3EJ} +$$

$$+ \frac{G_3(l-\xi_3)^2}{6EJ} (2l + \xi_3 - 3v) + \frac{G_4(l-\xi_4)^2}{6EJ} (2l + \xi_4 - 3v).$$

Прогибъ свободного конца

$$f_a = \frac{1}{6EJ} \left[G_1(l-\xi_1)^2(2l + \xi_1) + G_2(l-\xi_2)^2(2l + \xi_2) + G_3(l-\xi_3)^2(2l + \xi_3) + \right.$$

$$\left. + G_4(l-\xi_4)^2(2l + \xi_4) \right].$$

Уголъ вращенія.—По § 87

$$\varphi_q = \frac{d\alpha}{dM_q}$$

и по (305)

$$\varphi_q = \int_0^1 \frac{M m_q dx}{EJ}$$

гдѣ M —моменты, произведенные нагрузкой, а m_q —моментомъ=1 (т. е. парой силъ равной 1), приложеннымъ къ сѣченію q по направленію искомаго вращенія.

Если на балку дѣйствуетъ одинъ только грузъ G , то будетъ (черт. 137)

$$\text{отъ } x=0 \text{ до } x=v: M=0 \quad m_q=0 \quad \int_0^v \frac{M m_q dx}{EJ} = 0$$

$$\text{отъ } x=v \text{ до } x=\xi: M=0 \quad m_q=-1 \quad \int_v^\xi \frac{M m_q d\xi}{EJ} = 0$$

$$\text{отъ } x=\xi \text{ до } x=l: M=-G(x-\xi) \quad m_q=-1 \quad \int_\xi^l \frac{M m_q dx}{EJ} = \int_\xi^l \frac{G(x-\xi)}{EJ} 1 \cdot dx$$

поэтому

$$\varphi_q = \int_0^l \frac{M m_q dx}{EJ} = G \int_\xi^l \frac{(x-\xi) dx}{EJ} \quad (315)$$

Для призматическаго бруса

$$\varphi_q = \frac{G}{EJ} \int_\xi^l (x-\xi) dx,$$

откуда, послѣ интегрированія и соотвѣтственнаго сокращенія

$$\varphi_q = \frac{G(l-\xi)^2}{2EJ} \quad (316)$$

Это уравненіе дѣйствительно только для сѣченій, находящихся слѣва груза для ($v < \xi$); для сѣченій справа груза будетъ (черт. 138)

$$\text{отъ } x=0 \text{ до } x=\xi: M=0 \quad m_q=0$$

$$\text{отъ } x=\xi \text{ до } x=v: M=-G(x-\xi) \quad m_q=0$$

$$\text{отъ } x=v \text{ до } x=l: M=-G(x-\xi) \quad m_q=-1$$

слѣдовательно

$$\varphi_q = -\frac{G}{EJ} \int_v^1 (x - \xi) dx$$

$$\varphi_q = -\frac{G(l-v)(l+v-2\xi)}{2EJ} \quad . \quad . \quad . \quad (317)$$

Для $\xi=0$ и $v=0$

$$\varphi_a = \frac{Gl^2}{2EJ} \quad . \quad . \quad . \quad (318)$$

Примѣчаніе.—Такъ какъ

$$\varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{df}{dx},$$

то уравненія для угла вращенія могутъ быть получены изъ уравненій прогиба, взявъ ихъ производную по отношенію къ dx . Такъ, напр., производная уравненій 311 и 312 дастъ уравненія 316 и 317.

§ 106.

Прогибъ отъ непрерывной нагрузки. Длину непрерывной нагрузки будемъ обозначать черезъ λ , а начальную и конечную абсциссу ея—черезъ n и k .

Для опредѣленія уравненія упругой линіи имѣемъ (черт. 138а) отъ $x=0$ до $x=n$: $M=0$

$$x=n \quad x=k: M = - \int_n^x g d\xi (x - \xi)$$

$$x=k \quad x=l: M = - \int_n^k g d\xi (x - \xi)$$

Грузъ=1 производитъ въ сѣченіяхъ слѣва его точки приложенія моментъ $m_q=0$, а для сѣченія справа точки q

$$m_q = - (x - v).$$

Упругая линія будетъ состоять изъ трехъ частей, соотвѣствующихъ отрѣзкамъ ac , cd и db балки, изъ которыхъ только отрѣзокъ cd нагруженъ. Уравненія этихъ частей слѣдующія:
1) для отрѣзка ac ($v < n$) черт. 138а и б)

$$f_q = \int_n^k \left[\int_n^x g d\xi (x-\xi) \right] \frac{(x-v)dx}{EJ} + \int_k^l \left[\int_n^k g d\xi (x-\xi) \right] \frac{(x-v)dx}{EJ}$$

2) для отрѣзка cd ($n < v < k$) (черт. 138а и с) (319)

$$f_q = \int_v^k \left[\int_n^x g d\xi (x-\xi) \right] \frac{(x-v)dx}{EJ} + \int_k^l \left[\int_n^k g d\xi (x-\xi) \right] \frac{(x-v)dx}{EJ}$$

3) для отрѣзка db ($v > k$) (черт. 138а и d)

$$f_q = \int_v^l \left[\int_n^k g d\xi (x-\xi) \right] \frac{dx(x-v)}{EJ}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда нагрузка распределена равномерно (черт. 139)

$$\int_n^x g(x-\xi) d\xi = \frac{g}{2} (x-n)^2$$

$$\int_n^k g(x-\xi) d\xi = g(k-n) \left(x - \frac{k+n}{2} \right) = g\lambda \left(x - \frac{\lambda}{2} - n \right),$$

$$\text{гдѣ } \lambda = k - n$$

и формулы (319) получаютъ слѣдующій видъ:

$$1a) \ v < n \quad f_q = \frac{g}{2EJ} \left[\int_n^k (x-n)^2 (x-v) dx + \lambda \int_k^l (2x - \lambda - 2n) (x-v) dx \right]$$

2a) $n < v < k$

$$f_q = \frac{g}{2EJ} \left[\int_v^k (x-n)^2 (x-v) dx + \lambda \int_k^l (2x - 2n - \lambda) (x-v) dx \right]$$

3a) $v > k$

$$f_q = \frac{g\lambda}{2EJ} \int_v^l (2x - 2n - \lambda) (x-v) dx.$$

Такъ какъ въ этихъ уравненіяхъ только x —перемѣнная величина, то опредѣленіе ихъ интеграловъ не подлежитъ никакому затрудненію.

Когда равномерная нагрузка покрывает всю балку (черт. 140)

то

$$n=0 \quad k=l$$

и по 2а

$$f_q = \frac{g}{2EJ} \int_0^l x^2(x-v)dx,$$

$$f_q = \frac{gl^4}{24EJ} \left[\left(\frac{v}{l} \right)^4 - 4 \frac{v}{l} + 3 \right] \quad (320)$$

Для $v=0$

$$f_a = \frac{gl^4}{8EJ} = \frac{Gl^3}{8EJ}$$

гдѣ G —вся нагрузка балки.

Изъ (320) получимъ

$$\varphi_q = \frac{df_q}{dv} = \frac{gl^4}{24EJ} \left[4 \left(\frac{v}{l} \right)^3 - 4 \right]$$

$$\varphi_q = \frac{gl^3}{6EJ} \left[\left(\frac{v}{l} \right)^3 - 1 \right] \quad (321)$$

Для $v=0$

$$\varphi_a = \frac{gl^3}{6EJ} = \frac{Gl^2}{6EJ} \quad (322)$$

§ 108.

Построеніе упругой линіи.—Строимъ для данной нагрузки (черт. 141а) веревочный многоугольникъ (черт. 141б). Если ординаты этого многоугольника означимъ черезъ η , а его полюсное разстояніе (черт. 141б)—черезъ H , то по §. 66 моментъ въ сѣченіи q ,

$$M = H\eta.$$

Построимъ другую линію $\alpha\beta\gamma\delta$ (черт. 141б), которой ординаты въ J разъ меньше ординатъ η , гдѣ J —моменты инерціи сѣченій, соотвѣствующихъ этимъ ординатамъ. Если ординаты этой новой линіи означимъ черезъ η_1 , то

$$\eta_1 = \frac{\eta}{J} = \frac{M}{HJ}$$

Примемъ эту линію $\alpha\beta\gamma\delta$ за линію нагрузки, построимъ для нея по § 68, многоугольникъ силъ (черт. 141с), и помощію

произвольнаго полюснаго разстоянія H_1 —веревочную линію, черт. 141с. Эту линію будемъ называть *второй веревочной линіей*.

Примемъ крайнюю касательную uv этой линіи, соотвѣтствующую закреплённому концу b , за ось абсциссъ и означимъ ординаты ея точекъ черезъ η . Если m —моментъ въ сѣченіи, которому соотвѣтствуетъ ордината η , произведенный грузомъ=1, то грузъ $\eta_1 dx$ производить въ немъ моментъ $m\eta_1 dx$, а вся нагрузка представленная линіей $\alpha\beta\gamma\delta$ —моментъ,

$$\int_0^1 m\eta_1 dx.$$

Такъ какъ этотъ моментъ= $H_1\eta$, то имѣемъ уравненіе,

$$H_1\eta = \int m\eta_1 dx$$

и подставивъ для η_1 значеніе,

$$H_1\eta = \int m \frac{M}{HJ} dx$$

откуда

$$HH_1\eta = \int \frac{Mm}{J} dx \quad (323)$$

Если f —ордината упругой линіи,
то

$$f = \frac{1}{E} \int \frac{Mm}{J} dx$$

поэтому по (323)

$$f = \frac{HH_1}{E} \eta \quad (324)$$

откуда

$$\eta = \frac{E}{HH_1} f = Cf \quad (325)$$

гдѣ

$$C = \frac{E}{HH_1}$$

Изъ (325) слѣдуетъ: *Ординаты второй веревочной линіи пропорціональны ординатамъ упругой линіи*. Если ординаты второй веревочной линіи уменьшимъ въ C разъ, то получимъ упругую линію.

Съѣченіе длинныхъ балокъ измѣняютъ обыкновенно не постепенно но внезапно, такъ что балка получаетъ ступенчатый видъ. Построеніе упругой линіи для этого случая уяснимъ примѣромъ.

Положимъ что балка состоитъ изъ четырехъ призматическихъ частей ac , cd , df и fb (черт. 142 α), имѣющихъ различныя съѣченія; пусть J , J_1 , J_2 и J_3 —моменты инерціи этихъ съѣченій. (черт. 142 β).

На балку дѣйствуютъ сосредоточенные грузы G_1 , G_2 и G_3 , и непрерывная нагрузка gl , распределенная равномерно на всю длину ея.

Помощію произвольнаго полюснаго растоянія H и многоугольниковъ силъ OP и $P1$ (черт. 142 γ_1) строимъ для непрерывной нагрузки веревочную линію $\varepsilon c_1 d_1 f_1 b_1$, и для системы отдѣльныхъ грузовъ G_1 , G_2 и G_3 —веревочную линію $b_1 f_2 d_2 c_2 \varphi$. Площадь фигуры, образованной этими обѣими линіями и вертикалью $\varepsilon \varphi$ принимаемъ за площадь непрерывной неравномѣрной нагрузки, строимъ для нея многоугольникъ силъ $mc' d' f' b'$ (черт. 142 δ), принимаемъ

для нагрузки mc' , представленной площадью $\varepsilon c_1 c_2 \varphi$ (соотвѣтствующей отрѣзку ac балки) полюсное разстояніе $= J$; для нагрузки $c' d'$, представленной площадью $c_1 d_1 d_2 c_2$ (соотвѣтствующей отрѣзку cd), полюсное разстояніе $= J_1$ ($=$ моменту инерціи съѣченій этого отрѣзка) и т. д.

и строимъ веревочную линію черт. 142 δ .

Если примемъ за ось абциссъ продолженіе крайней касательной этой веревочной линіи, соотвѣтствующей закрѣпленному концу, и означимъ ея ординаты по отношенію къ этой оси черезъ η , а ординаты упругой линіи—черезъ f , то

$$f = \frac{H}{E} \eta.$$

Когда съѣченіе балки постоянно, то для построенія второй веревочной линіи принимаемъ за линію нагрузки первую веревочную линію безъ измѣненія. Въ этомъ случаѣ будетъ:

$$\eta = \frac{M}{H}$$

$$H_1 \eta = \int m y dx = \int m \frac{M}{H} dx$$

$$H_1 H \eta = \int m M dx$$

Ордината упругой линіи (стрѣлка прогиба)

$$f_q = \frac{1}{EJ} \int M m_q dx = \frac{1}{EJ} H_1 H \eta$$

или

$$f = \frac{\eta}{C_1} \quad (326)$$

гдѣ

$$C_1 = \frac{EJ}{HH_1}$$

§ 109.

Балки постоянного сопротивленія.

Наибольшее напряженіе, проявляющееся въ крайнихъ волокнахъ, пропорціонально сгибающему моменту, а такъ какъ этотъ моментъ для различныхъ точекъ оси не одинаковъ, то изъ формулы

$$\sigma_1 = \frac{Me_1}{J}$$

слѣдуетъ что въ призматической балкѣ, (для которой $\frac{e_1}{J}$ — постоянная величина) крайнія волокна испытываютъ на различныхъ мѣстахъ различныя напряженія. Когда поэтому напряженіе на томъ мѣстѣ, гдѣ моментъ M наибольшій, равняется предѣльному напряженію k , то въ другихъ мѣстахъ оно тѣмъ меньше, чѣмъ меньше соотвѣтственный моментъ M , и во всѣхъ этихъ мѣстахъ сѣченіе могло-бы быть уменьшено не нарушая прочности балки. Изъ этого слѣдуетъ что балка, имѣющая такой видъ, что напряженіе крайнихъ волоконъ достигаетъ предѣла одновременно во всѣхъ сѣченіяхъ, требовала-бы, при одной и той-же формѣ сѣченія, наименьшаго количества матеріала. Такая балка называется *балкой постоянного сопротивленія*.

Въ балкѣ постоянного сопротивленія напряженіе достигаетъ предѣла только въ крайнихъ волокнахъ; во всѣхъ другихъ волокнахъ оно тѣмъ меньше, чѣмъ они ближе къ нейтральной оси. Поэтому и въ такихъ балкахъ сопротивленіе распредѣляется на сѣченіе неравномѣрно.

Если для какихъ-либо двухъ сѣченій означимъ черезъ M и M_1 —сгибающіе моменты
 J и J_1 —моменты инерціи,
 e и e_1 —разстоянія наиболѣе напряженныхъ волоконъ, отъ нейтральной оси,

k —предѣльное (допускаемое) напряженіе, то для балки постоянного сопротивленія должны быть исполнены условія:

$$k = \frac{Me}{J} \quad k = \frac{M_1 e_1}{J_1}$$

Форма такихъ балокъ получается поэтому изъ уравненія:

$$k = \frac{Me}{J} = -\frac{M_1 e_1}{J_1} \dots \dots \dots (327)$$

Опредѣлимъ формы балокъ постояннаго сопротивленія закрѣпленныхъ однимъ концомъ и свободныхъ на другомъ, для случаевъ всего чаще встрѣчаемыхъ на практикѣ.

А. *Балка прямоугольнаго сѣченія напружена у свободного конца отдѣльнымъ грузомъ G.*—Моментъ въ этомъ случаѣ имѣетъ наибольшее значеніе въ сѣченіи у плоскости задѣлки; вслѣдствіе того отнесемъ величины M_1 , J_1 и e_1 къ закрѣпленному, а M , J и e къ произвольному другому сѣченію и означимъ ширину и высоту перваго черезъ b_1 и h_1 , а послѣдняго черезъ b и h . Считая абсциссы отъ свободного конца будемъ имѣть (чер. 143).

$$M=Gx \quad e=\frac{1}{2}h \quad J=\frac{1}{12}bh^3$$

$$M_1=Gl \quad e_1=\frac{1}{2}h_1 \quad J_1=\frac{1}{12}b_1h_1^3$$

Слѣдовательно, по (327)

$$\frac{Gx \frac{h}{2}}{\frac{1}{12}bh^3} = \frac{Gl \frac{h_1}{2}}{\frac{1}{12}b_1h_1^3}$$

откуда

$$\frac{x}{l} = \frac{bh^2}{b_1h_1^2} \dots \dots \dots (328)$$

Частные случаи.

1) *Ширина b постоянна, т. е.*

$$b=b_1.$$

Тогда по (328)

$$\frac{x}{l} = \frac{h^2}{h_1^2}$$

$$h=h_1\sqrt{\frac{x}{l}}$$

Этому уравненію соотвѣтствуетъ параболическій тупой клинъ (черт. 144).

2) *Высота h постоянна, ($h=h_1$).*

Для этого случая получаемъ изъ (328)

$$b=\frac{b_1}{l}x.$$

Балка имѣетъ форму клина (черт. 145).

3) *Сѣченія подобны между собою.*—Такъ какъ для подобныхъ сѣченій

$$\frac{h}{h_1} = \frac{b}{b_1}$$

то по (328)

$$x : l = h^3 : h_1^3$$

откуда

$$h = h_1 \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$$

Балка имѣетъ форму тупой кубическо-параболической пирамиды (черт. 146).

Если означимъ объемъ призматической балки черезъ V , а объемы балокъ, представленныхъ на чертежахъ 144, 145 и 146—черезъ V_1 , V_2 и V_3 , то

$$V = b_1 h_1 l \quad V_1 = \frac{2}{3} b_1 h_1 l \quad V_2 = \frac{1}{2} b_1 h_1 l \quad V_3 = \frac{3}{5} b_1 h_1 l$$

Поэтому

$$V : V_1 : V_2 : V_3 = 1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{3}{5} = 30 : 20 : 15 : 18.$$

Изъ этой пропорціи видно, что наименѣе матеріала требуетъ балка, изображенная на черт. 145, которая кромѣ того отличается простотой своей формы.

Прогибъ балокъ постоянной сопротивленія.—Когда призматическая балка нагружена на свободномъ концѣ грузомъ G , то прогибъ этого конца

$$f_0 = \frac{Gl^3}{3EJ}.$$

Для закрѣпленнаго сѣченія

$$M = Gl = \frac{kJ}{e_1},$$

поэтому

$$f_0 = Gl \cdot \frac{l^2}{3EJ} = \frac{kJ}{e_1} \cdot \frac{l^2}{3EJ} = \frac{k}{3} \cdot \frac{l^2}{Ee_1}$$

откуда

$$\frac{k}{E} = \frac{3e_1 f_0}{l^2}.$$

Для балки переменнаго сѣченія

$$f = \frac{1}{E} \int \frac{Mm}{J} dx$$

Если грузъ приложенъ къ свободному концу то (черт. 147)

$$f_q = -\frac{1}{E} \int_v^l \frac{M}{J} (x-v) dx$$

или, такъ какъ для балки постояннаго сѣченія.

$$\frac{M}{J} = \frac{k}{e}$$

то

$$f_q = -\frac{k}{E} \int_v^l \frac{(x-v) dx}{e} = -\frac{3f_0}{l^2} \int_v^l \frac{e_1}{e} (x-v) dx$$

Когда сѣченіе—прямоугольникъ, то

$$\frac{e_1}{e} = \frac{h_1}{h}$$

и тогда

$$f_q = -\frac{3f_0}{l^2} \int_v^l \frac{h_1}{h} (x-v) dx \quad . \quad . \quad . \quad (329)$$

Частные случаи.

1) *Ширина балки постоянна* ($b_1=b$):

Въ этомъ случаѣ

$$\frac{h_1}{h} = \sqrt{\frac{l}{x}}$$

слѣдовательно

$$f_q = -\frac{3f_0}{l^2} \int_v^l \sqrt{\frac{l}{x}} (x-v) dx = -\frac{3f_0 \sqrt{l}}{l^2} \frac{2}{3} \left[\sqrt{l} (l-3v) + 2v\sqrt{v} \right]$$

$$f_q = 2f_0 \left[1 - \frac{3v}{l} + 2 \sqrt{\left(\frac{v}{l}\right)^3} \right].$$

2) *Высота постоянна.*

Для $h=h_1$ уравненіе (329) получаетъ видъ

$$f = -\frac{3f_0}{l^2} \int_v^l (x-v) dx = -\frac{3f_0}{l^2} \frac{1}{2} (l-v)^2$$

$$f = -\frac{3}{2} f_0 \left(1 - \frac{v}{l} \right)^2.$$

3) Стыченія подобны между собою.

Такъ какъ

$$\frac{h_1}{h} = \sqrt[3]{\frac{l}{x}}$$

то по (329)

$$\begin{aligned} f &= \frac{3f_0}{l^2} \int_v^l \sqrt[3]{l} \frac{(x-v)}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3f_0 l^{\frac{1}{3}}}{l^2} \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}(x-v)}{\frac{5}{3}} + \frac{-v}{\frac{5}{3}} \int_v^l x^{-\frac{1}{3}} dx \right] \\ &= \frac{3f_0 l^{\frac{1}{3}}}{l^2} \left[\frac{3}{5} l^{\frac{2}{3}} (l-v) - \frac{9}{10} v l^{\frac{2}{3}} + \frac{9}{10} v^{\frac{5}{3}} \right] \end{aligned}$$

или

$$f = \frac{9}{5} f_0 \left[1 - \frac{5}{2} \frac{v}{l} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{\left(\frac{v}{l}\right)^3} \right]$$

Противъ свободнаго конца. Для $v=0$ получаемъ

въ случаѣ 1, $f_1=2f_0$

въ случаѣ 2 : $f_2=3/2 f_0$

въ случаѣ 3 : $f_3=9/5 f_0$.

Поэтому

$$f_1 : f_2 : f_3 = 20 : 15 : 18.$$

Изъ этого уравненія легко узнать что отношеніе прогибовъ свободнаго конца равно отношенію соответственныхъ объемовъ.

Б. Балка прямоугольнаго стыченія нагружена равномерно по всей длинѣ.

Въ этомъ случаѣ (черт. 148)

$$M = \frac{gx^2}{2} \quad M_1 = \frac{gl^2}{2}$$

слѣдовательно по (327)

$$\frac{\frac{1}{2} gx^2}{\frac{1}{6} bh^2} = \frac{\frac{1}{2} gl^2}{\frac{1}{6} b_1 h_1^2}$$

откуда

$$x^2 : l^2 = bh^2 : b_1 h_1^2 \quad \dots \quad (330)$$

Частные случаи.

1) Высота балки постоянна ($h=h_1$).

Ширина сѣченія, отстоящаго отъ свободнаго конца на разстояніи x , получается изъ уравненія:

$$b = \frac{b_1}{l^2} x^2$$

изъ котораго видно, что балка имѣетъ видъ заостреннаго параболическаго клина (черт. 149).

2) *Ширина постоянна.*

Для $b=b_1$ получаемъ изъ (329)

$$h = \frac{h_1}{l} x$$

Этому уравненію соотвѣтствуетъ форма клина (черт. 150).

3) *Когда сѣченія балки подобны то можно написать*

$$h = \frac{1}{n} h_1 \quad b = \frac{1}{n} b_1$$

и тогда, по (329)

$$h = h_1 \sqrt[3]{\left(\frac{x}{l}\right)^2}$$

Балка имѣетъ видъ пирамиды, которой грани пересѣкаются по параболамъ Нейля.

Если V_1 , V_2 и V_3 —объемы этихъ балокъ, и V —объемъ балки постояннаго сѣченія, то

$$V = b_1 h_1 l \quad V_1 = \frac{1}{3} b_1 h_1 l \quad V_2 = \frac{1}{2} b_1 h_1 l \quad V_3 = \frac{3}{7} b_1 h_1 l.$$

Поэтому

$$V : V_1 : V_2 : V_3 = 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{3}{7} = 42 : 14 : 21 : 18$$

Прогибъ балокъ постояннаго сопротивленія, нагруженныхъ равномерно по всей длинѣ.

Прогибъ своднаго конца призматической балки

$$f_0 = \frac{gl^4}{8EJ}$$

Если M_1 —моментъ закрѣпленнаго сѣченія, то

$$M_1 = \frac{gl^2}{2}$$

поэтому

$$f_0 = \frac{M_1 l^2}{4EJ}$$

Такъ какъ

$$M_1 = \frac{kJ_1}{1/2 h_1}$$

то

$$f_0 = \frac{2k}{h_1} \frac{l^2}{4E} = \frac{kl^2}{2h_1 E}$$

откуда

$$\frac{k}{e} = \frac{h}{1/2 h} = 4E \frac{f_0 h_1}{l^2 h}$$

и по (327)'

$$\frac{M}{J} = \frac{4E f_0 h_1}{l^2 h} \dots \dots \dots (331)$$

Величина прогиба сѣченія, отстоящаго отъ свободнаго конца на разстояніи x , получается изъ уравненія упругой линіи:

$$f = \frac{1}{E} \int \frac{M}{J} \cdot m dx.$$

Такъ какъ

$$m = x - v,$$

то (черт. 150)

$$f = \frac{1}{E} \int_v^l \frac{4E f_0}{l^2} \cdot \frac{h_1}{h} (x - v) dx$$

или

$$f = \frac{4f_0}{l^2} \int_v^l \frac{h_1}{h} (x - v) dx \dots \dots \dots (332)$$

1) Ширина балки постоянна. ($b=b_1$)

Въ этомъ случаѣ, по (332)

$$\frac{h_1}{h} = \frac{l}{x},$$

поэтому, по (332)

$$f = \frac{4f_0}{l^2} \int_v^l l \left(\frac{x-v}{x} \right) dx = \frac{4f_0}{l} \int_v^l \left(dx - v \frac{dx}{x} \right)$$

$$f = 4f_0 \left(1 - \frac{v}{l} + \frac{v}{l} \lg \text{nat} \frac{v}{l} \right)$$

2) Высота постоянна. ($h=h_1$)

$$f = \frac{4f_0}{l^2} \int_v^1 (x-v) dx = \frac{4f_0}{l^2} \left[\frac{x^2}{2} - vx \right]_v^1$$

$$f = 2f_0 \left(1 - \frac{v}{l} \right)^2$$

3) Сѣченія подобны.

$$\frac{h}{h_1} = \left(\frac{x}{l} \right)^{2/3}$$

$$f = \frac{4f_0}{l^2} \int_v^1 \frac{l^{2/3} (x-v)}{x^{2/3}} dx$$

$$\int x^{-\frac{2}{3}} (x-v) dx = \frac{x^{\frac{1}{3}} (x-v)}{\frac{4}{3}} + \frac{-v}{\frac{4}{3}} \int x^{-\frac{2}{3}} dx.$$

Помощію этого уравненія получаемъ легко

$$\int_v^1 x^{-\frac{2}{3}} (x-v) dx = \frac{3}{4} l l^{\frac{1}{3}} \left[1 - 4 \frac{v}{l} + \frac{3v}{l} \frac{1}{l^{\frac{1}{3}}} \right]$$

Поэтому

$$f = \frac{4f_0}{l^2} l^{\frac{2}{3}} \frac{3}{4} l l^{\frac{1}{3}} \left[1 - \frac{4v}{l} + \frac{3v}{l^{\frac{1}{3}}} \right]$$

$$f = 3f_0 \left[1 - \frac{4v}{l} + \frac{3v}{l} \sqrt[3]{\frac{v}{l}} \right]$$

Изъ предыдущихъ формулъ получаемъ что прогибъ свободнаго конца ($v=0$).

въ случаѣ 1 : $f_1 = 4f$

въ случаѣ 2 : $f_2 = 2f$

въ случаѣ 3 : $f_3 = 3f$

Графическимъ путемъ прогибъ этихъ балокъ опредѣляется по способу, указанному въ § 108.

§ 109_a.

Примѣчаніе.—Во всѣхъ случаяхъ, рассмотрѣнныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, мы пренебрегали скалывающими усиліями, стремящимися сдвинуть одно сѣченіе вдоль другого. Въ § 98 получено что наибольшее скалывающее напряженіе проявляется въ нейтральной оси, и по (294) оно равно

$$\max t = \frac{TS_m}{\beta_0 J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (294)$$

гдѣ

T —равнодѣйствующая всѣхъ внѣшнихъ силъ (включая сопротивленія опоръ) дѣйствующихъ по одну сторону разсматриваемаго сѣченія,

S_m —статическій моментъ половины сѣченія

β_0 —ширина сѣченія на оси центра тяжести

J —моментъ инерціи.

Если допускаемое напряженіе скалыванію означимъ черезъ k_s , то прочность требуетъ чтобы было исполнено условіе

$$k_s = \frac{TS_m}{\beta_0 J}.$$

Для прямоугольнаго сѣченія, котораго ширина b и высота h

$$J_m = \frac{bh}{2} \cdot \frac{1}{4} h = \frac{bh^2}{8} \quad \beta_0 = b$$

$$J = \frac{1}{12} bh^3$$

слѣдовательно

$$k_s = \frac{T \cdot \frac{bh^2}{8}}{\frac{1}{12} bh^3}$$

откуда

$$bh = \frac{3}{2} \frac{T}{k_s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (333)$$

По (305)

$$bh^2 = \frac{6M}{k}$$

$$bh = \frac{6}{h} \frac{M}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (334)$$

Балка должна получить такіе размѣры, чтобы всякое сѣченіе ея удовлетворяло уравненіямъ (333) и (334). Такъ какъ моментъ M увеличивается отъ свободнаго конца, на которомъ онъ $=0$, къ закрѣпленному, то формулу (334) слѣдуетъ употреблять начиная съ сѣченія t , для котораго

$$\frac{3}{2} \frac{T}{k_s} = \frac{6}{h} \frac{M}{k}$$

или

$$M = \frac{1}{4} \frac{k}{k_s} T h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (335)$$

Сѣченія между t и свободнымъ концомъ нужно разсчитывать по формулѣ (333).

Когда грузъ G приложенъ къ свободному концу, то

$$T = G \quad M = Gx.$$

Если x_1 —разстояніе отъ свободнаго конца того сѣченія, до котораго слѣдуетъ употреблять формулу 333, то по (335)

$$Gx_1 = \frac{1}{4} \frac{k}{k_s} Gh.$$

Для желѣза

$$\frac{k}{k_s} = \frac{5}{4}$$

слѣдовательно

$$x_1 = \frac{5}{16} h. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (336)$$

Когда балка нагружена равномерно, то

$$T = gx \quad M = \frac{gx^2}{2}$$

поэтому, для желѣза

$$\frac{gx^2_1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} gx_1 \cdot h$$

откуда

$$x_1 = \frac{5}{8} h. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (337)$$

Изъ (336) и (337) видно, что въ обоихъ случаяхъ сѣченія, начиная съ котораго слѣдуетъ употреблять формулу изгиба, находится на весьма близкомъ разстояніи отъ свободнаго конца.

§ 110.

Примѣры.

1.—Опредѣлить нагрузку дубовой балки длиной 1·4 метр., закрѣпленной однимъ концомъ и свободной на другомъ, которой прямоугольное сѣченіе имѣетъ ширину 11 см., и высоту 20 см.

По (305)

$$M = Gl = k \frac{bh^2}{6}$$

Принимая

$$k = 120 \text{ кил. на 1 квадрат. см.}$$

получимъ

$$G \cdot 140 = \frac{120 \cdot 11 \cdot 20^2}{6}$$

откуда

$$G = 628 \cdot 6 \text{ кил.}$$

2.—Опредѣлить высоту поперечнаго сѣченія желѣзной полосы, которой длина 1·5 мтр., и ширина 3 см., закрѣпленной однимъ концомъ, и нагруженной на другомъ концѣ грузомъ = 1000 кил.

По (305), для $k = 800$ кил. на 1 кв. см.

$$1000 \times 150 = \frac{800 \cdot 3 \cdot h^2}{6}$$

откуда

$$h = 19 \cdot 4 \text{ см.}$$

Опредѣлить величину прогиба свободнаго конца этой полосы.

По формулѣ

$$f = \frac{Gl^3}{3EJ}$$

имѣемъ

$$f = \frac{1000 \cdot 150^3}{3 \cdot 2000000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 19 \cdot 4^3} = 0 \cdot 31 \text{ см.}$$

3.—На концахъ колѣчататаго желѣзнаго рычага AOB (черт. 251) дѣйствуетъ сила 500 кил. попеременно въ ту и другую сторону. Сѣченіе рычага прямоугольное, котораго высота вдвое меньше ширины. Определить размѣры опаснаго сѣченія (черт. 251)

Такъ какъ предѣльные напряжения равны и противоположны, то по (67)

$$k = \frac{7}{1 + 0 \cdot 4} = 5 \text{ кил. на 1 } qmm$$

$$M = k \frac{bh^2}{6} = \frac{kh^3}{18}$$

$$\frac{500 \times 450}{5} = \frac{h^3}{18}$$

$$h = 93 \text{ mm} \quad b = \frac{1}{3}h = 31 \text{ mm.}$$

4.—Опредѣлить напряженіе зубцовъ чугунной шестерни, передающей давленіе 1600 кил., если длина зуба 120, ширина 40, и высота—60 миллиметровъ. (черт. 252)

Наибольшій моментъ

$$M_{\text{max}} = 1600 \times 60$$

поэтому

$$k = \frac{M_e}{J} = \frac{1600 \cdot 60 \cdot 20}{\frac{1}{12} 120 \cdot 40^3} = 3 \text{ кил. на } 1 \text{ qmm}$$

5.—Требуется опредѣлить величину безопасной равномерной нагрузки для сосновой балки, которой свободная длина 3 метр., а сѣченіе имѣетъ высоту 20 см. и ширину 15 см.

Кромѣ искомой нагрузки G балка должна нести также собственный вѣсъ Q . Если γ —удѣльный вѣсъ дерева,

то

$$Q = \gamma \cdot bhl$$

и по формулѣ

$$M = (G + \gamma bhl) \frac{l}{2} = \frac{k b h^2}{6}$$

получимъ, принимая $k = 70$ кил. на 1 qcm

$$(G + 0.4 \cdot 3.0 \cdot 15.0 \cdot 20) \frac{300}{2} = \frac{70 \cdot 15 \cdot 20^2}{6}$$

откуда

$$G = 430.6 \text{ кил.}$$

Прогибъ свободного конца

$$f = \frac{(G + Q) l^3}{8 E J} = \frac{466 \cdot 300^3}{8 \cdot 2000000 \cdot \frac{15 \cdot 20^3}{12}} = 1.3 \text{ см.}$$

6.—Опредѣлить равномерную нагрузку для чугунной балки, которой, сѣченіе представлено на черт. 253. Длина балки 1 метр.

Разстояніе оси центра тяжести отъ верхняго крайняго волокна, по правилу статическихъ моментовъ,

$$e_1 = \frac{12 \cdot 2 \cdot 1 + 28 \cdot 2 \cdot \left(\frac{28}{2} + 2\right)}{12 \cdot 2 + 28 \cdot 2} = 11 \cdot 5 \text{ ст.}$$

$$e_2 = 30 - 11 \cdot 5 = 18 \cdot 5$$

$$J = \frac{1}{3} (12 \cdot 11 \cdot 5^3 - 10 \cdot 9 \cdot 5^3 + 2 \cdot 18 \cdot 5^3) = 7447$$

Напряженіе крайнихъ верхнихъ волоконъ

$$\sigma_1 = \frac{M e_1}{J}$$

а крайнихъ нижнихъ

$$\sigma_2 = \frac{M e_2}{J}$$

Если k_1 — допускаемое напряженіе растяженію, и k_2 — сжатію, то должно

$$\sigma_1 \leq k_1 \text{ и } \sigma_2 \leq k_2$$

слѣдовательно, одновременно должны быть исполнены условія:

$$\frac{M e_1}{J} \leq k_1 \text{ и } \frac{M e_2}{J} \leq k_2$$

или

$$\frac{M}{J} \leq \frac{k_1}{e_1} \text{ и } \frac{M}{J} \leq \frac{k_2}{e_2}$$

Если $\frac{k_1}{e_1} < \frac{k_2}{e_2}$, то оба условія будутъ исполнены, когда

$$\frac{M}{J} = \frac{k_1}{e_1}$$

въ противномъ случаѣ должно

$$\frac{M}{J} = \frac{k_2}{e_2}$$

Принимая для чугуна

$$k_1 = 250 \text{ и}$$

$$k_2 = 500 \text{ кил. на 1 } qst$$

будемъ имѣть для даннаго сѣченія (черт. 253) предполагая, что горизонтальный фланецъ находится на сторонѣ растяженія,

$$\frac{k_1}{e_1} = \frac{250}{11 \cdot 5} \sim 21 \cdot 7 \quad \frac{k_2}{e_2} = \frac{500}{18 \cdot 5} \sim 27$$

Такъ какъ въ этомъ случаѣ $\frac{k_1}{e_1} < \frac{k_2}{e_2}$, то искомая нагрузка получится по формулѣ

$$M = \frac{Gl}{2} = \frac{k_1 J}{e_1}$$

$$G \cdot \frac{100}{2} = \frac{250.7447}{11.5}$$

откуда

$$G = 3236 \text{ кил.}$$

7.—Вывести формулы для расчета пружины постоянного сопротивленія.

Пружина находится въ состояніи балки, закрѣпленной однимъ концомъ, и нагруженной на другомъ. Такъ какъ толщина пружины постоянная ($h=h_1$), то для постоянного сопротивленія она должна получить треугольный видъ (черт. 254). Основаніе b этого треугольника получается изъ уравненія:

$$Gl = \frac{k b h^2}{6}$$

Прогибъ свободного конца

$$f = \frac{Gl^3}{2EJ} = \frac{Gl^3}{2E \frac{1}{12} b h^3} = \frac{6Gl^3}{E b h^3} = \frac{k l^2}{E h}$$

Раздѣлимъ основаніе b на $2n$ равныхъ частей, и разобьемъ треугольникъ сѣченіями $aa_1, bb_1, cc_1, \dots$, проведенными черезъ точки дѣленія перпендикулярно къ основанію, на полосы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Сложимъ полосы γ и γ_1 въ одну полосу C , и положимъ ее подъ δ ; полосы β и β_1 —въ полосу B , и положимъ ее подъ C , и т. д. Такимъ образомъ получимъ пружину, представленную на (черт. 154b) которой крѣпость будетъ очевидно точно такая, какъ данной треугольной пружины. Если означимъ ширину полосъ $A, B, \dots$ черезъ b_1 , а толщину—черезъ h , то

$$Gl = \frac{k n b_1 h^2}{6}$$

Изъ этой формулы можно при данныхъ b_1 и h опредѣлить число n полосъ. Длины отдѣльныхъ полосъ получаются построениемъ треугольника (черт. 154).

Прогибъ

$$f = \frac{k l^2}{E h}$$

Если прогибъ данъ, то изъ послѣдней формулы опредѣляютъ h , и затѣмъ, принявъ соотвѣтственно ширину e —число полосъ n .

Изображенную на (черт. 155) рессору можно себѣ представить состоящей изъ двухъ такихъ пружинъ, и рассчитать каждую половину по предыдущимъ формуламъ.

§ 111.

Подвижная нагрузка. Инфлуэнтная линія сгибающихъ моментовъ.—Напряжение крайнихъ волоконъ опредѣляется выраженіемъ

$$\sigma = \frac{Me}{J}$$

въ которомъ при измѣненіи положенія нагрузки, измѣняется только моментъ M . Въ данномъ сѣченіи будетъ, поэтому, дѣйствовать наибольшее или наименьшее напряжение тогда, когда нагрузка имѣетъ на балкѣ такое положеніе, что производимый ее въ этомъ сѣченіи моментъ достигнетъ своихъ предѣльныхъ значеній. Это положеніе опредѣляется всего проще помощію инфлуэнтной линіи.

Когда грузъ $=1$ находится между сѣченіемъ q , для котораго требуется построить инфлуэнтную линію, и свободнымъ концомъ, то производимый имъ въ q моментъ (черт. 156).

$$m = v - \xi$$

а когда между этимъ сѣченіемъ и закрѣпленнымъ концомъ, то

$$m = 0$$

Инфлуэнтная линія моментовъ есть, поэтому, прямая, проходящая черезъ точку q , которой ордината на свободномъ концѣ равна v .

Изъ формы инфлуэнтной линіи легко вывести слѣдующія заключенія:

1) Система сосредоточенныхъ грузовъ производитъ въ сѣченіи наибольшій моментъ тогда, когда наиболѣе тяжелые грузы находятся по возможности близко къ свободному концу балки, и когда на балкѣ лежитъ возможно большое число грузовъ.

2) Нагрузка, находящаяся между сѣченіемъ и закрѣпленнымъ концомъ, не имѣетъ на моментъ въ сѣченіи никакого вліянія.

3) Непрерывная равномерная нагрузка, покрывающая всю длину балки, производитъ одновременно во всѣхъ сѣченіяхъ наибольшіе моменты.

4) Такъ какъ грузъ, гдѣ-бы онъ ни находился на балкѣ, производитъ въ сѣченіи только положительный (или только отрицательный) моментъ, то наименьшіе моменты сѣченій равны нулю.

ПРИЛОЖЕНІЯ.

ТАБЛИЦА I.
модулей упругости E.

МАТЕРІАЛЪ.	Модуль упругости.	
	Въ килогр. на 1 квд. сантимет.	Въ пудахъ на 1 кв. дюймъ.
Алюминій	675000	266000
Бронза	690000	272000
Букъ.	92100	36400
Дубъ, по направл. волоконъ .	117000	
порадіальному напр. . . .	1300	46200
" по касательному напр. .	800	513
Желѣзо полосовое	2000000	316
" листовое	1800000	780000
Желѣзная проволока	2100000	710000
Золото	800000	830000
Кожанные ремни	730	316000
Латунь.	640000	288
Латунная проволока	987000	252000
Мѣдь красная	1070000	389000
Мѣдные листы.	1070000	422000
Мѣдная проволока	1200000	422000
Олово, литое и прокатное . .	400000	470000
Платина	1600000	158000
Свинець	50000	631000
Свинцовая проволока	70000	20000
Сосна, ель, по напр. волоконъ.	100000	27500
" " " " радіальн	1100	39000
" " " " касателън.	650	430
Стекло.	700000	165
Сталь, не закаленная	2046780	275000
" закаленная	2250000	810000
" литая, незакаленная . .	2500000	890000
" " закаленная.	3000000	980000
Серебро	730000	1180000
Цинкъ, литой	950000	288000
Чугунъ, при растяженіи . . .	1000000	375000
" при сжатіи	990000	395000
Ясень	98500	390000
		38800

ТАБЛИЦА П.
степеней прочности.

МАТЕРИАЛЪ.	Времен- ныя, крат- ко срочныя постройки.	Зданія и постройки вообще.	Строитель- ныя и мос- товые соо- руженія.	Сооруже- нія подвер- гаемыя сильнымъ сотрясені- ямъ (части машинъ).
Желѣзо полосовое	3	4	5—6	7—8
„ листовое	—	4—6	5—7	7—8
Сталь (вообще)	3	4	5—6	7—8
Чугунъ	4	5 7	7—9	10
Дерево.	6	9—10	10—12	15
Камень естественный.	10	20	30	35
„ искусственный.	8	15	20	25
Канаты и ремни.	4	5	6	10

ТАБЛИЦА III.

а) Въ килгр. на квадр. миллиметръ.

МАТЕРІАЛЫ.	Временныя краткосрочныя постройки.			Зданія и постройки вообще.			Стропильныя и мостовыя сооруженія вообще.			Сооруженія подвергаемыя сильнымъ сотрясеніямъ [детали машинъ].		
	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.
Желѣзо полосовое. . . .	11	11	9	8·5	8·5	7·5	7—6	7—6	6—5	5	5	4
„ листовое. . . .	—	—	—	7·5	7·5	6	7—6	7—6	5·5—4·5	3	3	2·4
Желѣзная проволока. . .	—	—	—	12	—	—	12—10	—	—	8	—	—
Сталь обыкновен. мягкая.	—	—	—	13	13	8	10—9	10—9	8—7	7	7	5·5
„ „ закаленная.	—	—	—	—	—	—	15—12	15—12	12—9·5	10	10	8
„ литая.	—	—	—	25	25	—	18—13	18—13	15—12	14	14	11
Чугунъ.	3	7·5	2·4	2·5	5	2	2—1·6	10—5	2·2—1·5	1·3	3	1
Дубъ } по направ.	1·3	1·2	0·15	0·9	0·7	0·1	0·8	0·65	0·08	0·6	0·5	0·06
Хвойный лѣсъ } волоконъ.	1·2	1	0·1	0·7	0·6	0·07	0·6	0·5	0·05	0·5	0·4	0·04
Кладка изъ известняка .	—	0·5	—	—	0·25	—	—	0·15	—	—	0·1	—
„ „ песчаника. .	—	0·2	—	—	0·1	—	—	0·07	—	—	0·05	—
„ „ кирпича. . .	—	0·06	—	—	0·03	—	—	0·02	—	—	—	—

б) Въ пудахъ на квадр. дюймъ.

МАТЕРІАЛЫ.	Временныя краткосрочныя сооруженія.			Зданія и постройки вообще.			Стропильныя и мостовыя сооруженія вообще.			Сооруженія подвергаемыя сильнымъ сотрясеніямъ [детали машинъ].		
	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.
Желѣзо полосовое. . . .	430	430	360	330	330	300	270—230	270—230	230—200	200	200	160
„ листовое. . . .	—	—	—	300	300	240	270—230	270—230	220—180	120	120	195
Желѣзная проволока. . .	—	—	—	470	—	—	470—400	—	—	320	—	—
Сталь обыкновен. мягкая	—	—	—	510	510	320	400—350	400—350	320—280	280	280	220
„ „ закаленная	—	—	—	—	—	—	590—470	590—470	470—370	400	400	320
„ литая.	—	—	—	1000	1000	—	710—510	710—510	590—470	550	550	430
Чугунъ.	120	300	95	100	200	79	79—63	400—200	87—59	51	120	40
Дубъ } по напр.	51	47	6	35	28	4	32	26	3·2	24	20	2·4
Хвойный лѣсъ } волоконъ.	47	40	4	28	24	2·8	24	20	2	20	16	1·6
Кладка изъ известняка .	—	20	—	—	10	—	—	6	—	—	4	—
„ „ песчаника. .	—	8	—	—	4	—	—	2·8	—	—	2	—
„ „ кирпича. . .	—	2·4	—	—	1·2	—	—	0·8	—	—	—	—

ТАБЛИЦА III а)
а) Въ килогр. на 1 квдр. миллиметръ

Материалъ.	Допускаемое напряженіе.			Предѣлъ упру- гости.			Модуль крѣ- пости.			Модуль уп- ругости.		Измѣненіе длины при предѣлѣ уп- ругости.		Удѣльн. вѣсъ.
	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе и сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	
Металлы.														
Алюминій	—	—	—	—	—	—	20·3	—	—	6750	2531	—	—	2·5
Бронза	—	—	—	2·1	—	—	23	—	—	6900	—	—	—	8·4
Желѣзо полосовое	7	7	5·8	14	14	10·7	40	38	35	20000	7600	0·0007	0·0007	7·78
„ лист., прок.	7	7	5·8	14	14	10·7	33	30	27·5	18000	6600	0·0008	0·0008	7·78
„ — прок.	—	—	—	12·5	12·5	9·4	33	29	26	18000	—	—	—	7·78
Желѣзная прово- лока.	12	—	—	26	—	—	63	—	—	21000	7600	0·0012	—	7·75
Латунь	2·5	—	1·9	4·85	—	3·64	12·5	7·6	—	6400	2500	0·00076	—	8·55
Латунная прово- лока	6·6	—	5	13·3	—	—	36·5	—	—	9870	—	0·00135	—	8·53
Мѣдь красная . .	6·6	6·6	5	14	14	10·5	21	41	—	10700	4010	0·0013	0·0013	8·88
Мѣдная проволока	6·6	—	—	12	—	—	40·6	—	—	12000	4840	0·001	—	8·89
Мѣдные листы. . .	2·5	2	1·5	3	2·75	2	—	—	—	10700	4280	0·00028	0·00025	8·79
Олово литое. . . .	0·6	—	—	—	—	—	3·3	—	—	4000	1400	—	—	7·24
Свинець.	0·17	—	—	1·03	—	—	1·3	5·1	—	500	187	0·0021	—	11·4
Свинцовая прово- лока.	—	—	—	0·47	—	—	2·2	—	—	700	262·5	0·00067	—	11·4
Сталь обыкновен- ная, цементная .	13·5	13·5	10·3	28	28	23	63	60	43	22000	8400	0·0012	—	7·6
Сталь литая. . . .	30	30	22	51	—	40	80	100	65	25000	10400	0·0022	—	7·85
„ пружинная. . .	32·2	32·2	24·2	64	—	48	—	—	—	21500	8600	—	—	7·85
Стальная прово- лока.	19·2	—	—	40	—	—	100	—	—	28000	11200	—	—	7·8
Цинкъ литой . . .	0·87	—	—	2·3	—	—	5·3	—	—	9500	3600	0·00024	—	7·03
Чугунъ сѣрый. . .	2·5	5—7	1·9	6·8	15	5	12·7	75	18	10000	3800	0·00075	0·0015	7·25
Дерево.														
Букъ 	1·2	0·66	0·06	1·72	1·8	—	10	6·3	0·66	921	120	0·00176	0·0016	0·74—0·95
„ —	—	0·36	—	—	—	—	0·73	3·5	—	—	—	—	—	—
Дубъ 	1·1	0·66	0·07	2·7	1·8	—	10	6	0·79	1170	76	0·00233	0·0015	0·74—8·97
„ —	—	0·36	—	—	—	—	0·51	3·5	0·9	—	—	—	—	—
Ель 	0·7	0·44	—	2·6	1·9	—	8·9	4·6	0·42	1270	67	0·0018	0·00145	0·56—0·69
„ —	—	0·22	—	—	—	—	0·48	2·2	0·67	—	—	—	—	—
Лиственница . . .	—	—	—	3·2	2·4	—	11·3	5·65	—	1300	—	0·0024	0·0018	0·56
Пихта 	—	—	—	2·3	1·7	—	8	4	—	1200	—	0·0019	0·0014	0·48—0·7
Сосна 	0·7	0·44	0·04	2·56	2·15	—	11	5	0·42	1000	70	0·00213	0·0017	0·48—0·7
„ —	—	0·22	—	—	—	—	0·48	2·2	—	—	—	—	—	—
Ясень 	1·2	0·66	—	2·58	—	—	11	6·6	—	985	—	0·0026	—	0·753
„ —	—	0·36	—	—	—	—	—	3·5	—	—	—	—	—	—

Въ килограммахъ на 1 квадрат. миллиметръ.

МАТЕРІАЛЫ.	Допускаемое напря- женіе.			Предѣлъ упруго- сти.			Модуль крѣпости.			Модуль упруго- сти.		Удѣль- ный вѣсъ
	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе и сжатіе.	Скалываніе.	
Камни, растворы, наменная кладка.												
Базальтъ . . .	—	0.76	—	—	—	—	10.20	—	—	—	—	3.05
Бетонъ на ра- створѣ изъ гид- равлич. изве- сти	—	0.04	—	—	—	—	0.4	—	—	—	—	2.3
Гипсъ	—	0.06	—	—	—	—	0.6	—	—	—	—	2.3
Гнейсъ	—	0.45	—	—	—	—	4—8.7	—	—	—	—	2.75
Гранитъ	—	0.45	—	—	—	—	4—10	—	—	—	—	2.75
Доломитъ	—	0.4	—	—	—	—	4.5	—	—	—	—	2.86
Известнякъ	—	0.3	—	—	—	—	3.6—16	—	—	—	—	2.65
Кирпичъ кра- сный	—	0.08—0.16	—	—	—	—	0.61—1.6	—	—	—	—	1.85—2.2
Кирпичъ машин- ный	—	0.3	—	—	—	—	2—2.3	—	—	—	—	2—2.2
Клинкеръ	—	0.15	—	—	—	—	1.5—7	—	—	—	—	1.52—2.29
Кладка изъ кир- пича	—	0.1	—	—	—	—	0.4—2	—	—	—	—	1.63
Кладка изъ из- вестняка	—	0.3	—	—	—	—	1.46—4	—	—	—	—	2.12
Кладка изъ пе- счаника	—	1.5	—	—	—	—	1.5—5	—	—	—	—	2.085
Лабрадоръ	—	0.8	—	—	—	—	8	—	—	—	—	—
Мраморъ	—	0.2	—	—	—	—	2.3—8	—	—	—	—	2.68
Песчаникъ	—	0.2	—	—	—	0.6	1.5—7	—	—	—	—	2.3
Порфиръ	—	0.4	—	—	—	—	8—20	—	—	—	—	2.4—2.8
Растворъ возду- шный	—	0.04	—	—	—	0.04	0.4	—	—	—	—	1.75
Растворъ гид- равлическій	—	0.04	—	—	—	0.07—0.15	0.4	—	—	—	—	1.75
Растворъ цемен- тный	0.02	0.15	—	—	—	0.09—0.2	1.5	—	—	—	—	1.75
Растворъ изъ пущоланы	—	0.03	—	—	—	—	0.37	—	—	—	—	1.7
Стекло	—	—	—	—	—	2.48	2.5	70	—	—	—	2.64—3.78
Канаты, цѣпи, ремни.												
Цѣпковые кан- маты	0.8—11	—	—	—	—	6.1—0.025d	—	—	—	—	—	—
Проволочные, жѣзные кан- маты	6.75—12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Обыкновенные жѣзные цѣ- пи	6.3	—	—	—	—	20	—	—	—	—	—	—
Кожанные, ма- шинные ремни.	0.225	—	—	1.6	—	2.0	—	—	17.5	—	—	—

6) Въ пудахъ на 1 квадрат. дюймъ.

МАТЕРІАЛЫ.

МЕТАЛЛЫ.

	Допускаемое на- пряженіе.			Предѣлъ упругости.			Модуль крѣпости.			Модуль упру- ги. сти.	
	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе и сжатіе.	Скалываніе.
Алюминій.	—	—	—	—	—	—	800	—	—	266000	100000
Бронза	—	—	—	88	—	—	867	—	—	272000	—
Желѣзо полосовое	276	276	230	550	550	420	1580	1500	1400	790000	300000
„ листовое по прокатк.	276	276	230	550	550	420	1300	1200	1100	710000	260000
„ „ ⊥ по прокатк.	—	—	—	490	490	370	1300	1140	1020	710000	—
Желѣзная проволока	470	—	—	1000	—	—	2500	—	—	830000	300000
Латунь	1000	—	750	190	—	144	490	300	—	252000	100000
Латунная проволока	260	—	200	520	—	—	1050	—	—	389000	155000
Мѣдь красная	260	260	200	550	550	414	830	1600	—	422000	158000
Мѣдная проволока	260	—	—	470	—	—	1600	—	—	470000	190000
Мѣдные листы	100	79	59	120	109	79	—	—	—	422000	169000
Олово литое	24	—	—	—	—	—	130	—	—	158000	55000
Свинецъ	6·7	—	—	40	—	—	51	200	—	20000	7400
Свинцовая проволока.	—	—	—	18·5	—	—	87	—	—	27600	6650
Сталь цементная	530	530	400	1100	1100	900	2500	2360	1700	865000	330000
„ литая.	1180	1180	870	2000	—	1600	3200	4000	2500	980000	410000
„ пружинная.	1270	1270	990	2500	—	1900	—	—	—	850000	340000
Стальная проволока.	750	—	—	1580	—	—	4000	—	—	1100000	440000
Цинкъ литой.	34	—	—	90	—	—	210	—	—	370000	140000
Чугунъ сѣрый	98	200—270	79	270	600	200	500	2960	700	394000	150000

ДЕРЕВО.

Букъ волокн.	47	26	2·5	67	71	—	400	250	26	36400	4700
„ ⊥	—	14	—	—	—	—	29	138	—	—	—
Дубъ 	43	26	2·7	180	71	—	400	240	31	46200	3000
„ ⊥	—	14·4	—	—	—	—	20	138	35	—	—
Ель 	27·6	17·4	—	105	75	—	350	180	16·6	50000	2640
„ ⊥	—	8·7	—	—	—	—	19	87	26·4	—	—
Лиственница	—	—	—	126	94	—	445	222	—	51000	—
Пихта 	—	—	—	91	67	—	316	158	—	47000	—
Сосна 	27·6	17·4	1·6	100	85	—	430	200	16·5	39000	2760
„ ⊥	—	8·7	—	—	—	—	19	87	—	—	—
Ясень 	47	26	—	110	—	—	440	260	—	38800	—
„ ⊥	—	14·4	—	—	—	—	—	13·8	—	—	—

Въ пудахъ на 1 квадр. дюймъ.

Матеріаль.	Допускаемое на- пряженіе.			Предѣлъ упругости.			Модуль крѣпости.			Модуль упру- гости.	
	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе и сжатіе.	Скалываніе.
Камни, растворы каменная кладка.											
Базальтъ.	—	30	—	—	—	—	—	400—800	—	—	—
Бетонъ на растворѣ изъ гидравл. извести. . . .	—	1·6	—	—	—	—	—	16	—	—	—
Гипсъ	—	2·4	—	—	—	—	—	24	—	—	—
Гнейсъ	—	18	—	—	—	—	—	160—340	—	—	—
Гранитъ	—	18	—	—	—	—	—	160—400	—	—	—
Доломитъ	—	17	—	—	—	—	—	170	—	—	—
Известнякъ	—	12	—	—	—	—	—	180—630	—	—	—
Кирпичъ красный	—	3—6	—	—	—	—	—	24—63	—	—	—
„ машинный	—	12	—	—	—	—	—	79—91	—	—	—
Клинкеръ	—	5·9	—	—	—	—	—	59—270	—	—	—
Кладка изъ кирпича. . .	—	4	—	—	—	—	—	16—79	—	—	—
„ „ известняка.	—	12	—	—	—	—	—	57—160	—	—	—
„ „ песчаника	—	59	—	—	—	—	—	60—200	—	—	—
Лабрадоръ	—	32	—	—	—	—	—	320	—	—	—
Мраморъ	—	7·9	—	—	—	—	—	90—320	—	—	—
Песчаникъ	—	7·9	—	—	—	—	24	59—280	—	—	—
Порфиръ	—	16	—	—	—	—	—	320—790	—	—	—
Растворъ воздушный. . .	—	1·6	—	—	—	—	1·6	16	—	—	—
„ гидравлическ.	—	1·6	—	—	—	—	2·7—6	16	—	—	—
„ цементный.	0·8	5·9	—	—	—	—	3·5—7·9	59	—	—	—
„ изъ пуццоланы.	—	1·2	—	—	—	—	—	15	—	—	—
Стекло.	—	—	—	—	—	—	98	—	—	2760	—
Канаты, цѣпи, ремни.											
Пеньковые канаты. . . .	32—43	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Желѣзные проволочные ка- наты.	266—470	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Обыкновенныя желѣзныя цѣпи.	250	—	—	—	—	—	790	—	—	—	—
Кожаные машинные ремни.	8·8	—	—	59	—	—	79	—	—	—	—

Т а б л и ц а VIII.

J — моментъ инерціи по отношенію къ оси центра тяжести
 e — разстояніе верхняго волокна отъ той же оси
 Ω — площадь.



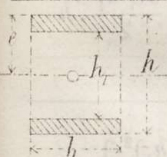
$$J = \frac{1}{12} b h^3 \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = b h$$



$$J = \frac{1}{12} b^4 \quad e = \frac{b}{2} \quad \Omega = b^2$$



$$J = \frac{1}{12} b^4 \quad e = \frac{b}{\sqrt{2}} \quad \Omega = b^2$$



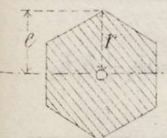
$$J = \frac{1}{12} b (h^3 - h_1^3) \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = b(h - h_1)$$



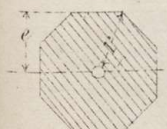
$$J = \frac{b h^3}{36} \quad e = \frac{2}{3} h \quad \Omega = \frac{b h}{2}$$



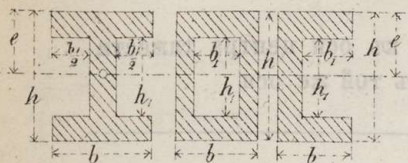
$$J = 0.5413 r^4 \quad e = 0.866 r \quad \Omega = 2.598 r^2$$



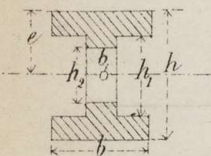
$$J = 0.5413 r^4 \quad e = r \quad \Omega = 2.598 r^2$$



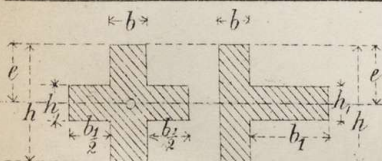
$$J = 0.638 r^4 \quad e = 0.924 r \quad \Omega = 2.828 r^2$$



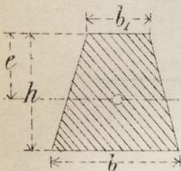
$$J = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12} \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = bh - b_1h_1$$



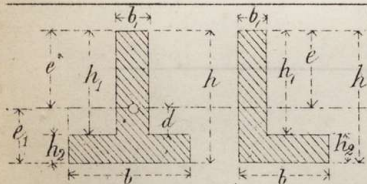
$$J = \frac{1}{12} [bh^3 - (b - b_1)h_1^3] \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = bh - (b - b_1)h_1$$



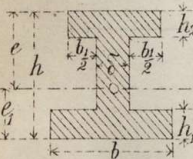
$$J = \frac{1}{12} (bh^3 + b_1h_1^3) \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = bh + b_1h_1$$



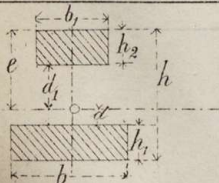
$$J = \frac{b^2 + 4bb_1 + b_1^2}{36(b + b_1)} \quad e = \frac{2b + b_1}{b + b_1} \cdot \frac{h}{3} \quad \Omega = \frac{b + b_1}{2} \cdot h$$



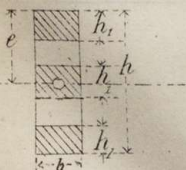
$$J = \frac{1}{12} \left[\frac{(bh^2 - b_1h_1^2)^2}{bh - b_1h_1} - \frac{4bb_1h_1(h - h_1)^2}{bh - b_1h_1} \right] \\ e_1 = \frac{bh_2^2 + b_1h_1(h + h_2)}{2[bh - (b - b_1)h_1]} \quad e = h - e_1 \quad \Omega = b_1h_1 + bh_2$$



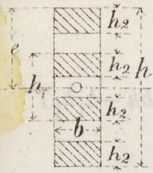
$$J = \frac{1}{3} \left[(b + \delta)e_1^3 - b(e_1 - h_1)^3 + (b_1 + \delta)e^3 - b_1(e - h_2)^3 \right] \\ e_1 = \frac{\delta h^2 + 2b_1hh_2 + bh_1^2 - b_1h_2^2}{2(\delta h + bh_1 + b_1h_2)} \quad \Omega = bh_1 + b_1h_2 + \delta h \quad e = h - e_1$$



$$J = \frac{b}{3} (e_1^3 - d^3) + \frac{b_1}{3} (e^3 - d_1^3) \\ e_1 = \frac{b_1h_2(2h - h_2) + bh_1^2}{2(bh_1 + b_1h_2)} \quad e = h - e_1 \quad \Omega = bh_1 + b_1h_2$$

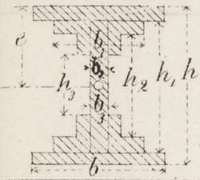


$$J = \frac{b}{12} [9h_1^3 + 6hh_1(h - 2h_1)] \\ e = \frac{h}{2} \quad \Omega = 3bh_1$$



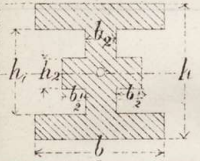
$$J = \frac{b}{12} \left[16h_2^3 + 6bh_2(h-2h_2) + 6h_1h_2(h_1-2h_2) \right]$$

$$e = \frac{h}{2} \quad \Omega = 4bh_2$$



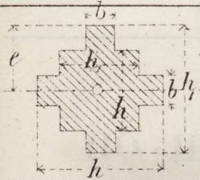
$$J = \frac{1}{12} \left[b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3) + b_2(h_2^3 - h_3^3) + b_3h_3^3 \right]$$

$$e = \frac{h}{2} \quad \Omega = b(h-h_1) + b_1(h_1-h_2) + b_2(h_2-h_3) + b_3h_3$$



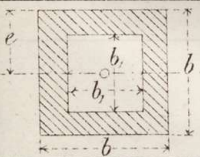
$$J = \frac{1}{12} \left[bh^3 - (b-b_2)h_1^3 + b_1h_2^3 \right]$$

$$e = \frac{h}{2} \quad \Omega = bh - (b-b_2)h_1 + b_1h_2$$



$$J = \frac{1}{12} \left[bh^3 + (h_1-b)h_1^3 + (h-h_1)b^3 \right]$$

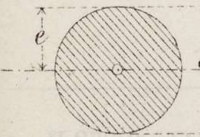
$$e = \frac{h}{2} \quad \Omega = bh + (h_1-b)h_1 + (h-h_1)b$$



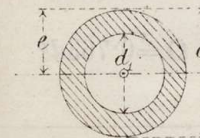
$$J = \frac{b^4 - b_1^4}{12} \quad e = \frac{b}{2} \quad \Omega = b^2 - b_1^2$$



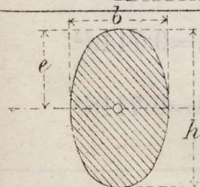
$$J = \frac{b^4 - b_1^4}{12} \quad e = \frac{b}{2} \sqrt{2} \quad \Omega = b^2 - b_1^2$$



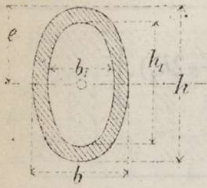
$$J = \frac{\pi}{64} d^4 = 0.0491d^4 \quad e = \frac{d}{2} \quad \Omega = \frac{\pi}{4} d^2$$



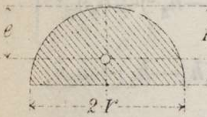
$$J = 0.0491(d^4 - d_1^4) \quad e = \frac{d}{2} \quad \Omega = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)$$



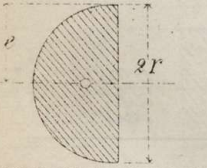
$$J = \frac{\pi}{64} bh^3 = 0.0491bh^3 \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = \frac{\pi}{4} bh$$



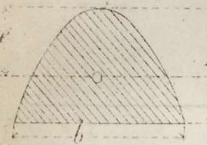
$$J = 0.0491(bh^3 - b_1h_1^3) \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = \frac{\pi}{4}(bh - b_1h_1)$$



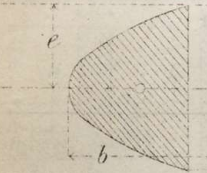
$$J = 0.1098r^4 \quad e = 0.5765r \quad \Omega = \frac{\pi}{2}r^2$$



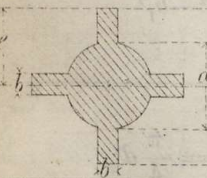
$$J = 0.3927r^4 \quad e = r \quad \Omega = \frac{\pi}{2}r^2$$



$$J = \frac{8}{175}bh^3 \quad e = \frac{3}{5}h \quad \Omega = \frac{2}{3}bh$$



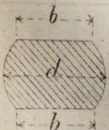
$$J = \frac{1}{30}bh^3 \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = \frac{2}{3}bh$$



$$J = \frac{1}{12} \left[\frac{3\pi}{16}d^4 + b(h^3 - d^3) + b^3(h - d) \right] \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = \frac{\pi}{4}d^2 + 2b(h - d)$$



$$\begin{aligned} b = \frac{d}{3} \quad J &= 0.048d^4 \quad e_1 = 0.476d \quad \Omega = 0.779d^2 \\ b = \frac{d}{2} \quad J &= 0.044d^4 \quad e_1 = 0.447d \quad \Omega = 0.763d^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b = \frac{d}{3} \quad J &= 0.047d^4 \quad e = 0.471d \quad \Omega = 0.714d^2 \\ b = \frac{d}{2} \quad J &= 0.043d^4 \quad e = 0.433d \quad \Omega = 0.711d^2 \end{aligned}$$

О СОЛНЕЧНОМЪ СПЕКТРѢ

ПО НОВѢЙШИМЪ ИЗСЛѢДОВАНІЯМЪ

Вл. Щеглева.

Лекція, читанная въ совѣтѣ Императорскаго Московскаго Техническаго Училища 16 октября 1886 г.

О СОДЕРЖАНИИ СПЕКТРА

НОВАЯ СЕРИЯ ВОЗРОЖДЕНИЯ

В. И. Метеллев

В. И. Метеллев в соавт. Императорского Московского
Технического университета 1880 г.

Многоуважаемое Собрание!

Въ настоящей лекціи я предполагаю сообщить нѣкоторые результаты новѣйшихъ изслѣдованій спектра солнца.

Я напому вкратцѣ наши прежнія свѣдѣнія объ этомъ вопросѣ; укажу на источникъ ошибокъ въ старыхъ наблюденіяхъ, опишу способы дающіе возможность освободиться отъ этихъ ошибокъ; наконецъ приведу результаты новыхъ изслѣдованій, которые и сопоставлю съ прежними.

Бѣлый солнечный лучъ представляетъ, какъ извѣстно, совокупность безконечнаго числа разноцвѣтныхъ свѣтовыхъ лучей различной преломляемости.

Мы можемъ его разбить на составляющіе лучи и изучить физическія свойства каждаго такого луча въ отдѣльности. Для этого пропустимъ лучъ свѣта черезъ призму; различные составляющіе лучи преломятся различно, а стало быть выйдутъ изъ призмы по своимъ опредѣленнымъ направленіямъ. Принявши вышедшій изъ призмы пучекъ лучей на экранъ, мы получаемъ спектръ, въ которомъ при первомъ же взглядѣ, усматриваемъ семь различныхъ цвѣтовъ: красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синій и фіолетовый. При этомъ оказывается, что красный свѣтъ преломляется наименѣе, ибо красные лучи менѣе всего отклоняются отъ начальнаго направленія луча; тогда какъ фіолетовые лучи отклонились болѣе всего, а стало быть они имѣютъ наибольшую способность преломленія. Изучимъ такой спектръ ближе.

Лучъ свѣта производитъ дѣйствіе троякаго рода: во первыхъ свѣтовое дѣйствіе, ощущаемое нашимъ глазомъ; во вторыхъ тепловое, проявляющееся повышеніемъ термометра, выставленнаго подъ дѣйствіе свѣтоваго луча, наконецъ дѣйствіе химическое — фотографическая пластинка подъ вліяніемъ свѣта чернѣетъ.

Намъ нужно изучить, какъ измѣняется сила этихъ воздѣйствій отъ одного цвѣта спектра до другаго.

Измѣряя яркость различныхъ лучей спектра, находимъ, что она быстро возрастаетъ начиная съ краснаго свѣта; достигаетъ maximum'a въ оранжевомъ и потомъ снова уменьшается по мѣрѣ приближенія къ фіолетовому. Если будемъ откладывать отрѣзки, пропорціональные яркости различныхъ цвѣтовъ спектра, на линияхъ перпендикулярныхъ къ длинѣ спектра, и соединимъ концы этихъ отрѣзковъ, то получимъ кривую, характеризующую распредѣленіе яркости въ цвѣтахъ спектра. Maximum яркости лежитъ въ оранжевомъ цвѣтѣ.

Чтобы изслѣдовать распредѣленіе тепла въ лучахъ спектра возьмемъ термоэлектрическій столбикъ Меллони. Онъ, какъ извѣстно, состоитъ изъ тонкихъ пластинокъ двухъ какихъ либо металловъ, концы которыхъ спаяны другъ съ другомъ въ извѣстной послѣдовательности. Если подогревать спай нашего столбика, въ немъ рождается термоэлектрическій токъ, силу котораго можно мѣрить гальванометромъ и по ней заключать о повышеніи, или пониженіи температуры. Будемъ подвергать столбикъ дѣйствію различныхъ лучей спектра, начиная съ фіолетоваго.

Мы замѣтимъ, что температура повышается все болѣе и болѣе по мѣрѣ приближенія къ красному цвѣту спектра. Мало того, она продолжаетъ повышаться, когда мы зайдемъ уже за предѣлы краснаго, тамъ достигается наибольшей величины и снова начинаетъ понижаться. Отсюда заключаемъ, 1) что тепловые лучи тоже имѣютъ различную преломляемость, ибо они разлагаются въ растянутый спектръ, какъ и свѣтовой спектръ; 2) что нѣкоторые тепловые лучи имѣютъ тотъ же показатель преломленія какъ и свѣтовые, ибо спектръ ихъ совпадаетъ со спектромъ свѣтовыхъ лучей, и 3) что существуетъ еще большее число тепловыхъ лучей, показатель преломленія которыхъ меньше показателя преломленія красныхъ лучей. При этомъ maximum тепла лежитъ именно въ этой темной части.

Примемъ теперь нашъ спектръ въ камеру фотографическаго снаряда и посмотримъ его дѣйствіе на пластинку. Мы увидимъ, что полученный снимокъ спектра гораздо больше видимаго спектра. Онъ удлинился въ сторону фіолетоваго конца. Стало быть кромѣ свѣтовыхъ и тепловыхъ лучей, есть еще множество темныхъ—ultra-фіолетовыхъ лучей, которые дѣйствуютъ химически. Maximum, химическаго дѣйствія лежитъ въ ultra-фіолетовыхъ лучахъ.

Итакъ наши свѣдѣнія о свѣтовыхъ, тепловыхъ и химическихъ дѣйствіяхъ солнечнаго спектра сводятся къ слѣдующему.

Дѣйствія эти измѣняются по силѣ своей при переходѣ отъ лучей одного цвѣта къ лучамъ другаго и при томъ такъ, что наибольшая яркость свѣта принадлежитъ оранжевымъ лучамъ,

наибольшее тепло ultra-краснымъ, наибольшее химическое дѣйствіе—ultra-фіолетовымъ.

Но остановимся на вопросѣ: достаточно-ли точны и полны указанныя свѣдѣнія о солнечномъ спектрѣ? Нѣтъ-ли въ условіяхъ нашихъ наблюденій и въ способахъ измѣреній причинъ, которыя могли бы постоянно вводить насъ въ заблужденіе? И если есть такія причины, то какъ устранить ихъ?

Всякая призма растягиваетъ лучи и при томъ такъ, что область красныхъ лучей, вообще говоря, сжимается, а область фіолетовыхъ растягивается. Это разсѣяніе измѣняется въ зависимости отъ свойствъ призмы. Но законъ этого измѣненія намъ не вполне извѣстенъ. Естественно искать такого спектра, разсѣяніе котораго подчинялось бы строго опредѣленному закону и ждать большей точности отъ наблюденій такого спектра. Такой спектръ, какъ мы укажемъ, есть спектръ диффракціонный.

Далѣе, три рода дѣйствій лучей—свѣтовое, тепловое и химическое—мы измѣряемъ тремя различными способами, воспринимая ихъ, такъ сказать, тремя органами—глазомъ, термоэлектрическимъ столбикомъ, и фотографическою пластинкою. Не вносятъ ли особенности этихъ органовъ воспріятія ошибку въ наши представленія, и нельзя-ли изобрѣсти снарядъ одинаково чувствительный къ теплу и свѣту и по его указаніямъ сдѣлать окончательныя заключенія? Съ такимъ снарядомъ мы познакомимся. Это болометръ—измѣритель лучей.

Наконецъ лучъ, который мы изучаемъ, приходитъ къ намъ, проникнувши черезъ атмосферу солнца, а потомъ и земли. Не измѣнился-ли онъ на пути? Въ самомъ дѣлѣ всматриваясь ближе въ спектръ солнечнаго свѣта, мы замѣчаемъ, что онъ весь испещренъ темными полосами—это Фраунгоферовы линіи, названныя такъ по имени ученаго ихъ открывшаго. Наблюденія Ламанскаго и Дезена указали, что эти линіи существуютъ и въ тепловыхъ ultra-красныхъ лучахъ спектра, какъ линіи холода, а Беккерель нашелъ присутствіе ихъ въ химической ultra-фіолетовой части, гдѣ остаются на фотографической платинкѣ такъ сказать пробѣлы. Существованіе Фраунгоферовыхъ линій указываетъ, что нѣкоторые изъ составляющихъ лучей бѣлаго свѣта къ намъ не доходятъ, а поглощаются на пути атмосферами солнца и земли. Является вопросъ, не поглощаются-ли хотя отчасти нашей атмосферою и остальные лучи; одинаково-ли это поглащеніе для лучей всѣхъ цвѣтовъ, и какимъ представилось-бы намъ солнце, если-бы мы взглянули на него, сбросивши съ глазъ завѣсу нашей атмосферы?

Мы укажемъ, что отвѣтить на эти вопросы можно, съ доста-

точною достовѣрностію, послѣ наблюденій солнечнаго спектра, произведенныхъ при подъемахъ на вершины горъ, т. е. при приближеніи къ солнцу на нѣкоторую долю атмосферы.

Чтобы получить нормальный, диффракціонный спектръ надо приготовить такъ называемую диффракціонную сѣтку. Для этого на зеркальной стальной поверхности чертятъ алмазомъ рядъ чрезвычайно тонкихъ и правильно расположенныхъ черточекъ. Если взглянемъ на такую поверхность простымъ глазомъ въ свѣтлой комнатѣ, мы не увидимъ на ней ничего, и только замѣтимъ, что поверхность имѣетъ цвѣтъ опала. Но разсматривая такую поверхность въ микроскопъ, мы усмотримъ на ней рядъ параллельныхъ полосокъ, которыя какъ оказывается въ 50, или въ 100 разъ тоньше человѣческаго волоса и которыя находятся другъ отъ друга на одинаковыхъ разстояніяхъ. Это диффракціонная сѣтка Роуланда. Профессоръ Роуландъ въ Балтиморѣ (въ Америкѣ) дѣлаетъ въ настоящее время сѣтки, величина которыхъ доходитъ до 160 квадр. сантиметровъ (25 кв. дюймовъ); сѣтки эти имѣютъ до 43,000 черточекъ на ширинѣ 1 дюйма, иначе на 1 *mm* приходится до 1700. Эти неимоверно большіе числа черточекъ, эта правильность въ ихъ расположеніи выполняются по предписанію теоріи, которая указываетъ, что отъ этихъ двухъ условій зависитъ величина и яркость спектра, даваемого сѣткою.

Если на такую сѣтку получимъ лучъ, проникающій черезъ щель окна темной комнаты, и отраженіе примемъ на экранъ, предъ нами нарисуетъ слѣдующая картина. Въ срединѣ картины бѣлая свѣтлая полоса; по обѣ стороны отъ нея совершенно симметрично расположится рядъ спектровъ. Разсмотримъ только ближайшій къ полосѣ спектръ. Мы замѣчаемъ, что въ новомъ спектрѣ уже нѣтъ того неравномернаго разсѣянія различныхъ цвѣтовъ спектра, какъ въ призматическомъ спектрѣ, гдѣ цвѣта близкіе къ красному были сжаты вмѣстѣ, а близкіе къ фіолетовому растянуты. Въ диффракціонномъ спектрѣ цвѣта разсѣяны равномерно и при томъ такъ, что разстоянія цвѣтовъ отъ срединной свѣтлой полоски измѣняются пропорціонально длинѣ волны каждаго даннаго простаго цвѣта. Поэтому лучи наибольшей преломляемости, какъ фіолетовые, имѣющіе наименьшую длину волны, расположатся ближе къ исходной свѣтлой полоскѣ; лучи съ наименьшимъ преломленіемъ, и стало быть съ наибольшею длиною волны, какъ красные, дальше всего удалятся отъ срединной свѣтлой полоски.

Но въ диффракціонномъ спектрѣ каждый простой свѣтъ занимаетъ весьма ограниченный районъ. Поэтому получить лучи только опредѣленнаго цвѣта на термометръ, или столбикъ Мел-

лони весьма трудно. Для изученія такого нормального спектра необходимъ иной снарядъ, который давалъ бы возможность выбирать изъ спектра каждый лучъ въ отдѣльности и отдѣльно изслѣдовать его. Это побудило американскаго профессора Лэнглей (Langley), директора Аллеганской обсерваторіи, изобрѣсти новый снарядъ, названный имъ болометромъ — луче-мѣромъ ($\beta\omicron\lambda\eta, \mu\acute{\epsilon}\tau\rho\nu$). Лэнглею пришла мысль воспользоваться для измѣренія теплоты извѣстнымъ свойствомъ металловъ увеличивать, по мѣрѣ нагрѣванія, свое гальваническое сопротивленіе.

Чтобы уяснить себѣ устройство болометра вспомнимъ развѣтвление гальванической цѣпи, извѣстное подъ названіемъ „Уитстонова моста“ (черт. 1). Точки развѣтвленія *A* и *B* соединены съ батареею, а точки *C* и *D* съ гальванометромъ. По развѣтвленной цѣпи идетъ токъ и гальванометръ отклоняется. Но оказывается, что можно подобрать гальваническія сопротивленія проволокъ *a*, *b*, *c*, *d*, такъ, что токъ въ гальванометрѣ заходить не будетъ и послѣдній будетъ оставаться на нулѣ. Уравновѣсимъ такъ нашу цѣпь при данной температурѣ и потомъ подогрѣемъ одну изъ проволокъ, напр. *a*; сопротивленіе ея измѣнится, электрическое равновѣсіе въ цѣпи нарушится и гальванометръ отклонится. На этомъ простомъ принципѣ и основанъ болометръ.

Въ немъ проволоки *d* и *c* суть двѣ тонкія проволоки одинаковаго сопротивленія.

Роль проволокъ *a* и *b* играютъ весьма длинныя и тонкія нити или полоски изъ стали, платины или палладія: онѣ имѣютъ до 0,001 доли миллиметра въ толщину и около $\frac{1}{5}$ m.m. въ ширину. Свитки этихъ полосокъ помѣщены рядомъ. Если онѣ одинаково нагрѣты, гальванометръ не показываетъ тока; но достаточно разницы въ $\frac{1}{500,000}$ *F* долю градуса (по Фаренгейту), чтобы токъ обнаружился. Эта комбинація проволокъ заключена въ трубку и при томъ такъ, что свѣтъ проникающій черезъ узкую щель, сдѣланную въ концѣ трубки, падаетъ на ребро одного изъ свертковъ проволокъ и нарушаетъ равновѣсіе тепла, а съ нею и тока въ системѣ. Подставляя болометръ дѣйствию различныхъ частей спектра, мы можемъ измѣрить тепловую энергію каждой полоски его; о величинѣ этой энергіи заключаемъ по отклоненіямъ гальванометра.

Болометръ помѣщается на штативѣ, который изображенъ на нашемъ рисункѣ въ проэкціи (черт. 2). На вертикальной ножекѣ вращаются двѣ рукоятки, которыя мы можемъ размѣщать подъ любымъ угломъ другъ къ другу. На оси вращенія ихъ укрѣплены неподвижно столикъ, несущій на себѣ диффракціонную сѣтку.

На рукояткѣ находится коллиматоръ въ который пропускается свѣтовой лучъ. Онъ падаетъ нормально на сѣтку и отразившись, упадетъ на зеркальце, помѣщенное на концѣ другой рукоятки; здѣсь снова отражается и попадаетъ въ щель болометра *В*. Подвигая рукоятку, мы можемъ перебрать болометромъ всѣ части спектра.

Подобнымъ же образомъ можемъ наблюдать и призматическій спектръ. Мѣсто сѣтки займетъ призма, а рукоятка съ коллиматоромъ расположится какъ указываетъ чертежъ.

Съ помощью болометра Лэнглей сдѣлалъ обширное и точное изслѣдованіе солнечнаго спектра.

Опыты производились въ продолженіи нѣсколькихъ лѣтъ на Аллеганской обсерваторіи а также и во время экспедиціи на гору Уитней (Whitney) въ Калифорніи.

Для болѣе удобнаго разбора результатовъ этихъ опытовъ мы изобразимъ ихъ графически (черт. 3). Мы откладываемъ на оси абсциссъ длины волнъ, которыя мы выражаемъ въ микронахъ; микронъ равенъ тысячной долѣ миллиметра. На соответствующихъ ординатахъ откладываемъ отрѣзки, пропорціональные величинамъ тепловой энергіи каждаго даннаго луча, измѣреннымъ болометромъ. Получаемъ кривую, рисующую распределеніе тепловой энергіи въ различныхъ лучахъ солнечнаго спектра. Быстрыя пониженія кривой соответствуютъ мѣстамъ нахожденія Фраунгоферовыхъ линій—полосъ холода. Сравнивая нашъ чертежъ съ чертежами прежнихъ наблюденій мы замѣтимъ, что эти послѣдніе не заходятъ дальше длины волны равной 1, 2 μ .

Правда холодныя полосы въ ультра-красныхъ лучахъ до этого предѣла уже наблюдались раньше Ламанскимъ и Дезеномъ; онѣ подтверждаются и теперь въ опытахъ Лэнглея. Вся же часть спектра, начиная съ волны въ 1, 2 μ . и кончая волною въ 3 μ . вновь открыта благодаря болометру. Отмѣтимъ въ ней особенно характерную, широкую полосу Ω (между 1, 8 μ . и 1, 9 μ .), происходящую вѣроятно отъ поглощенія тепловыхъ лучей данной длины волны нашею атмосферою.

Такимъ образомъ наши свѣдѣнія о спектрѣ значительнополнились; вся совокупность извѣстныхъ намъ эйрновыхъ волнъ, идущихъ отъ солнца, представляетъ, говоря по аналогіи со звукомъ, болѣе трехъ октавъ. Изъ нихъ глазъ нашъ способенъ ощущать сравнительно небольшую часть, начиная отъ длины волны въ 0,4 μ . и до 0,7 μ .

Maximum тепловой энергіи лежитъ въ оранжевомъ цвѣтѣ т. е. тамъ же, гдѣ и наибольшая яркость солнечнаго спектра.

Замѣтимъ наконецъ о химической части спектра. Мы привыкли считать, что область химическихъ ультра-фіолетовыхъ

лучей больше области ультра-красныхъ лучей. Чертежъ нормального спектра показываетъ прямо противоположное. Ультра-красная часть во 100 разъ болѣе ультра-фіолетовой. Ошибка нашихъ заключеній происходила оттого, что призма сжимаетъ ультра-красную часть и наоборотъ разсѣиваетъ ультра-фіолетовую. Наконецъ фотографическая пластинка, обработанная слюдами серебра, оказывается болѣе всего чувствительною къ ультра-фіолетовымъ лучамъ; это заставляло думать, что въ нихъ лежитъ maximum химическаго дѣйствія. Но можно приготовить пластинки наиболѣе чувствительныя для другихъ цвѣтовъ; такъ напр., недавно изготовлена пластинка, которая чувствуетъ болѣе всего оранжевый цвѣтъ. Отсюда указаніямъ фотографіи нельзя вѣрить, и должно склониться на сторону болометра и положить, что и maximum химическаго дѣйствія лежитъ въ оранжевомъ цвѣтѣ.

Намъ остается разсмотрѣть послѣдній изъ поставленныхъ нами вопросовъ — вопросъ о поглещеніи лучей спектра атмосферою.

Чтобы рѣшить этотъ вопросъ Лэнглей произвелъ рядъ болометрическихъ наблюдений на станціяхъ, помѣщенныхъ на разныхъ высотахъ надъ уровнемъ моря. Въ іюлѣ 1881 года, правительство Сѣв. Америк. Соед. Штатовъ снарядило съ этою цѣлью экспедицію на гору Уитней въ Юж. Калифорніи подъ командою генерала Хазена и подъ руководствомъ проф. Лэнглей. Были выбраны три станціи наблюдений: на высотахъ 800, 4000 и 4800 метровъ надъ уровнемъ моря. Спектръ изучался одновременно болометромъ. Результаты, полученные на двухъ станціяхъ, изображены на нашемъ чертежѣ 4. Мы снова откладываемъ на оси абсциссъ длины волнъ, а на соотвѣствующихъ ординатахъ величины, пропорціональныя величинамъ тепловой энергіи лучей. Средняя кривая принадлежитъ верхней станціи; нижняя средней станціи. Ординаты первой, какъ мы видимъ, больше ординатъ второй, ибо верхній наблюдатель получаетъ лучъ, прошедшій меньшій слой атмосферы, а стало быть менѣе поглещенный. Всматриваясь въ наши кривыя, мы замѣчаемъ, что на верхней станціи maximum тепла и свѣта перешелъ изъ оранжеваго въ зеленый цвѣтъ спектра. Наконецъ ординаты, принадлежащія ultra-краснымъ лучамъ, возрастаютъ по мѣрѣ повышенія надъ уровнемъ моря, гораздо менѣе, чѣмъ ординаты, соотвѣствующія свѣтлой части спектра вообще и фіолетовымъ лучамъ въ особенности. Стало быть атмосфера поглощаетъ менѣе всего темные ultra-красные лучи и болѣе всего фіолетовые. Результатъ прямо противоположный установившемуся мнѣнію, что наша атмосфера болѣе всего поглощаетъ темные лучи.

Разности ординатъ нашего чертежа прямо указываютъ на

сколько каждый данный лучъ поглотился слоемъ воздуха, лежащимъ между двумя станціями.

Мы можемъ измѣрить этотъ слой воздуха разностью барометрическихъ столбовъ на той и другой станціи. Отсюда заключимъ сколько поглощается изъ каждаго луча слоемъ воздуха въ 1 толщиною, напр. слоемъ производящимъ давленіе $= 1\text{-mm}$. барометрическаго столба. А послѣ этого мы можемъ рѣшить, сколько тепла и свѣта изъ каждаго луча поглотилось всею атмосферою. Прибавляя эту недостающую часть тепла къ каждой ординатѣ нашей кривой, мы получимъ кривую, которая даетъ распредѣленіе тепла и свѣта въ спектрѣ, наблюдаемомъ за предѣлами атмосферы. Это кривая изображенная пунетиромъ. Мы видимъ, что наибольшая яркость въ этой заатмосферной кривой лежитъ въ голубомъ цвѣтѣ. Итакъ въ солнцѣ больше всего голубыхъ лучей и, если бы мы взглянули на него, поднявшись за атмосферу, оно представилось бы нашему взгляду голубымъ.

Такимъ образомъ наша атмосфера не безцвѣтна, какъ мы привыкли думать; она играетъ для насъ роль красновато-желтаго стекла. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы были вынуждены разсматривать синій свѣтъ электрическаго огня всегда черезъ подобное красное стекло, мы могли бы подумать, что видимый нами розоватый свѣтъ есть натуральный свѣтъ углей. Но отстранимъ стекло и мы убѣдимся, что уголь свѣтитъ голубымъ свѣтомъ. Подобнымъ же образомъ сбросимъ съ глазъ завѣсу атмосферы и солнце заблестаетъ намъ голубыми лучами.

Сведемъ вмѣстѣ все сказанное.

1) Свѣтъ, тепло и химическое дѣйствіе лучей солнца не различны по существу, какъ полагалъ Гершель. Это суть только три разныхъ свойства, присущія каждому лучу. Иначе каждая свѣтовая волна можетъ оказывать свѣтовое, тепловое, или химическое дѣйствіе, смотря по свойству тѣла, котораго касается.

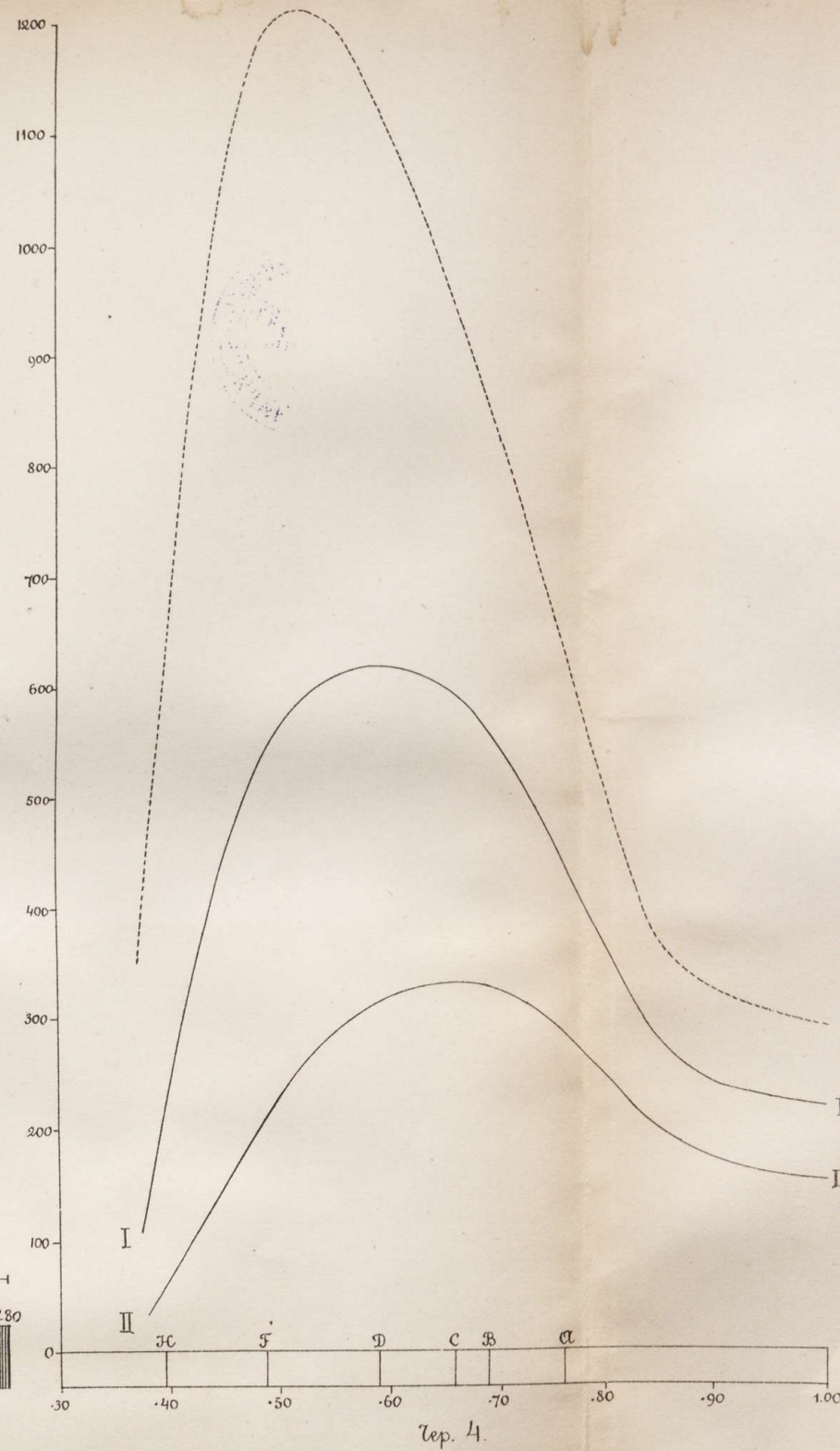
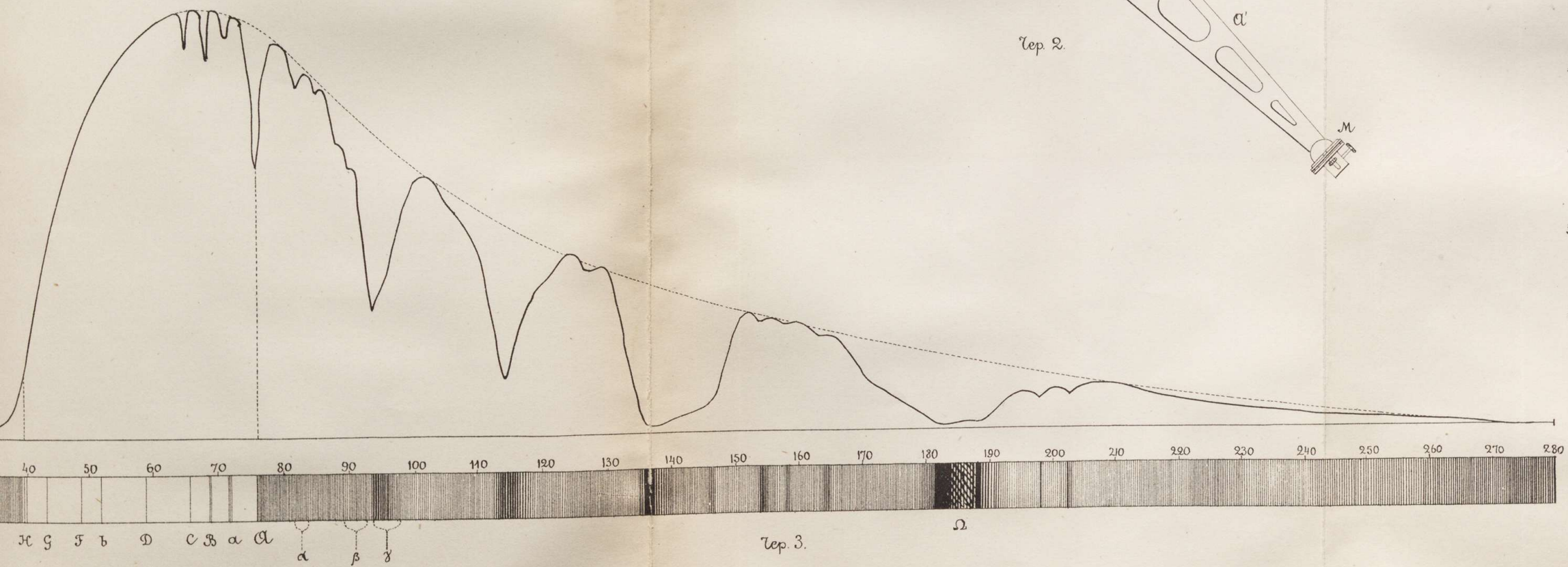
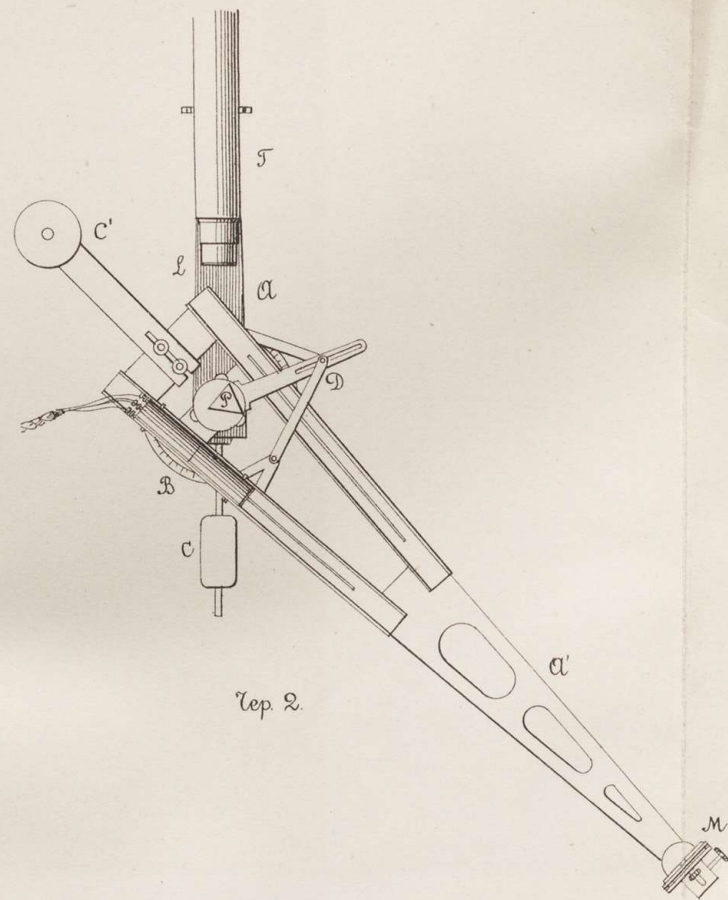
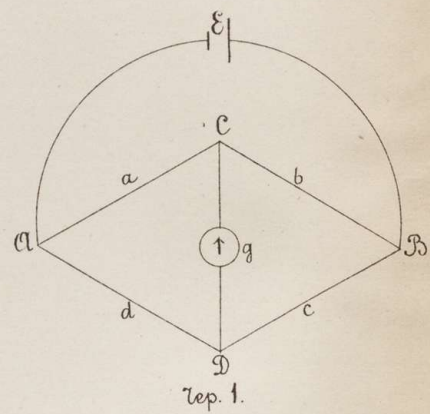
Наибольшая сила всѣхъ трехъ дѣйствій принадлежитъ оранжевымъ лучамъ; другими словами всѣ три кривыя свѣтовая, тепловая и химическая сливаются въ одну съ maximum'омъ въ оранжевомъ цвѣтѣ.

2) Весь спектръ почти вдвое больше, чѣмъ предполагали, и занимаетъ около 3 октавъ. При этомъ темная ультра-красная часть спектра во 100 разъ больше темной ультра-фіолетовой, а не наоборотъ, какъ мы считали раньше. Во всѣхъ частяхъ спектра лежатъ Фраугоферовы линіи, происходящія отъ поглощенія лучей атмосферами солнца и земли.

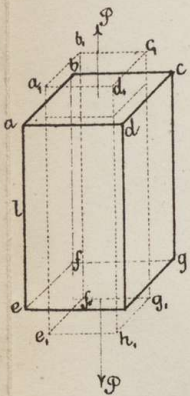
3) Земная атмосфера поглощаетъ до нѣкоторой степени и всѣ остальные лучи, при чемъ больше всего фіолетовые и меньше всего красные и ультра-красные, стало быть играетъ роль красноватаго стекла, а не безцвѣтна, какъ мы привыкли думать.

4) Въ солнцѣ больше всего голубыхъ лучей.

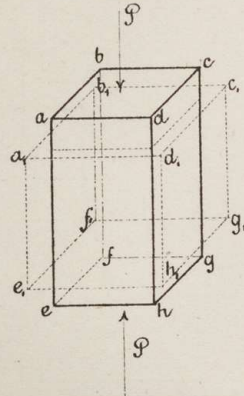
Такимъ образомъ наши свѣдѣнія о солнечномъ спектрѣ значительно измѣнились. Ошибки нашихъ прежнихъ заключеній происходили оттого, что мы наблюдали явленія такъ сказать слишкомъ близорукимъ глазомъ и черезъ завѣсу, его застилавшую. Изошривши нашъ глазъ, сбросивши эту завѣсу, мы увидали явленіе въ новомъ свѣтѣ.



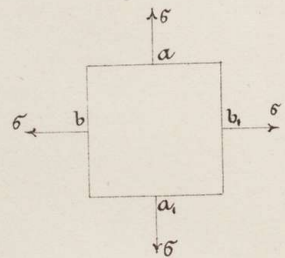
1a.



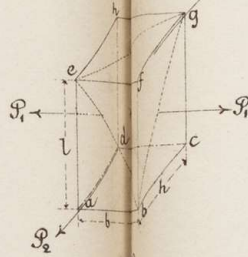
1b.



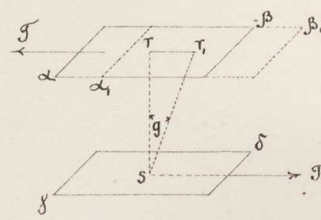
2.



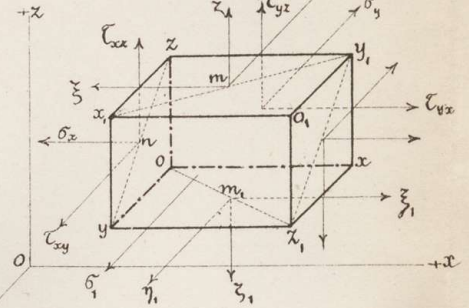
3.



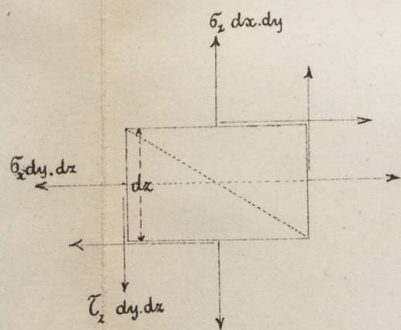
4.



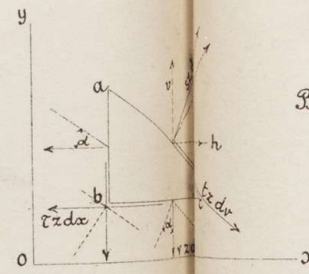
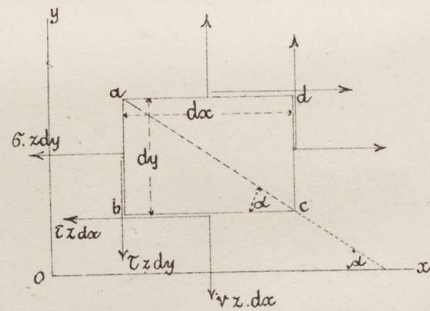
5.



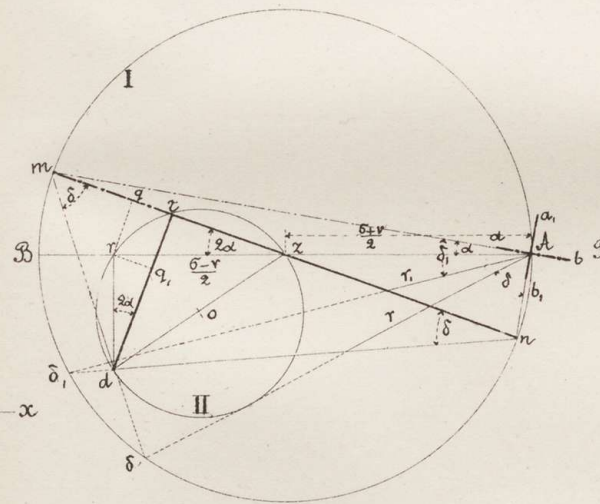
6.



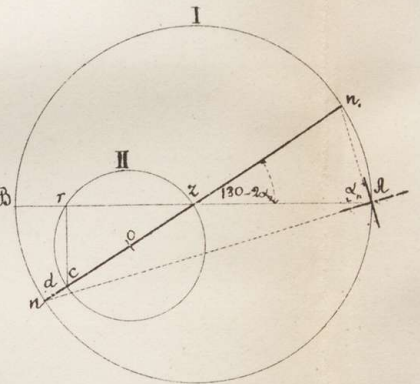
7.



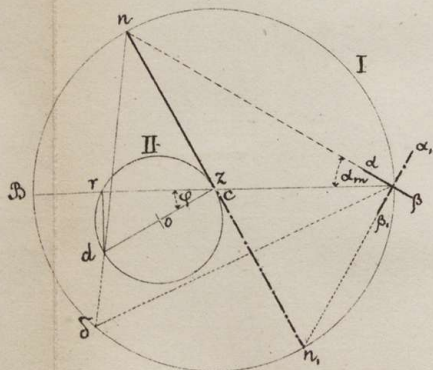
9.



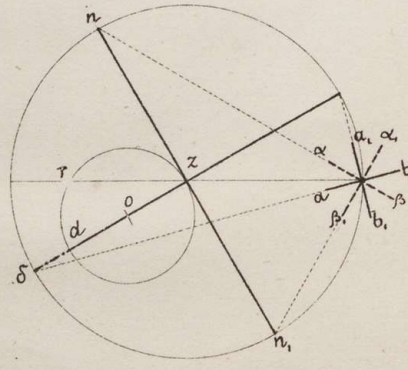
10.



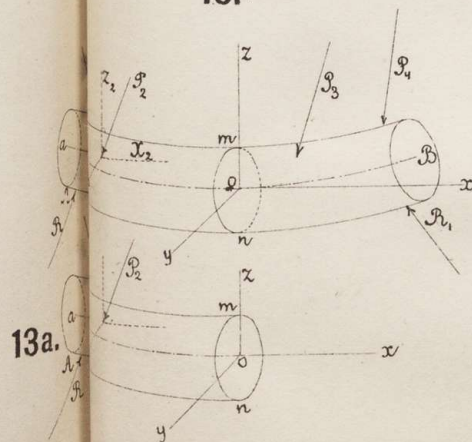
11.



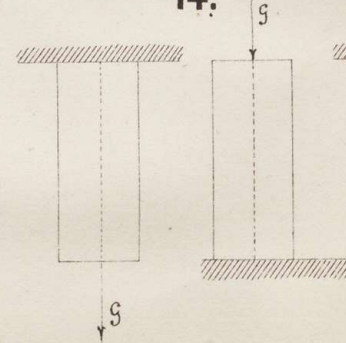
12.



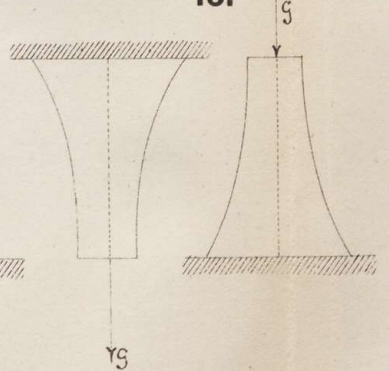
13.

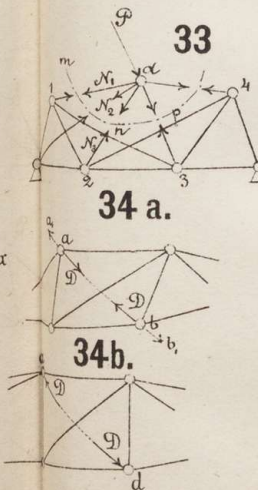
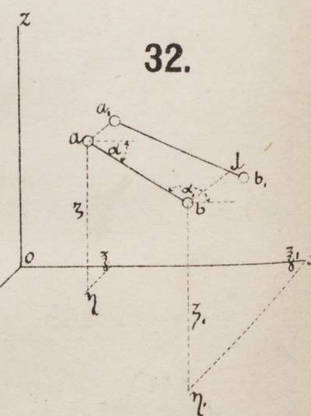
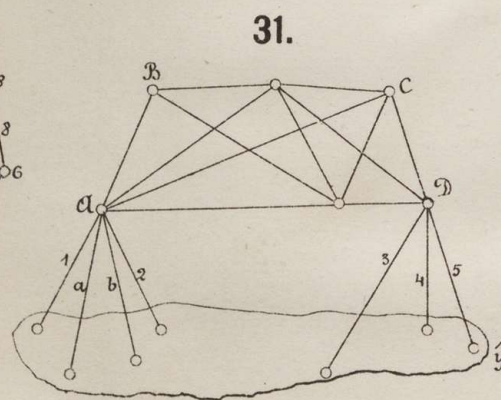
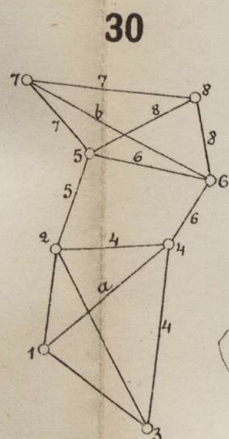
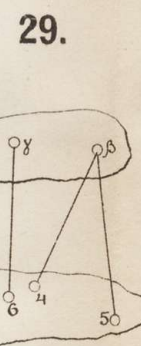
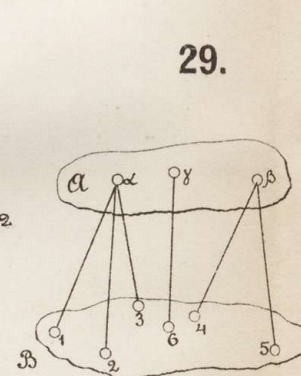
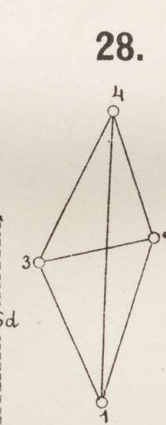
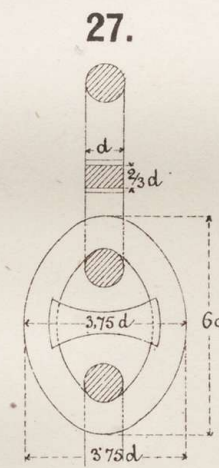
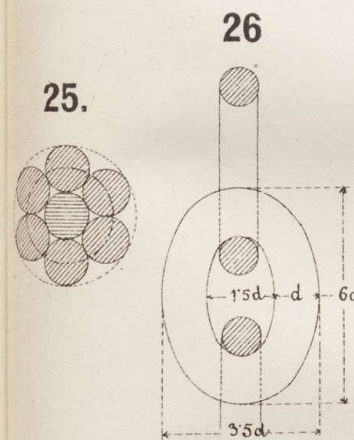
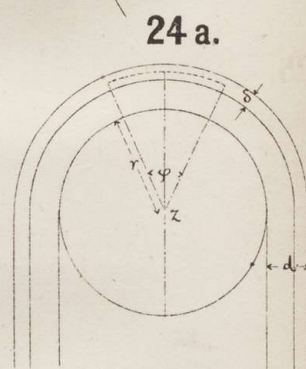
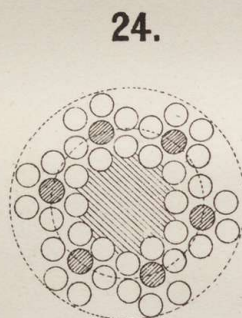
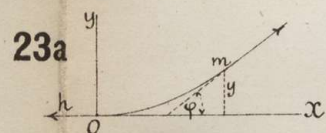
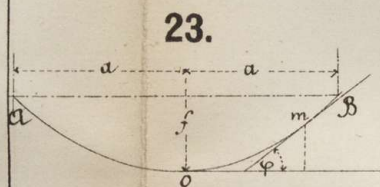
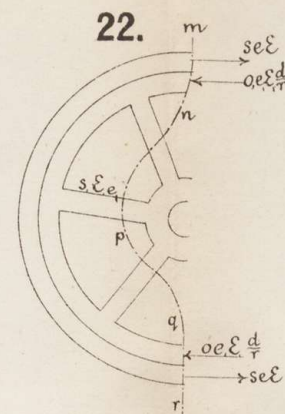
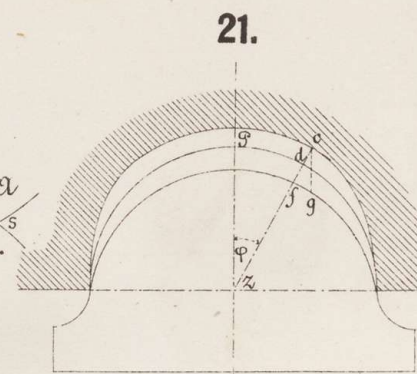
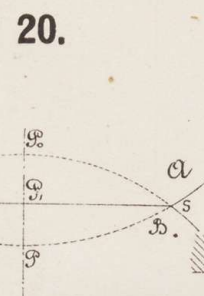
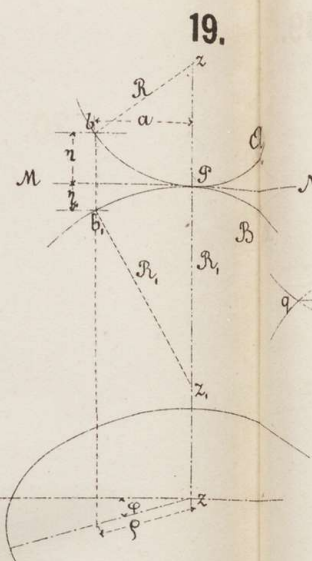
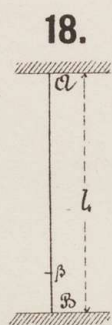
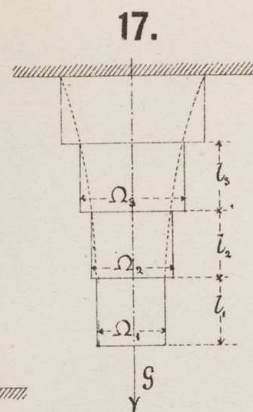
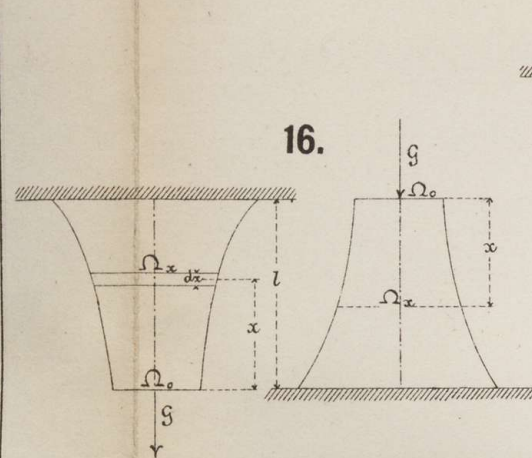


14.



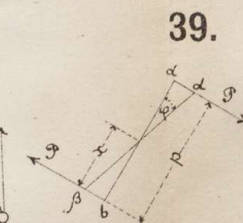
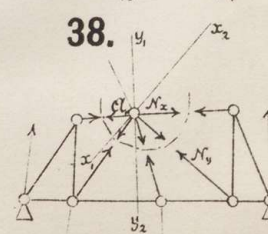
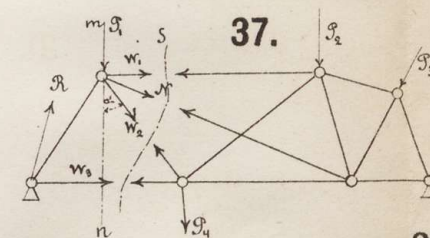
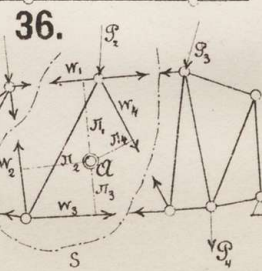
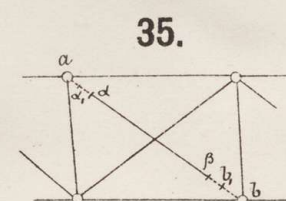
15.

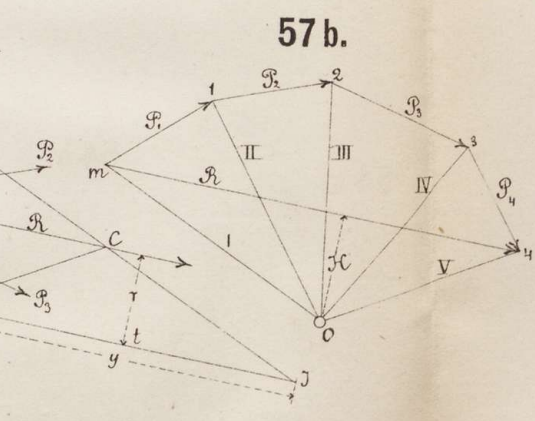
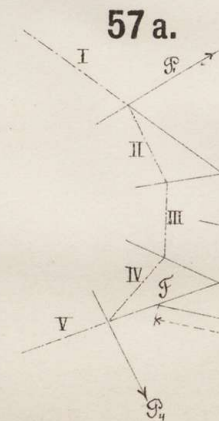
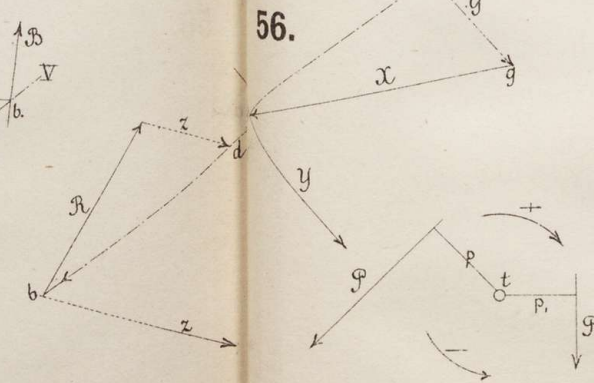
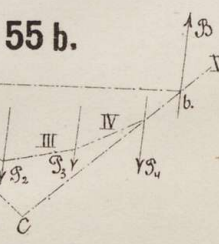
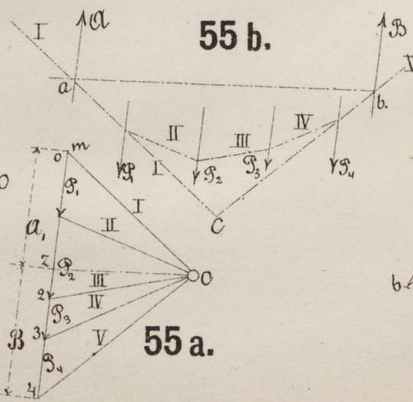
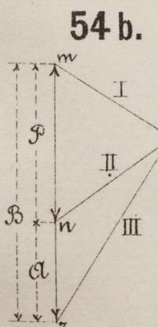
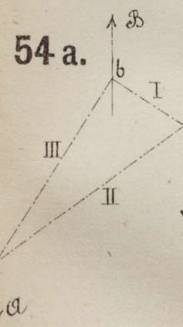
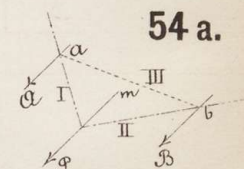
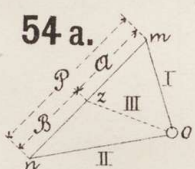
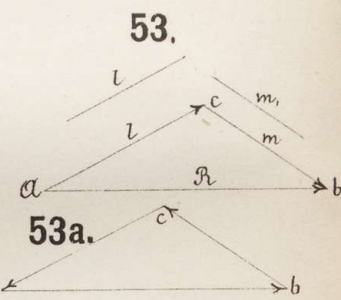
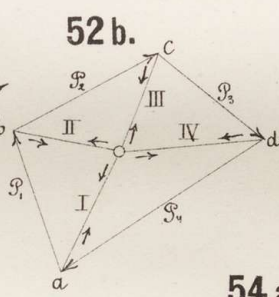
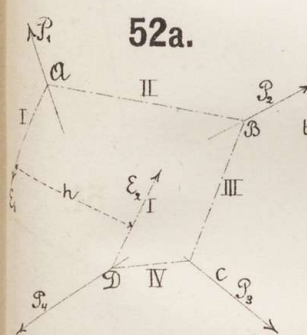
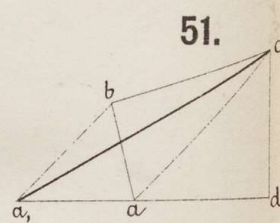
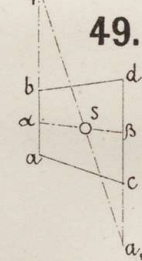
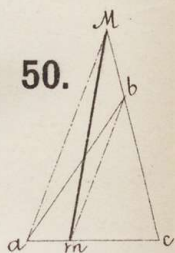
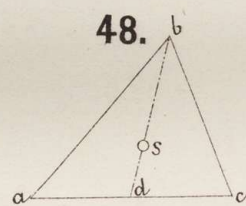
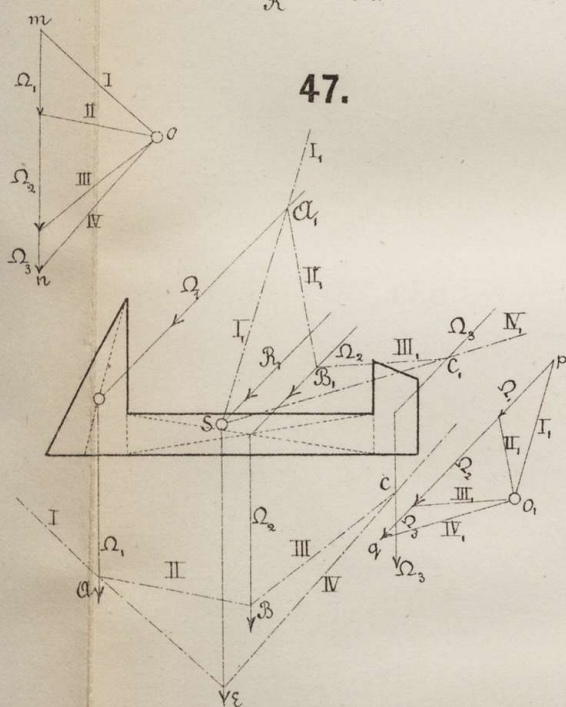
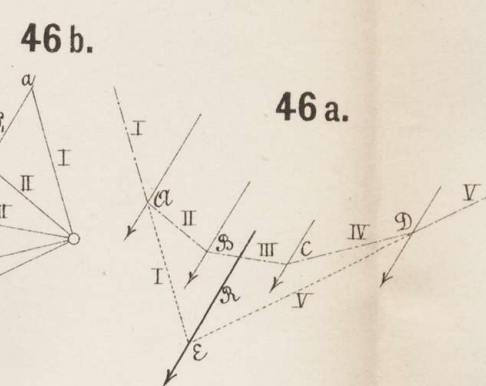
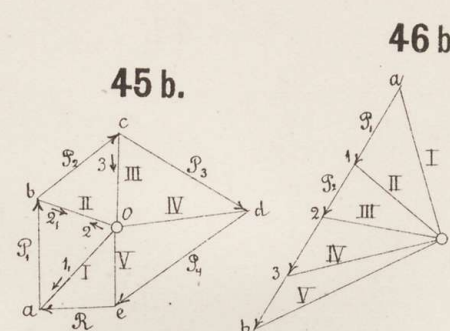
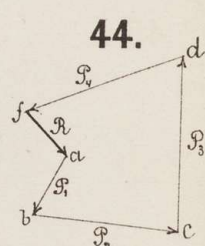
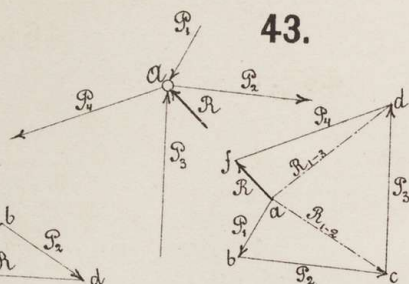
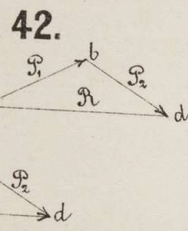
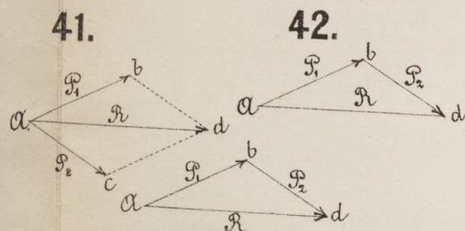
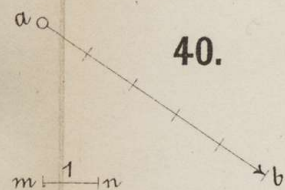


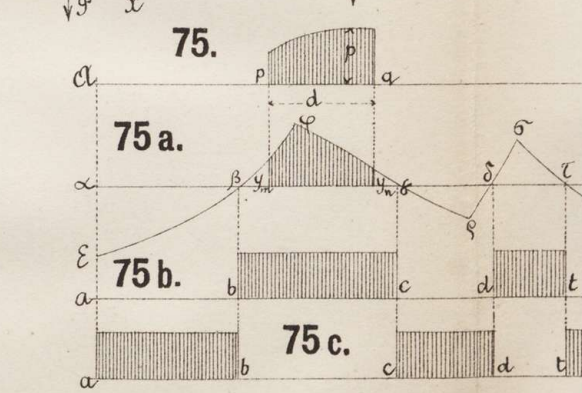
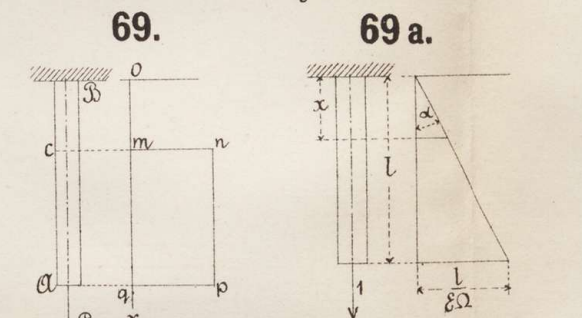
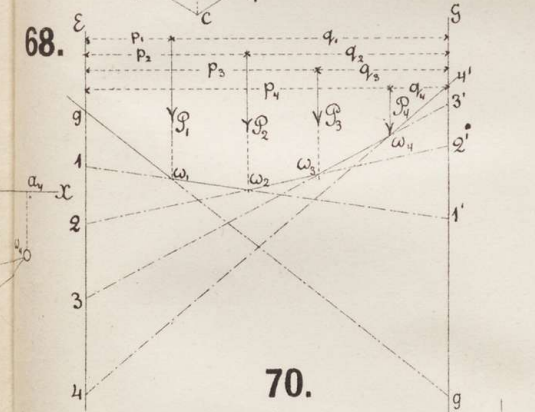
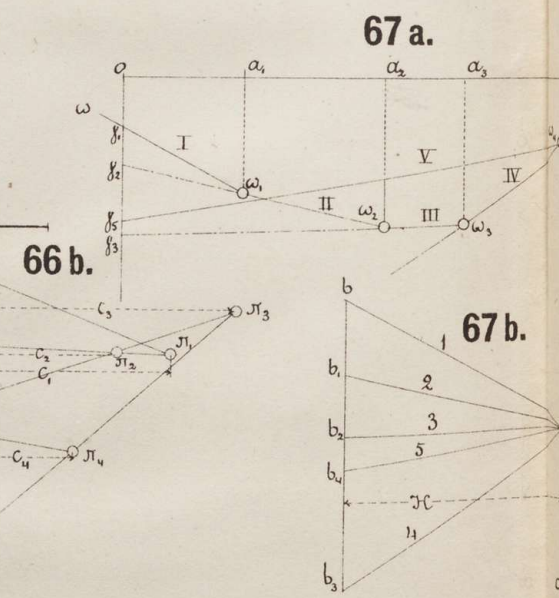
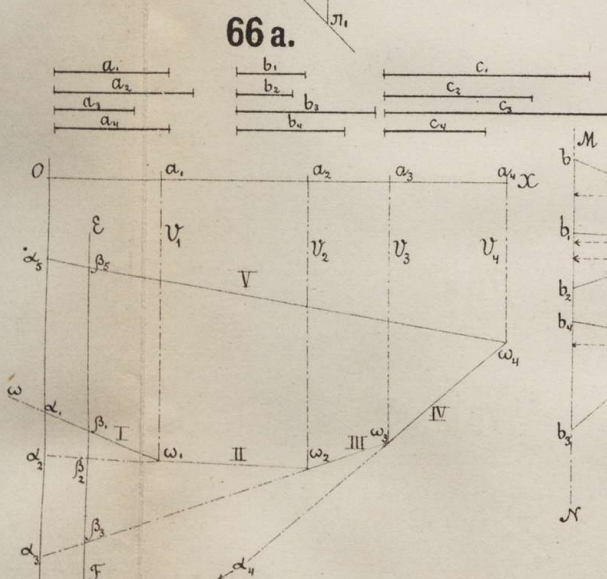
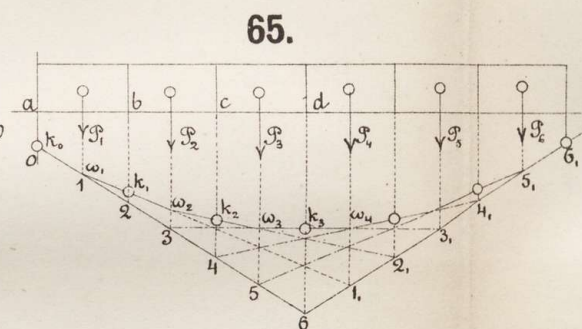
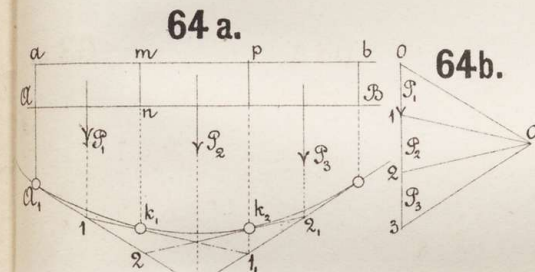
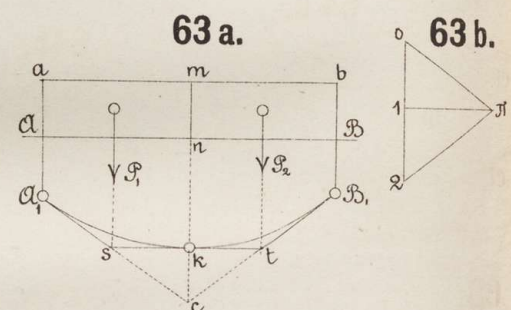
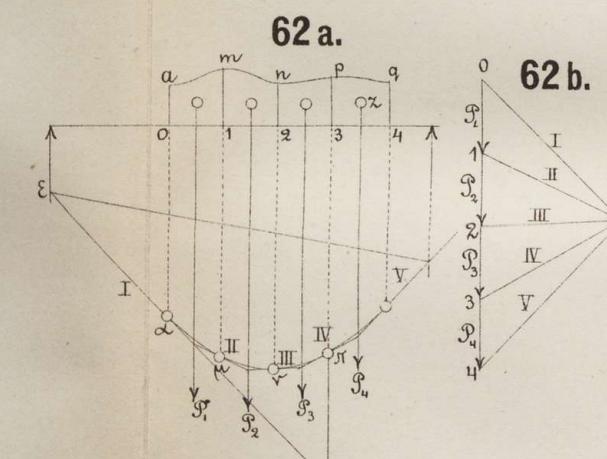
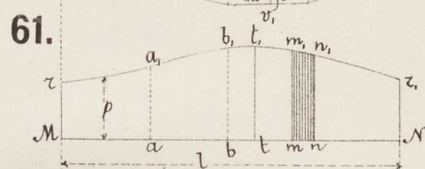
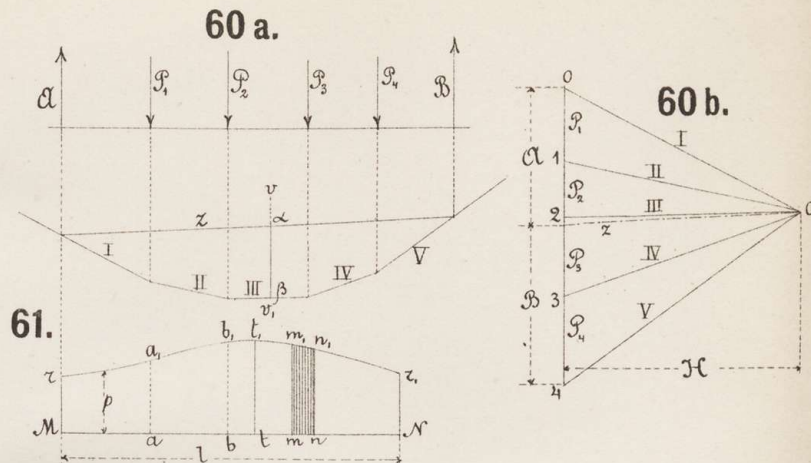
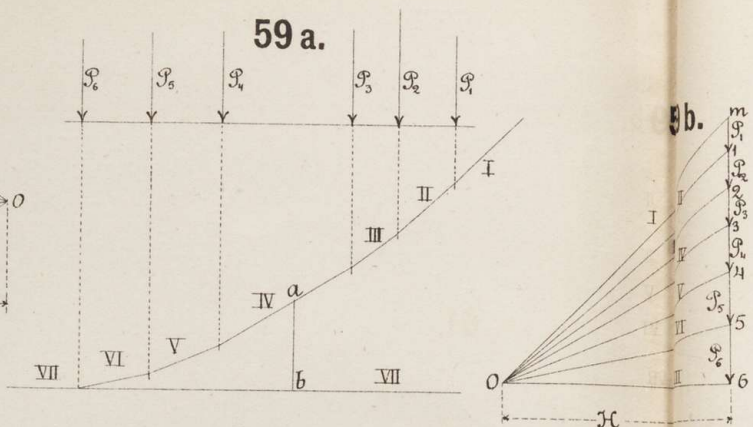
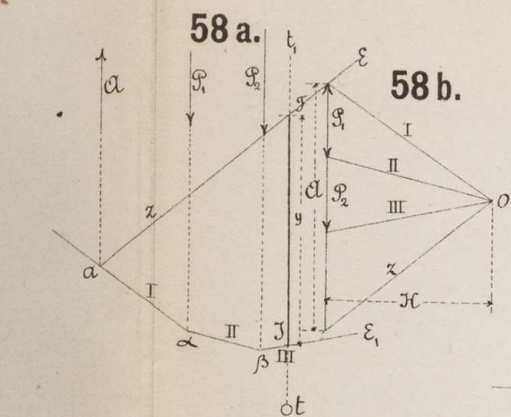


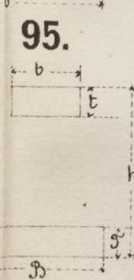
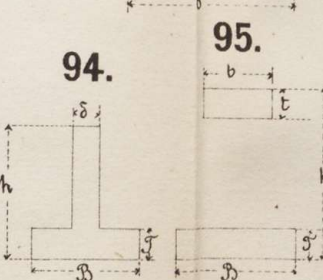
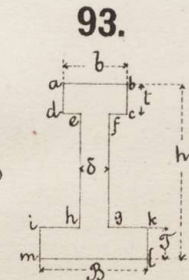
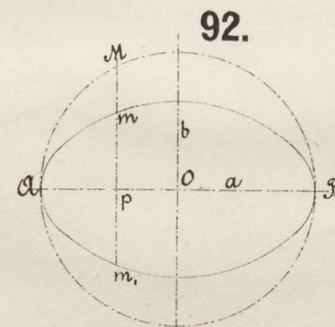
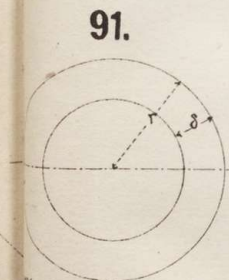
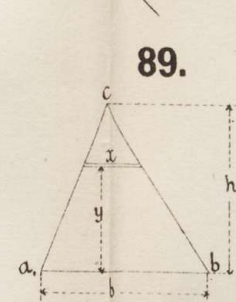
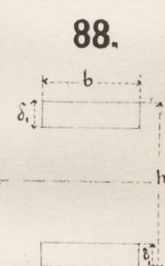
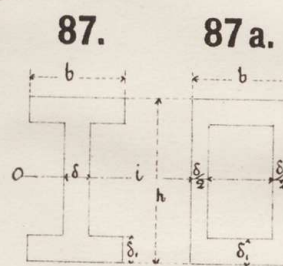
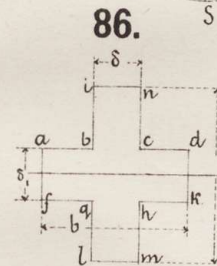
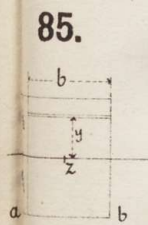
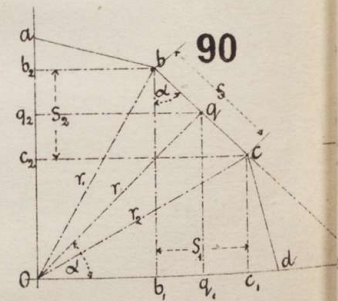
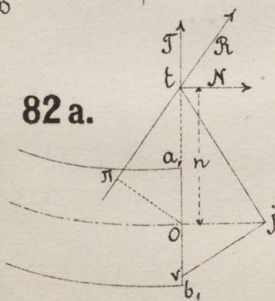
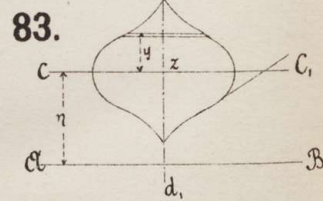
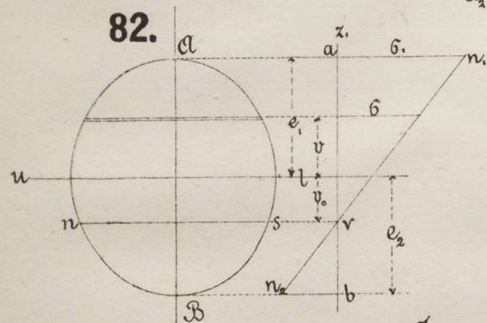
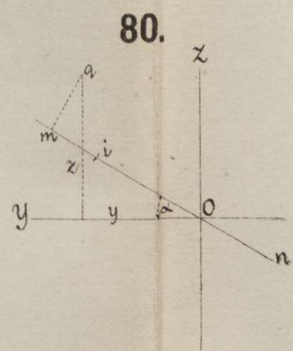
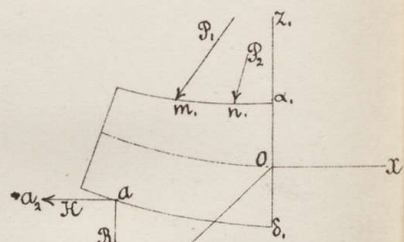
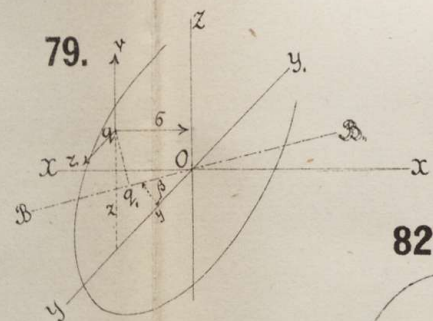
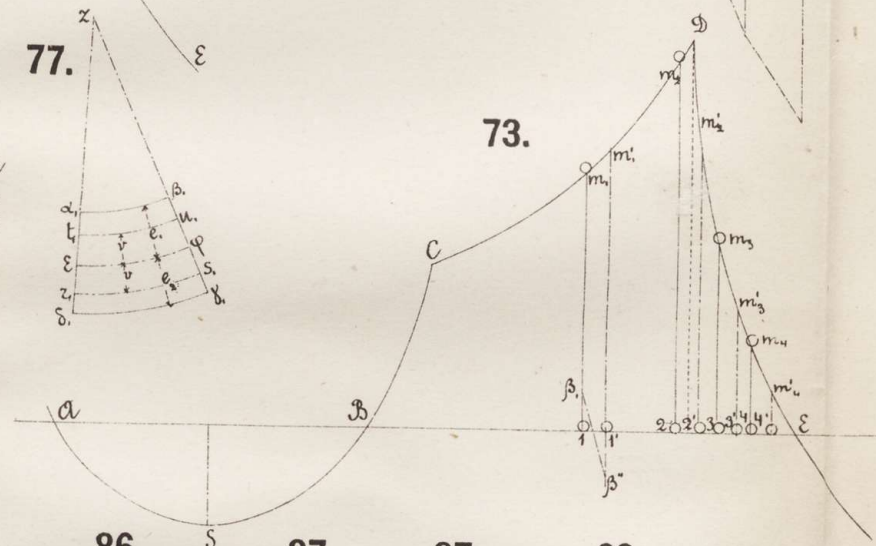
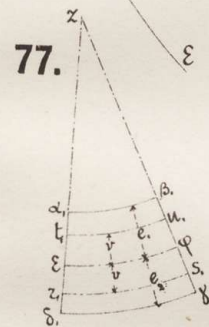
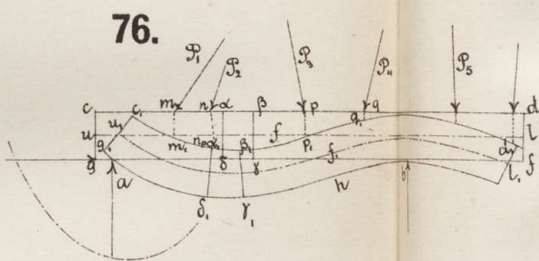
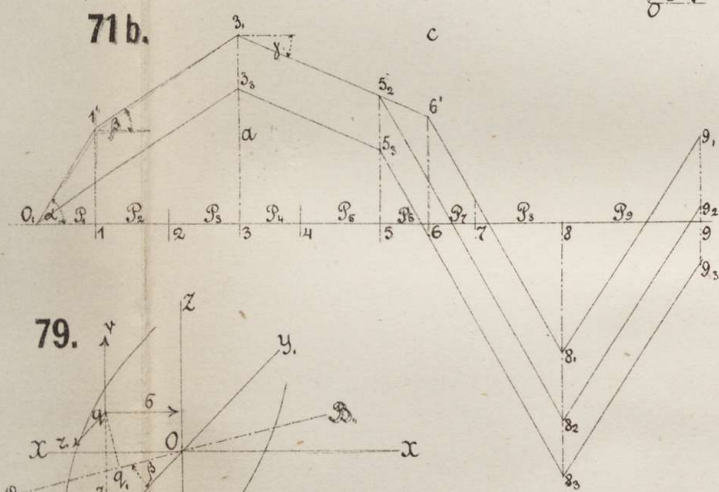
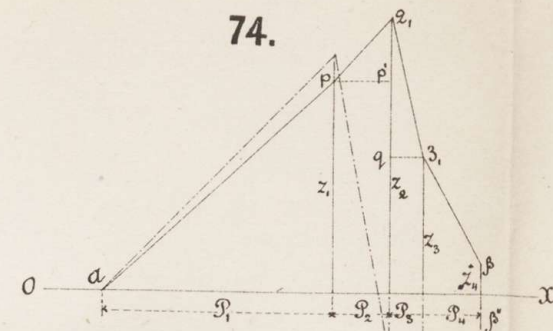
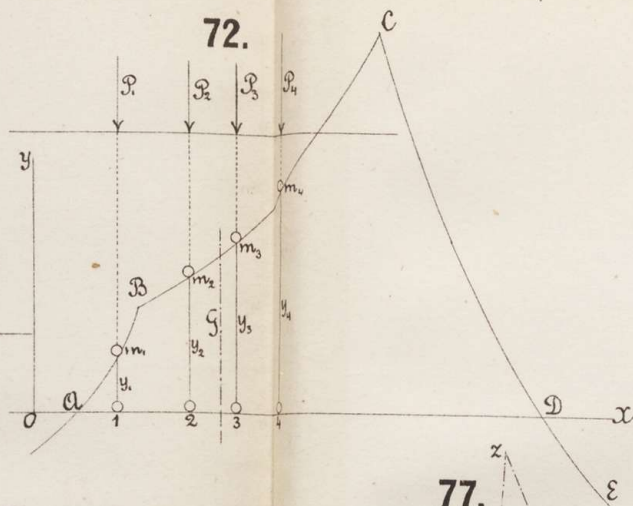
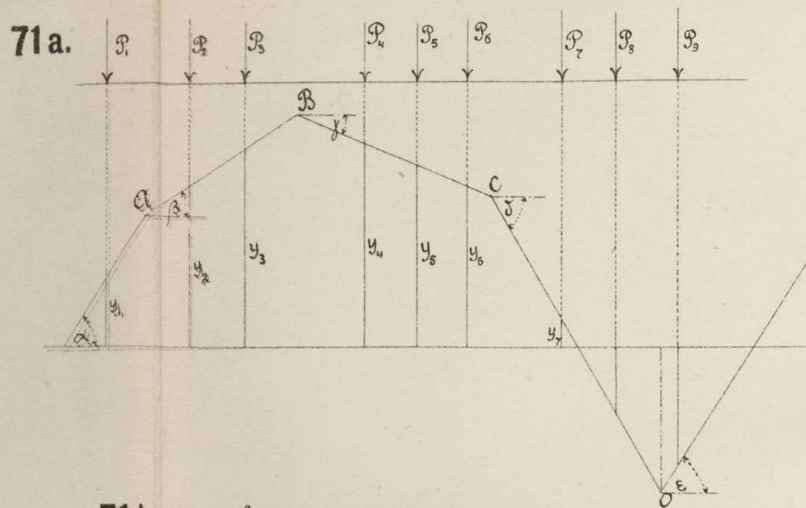
34 a.

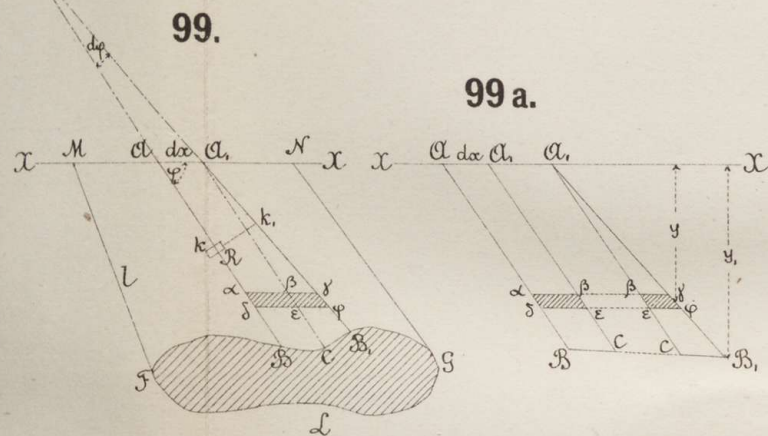
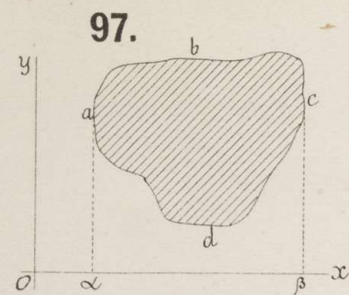
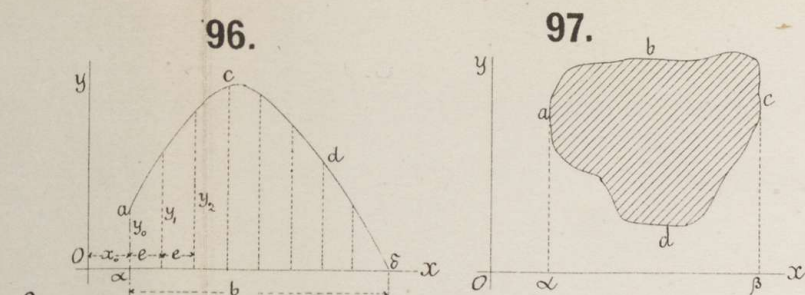
34 b.



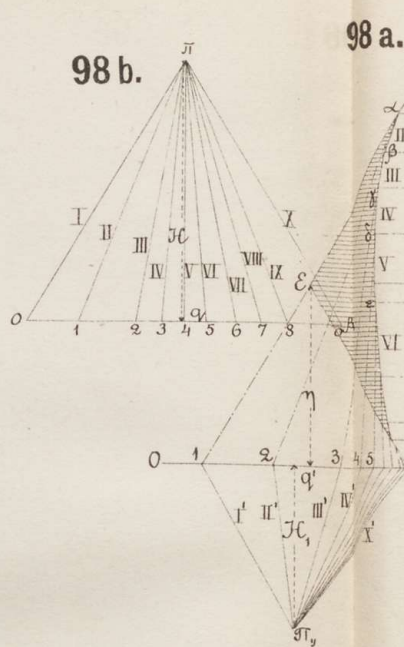
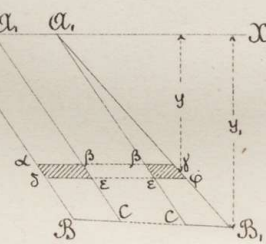




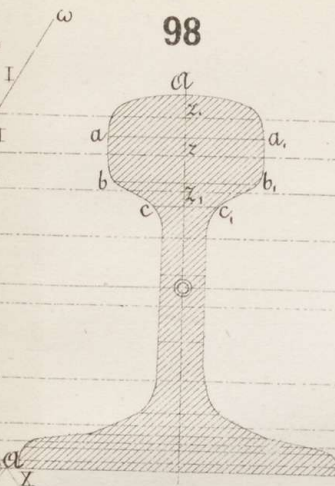




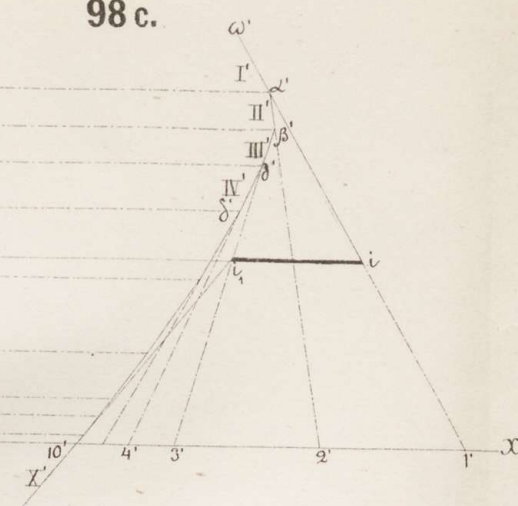
99 a.



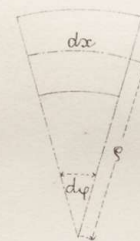
98 a.



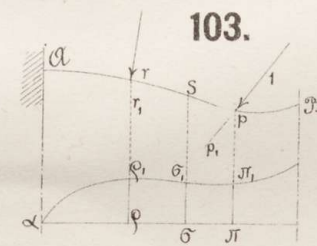
98 c.



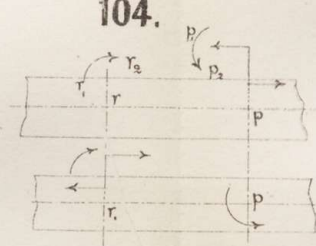
102.



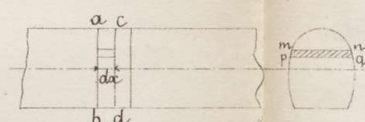
103.



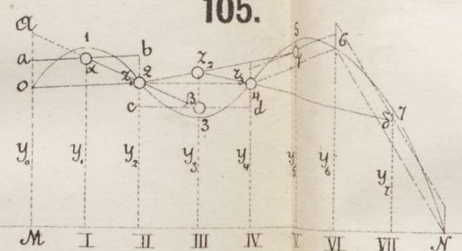
104.



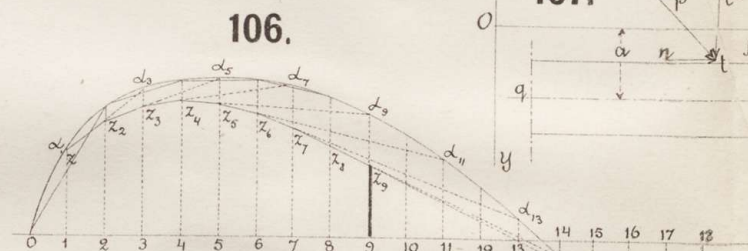
101.



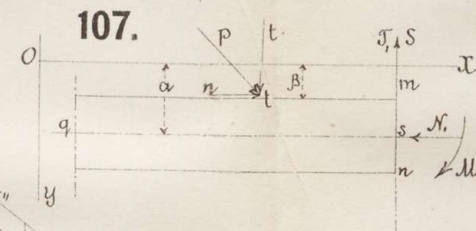
105.



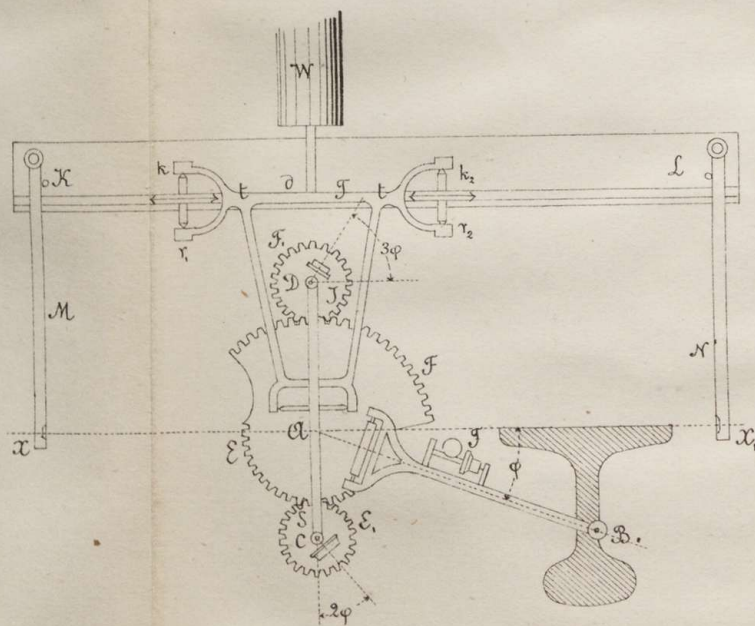
106.



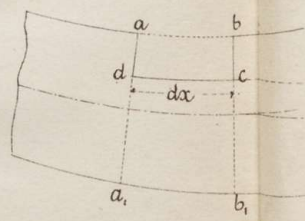
107.



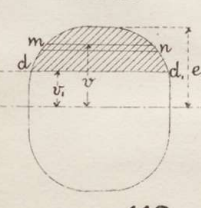
100.



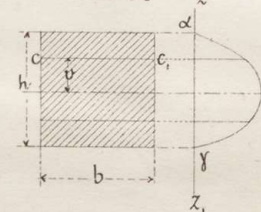
108



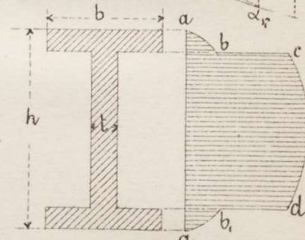
108 a.



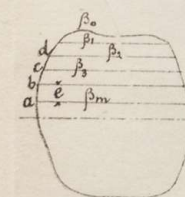
109.



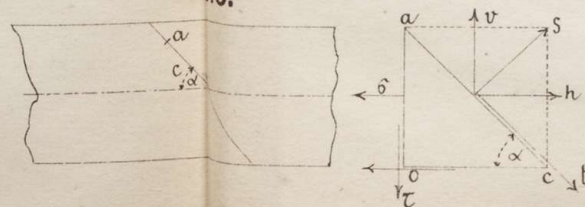
110.



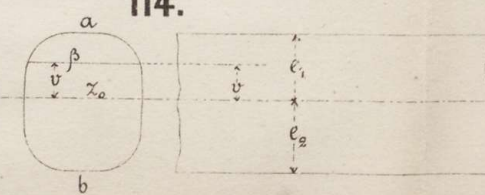
111.



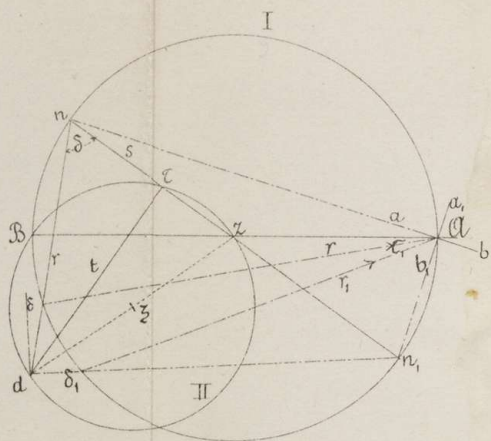
113.



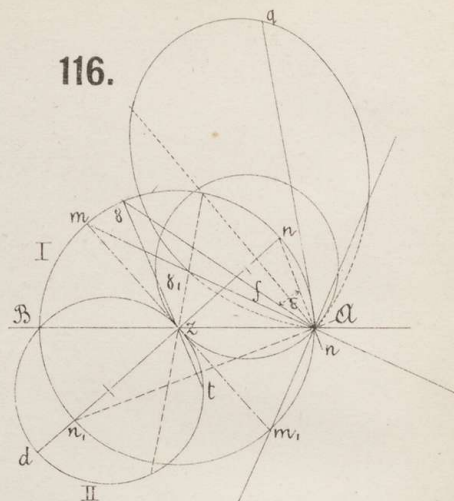
114.



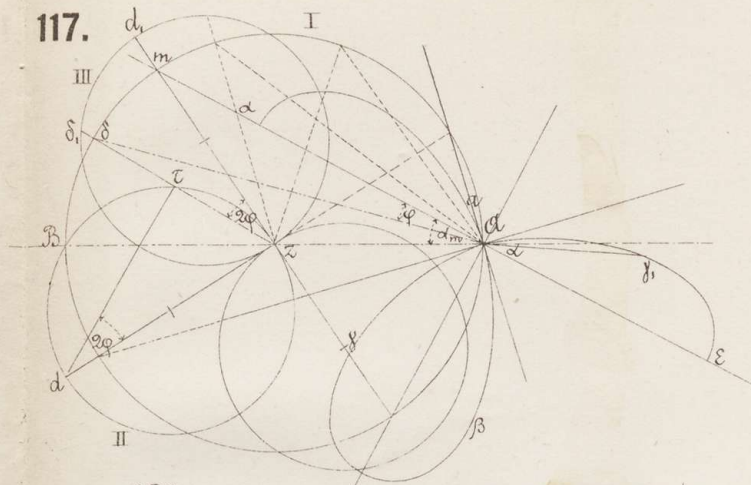
115.



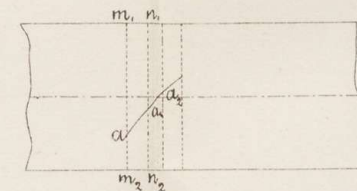
116.



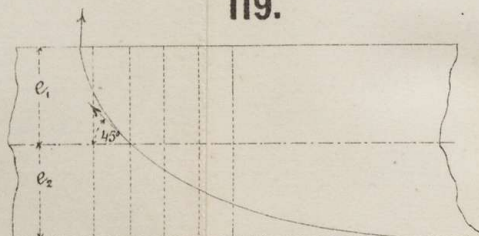
117.



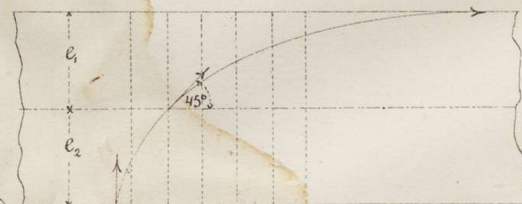
118.



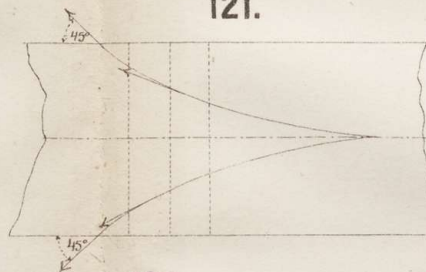
119.



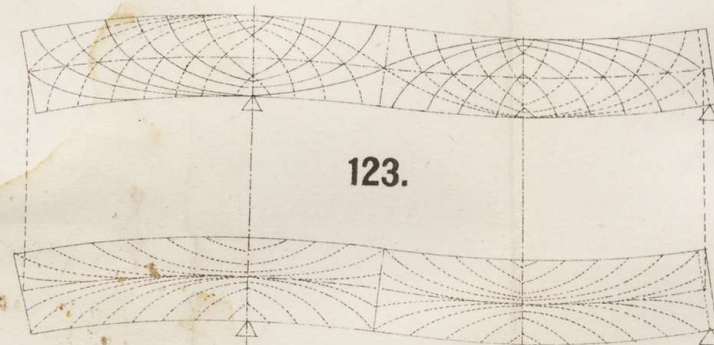
120.



121.

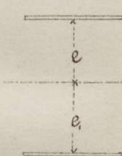


122.

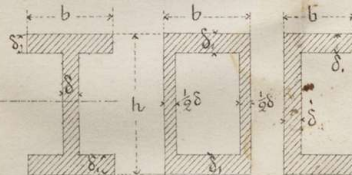


123.

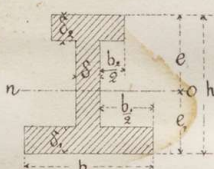
124.



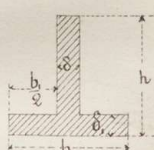
125.



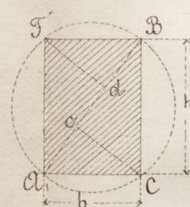
126.



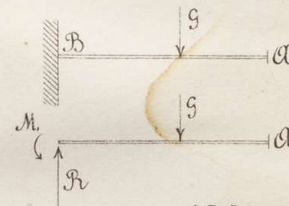
127.



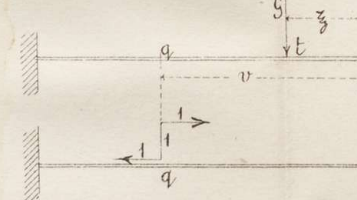
128.



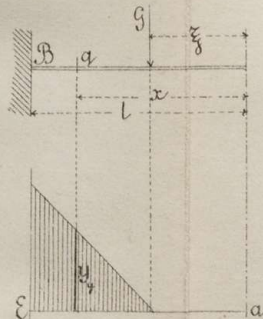
129.



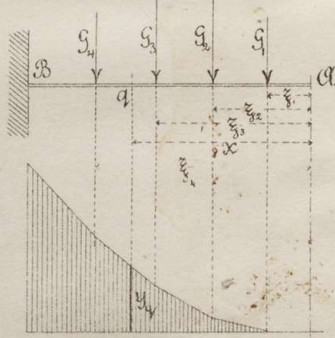
137.



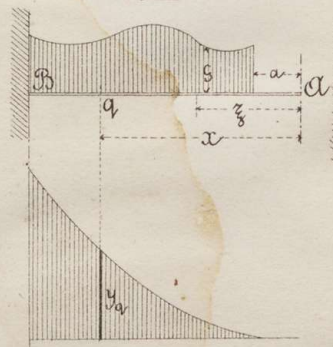
130.



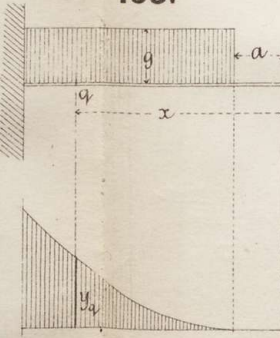
131.



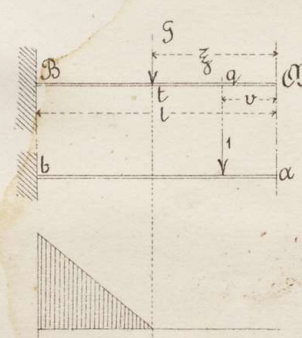
132.



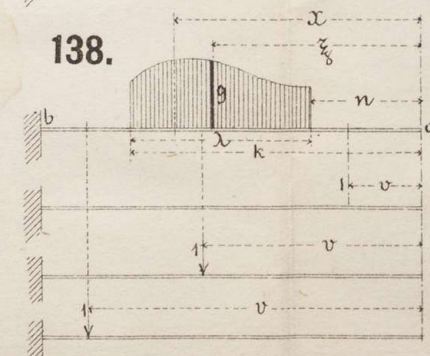
133.



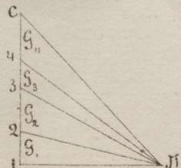
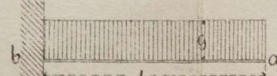
134.



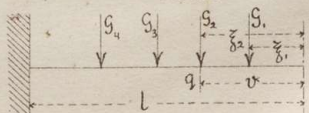
138.



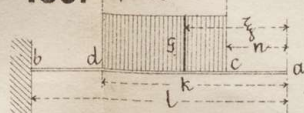
140.



136.



139.



135.

