

390083

88

ОТЧЕТЪ

О ДѢЯТЕЛЬНОСТИ

ИМПЕРАТОРСКАГО МОСКОВСКАГО ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА

за 1887—88 и 1888—89 академическіе годы.

С О Д Е Р Ж А Н І Е:

Краткій отчетъ о состояніи Императорскаго Московскаго
Техническаго Училища за 1887—88 учебный годъ.

Краткій отчетъ о состояніи Императорскаго Московскаго
Техническаго Училища за 1888—89 учебный годъ.

Алексѣй Васильевичъ Лѣтниковъ. (Не-
крологъ)... .. *Н. Шапошникова.*

Новые типы фермъ и ихъ расчетъ... .. *М. Черепашинскаго.*

Курсъ варіаціоннаго исчисленія. (Лекціи профессора математики
А. В. Лѣтникова, читанныя на II спеціальномъ курсѣ Импера-
торскаго Московскаго Техническаго Училища въ 1878—79 г.)

МОСКВА.

Типографія Общества распростран. полезн. книгъ. Моховая, д. Торлецкой.

1890.

КРАТКІЙ ОТЧЕТЪ

О ДѢЯТЕЛЬНОСТИ

ИМПЕРАТОРСКАГО

МОСКОВСКАГО ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА

за 1887—88 академическій годъ.



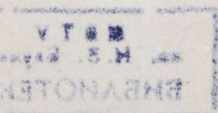
2



КРАТКІЙ ОТРѢЗЪ

О РАССЛѢДОВАНІИ

Дозволено Цензурою. Москва, іюня 28 дня 1890 г.



КРАТКІЙ ОТЧЕТЪ

О ДѢЯТЕЛЬНОСТИ

ИМПЕРАТОРСКАГО МОСКОВСКАГО ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА

ЗА 1887—88 АКАДЕМИЧЕСКІЙ ГОДЪ.

1. ДѢЯТЕЛЬНОСТЬ Педагогическаго Совѣта.

Въ истекшемъ академическомъ году Педагогическій Совѣтъ имѣлъ 11 засѣданій, изъ которыхъ 2 были экстраординарными.

Въ засѣданіи Совѣта 21 сентября 1887 года послѣдовало избраніе министра финансовъ тайнаго совѣтника Ивана Алексѣевича Вышнеградскаго въ почетные члены Педагогическаго Совѣта.

Въ засѣданіи Совѣта 21 декабря 1887 года была заслушана докладная записка профессора М. М. Черепашинскаго о необходимости возстановленія въ Училищѣ преподаванія въ курсѣ строительнаго искусства отдѣла по водоснабженію и канализаціи городовъ, не читавшагося въ Училищѣ въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ послѣ выхода въ отставку профессора П. П. Панаева. Въ виду ясно сознаваемой многими городами Россіи потребности имѣть у себя водоснабженіе и канализацію и въ виду существующаго запроса на молодыхъ техниковъ съ нѣкоторою научною подготовкою по этому дѣлу, Совѣтъ исполнѣ согласился съ мнѣніемъ докладчика о необходимо-

сти установить чтеніе лекцій по этому отдѣлу строительнаго искусства и постановилъ ходатайствовать по этому поводу передъ Г. Попечителемъ Московскаго Учебнаго Округа. Означенное ходатайство получило одобреніе Г. Попечителя, и съ начала 1888 года назначенъ былъ во II спеціальному классѣ инженерно-механическаго отдѣленія 1 дополнительный часъ для чтенія лекцій по водоснабженію и канализаціи.

Въ засѣданіи Совѣта 25 января 1888 г. былъ окончательно выработанъ нижеслѣдующій планъ учебныхъ занятій для воспитанниковъ, поступившихъ въ I общій классъ Императорскаго Техническаго Училища въ 1886 и 1887 годахъ.

I общій классъ.

Законъ Божій (свящ. Виноградовъ).	2 ч.
Математика (доц. Шапошниковъ).	5 „
Начертательная геометрія (преп. Михалевскій)	3 „
Практическія занятія по начертательной геометріи (преп. Михалевскій)	1 „
Теоретическая механика (проф. Жуковскій)	3 „
Общій курсъ физики (проф. Щегляевъ).	2 „
Нѣмецкій языкъ (преп. Бикъ) или французскій языкъ (преп. Давиньонъ)	2 „
Черченіе (преп. Ронжинъ).	8 „
Рисованіе (преп. Турчаниновъ)	4 „
Всего	30 ч.

II общій классъ.

Общіе предметы.

Законъ Божій (свящ. Виноградовъ).	1 ч.
Математика (доц. Шапошниковъ)	3 „
Низшая геодезія (преп. Михалевскій)	1 „
Общій курсъ прикладной механики (проф. Орловъ)	3 „
Общій курсъ физики (проф. Щегляевъ).	1 „

Химія неорганическая (проф. Колли)	2 ч.
Нѣмецкій языкъ (преп. Бикъ) или французскій языкъ (преп. Давиньонъ)	2 „
Техническое черченіе, въ двухъ группахъ (преп. Ронжинъ и преп. Гансъ)	2 „
	15 ч.

Предметы механическаго отдѣленія.

Токарная по дереву мастерская	6 ч.
Модельно-столярная мастерская	6 „
Токарная по металлу мастерская	6 „
Всего	33 ч.

Предметы химическаго отдѣленія.

Ботаника (преп. Мѣшаевъ)	2 ч.
Практическія занятія по ботаникѣ (преп. Мѣ- шаевъ)	4 „
Практическія занят. по физикѣ (проф. Щегляевъ)	4 „
Всего	25 ч.

III общій классъ.

Общіе предметы.

Общій курсъ физики (проф. Щегляевъ)	1 ч.
Химія неорганическая (проф. Колли)	1 „
Минералогія (преп. Мѣшаевъ)	1 1/2 „
	3 1/2 ч.

Предметы механическаго отдѣленія.

Интегральное исчисленіе (доц. Шапошниковъ)	2 ч.
Сопротивленіе матеріаловъ (доц. Худяковъ)	2 „
Построеніе деталей машинъ (доц. Худяковъ)	2 „
Проектированіе деталей машинъ (доц. Худя- ковъ)	1 1/2 „
Техническое черченіе (преп. Гансъ)	6 „
Слесарная мастерская	12 „
Всего	29 ч.

Предметы химического отдѣленія.

Органическая химія (проф. Колли)	1	ч.
Аналитическая химія (доц. Павловъ).	1	"
Практическія занятія по минералогіи (преп. Мѣшаевъ).	1	"
Ботаника (преп. Мѣшаевъ).	2	"
Практическія занятія по ботаникѣ (преп. Мѣшаевъ)	2	"
Техническое черченіе (преп. Гансъ).	4	"
Занятія въ лабораторіи.	15	"
Всего.	29 ¹ / ₂	ч.

І спеціальный классъ.

Общіе предметы.

Прикладная физика (проф. Щегляевъ)	2	ч
Металлургія (проф. Коссовъ)	1 ¹ / ₂	"
Технологія металловъ и дерева(доц. Мальцевъ)	2	"
Строительное искусство (преп. Залѣсскій).	3	"
	8 ¹ / ₂	ч.

Предметы механическаго отдѣленія.

Аналитическая механика (проф. Жуковскій).	2	ч.
Гидравлика и водяные двигатели (проф. Орловъ).	2	"
Грузоподъемныя машины (проф. Эшлиманъ) (2 ч. въ 1 полугодіи).	1	"
Проектированіе грузоподъемн. машинъ (3 ч. въ 3 группахъ во 2 полугодіи).	1 ¹ / ₂	"
Проектированіе деталей машинъ (4 ч. въ 2 группахъ въ 1 полугодіи).	2	"
Химическая технологія (проф. Коссовъ).	1 ¹ / ₂	"
Слесарная мастерская	6	"
Кузнечная мастерская	3	"
Литейная мастерская	3	"
Всего	30 ¹ / ₂	ч.

Предметы химическаго отдѣленія.

Органическая химія (проф. Колли).	2	„
Химическая технологія (проф. Рудневъ)	3	„
Аналитическая химія (доц. Павловъ)	1	„
Занятія въ лабораторіи.	16 ¹ / ₂	„
Всего	31	ч

II спеціальный классъ.

Общіе предметы.

Химическая технологія (проф. Рудневъ).	1 ¹ / ₂	ч.
Технологія волокнистыхъ веществъ, совме- стно съ III спеціальнымъ курсомъ (доц. Федоровъ)	2	„
Проектированіе по строительному искусству (преп. Залѣвскій)	1	„
Статистика (преп. Фуксъ).	1 ¹ / ₂	„
	6	ч.

Предметы механическаго отдѣленія.

Термодинамика и паровыя машины (проф. Орловъ)	2	ч.
Земледѣльческая механика (проф. Эшлиманъ).	1	„
Насосы и водяные двигатели (проф. Эшлиманъ)	1 ¹ / ₂	„
Проектированіе насосовъ и водяныхъ двига- телей (3 часа въ 3 группахъ)	3	„
Водоснабженіе и канализація (проф. Черепа- шинскій).	1	„
Инженерное искусство (проф. Черепашинскій)	3	„
Механическая мастерская.	12	„
Всего	29 ¹ / ₂	ч.

Предметы химическаго отдѣленія.

Органическая химія (проф. Колли)	1	ч.
Химическая технологія (проф. Рудневъ)	1 ¹ / ₂	„

Технологія красильныхъ веществъ (проф. Петровъ).	2 ч.
Занятія въ лабораторіи	18 $\frac{1}{2}$ „
Всего	29 ч.

III специальный классъ.

Общіе предметы.

Химическая технологія (проф. Коссовъ).	2 ч.
Технологія волокнистыхъ веществъ, совмѣстно со II спеціальнымъ курсомъ (доц. Федоровъ)	2 „
Бухгалтерія (преп. Владиміровъ).	1 „
	5 ч.

Предметы механическаго отдѣленія.

Паровые котлы и паровыя машины (проф. Эшлиманъ).	1 $\frac{1}{2}$ ч.
Проектированіе котловъ и паровыхъ машинъ (3 часа въ 3 группахъ)	3 „
Проектированіе по инженерному искусству. (проф. Черепашинскій).	3 „
Проектированіе по технолог. волокнистыхъ веществъ (доц. Федоровъ).	1 „
Механическая мастерская	6 „
Демонстративныя работы въ мастерскихъ.	6 „
Экскурсіи на фабрики и заводы	3 „
Всего	28$\frac{1}{2}$ ч.

Предметы химическаго отдѣленія.

Химическая технологія (проф. Коссовъ)	2 ч.
Химическая технологія (проф. Рудневъ)	1 $\frac{1}{2}$ „
Технологія красильныхъ веществъ (проф. Петровъ)	2 „
Проектированіе по химическ. производств. (проф. Рудневъ)	1 „

Проектированіе по химическ. производств.	
(проф. Коссовъ)	1 „
Проектированіе по химическ. производств.	
(проф. Петровъ)	1 „
Занятія въ лабораторіи.	16 ¹ / ₂ „
Всего	30 ч.

Засѣданіе Совѣта 14 марта, первое послѣ кончины профессора А. В. Лѣтникова, было открыто рѣчью предсѣдателя И. В. Аристова нижеслѣдующаго содержанія.

Милостивые Государи!

Открывая настоящее засѣданіе Педагогическаго Совѣта, я прежде всего считаю своимъ долгомъ выразить мое глубокое сожалѣніе о постигшей всѣхъ насъ незамѣнимой уtratѣ: 28 февраля скончался всѣми уважаемый и всѣми любимый профессоръ А. В. Лѣтниковъ, постоянно присутствовавшій во всѣхъ засѣданіяхъ Педагог. Совѣта и принимавшій самое дѣятельное участіе въ разрѣшеніи всѣхъ подлежащихъ обсужденію вопросовъ.— Близко знакомый съ исторіею развитія учебнаго дѣла въ Императорскомъ Техническомъ Училищѣ со дня его основанія Алексѣй Васильевичъ при разрѣшеніи затруднительныхъ и спорныхъ вопросовъ весьма часто являлся нашимъ авторитетнымъ руководителемъ: всѣ мы охотно присоединялись къ его мнѣніямъ, хорошо зная, что они представляли собою результатъ его серьезныхъ размышленій и практической опытности. Независимо отъ сего Алексѣй Васильевичъ неоднократно по просьбѣ членовъ Совѣта принималъ на себя предсѣдательство во всѣхъ комиссіяхъ по разработкѣ учебнаго плана Императорскаго Техническаго Училища и здѣсь во всей полнотѣ высказывались глубина его мысли, его огромная эрудиція и его близкое знакомство съ постановкою учебнаго дѣла во всѣхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, не только русскихъ, но иностранныхъ. Составленные подъ его ру-

ководствомъ учебные планы принимались Совѣтомъ почти безъ измѣненій и давали благотворные результаты.

Тяжкая болѣзнь сломила сильную натуру Алексѣя Васильевича такъ незамѣтно и такъ неожиданно для всѣхъ насъ, что съ большимъ трудомъ приходится мириться съ мыслью о совершившемся фактѣ. Я полагаю, что всѣми нами чувствуется и живо сознается, что Алексѣй Васильевичъ умеръ для насъ только въ физическомъ смыслѣ и что его высокій умственный и нравственный образъ будетъ долго жить между нами и будетъ служить для насъ примѣромъ въ нашей дальнейшей педагогической дѣятельности.

Предлагаю, Милостивые Государи, почтить память усопшаго вставаніемъ.

Вслѣдъ за симъ профессоръ О. Е. Орловъ произнесъ нижеслѣдующую рѣчь.

Милостивые Государи!

Прошу позволенія сказать нѣсколько словъ по поводу понесенной нами недавно тяжелой утраты.

28 февраля въ 4^{1/2} ч. утра скончался нашъ дорогой и незабвенный товарищъ, Алексѣй Васильевичъ Лѣтниковъ.

Первый разъ наше засѣданіе будетъ происходить въ отсутствіи этого наиболѣе уважаемаго и вліятельнаго члена Педагогическаго Совѣта. Трудно привыкнуть къ мысли, что уже никогда мы его не увидимъ среди насъ, никогда не услышимъ его честнаго и правдиваго голоса.. Но у насъ остались дорогія воспоминанія о немъ, какъ нашемъ сотрудникѣ, членѣ нашей корпораціи. Воспоминанія эти еще такъ живы у всѣхъ насъ, что мнѣ не трудно вызвать ихъ въ вашей памяти.

Давно ли всѣ мы, по привычкѣ, обращались къ этому опустѣлому теперь мѣсту, ожидая услышать ясно сформулированное и убѣдительное, всегда основательное и искреннее мнѣніе по тому или другому вопросу, за-

нимавшему наше вниманіе, и это мнѣніе почти всегда было окончательнымъ и рѣшающимъ для нашихъ постановленій. Такая первенствующая роль, которую всѣ мы охотно уступали покойному, не была результатомъ самолюбивыхъ стремленій съ его стороны или борьбы партій съ нашей стороны, — это было лишь справедливою данью сильному уму и громадному трудолюбію покойнаго, который со времени преобразованія Ремесленного Учебнаго Заведенія въ высшее Техническое Училище посвятилъ свои силы разработкѣ вопросовъ, возникшихъ при этомъ преобразованіи, учебныхъ, воспитательныхъ и административныхъ. Между всѣми нами онъ обладалъ такою обширною опытностью въ этомъ дѣлѣ, что по всякому вопросу, занимавшему насъ въ данное время, всегда могъ дать необходимыя историческія справки и указанія и тѣмъ содѣйствовать правильному его разрѣшенію. Мы имѣли въ немъ вѣрнаго и честнаго товарища, на котораго всегда можно было спокойно и довѣрчиво положиться, зная, что даже въ нашемъ отсутствіи, если только Алексѣй Васильевичъ былъ въ Совѣтъ (а онъ ни разу, кажется, этимъ не манкировалъ), не будетъ сдѣлано по интересующему насъ вопросу постановленія, съ которымъ мы не могли бы потомъ согласиться.

Съ особенной любовью занимался покойный Алексѣй Васильевичъ разработкою вопросовъ учебныхъ и педагогическихъ, составленіемъ учебныхъ плановъ и преобразованіемъ учебныхъ порядковъ, которыя предпринимались, большею частію, по его иниціативѣ и осуществлялись по его мысли. Можетъ быть, не всегда эти преобразования имѣли достаточную степень устойчивости, не всегда вводились съ надлежащей послѣдовательностью; но это неизбѣжно въ исторіи всякаго высшаго учебнаго заведенія, переживающаго періодъ своего развитія и самосовершенствованія, и мы, оглядываясь на прошедшее, съ гордостью можетъ утверждать, что Педагогическій Совѣтъ, душою котораго былъ покойный Алексѣй Васильевичъ, добросовѣстно выполнилъ трудную задачу организаціи Техническаго Училища въ ту пору, когда

и на западѣ Европы вновь возникавшія политехническія школы не имѣли еще достаточнаго опыта въ своемъ прошедшемъ.

Съ особенною привлекательностію возстаетъ передъ нами нравственный образъ почившаго, какъ гуманнаго воспитателя юношества, на которое онъ производилъ неотразимое впечатлѣніе своимъ возвышеннымъ образомъ мыслей, прямою и искренностію своего характера, неподкупной честностію и неуклоннымъ, почти суровымъ исполненіемъ долга. Не смотря на кажущуюся недоступность этого человѣка, молодежь, хорошо знавшая его сердце, смѣло обращалась къ нему въ трудныя минуты своей жизни за совѣтомъ и ходатайствомъ и никогда не ошибалась въ своей вѣрѣ въ него. Мы все помнимъ, какъ самый, повидимому, незначительный случай изъ внутренней жизни Училища поглощалъ много времени для обсужденія въ нашихъ засѣданіяхъ только потому, что покойный Алексѣй Васильевичъ останавливалъ на немъ наше вниманіе съ цѣлію изыскать наилучшій способъ разрѣшенія вопроса въ интересахъ воспитательнаго дѣла.

Какъ ученый и профессоръ, А. В. Лѣтниковъ навсегда сохранилъ свое имя въ исторіи русской науки и просвѣщенія; при своей жизни онъ достигъ высшихъ ученыхъ почестей и былъ окруженъ всеобщимъ уваженіемъ своихъ учениковъ и товарищей по профессіи.

И такого человѣка, еще въ полномъ цвѣтѣ силъ и таланта, мы безвозвратно лишились, лишились въ такое время, когда его умъ и опытность могли бы оказать незамѣнимыя услуги дорогому для него учрежденію въ настоящемъ переходномъ его состояніи. Но мы навсегда сохранимъ о немъ благодарное воспоминаніе и въ трудахъ своихъ будемъ руководиться тѣми же идеалами добра и истины, которыми одушевленъ былъ покойный въ своемъ служеніи дѣлу просвѣщенія.

Милостивые Государи! Вамъ предстоитъ обсудить

нынѣ рѣшеніе вопроса, чѣмъ можемъ мы достойно почтить память почившаго.

Съ своей стороны имѣю честь внести на ваше обсужденіе слѣдующія предложенія:

1) напечатать подробную біографію А. В. Лѣтникова, какъ ученаго и педагога, поручивъ составленіе ея одному изъ членовъ Педагогическаго Совѣта;

2) издать курсъ его лекцій и упражненій по сохранившимся рукописямъ и литографіямъ, подъ редакціей избранной Вами комиссіи;

3) въ залѣ засѣданій Педагогическаго Совѣта повѣсить портретъ покойнаго для вѣчнаго о немъ воспоминанія и поученія грядущихъ поколѣній учащихся.

По выслушаніи рѣчей въ Совѣтъ постановили:

1) почтить память покойнаго профессора А. В. Лѣтникова въ сороковой день кончины его поминаніемъ въ церкви Училища, 2) издать его біографію и курсы математики, читанные имъ въ Техническомъ Училищѣ и 3) ходатайствовать: а) объ открытіи подписки для образованія капитала на выдачу премій за ученые труды по прикладной математикѣ и б) о разрѣшеніи повѣсить въ актовомъ залѣ Училища портретъ покойнаго.

Въ томъ же засѣданіи Совѣта обсуждался вопросъ о преподаваніи математики во II и III общ. кл. по тѣмъ отдѣламъ, которые читалъ покойный профессоръ А. В. Лѣтниковъ. Чтеніе лекцій по этимъ отдѣламъ математики поручено доценту Н. А. Шапошникову.

Въ засѣданіи Совѣта 19 апрѣля 1888 г. заслушана докладная записка доцента П. К. Худякова о необходимости ему имѣть съ будущаго учебнаго года въ III общ. и I спеціал. классахъ механич. отдѣл. ассистента для занятій съ учащимися проектированіемъ деталей машинъ въ виду многолюдности того и другого класса. Совѣтъ по обсужденіи этого вопроса вполне согласился съ мнѣніемъ П. К. Худякова и своевременно озаботился при-

глашеніемъ для этихъ занятій особаго лица, которое было бы практически знакомо съ проектированіемъ машинъ и которому, слѣдовательно, въ будущемъ, при дальнѣйшемъ слѣдованіи этихъ многочисленныхъ классовъ, могли бы быть предложены также занятія проектированіемъ и по другимъ отдѣламъ машиностроенія. Какъ таковое лицо былъ избранъ Совѣтомъ инженеръ-механикъ А. П. Гавриленко.

II. Личный составъ служащихъ.

а) Почетные члены Педагогическаго Совѣта.

Его Императорское Высочество Великій Князь Константинъ Николаевичъ.

Его Императорское Высочество Николай Максимиліановичъ Романовскій, герцогъ Лихтенбергскій.

Генераль-адъютантъ, генераль отъ кавалеріи, князь Владиміръ Андреевичъ Долгоруковъ.

Дѣйствительный тайный совѣтникъ, графъ Дмитрій Андреевичъ Толстой.

Тайный совѣтникъ Иванъ Алексѣевичъ Вышнеградскій (съ 21 сентября 1887 года).

Академикъ, тайный совѣтникъ Пафнуцій Львовичъ Чебышевъ.

Предсѣдатель Императорскаго Русскаго Техническаго Общества, Петръ Аркадьевичъ Кочубей.

Тайный совѣтникъ Петръ Іоновичъ Губонинъ.

Военный инженеръ, генераль-маіоръ Аманъ Егоровичъ Струве.

Президентъ технологическаго института въ Бостонѣ, профессоръ Джонъ Рункль.

Дѣйствительный статскій совѣтникъ Викторъ Карловичъ Делла-Восъ.

Дѣйствительный статскій совѣтникъ Дмитрій Ивановичъ Менделѣевъ.

б) Корреспондентъ Совѣта.

Инженеръ Александръ Веніаминовичъ Бари.

в) Управление училищемъ и служащіе въ ономъ по административной и учебно-воспитательной части.

Попечитель Московскаго Учебнаго Округа, графъ Павелъ Алексѣевичъ Капнистъ.

Исправляющій должность директора, инспекторъ училища, дѣйствительный статскій совѣтникъ Иванъ Васильевичъ Аристовъ.

Исправляющій должность инспектора, коллежскій совѣтникъ Василій Ѳеодоровичъ Давыдовскій.

Исправляющій должность помощника инспектора, коллежскій совѣтникъ Николай Петровичъ Циркуновъ.

Профессоры:

Прикладной механики: Орловъ, Ѳеодоръ Евпловичъ, магистръ чистой математики Московскаго университета, статскій совѣтникъ.

Химической технологии и металлургии: Коссовъ, Ильдефонсъ Казимировичъ, магистръ химической технологии, дѣйствительный статскій совѣтникъ.

Химической технологии: Рудневъ, Владиміръ Матвѣевичъ, магистръ химіи С.-Петербургскаго университета, статскій совѣтникъ.

Высшей математики: Лѣтниковъ, Алексѣй Васильевичъ, докторъ чистой математики и членъ - корреспондентъ Императорской Академіи Наукъ, дѣйствительный статскій совѣтникъ († 28 февраля 1888 г.).

Строительнаго искусства:

Черепашинскій, Михайлъ Михайловичъ, состоящ. въ V-мъ кл. по чинопр.

Составленія проектовъ машинъ и заводовъ:

Эшлиманъ, Александръ Карловичъ, кандидатъ математическихъ наукъ С.-Петербургскаго Университета, инженеръ-технологъ 1-го разряда, статскій совѣтникъ.

Химической технологии по отдѣлу крашенія:

Петровъ, Петръ Петровичъ, ученый инженеръ-технологъ, коллежскій совѣтникъ (съ 11 февраля 1888 г.).

Органической и неорганической химіи:

Колли, Александръ Андреевичъ, магистръ химіи Московскаго университета, статскій совѣтникъ.

Общей и прикладной физики:

Щегляевъ, Владиміръ Сергѣевичъ, магистръ физики Московскаго университета, сост. въ V-мъ кл. по чинопр.

Аналитической механики:

Жуковскій, Николай Егоровичъ, докторъ прикладной математики Московскаго Университета, статскій совѣтникъ.

Доценты:

По кафедрѣ химіи:

Павловъ, Владиміръ Евграфовичъ, кандидатъ С.-Петербургскаго Университета, коллежскій секретарь.

По кафедрѣ технологии металловъ и дерева:

Мальцовъ, Павелъ Ивановичъ, инженеръ-механикъ, коллежскій секретарь.

По кафедрѣ технологии красильныхъ веществъ:

Петровъ, Петръ Петровичъ, ученый инженеръ-технологъ, коллежскій совѣтникъ (по 11 февраля 1888 г.).

По кафедрѣ машиностроенія:

Худяковъ, Петръ Кондратьевичъ, ученый инженеръ-механикъ, губерн-

скій секретарь (онъ же секретарь Педагогическаго Совѣта).

По кафедрѣ высшей математики:

Шапошниковъ, Николай Александровичъ, магистръ чистой математики Московскаго Университета, статскій совѣтникъ.

По кафедрѣ технологий волокнистыхъ веществъ:

Федоровъ, Семень Андреевичъ, инженеръ-механикъ, сост. въ VII-мъ кл. по чинопр. (съ 11 февраля 1888 г.).

Репетиторы:

Михалевскій, Иванъ Елеазаровичъ, статскій совѣтникъ.

Карельскихъ, Константинъ Павловичъ, инженеръ-механикъ.

Тумскій, Константинъ Ивановичъ, коллежскій совѣтникъ.

Гавриленко, Александръ Павловичъ, инженеръ-механикъ (съ 27 августа 1888 г.).

Ассистенты:

По кафедрѣ механики:

Румянцевъ, Василій Алексѣевичъ, инженеръ-механикъ, губернский секретарь.

По кафедрѣ физики:

Величковскій, Анатолій Порфирьевичъ, кандидатъ С.-Петербургскаго Университета, коллежскій секретарь.

Лаборанты:

Главный лаборантъ:

Никитинскій, Яковъ Яковлевичъ, ученый инженеръ-технологъ, коллежскій совѣтникъ.

Помощникъ главнаго лаборанта:

Поляковъ, Александръ Андреевичъ, инженеръ-технологъ, коллежскій секретарь.

Помощникъ глав- Куклинъ, Евгеній Владиміро-
наго лаборанта: вичъ, кандидатъ С.-Петербургскаго
Университета, коллежскій секретарь
(по 8 января 1888 г.).

Законоучитель:

Виноградовъ, Николай Сергѣевичъ, священникъ,
кандидатъ богословія.

Преподаватели:

Механической Федоровъ, Семенъ Андреевичъ,
технологіи: инженеръ-механикъ (по 11 февраля
1888 г.).

Строительнаго Залѣсскій, Василій Герасимо-
искусства: вичъ, коллежскій совѣтникъ.

Французскаго Давиньонъ, Левъ Францовичъ,
языка: статскій совѣтникъ.

Нѣмецкаго языка: Бикъ, Евгеній Николаевичъ, стат-
скій совѣтникъ.

Естественной ис- Мѣшаевъ, Викторъ Дмитріевичъ,
торіи: статскій совѣтникъ.

Статистики: Фуксъ, Владиміръ Александро-
вичъ, надворный совѣтникъ.

Бухгалтеріи: Владиміровъ, Моисей Евстафіе-
вичъ, коллежскій ассесоръ.

Черченія: { Гансъ, Адольфъ Христофоровичъ,
коллежскій совѣтникъ.

{ Ронжинъ, Николай Васильевичъ,
коллежскій секретарь (онъ же библиотекарь по 9 ноября 1887 г.).

Рисованія: Турчаниновъ, Капитонъ Оеодоровичъ, статскій совѣтникъ.

Учители:

Церковн. пѣнія: Мамонтовъ, Викторъ Николаевичъ, хормейстеръ Императорскихъ
Московскихъ театровъ.

Танцованія.

Литавкинъ, Спиридонъ Александровичъ, артистъ Императорскихъ Московскихъ театровъ.

Воспитатели:

Пѣвницкій, Викторъ Ивановичъ, статскій совѣтникъ.

Пахорскій, Николай Адриановичъ, титулярный совѣтникъ (по 1 марта 1888 г.).

Дмитревскій, Иванъ Петровичъ, коллежскій секретарь, (онъ же библиотекарь съ 9 ноября 1887 г.).

Смирновъ, Владиміръ Александровичъ, дѣйствительный студентъ Московскаго Университета (испр. должн. съ 1 марта 1888 г.).

Письмоводитель при инспекторѣ:

Кречетовъ, Петръ Семеновичъ, (онъ же помощникъ библиотекаря).

Служащіе по хозяйственной и административной части:

И. д. помощника
директора по хозяйственной части: Панинъ, Павелъ Ѳеодоровичъ, титулярный совѣтникъ.

Правитель дѣлъ: Еремѣевъ, Ѳеодоръ Дмитріевичъ, коллежскій ассесоръ.

Бухгалтеръ: Лакашинъ, Владиміръ Петровичъ, надворный совѣтникъ.

Архитекторъ: Каминскій, Александръ Степановичъ, коллежскій секретарь (по 30 января 1889 г.).

И. д. эконома: Поляковъ, Андрей Гавриловичъ, коллежскій совѣтникъ.

Казначей и полицеймейстеръ: Фроловъ, Сергѣй Николаевичъ, надворный совѣтникъ.

Кастелянша: Хавская, Елизавета Алексѣвна.

При церкви:

Священникъ:	Виноградовъ, Николай Сергѣевичъ, кандидатъ богословія,
Діаконъ:	Соколовъ, Яковъ Ивановичъ, (на вакансіи псаломщика).
Церковный староста:	Бородинъ, Николай Михайловичъ, потомственный почетный гражданинъ.

При лазаретъ:

Врачъ:	Карлинъ, Михаилъ Арсеньевичъ, дѣйствительный статскій совѣтникъ.
Сверхштатный врачъ.	Боголюбовъ, Мелитонъ Петровичъ, коллежскій совѣтникъ.
Старшій фельдшеръ:	Воронцовъ, Петръ Никитичъ, коллежскій регистраторъ.
Младшій фельдшеръ:	Кирилловъ, Александръ Кирилловичъ, коллежскій регистраторъ.

Учебныя мастерскія и механическій заводъ.

Инспекторъ учебныхъ мастерскихъ	Протопоповъ, Павелъ Петровичъ, губернский секретарь.
---------------------------------	--

Завѣдующіе механическимъ заводомъ:

Главный инженеръ механикъ:	Пермяковъ, Александръ Ивановичъ, коллежскій секретарь.
Помощникъ главнаго инженеръ-механика:	Петровъ, Никаноръ Петровичъ, коллежскій секретарь.
Бухгалтеръ:	Липинскій, Іосифъ Ѳомичъ, статскій совѣтникъ.

Завѣдующіе отдѣльными мастерскими:

Учебно - слесарною:	Протопоповъ, Павелъ Петровичъ, губернский секретарь.
---------------------	--

Чертежною:	Варенниковъ, Ипполитъ Георгіевичъ, инженеръ - механикъ (по 23 сентября 1887 г.). Перловъ, Владиміръ Флорентьевичъ, инженеръ-механикъ (временно исправляющій должность по декабрь 1887 г.). Шестаковъ, Сергѣй Сергѣевичъ, инженеръ-механикъ (по найму съ 1 января 1888 г.).
Токарною по дереву:	Ларіоновъ, Герасимъ Ларіоновичъ, ученый мастеръ (по 1 іюля 1888 г.). Козловъ, Владиміръ Ильичъ, мастеръ (испр. д. съ 1 іюля 1888 г.).
Кузнечною:	Буровъ, Семенъ Васильевичъ, ученый мастеръ.
Модельною:	Михайловъ, Андрей Михайловичъ, ученый мастеръ.
Токарною по металлу:	Поповъ, Степанъ Дмитріевичъ, ученый мастеръ.
Литейною:	Веревкинъ, Павелъ Ивановичъ, ученый мастеръ (по 1 іюня 1888 г.). Ларіоновъ, Герасимъ Ларіоновичъ, ученый мастеръ (съ 1 іюля 1888 г.).

Служащіе при мастерскихъ:

Магазинъ — вахтеръ:	Дюмуленъ, Ипполитъ Генриховичъ, коллежскій совѣтникъ (испр. д. по найму по 15 сентября 1887 г.). Михайловъ, Иванъ Николаевичъ, конторщикъ (временно испр. д. по 10 ноября 1887 г.). Доковскій, Нарцызъ Петровичъ, дворянинъ (по найму съ 10 ноября 1887 г.).
---------------------	--

Смотритель ма- Благообразовъ, Николай Ивановичъ, потомственный почетный гражданинъ.

г) Движеніе по службѣ.

Уволены по прошеніямъ: отъ должности—воспитателя, титулярный совѣтникъ Пахорскій—съ 1 марта 1888 года; завѣдующаго чертежною мастерскою, инженеръ-механикъ Варенниковъ—съ 23 сентября 1887 г. и библіотекаря, коллежскій секретарь Ронжинъ—съ 9 ноября 1887 года; *отъ службы по найму:* и. д. магазинъ-вахтера коллежскій совѣтникъ Дюмуленъ—съ 15 сентября 1887 года; *отъ дѣйствительной службы въ отставку:* завѣдующій литейною мастерскою ученый мастеръ Веревкинъ—съ 1 іюня 1888 года.

Уволенъ отъ службы: помощникъ главнаго лаборанта коллежскій секретарь Куклинъ—съ 8 января 1888 г.

Умеръ: профессоръ высшей математики дѣйствительный статскій совѣтникъ Лѣтниковъ—28 февраля 1888 года.

Опредѣлены: репетиторомъ, инженеръ-механикъ Гавриленко—съ 27 августа 1888 года; и. д. воспитателя, дѣйствительный студентъ Московскаго Университета Смирновъ—съ 1 марта 1888 года; и. д. завѣдующаго токарною по дереву мастерскою, мастеръ Козловъ—съ 1 іюля 1888 года; магазинъ-вахтеромъ дворянинъ Доковскій—съ 10 ноября 1887 г. и завѣдующимъ чертежною мастерскою, инженеръ-механикъ Шестаковъ—съ 1 января 1888 года (послѣдніе двое изъ платы по найму).

Назначены: доцентъ по кафедрѣ технологіи красильныхъ веществъ коллежскій совѣтникъ Петровъ—профессоромъ химической технологіи по отдѣлу крашенія и преподавателемъ механической технологіи инженеръ-механикъ Федоровъ—доцентомъ по кафедрѣ технологіи волокнистыхъ веществъ, оба съ 11 февраля 1888 года;

завѣдующій токарною по дереву мастерскою ученый мастеръ Ларіоновъ—завѣдующимъ литейною мастерскою съ 1 іюля 1888 года; преподаватели черченія: коллежскій совѣтникъ Гансъ и коллежскій секретарь Ронжинъ—членами Педагогическаго Совѣта на 1887—88 учебный годъ съ 4 сентября 1887 года и воспитатель коллежскій секретарь Дмитревскій—библіотекаремъ съ 9 ноября 1887 года (послѣдніе трое съ оставленіемъ въ занимаемыхъ должностяхъ).

Временно поручалось исправленіе обязанностей: профессору Эшлиману по должности директора—съ 9 ноября по 2 декабря 1887 года; инженеръ-механику Перлову по должности завѣдующаго чертежною мастерскою—съ сентября по декабрь мѣсяцы 1887 года и конторщику Михайлову по должности магазинъ—вахтера—съ 15 сентября по 10 ноября 1887 года.

Избраны: въ почетные члены Педагогическаго Совѣта тайный совѣтникъ Вышнеградскій—21 сентября 1887 года; въ секретари Педагогическаго Совѣта на 1887—88 учебный годъ губернский секретарь Худяковъ—21 сентября 1887 года.

Произведены за выслугу лѣтъ со старшинствомъ: въ *статскіе совѣтники*—бухгалтеръ при мастерскихъ Липинскій (по службѣ при Московской Контрольной экспедиціи Собственной Его Императорскаго Величества Канцеляріи по учрежденіямъ Императрицы Маріи); въ *титлярные совѣтники:* и. д. помощника директора по хозяйственной части Панинъ—съ 30 января 1887 года и въ *коллежскіе секретари:* главный инженеръ-механикъ Пермьяковъ—съ 10 іюля 1887 года.

Утвержденъ, въ чинѣ коллежскаго секретаря: воспитатель Дмитревскій по степени кандидата Московскаго университета—со старшинствомъ съ 1 іюня 1887 года.

Награждены орденами: Св. Станислава 2-й ст.—профессоръ Черепашинскій и отъ политехническаго музея въ Москвѣ профессоръ Петровъ и Св. Ста-

нислава 3 ст. инспекторъ учебныхъ мастерскихъ Протопоповъ, доцентъ Федоровъ, репетиторъ Карельскихъ и преподаватель Гансъ.

д) Высочайшія повелѣнія и особыя распоряженія.

Государь Императоръ, по всеподданнѣйшему докладу Г. Министра Народнаго Просвѣщенія, въ 11 день февраля 1888 года Высочайше соизволилъ на назначеніе доцента Императорскаго Московскаго Техническаго Училища ученаго инженеръ-технолога коллежскаго совѣтника Петрова и преподавателя механической технологіи того же училища инженеръ-механика Федорова —перваго изъ нихъ профессоромъ по кафедрѣ химической технологіи по отдѣлу крашенія, а послѣдняго—доцентомъ по кафедрѣ технологіи волокнистыхъ веществъ, съ производствомъ имъ содержанія согласно § 45 дѣйствующаго устава названнаго училища на счетъ свободныхъ суммъ училища.

Государь Императоръ, по всеподданнѣйшему докладу Г. Министра Народнаго Просвѣщенія о пожертвованіи потомственной почетною гражданкою Марією Морозовою капитала *въ 30.000 рублей* для употребленія процентовъ на расходы по командировкѣ за границу одного изъ воспитанниковъ, окончившихъ курсъ въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ, въ 16 день іюля 1888 года Высочайше соизволилъ на принятіе означеннаго пожертвованія и на предоставленіе Министерству Народнаго Просвѣщенія права утвердить правила объ употребленіи процентовъ съ сего капитала и Высочайше повелѣлъ благодарить жертвовательницу.

Въ силу такого Высочайшаго повелѣнія Господиномъ Министромъ Народнаго Просвѣщенія 23 іюля 1888 года утверждены нижеслѣдующія правила о капиталѣ, пожертвованномъ потомственной почетною гражданкою Марією Θεодоровною Морозовою Императорскому Московскому Техническому Училищу.

1. На проценты съ капитала *тридцать тысячъ*

рублей, пожертвованнаго потомственною почетною гражданкою Марією Θεодоровною Морозовою, за удержаніемъ изъ нихъ въ казну государственнаго сбора, по закону 20 Мая 1885 г., ежегодно командировается за границу одинъ изъ воспитанниковъ, православнаго исповѣданія и русскаго происхожденія, окончившихъ курсъ въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ, для практическаго приобрѣтенія техническихъ знаній, могущихъ имѣть примѣненіе на существующихъ въ Россіи фабрикахъ и заводахъ.

2. Означенный капиталъ, заключающійся въ 5% государственныхъ бумагахъ, составляя неотъемлемую собственность названнаго училища и оставаясь навсегда неприкосновеннымъ, хранится въ Московскомъ Губернскомъ Казначействѣ въ числѣ спеціальныхъ средствъ заведенія.

3. Кандидаты для командировки избираются Педагогическимъ Совѣтомъ Императорскаго Московскаго Техническаго Училища изъ лицъ, указанныхъ въ ст. 1 сихъ правилъ.

4. Протоколъ Педагогическаго Совѣта по сему предмету сообщается Маріи Θεодоровнѣ Морозовой или мужу ея Тимоѣю Саввичу Морозову, для утвержденія состоявшагося избранія. Послѣ смерти Морозовыхъ утвержденіе избраннаго кандидата предоставляется Попечителю Московскаго Учебнаго Округа.

5. Время и условія командировки опредѣляются Педагогическимъ Совѣтомъ Училища.

6. Образовавшіися по какимъ-либо причинамъ сбереженія присоединяются къ капиталу для приращенія его.

Государь Императоръ, по всеподданнѣйшему докладу Г. Министра Народнаго Просвѣщенія, въ 21 день августа 1888 года Всемилостивѣйше соизволилъ на открытіе между служащими въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ и бывшими учениками умершаго

профессора сего Училища Лѣтникова добровольной подписки для образованія капитала на выдачу преміи имени А. В. Лѣтникова за ученые труды по прикладной математикѣ.

По распоряженію Господина Министра Народнаго Просвѣщенія пріемъ евреевъ, желающихъ получить образованіе въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ, ограниченъ тремя процентами.

По распоряженію Господина Министра Народнаго Просвѣщенія, изложенному въ предложеніи Г. Попечителя Московскаго Учебнаго Округа отъ 9 ноября 1887 года за № 11931, и. д. директора Императорскаго Техническаго Училища, инспекторъ, дѣйствительный статскій совѣтникъ Аристовъ былъ командированъ по дѣламъ службы въ С.-Петербургъ. Въ означенной командировкѣ находился съ 9 ноября по 2 декабря 1887 г.

На основаніи Высочайшаго повелѣнія, послѣдовавшаго въ 5 день декабря 1881 г., Господинъ Министръ Народнаго Просвѣщенія 27 января 1888 года изволилъ утвердить нижеслѣдующее положеніе о стипендіи имени умершаго Мануфактуръ Совѣтника Герасима Ивановича Хлудова при Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ.

1. На проценты съ капитала въ *десять тысячъ руб.*, завѣщаннаго умершимъ Мануфактуръ Совѣтникомъ Герасимомъ Ивановичемъ Хлудовымъ, за удержаніемъ суммы на основаніи закона 20 мая 1885 г., учреждается при Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ одна стипендія имени завѣщателя.

2. Означенный капиталъ, заключающійся въ пятипроцентныхъ государственныхъ банковыхъ билетахъ, признается неприкосновеннымъ, а на содержаніе стипендіата употребляются только проценты въ размѣрѣ установленной за содержаніе пансіонеровъ платы. Излишніе проценты причисляются къ капиталу. Капиталъ хранится въ Московскомъ Губернскомъ Казначействѣ вмѣстѣ

съ спеціальными суммами Императорскаго Московскаго Техническаго Училища.

3. Стипендія должна быть предоставляема только круглымъ сиротамъ, изъ дѣтей бѣднѣйшихъ обывателей города Москвы, православнаго вѣроисповѣданія. Выборъ, стипендіата принадлежитъ дочерямъ Герасима Ивановича Хлудова: Прасковѣ Прохоровой, Клавдіи Востряковой, Александрѣ Найденовой и Любви Лукутиной по ихъ взаимному соглашенію, послѣ же ихъ смерти Московскому Купеческому Обществу.

4. Стипендія предоставляется лицу, удовлетворяющему требованію § 3 и выдержавшему пріемное испытаніе въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ на общемъ основаніи.

5. Стипендіатъ по опредѣленію Педагогическаго Совѣта, уволенный изъ числа учениковъ за неодобрительное поведеніе, лишается стипендіи, о чемъ немедленно доводится до свѣдѣнія лицъ или учрежденія, коимъ принадлежитъ выборъ стипендіата, для избранія другого лица. Стипендіату, оставшемуся на второй годъ въ одномъ и томъ же классѣ, стипендія можетъ быть сохранена только по особо уважительнымъ причинамъ, напр. тяжелой продолжительной болѣзни, и при томъ во время всего курса лишь одинъ разъ.

6. Начальство Императорскаго Московскаго Техническаго Училища два раза въ годъ, по истеченіи каждаго полугодія, увѣдомляетъ лицъ или учрежденіе, поименованныхъ въ п. 3 сего положенія, объ успѣхахъ и поведеніи стипендіата.

7. Пользованіе стипендіею не налагаетъ на стипендіата никакихъ обязательствъ.

Господинъ Министръ Народнаго просвѣщенія въ видахъ упроченія въ будущемъ существованія Императорскаго Московскаго Техническаго Училища призналъ необходимымъ дарованіе Училищу новаго устава, согласо-

ваннаго съ положеніемъ, въ которое оно поставлено переходомъ въ вѣдѣніе Министерства Народнаго Просвѣщенія.

Для правильного разрѣшенія сего вопроса статсъ-секретарь И. Д. Деляновъ нашелъ необходимымъ образовать въ Москвѣ особую комиссію изъ лицъ, близко знакомыхъ съ устройствомъ училища, и возложить на нее выработать вышеупомянутый уставъ, учебный планъ и программы примѣнительно къ таковымъ же Высочайше утвержденнымъ для Харьковскаго Технологическаго Института, съ тѣмъ, чтобы означенною комиссіею былъ представленъ на утвержденіе не только нормальный, но и временный штатъ для училища, рассчитанный на тѣ денежные средства, которыми располагаетъ Техническое Училище въ настоящее время.

На основаніи вышеупомянутаго распоряженія Господина Министра Народнаго Просвѣщенія Г. Попечитель Московскаго Учебнаго Округа предложеніемъ отъ 8 февраля 1888 года за № 1282 изволили учредить подъ *своимъ предсѣдательствомъ* комиссію для выработки новаго устава, учебного плана и программъ Императорскаго Техническаго Училища въ составѣ слѣдующихъ лицъ: товарища предсѣдателя—окружнаго инспектора дѣйствительнаго статскаго совѣтника Вейнберга и членовъ: и. д. директора дѣйствительнаго статскаго совѣтника Аристова, профессоровъ: дѣйствительныхъ статскихъ совѣтниковъ: Лѣтникова и Коссова, статскихъ совѣтниковъ: Колли, Орлова, Руднева, Жуковскаго и Эшлимана, состоящихъ въ V классѣ: Черепашинскаго и Щегляева, доцента губернскаго секретаря Худякова, исправляющаго должность инспектора коллежскаго совѣтника Давыдовскаго, инспектора учебныхъ мастерскихъ губернскаго секретаря Протопопова, исправляющаго должность помощника директора по хозяйственной части коллежскаго секретаря Панина и главнаго инженеръ-механика губернскаго секретаря Пермякова.

19 іюля 1888 года Господиномъ Товарищемъ Министра Внутреннихъ Дѣлъ Сенаторомъ Плеве, утвержденъ нижеслѣдующій Уставъ Общества вспомошествованія нуждающимся воспитанникамъ Императорскаго Московскаго Техническаго Училища.

І. Цѣль Общества.

§ 1. Общество имѣетъ цѣлію доставлять бѣднымъ воспитанникамъ Императорскаго Московскаго Техническаго Училища средства къ существованію для окончанія образованія.

§ 2. Оказываемое Обществомъ вспомошествованіе можетъ состоять:

- а) во взносѣ за нуждающихся платы за ученіе;
- б) въ выдачѣ имъ единовременныхъ денежныхъ пособій;
- в) въ выдачѣ постояннаго содержанія въ продолженіе года или всего учебнаго курса;
- г) въ улучшеніи матеріальныхъ условій жизни учащихся;

д) въ заботахъ какъ о пользованіи заболѣвшихъ на дому, такъ и о помѣщеніи ихъ въ больницы;

е) въ пріисканіи нуждающимся во время ихъ ученія занятій, могущихъ доставить имъ средства къ жизни.

§ 3. Число получающихъ отъ Общества пособіе неограничено и зависитъ отъ его средствъ.

При оказаніи вспомошествованія принимается во вниманіе не одна только бѣдность ученика, но также способность его къ ученію, прилежаніе и хорошее поведеніе.

ІІ. Составъ Общества.

§ 4. Общество состоитъ изъ неограниченнаго числа членовъ обоого пола, всѣхъ состояній и званій, за исключеніемъ воспитанниковъ учебныхъ заведеній, нижнихъ воинскихъ чиновъ, юнкеровъ, подвергшихся ограниченію правъ по суду и несовершеннолѣтнихъ, кромѣ имѣющихъ классныя чины.

§ 5. Въ составъ Общества входятъ: а) почетные чле-

ны, которыми могут быть лица, оказавшія Обществу особыя, сообразныя съ цѣлю онаго, услуги или сдѣлавшія въ его пользу значительныя пожертвованія и б) дѣйствительные члены, обязавшіеся вносить ежегодно десять рублей въ кассу Общества.

Примѣчаніе 1-е. Первоначальный составъ Общества образуется изъ учредителей.

Примѣчаніе 2-е. Попечитель Московскаго Учебнаго Округа, по званію своему, считается почетнымъ членомъ Общества и почетнымъ предсѣдателемъ комитета и общихъ собраний членовъ Общества.

§ 6. Почетные и дѣйствительные члены избираются общимъ собраніемъ членовъ Общества, посредствомъ закрытой баллотировки.

Примѣчаніе. Члены, неуплатившіе своего взноса въ теченіе двухъ лѣтъ, считаются выбывшими изъ Общества, сохраняя, впрочемъ, право вновь вступить въ оное, на общемъ основаніи.

III. Средства Общества.

§ 7. Средства Общества состоятъся:

а) изъ ежегодныхъ взносовъ его членовъ;
б) изъ единовременныхъ пожертвованій членовъ Общества и постороннихъ лицъ деньгами, движимымъ и недвижимымъ имуществомъ, и

в) изъ доходовъ отъ публичныхъ лекцій, спектаклей, концертовъ и т. п., устраиваемыхъ Обществомъ съ надлежащаго каждый разъ разрѣшенія и съ соблюденіемъ установленныхъ для сего дѣйствующими узаконеніями и особыми правительственными распоряженіями правилъ.

§ 8. Всѣ суммы Общества, по обращеніи ихъ въ государственныя или гарантированныя правительствомъ % бумаги, сдаются на храненіе въ Государственный Банкъ.

§ 9. Расходъ суммъ и выдача вещей производятся не иначе, какъ по постановленіямъ комитета.

IV. Управление дѣлами Общества.

§ 10. Завѣдываніе дѣлами Общества возлагается:

- а) на комитетъ Общества, и
- б) на общее собраніе его членовъ.

А) Комитетъ Общества.

§ 11. Комитетъ Общества состоитъ изъ председателя, его товарища, казначея, секретаря, шести выборныхъ членовъ, избираемыхъ общимъ собраніемъ на три года, посредствомъ закрытой баллотировки и двухъ непрѣмныхъ, которыми состоятъ директоръ и инспекторъ Императорскаго Московскаго Техническаго Училища.

§ 12. При отсутствіи председателя, мѣсто его занимаетъ товарищъ председателя, секретаря же можетъ замѣнять въ засѣданіяхъ одинъ изъ членовъ комитета, по его избранію. На случай отсутствія кого-либо изъ членовъ или казначея комитета (по болѣзни или другимъ причинамъ) общимъ собраніемъ избираются къ первымъ два кандидата, а къ послѣднему одинъ. При полномъ составѣ членовъ комитета и при наличности казначея, кандидаты къ нимъ имѣютъ въ засѣданіи комитета лишь совѣщательный голосъ.

§ 13. Комитетъ собирается по мѣрѣ надобности, по приглашенію председателя.

§ 14. Для дѣйствительности засѣданій комитета необходимо присутствіе въ нихъ, кромѣ председателя, по крайней мѣрѣ, трехъ его членовъ.

Примѣчаніе. Комитетъ Общества можетъ приглашать въ свои засѣданія и постороннихъ лицъ, участіе которыхъ въ комитетѣ можетъ быть полезнымъ, съ правомъ лишь совѣщательнаго голоса.

§ 15. Рѣшенія комитета постановляются простымъ большинствомъ голосовъ наличныхъ членовъ, о чемъ составляется журналъ за общимъ ихъ подписаніемъ. Въ

случаѣ равенства голосовъ, мнѣніе предсѣдательствующаго даетъ перевѣсъ.

§ 16. На обязанности комитета лежить:

- а) распредѣленіе занятій между членами комитета;
- б) принятіе прошеній о пособіи;
- в) собраніе по этимъ прошеніямъ всѣхъ необходимыхъ для ихъ разрѣшенія свѣдѣній;
- г) обсужденіе степени нуждъ просителей, на основаніи собранныхъ о нихъ свѣдѣній;
- д) выдача пособій, не превышая при этомъ суммы, определенной для сего общимъ собраніемъ (§ 21 п. в.);
- е) свидѣтельствованіе суммъ и имущества Общества не менѣе двухъ разъ въ годъ, въ началѣ каждаго полугодія;
- ж) попеченіе объ увеличеніи средствъ Общества приглашеніемъ къ пожертвованіямъ, устройствомъ публичныхъ лекцій и т. п.;
- з) сношеніе съ подлежащими мѣстами и лицами;
- и) наблюденіе за исполненіемъ правилъ сего устава;
- і) представленіе на усмотрѣніе общаго собранія вопросовъ по дѣламъ Общества, неразрѣшенныхъ комитетомъ или превышающихъ его власть, и
- к) представленіе общему собранію отчета о дѣйствіяхъ Общества за истекшій годъ и смѣты прихода и расхода на будущій годъ.

§ 17. Казначей принимаетъ постоянные членскіе взносы и единовременныя пожертвованія, производитъ денежныя и другія выдачи, ведетъ прихода-расходныя книги и составляетъ годовую отчетность и смѣту на будущій годъ. Единовременныя пожертвованія и членскіе взносы могутъ быть принимаемы по особымъ квитанціоннымъ книгамъ, кромѣ казначея, всѣми членами комитета и, по ихъ порученію, членами Общества, изъ-явившимися на то согласіе.

Примѣчаніе Прихода-расходныя книги выдаются казначею за печатью Общества, подписью предсѣдателя и скрѣпою секретаря.

§ 18. Секретарь составляет журналы комитета и общаго собранія, ведетъ списки членовъ Общества и приобщающихъ къ его помощи (съ объясненіемъ мѣста жительства просителей, собранныхъ о нихъ свѣдѣній и какого рода оказано имъ вспомошествованіе) и составляетъ годовые отчеты о дѣйствіяхъ Общества.

§ 19. Всѣ исходящія бумаги подписываются председателемъ и скрѣпляются секретаремъ.

Б) Общее собраніе.

§ 20. Общія собранія членовъ Общества бываютъ годовыя и чрезвычайныя. Первые созываются председателемъ Общества не позднѣе октября мѣсяца, а чрезвычайныя, въ случаѣ надобности, председателемъ, по его усмотрѣнію, или по постановленіямъ комитета, или по требованію половины числа всѣхъ членовъ Общества.

Примѣчаніе. О времени, мѣстѣ и предметахъ занятій общихъ собраній заблаговременно извѣщаются какъ члены Общества, такъ и Московскій Оберъ-Полицеймейстеръ.

§ 21. Предметы занятій общихъ собраній составляютъ:

а) избраніе членовъ Общества, должностныхъ лицъ и членовъ комитета и кандидатовъ къ нимъ;

б) разсмотрѣніе и утвержденіе отчетовъ о дѣйствіяхъ Общества за истекшій годъ;

в) разсмотрѣніе и утвержденіе смѣтъ прихода и расхода на будущій годъ и опредѣленіе размѣра какъ общей суммы на выдачу пособій, такъ и наибольшихъ размѣровъ пособія для выдачи одному лицу;

г) составленіе и утвержденіе инструкцій для комитета и его отдѣльныхъ членовъ;

д) разрѣшеніе вопросовъ объ измѣненіи устава и о закрытіи Общества, и

е) разрѣшеніе всѣхъ вообще вопросовъ, предлагаемыхъ комитетомъ и членами Общества.

§ 22. Общее собраніе считается состоявшимся при

наличности въ его засѣданіи не менѣе 15-ти членовъ, кромѣ принадлежащихъ къ составу комитета. Если собраніе не состоится по неявкѣ требуемаго числа членовъ, то для разрѣшенія вопросовъ, подлежащихъ разсмотрѣнію несостоявшагося собранія, назначается, не ранѣе какъ чрезъ недѣлю, новое, которое считается состоявшимся независимо отъ числа явившихся въ оное членовъ, о чемъ члены Общества въ извѣщеніяхъ о собраніи и предупреждаются. Дѣла въ общихъ собраніяхъ рѣшаются простымъ большинствомъ голосовъ, за исключеніемъ вопросовъ объ измѣненіи устава и о закрытіи Общества, для рѣшенія которыхъ требуется присутствіе въ собраніи по крайней мѣрѣ $\frac{3}{4}$ членовъ Общества и согласіе не менѣе $\frac{2}{3}$ наличныхъ членовъ. О постановленіяхъ общаго собранія составляются журналы за общимъ подписаніемъ присутствующихъ членовъ. Для законности постановленій чрезвычайныхъ собраній, назначаемыхъ по требованію членовъ Общества, требуется присутствіе въ нихъ не менѣе $\frac{1}{3}$ живущихъ въ Москвѣ членовъ Общества, а при баллотировкѣ вопросовъ большинство $\frac{2}{3}$ присутствующихъ въ засѣданіи членовъ.

§ 23. Общее собраніе избираетъ на три года изъ среды себя особую ревизіонную комиссію для повѣрки денежныхъ суммъ, книгъ и отчетовъ комитета. Число членовъ ревизіонной комиссіи опредѣляется общимъ собраніемъ.

Примѣчаніе. Званіе членовъ ревизіонной комиссіи и должностныхъ лицъ, членовъ и предсѣдателя комитета несовмѣстимы.

У. П р а в а О б щ е с т в а .

§ 24. Общество состоитъ въ вѣдѣніи Министерства Внутреннихъ Дѣлъ, на основаніи ст. 1521 и 1522 Уст. Общ. Призр. т. XIII св. зак.

§ 25. Общество имѣетъ печать съ своимъ наименованіемъ.

§ 26. На измѣненіе или дополненіе устава испраши-

вается каждый разъ разрѣшеніе въ установленномъ порядкѣ.

§ 27. Отчеты Общества, по рассмотрѣніи и утвержденіи ихъ общимъ собраніемъ, публикуются въ „Правительственномъ Вѣстникѣ“ и въ „Московскихъ Вѣдомостяхъ“ и представляются въ Министерство Внутреннихъ Дѣлъ, чрезъ посредство Губернатора.

§ 28. Общество имѣетъ право пріобрѣтать и владѣть недвижимымъ имуществомъ съ благотворительною цѣлью.

VI. О закрытіи Общества.

§ 29. Если Общество, по какимъ либо обстоятельствамъ, прекратить свой дѣйствія, то весь принадлежащій ему капиталъ поступаетъ въ качествѣ неприкосновеннаго фонда въ вѣдѣніе Императорскаго Техническаго Училища, и проценты съ этого капитала расходуются Училищемъ на помощь учащимся. Въ собственность того же Училища поступаетъ все движимое и недвижимое имущество Общества.

§ 30. О закрытіи Общества доводится до свѣдѣнія Министерства Внутреннихъ Дѣлъ, чрезъ посредство Губернатора.

е) Особые труды профессоровъ и преподавателей.

Профессоръ В. М. Рудневъ напечаталъ въ журналѣ Министерства Путей Сообщенія статью: „о пропитываніи дерева“.

Профессоръ Н. Е. Жуковскій 1) напечаталъ въ Вѣстникѣ опытной физики и элементарной математики статью: „Элементарная теорія гироскоповъ“, 2) демонстрировалъ въ Association française pour l'avancement des Sciences изобрѣтенный имъ приборъ для опредѣленія моментовъ инерціи тѣла и напечаталъ его описаніе въ отчетахъ ассоціаціи.

Профессоръ Ѳ. Е. Орловъ редактировалъ приложение къ отчету Политехническаго Общества за 18⁸⁶/₈₇ годъ.

Профессоръ М. М. Черепашинскій напечаталъ въ извѣстіяхъ Императорскаго Московскаго Университета „Краткій историческій очеркъ строительной механики“.

Доцентъ П. К. Худяковъ напечаталъ въ Кіевскомъ журналѣ „Инженеръ“ двѣ статьи: 1) Современное состояніе металло-прокатнаго дѣла за границей; 2) Механизмъ „Oerlikon“ для преобразованія равномернаго вращательнаго движенія въ таковое же поступательное, и замѣтку „О профессиональныхъ школахъ на Брюссельской международной выставкѣ 1888 года“.

Доцентъ П. И. Мальцовъ началъ печатаніе—„Справочной Книги для инженеровъ, механиковъ, техниковъ и строителей“ вторымъ изданіемъ.

Преподаватель Е. Н. Бикъ напечаталъ „Учебникъ нѣмецкаго языка, построенный на изученіи связнаго текста“, одобренный ученымъ комитетомъ Мин. Нар. Просвѣщенія, и сдѣлалъ докладъ въ Учебн. Отд. Общ. Распр. Технич. Знан. „Обзоръ методовъ преподаванія иностранныхъ языковъ“, напечатанный въ журналѣ—„Педагогическій сборникъ“ за апр. и май 1889 года.

III. Личный составъ учащихся.

а) Число учащихся.

Къ началу 1887—1888 учебнаго года состояло на лицо:

Казеннокоштныхъ	72
Своекоштныхъ пансіонеровъ и стипендіатовъ	43
Приходящихъ учениковъ	345
Занимающихся въ мастерскихъ	1
Итого...	461

По 1-е іюня 1888 года.

а) выпущено:

Съ правами инженеръ-технолога 15

б) уволено:

Казеннокоштныхъ	2
Своекоштныхъ пансіонеровъ	4
Приходящихъ учениковъ	38
Итого	44

в) принято:

Своекоштныхъ пансіонеровъ	1
Приходящихъ учениковъ	8
Итого	9

г) умерло:

Приходящихъ учениковъ	1
---------------------------------	---

д) перечислено:

Изъ приходящихъ въ казеннокоштные . . .	1
„ приходящихъ въ пансіонеры	3
„ пансіонеровъ въ приходящіе	5
Итого	9

Къ 1-му іюня 1888 года состояло:

Казеннокоштныхъ	65
Своекоштныхъ пансіонеровъ и стипендіатовъ	37
Приходящихъ учениковъ	307
Занимающихся въ мастерскихъ	1
Итого	410

Съ 1-го іюня 1888 года по 10-е октября

а) выпущено:

Съ правами инженеръ-механика	13
„ правами ученаго мастера	3
Итого	16

б) уволено:

Пансіонеровъ	1
Приходящихъ учениковъ	12
Итого	13

в) принято:

Приходящихъ учениковъ	6
---------------------------------	---

г) умерло:

Приходящихъ учениковъ	1
---------------------------------	---

д) перечислено:

Изъ приходящихъ въ казеннокоштные	14
„ пансіонеровъ въ приходящіе	5
Итого	19

На открывшіяся вакансіи подано прошеній:

Въ своекоштные пансіонеры	6
„ приходящіе ученики	93
Итого	99

Принято по конкурсу:

Въ своекоштные пансіонеры	5
„ приходящіе ученики	84
Итого	89

Затѣмъ къ началу 1888—1889 учебнаго года состоитъ на лицо:

Казеннокоштныхъ	72
Своекоштныхъ пансіонеровъ и стипендіатовъ	34
Приходящихъ учениковъ	367
Занимающихся въ мастерскихъ	2
Итого	475

Въ теченіе 1887—1888 учебнаго года состояли стипендіатами:

Имени Его Императорскаго Величества (Коломенской городской думы)—Добычинъ Петръ и Зубаревъ Дмитрій.

Имени въ Божѣ почивающей Императрицы Маріи Теодоровны (Собственной Его Императорскаго Величества Канцеляріи по учрежденіямъ Императрицы Маріи)—Сутоцкій Стефанъ.

Имени въ Божѣ почивающаго Его Императорскаго Высочества Принца Петра Георгіевича Ольденбургскаго—Турчаниновъ Митрофанъ.

Имени Его Императорскаго Высочества Великаго Князя Константина Николаевича (Московского Биржеваго Комитета)—Дмитріевъ Дмитрій.

Имени бывшаго Министра Финансовъ М. Х. Рейтерна—Салтычевъ Иванъ (Московского Биржеваго Комитета).

Имени Князя С. М. Голицына—Чижиговъ Александръ.

Имени тайнаго совѣтника И. Н. Дурново (Ростовской на Дону Городской Думы)—Ходатаевъ Петръ.

Кавказскими стипендіатами: Ивановъ 1-й Николай, Карповъ Ѳедоръ, Даль Левъ, Степановъ Тикранъ, Теръ-Іоаннесовъ Акопъ, Теръ-Татеосовъ Аршакъ, Киферъ Людвигъ и Шереметко Петръ.

Имени Барона Дельвига—Разинъ Константинъ.

Имени умершаго потомственнаго почетнаго гражданина В. Ѳ. Кокина—Около-Кулакъ Николай.

Имени умершаго Московскаго купца Г. Г. Хлѣбникова—Гололобовъ Александръ.

Имени умершаго инженеръ-механика С. И. Гарелина—Митрофановъ Петръ.

Болгарскій стипендіатъ Калянджіевъ Цанъ.

Вспомогательнаго общества купеческихъ прикащиковъ въ Москвѣ—Костроминъ Сергѣй, Хохловъ Петръ и Тряпкинъ Владиміръ.

Донского казачьяго войска—Пѣговъ Дмитрій, Ротовъ Александръ и Самсоновъ Яковъ.

Имени въ Бозѣ почивающаго Императора Александра II (Владикавказской Городской Думы) — Козловскій Елисей.

Терскаго казачьяго войска—Мелиховъ Иванъ.

б) Распределение учащихся по классамъ къ 1-му іюня 1888 года.

К Л А С С Ы.	Казенно-коштныхъ.	Пансіонеровъ.	Приходящихъ.	В С Е Г О .
Въ 1-мъ общемъ классѣ	1	8	72	81
Во 2-мъ общемъ классѣ	9	11	108	128
Въ 3-мъ общемъ классѣ	10	10	43	63
„ 1-мъ специальномъ классѣ	19	1	35	55
Во 2-мъ специальномъ классѣ	19	5	40	64
Въ 3-мъ специальномъ классѣ	6	1	6	13
„ практическомъ разрядѣ	1	1	3	5
В с е г о	65	37	307	409
Занимающихся въ мастерскихъ	—	—	—	1
И т о г о	—	—	—	410

в) Распределение учащихся по классамъ къ началу 1888—1889-го учебнаго года.

К Л А С С Ы.	Казенно-коштныхъ.	Пансіонеровъ.	Приходящихъ.	В С Е Г О .
Въ 1-мъ общемъ классѣ	1	5	74	80
Во 2-мъ общемъ классѣ	1	5	84	90
Въ 3-мъ общемъ классѣ	14	10	81	105
„ 1-мъ специальномъ классѣ	14	8	55	77
Во 2-мъ специальномъ классѣ	20	1	36	57
Въ 3-мъ специальномъ классѣ	22	5	37	64
В с е г о	72	34	367	473
Занимающихся въ мастерскихъ	—	—	—	2
И т о г о	—	—	—	475

г) Приѣмъ учащихся.

Послѣ приѣмныхъ испытаній, окончившихся 28-го августа 1888 года, по опредѣленію Педагогическаго Совѣта, были приняты въ Училище:

Въ 1-й общій классъ.

Акуновъ Иванъ.	Кронбергъ Дмитрій.
Алексѣевъ Александръ.	Кузнецовъ Константинъ.
Алексѣевъ Константинъ.	Кулагинъ Николай.
Баккалъ Илья.	Левить Мовша.
Балашевъ-Кочетовъ Левъ.	Либау Густавъ.
Барановъ Константинъ.	Липгартъ Эрнестъ.
Брюхоненко Владиміръ.	Лушниковъ Михаилъ.
Буркевицъ Евстафій.	Любенковъ Владиміръ.
Ваниковскій Михаилъ.	Макарьевъ Павелъ.
Варыхаловъ Дмитрій.	Малиновскій Николай.
Вердеревскій Дмитрій.	Малюковъ Павелъ.
Вилькенъ Густавъ.	Меликъ-Дадаянцъ Айрапетъ.
Волобуевъ Стефанъ.	Меньшиковъ Владиміръ.
Волынко Евгеній.	Мокіевскій-Зубокъ Сергѣй
Воронцовъ Дмитрій.	Напалковъ Викторъ.
Гильдебрандтъ Карлъ.	Некрасовъ Кириллъ.
Грейфе Эрнестъ-Германъ.	Нестроевъ Анатолій.
Давидовъ Иванъ.	Николаевъ-Назаровъ Влад.
Добровольскій Леонидъ.	Нѣмчиновъ Владиміръ.
Долголенко Валеріанъ.	Орловскій Семенъ.
Донде Авраамій.	Петровъ Владиміръ.
Дудинцевъ Іосифъ.	Пименовъ Ксенофонтъ.
Ерасси Николай.	Поляковъ Николай.
Ергопуло Викторъ.	Поповъ Николай.
Жонголоновичъ Станиславъ.	Россетъ Александръ.
Залѣсскій Андрей.	Рыкачевъ Николай.
Ижболдинъ Григорій.	Салтыковъ Левъ.
Ильинъ Сергѣй.	Сараджевъ Артемій.
Карчагинъ Дмитрій.	Сластеновъ Анатолій.
Каспаровъ Арташесъ.	Соколовъ Сергѣй.

Солюсъ Георгій.	Шатровъ Сергѣй.
Трофимовъ Алексѣй.	Шевелевъ Николай.
Унгеръ Леонидъ-Вольдемар.	Ширяевъ Николай.
Федоровъ Иванъ.	Шишкинъ Иванъ.
Халтуринъ Николай.	Шугаевъ Сергѣй.
Хобаевъ Василій.	Юдичевъ Григорій.
Худенко Алексѣй.	Юзбашянцъ Микиртичъ.
Чистяковъ Петръ.	Яковлевъ Дмитрій.

Въ 1-й спеціальный классъ.

ИНЖЕНЕРНО-МЕХАНИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ:

Гедговдъ Тимонъ.	Райгородскій Іосифъ.
Ковалевскій Петръ.	Сидоровъ Анатолій.
Королевъ Владиміръ	Хрущевъ Михаилъ.
Корфъ Михаилъ.	Штуцеръ Андрей.
Лавровъ Тихонъ.	Щепинъ Петръ.
Наумовъ Иванъ.	Якимовъ Николай.
Павловъ Петръ.	

Изъ бывшихъ воспитанниковъ приняты:

Во 2 общій классъ.

Хмѣлевскій Викторъ.

Въ 3 общій классъ.

Громанъ Борисъ.

Въ 1 спеціальный классъ.

Бойчевскій Петръ.

Во 2 спеціальный классъ.

Березовскій Иванъ.

Костроминъ Сергѣй.

Въ 1 общій классъ по распоряженію Господина Министра Народнаго Просвѣщенія.

Теръ-Акоповъ Микиртичъ.

д) Переходъ учащихся изъ класса въ классъ.

Послѣ годовыхъ экзаменовъ, окончившихся 31 мая 1888 года, по опредѣленію Педагогическаго Совѣта переведены:

Изъ 1-го общаго класса во 2-й общій.

Алифатовъ Георгій.	Леденцовъ Христофоръ.
Арцимовичъ Іосифъ.	Мадатовъ Акопъ.
Барановъ Адріанъ.	Малиновскій Николай.
Басовъ Степанъ.	Малиновскій Эдуардъ.
Бражниковъ Василій.	Манвеловъ Болеславъ.
Бѣловъ Иванъ.	Масальскій-Кошура.
Виноградовъ Федоръ.	Мелиховъ Иванъ.
Власовъ Иванъ	Миттельштедтъ Юліусъ-Гер-
Волковъ Леонидъ.	манъ.
Гарнишевскій Алексѣй.	Новоселовъ Иванъ.
Городзейскій Давидъ.	Овсенскій Ѳаддей.
Громъ Николай.	Петровъ Николай.
Гузинъ Іосифъ.	Рейзинъ Іуда.
Гуревичъ Шмуль.	Розень Ааронъ.
Гуськовъ Владиміръ.	Русановъ Иванъ.
Евдокимовъ Василій.	Салтычевъ Иванъ.
Зворыкинъ Иванъ.	Сергѣевъ Владиміръ.
Звѣревъ Сергѣй.	Смирновъ Николай.
Измайловъ Владиміръ.	Скорупскій Александръ.
Кабачинскій Николай.	Скржипинскій Казиміръ.
Казанцевъ Алексѣй.	Соколовъ Николай.
Казинцевъ Германъ.	Солодовниковъ Петръ.
Киферъ Людвигъ.	Тарасовъ Ѳедоръ.
Кнерцеръ Николай.	Теръ-Андреасянцъ Михитар.
Коржевинъ Дмитрій.	Устиновъ Иванъ.
Костюченко Петръ.	Федотовъ Николай.
Кругловъ Александръ.	Хмѣлевскій Викторъ
Лавровъ Василій.	Цвибакъ Мееръ.
Лебедевъ Сергѣй.	Черкасскій Мордухъ.
Лебединскій Константинъ.	Чернояровъ Георгій.

Шейнинъ Янкель.	Юкинъ Александръ.
Шиндлеръ Камиллъ.	Юнге Оедоръ.
Шмидтъ Анатолій.	Юровскій Нухимъ.
Шульгинъ Дмитрій.	Юсовъ Александръ.

Изъ 2 общаго класса въ 3-й общій.

а) Механическаго отдѣленія:

Алексѣевъ Николай.	Дроздовъ Владиміръ.
Барановъ Георгій.	Ефремовъ Михаилъ.
Березинъ Михаилъ.	Жаковъ Павелъ.
Березовскій Николай.	Ждановъ Оедоръ.
Берченко Николай.	Жученковъ Дмитрій.
Бирюковъ Иванъ.	Зиминъ Николай.
Благовѣщенскій Семенъ.	Кадагидзе Дмитрій.
Бойчевскій Александръ.	Калабинъ Николай.
Болдыревъ Алексѣй.	Кардашевъ Иванъ.
Бурджаловъ Георгій.	Карнѣевъ Владиміръ.
Буржинскій Владиміръ.	Каплянскій Овсей.
Бутковскій Файвель.	Кастальскій Сергѣй.
Бухоновъ Иннокентій.	Котельниковъ Алексѣй.
Векшинъ Петръ.	Котляровъ Филиппъ.
Войтѣховъ Петръ.	Комаровичъ Михаилъ.
Володиміровъ Николай.	Лепехинъ Михаилъ.
Вороновъ Николай.	Марковъ Николай.
Гинглатовъ Иванъ.	Мыльниковъ Андрей.
Головнинъ Михаилъ.	Нейманъ Вацлавъ.
Горбуновъ Григорій.	Никитскій Иванъ.
Горленко Сергѣй.	Около-Кулакъ Николай.
Груннеръ Александръ.	Первакъ Яковъ.
Громанъ Борисъ.	Первушинъ Алексѣй.
Грязновъ Алексѣй.	Петровъ Александръ.
Гулуловъ Степанъ.	Пліонсковскій Иванъ.
Гурляндъ Исаакъ.	Покровскій Яковъ.
Давиньонъ Петръ.	Полозовъ Александръ.
Дара Леонидъ.	Пономаревъ Степанъ.
Дмитріевъ Александръ.	Поповъ Павелъ.
Дмитріевъ Дмитрій.	Сергѣевъ Николай.

Скачковъ Михаилъ.	Туневъ Иванъ.
Слободчиковъ Петръ.	Тюремновъ Николай.
Смирновъ Викторъ.	Фраловскій Василій.
Страховъ Петръ.	Шуръ Елья.
Судра Иванъ.	Эпштейнъ Владиміръ.

б) ХИМИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ.

Беграмовъ Александръ.	Лялинъ Леонидъ.
Бирюковъ Дмитрій.	Малининъ Николай.
Валлеръ Ааронъ.	Машкилейсонъ Овсей.
Веселовскій Евгеній.	Напалковъ Николай.
Геслеръ Александръ.	Немолодышевъ Степанъ.
Гирей-Гаджи Магометъ Оглы	Покровскій Константинъ.
Гольдовскій Игнатій.	Пономаревъ Павелъ.
Добряковъ Иванъ.	Рагозинъ Владиміръ.
Долинскій Леонидъ.	Раутенбергъ Михаилъ.
Дукельскій Исаакъ.	Саввинъ Алексѣй.
Егоровъ Семень.	Семилѣтовъ Александръ.
Закъ Лазаръ.	Теръ-Ионнесовъ Акопъ.
Исаковичъ Альбертъ.	Удинъ Михаилъ.
Кирпичниковъ Николай.	Ховренко Михаилъ.
Козловскій Елисѣй.	Шифринъ Авраамъ.
Котковъ Сергѣй.	Эпштейнъ Борисъ.
Лыжинъ Иванъ.	Федоровъ Сергѣй.

Изъ 3-го общаго класса въ 1-й спеціальный.

а) ИНЖЕНЕРНО-МЕХАНИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ.

Абрамовъ Николай.	Григорьевъ Иванъ.
Адамовъ Амбарцумъ.	Долголенко Викторъ.
Анисимовъ Илья.	Доковскій Тимофѣй.
Бенкевичъ Анатолій.	Дубровинъ Иванъ.
Близнянскій Яковъ.	Дьяковъ Владиміръ.
Бонковскій Юліанъ.	Засыпкинъ Иванъ.
Бушуевъ Александръ.	Зворыкинъ Владиміръ.
Васильевъ Василій.	Зворыкинъ Гурій.
Грейнеръ Карлъ.	Ивановъ 2-й Николай.

Игнатъичевъ Константинъ.	Савченко Сергѣй.
Калугинъ Петръ.	Сахацкій Сергѣй.
Кіянницынъ Иванъ.	Семеновъ Николай.
Куксенко Николай.	Сорокинъ Иванъ.
Локшинскій Николай.	Степановъ Тикранъ.
Мухинъ Оедоръ.	Суздальцевъ Евгеній.
Палимпсестовъ Владиміръ.	Теръ-Маркозовъ Иванъ.
Пальшау Александръ.	Троицкій Николай.
Панфиловъ Николай.	Фроловъ Александръ.
Пестичъ Петръ.	Четвертининъ Автономъ.
Піотровичъ Петръ.	Чижиговъ Александръ.
Пушкинъ Константинъ.	Шереръ Адольфъ.
Пѣговъ Дмитрій.	Щербаковъ Сергѣй.
Ромейко-Гурко Николай.	Яшновъ Андрей.
Ротовъ Александръ.	

б) инженерно-технологическаго отдѣленія:

Бузниковъ Владиміръ.	Кутеповъ Оедоръ.
Волковъ Николай.	Левинъ Соломонъ.
Гололобовъ Александръ.	Митрофановъ Петръ.
Завадскій Андрей.	Соколовъ Илья.
Игумновъ Иванъ.	Срѣтенскій Александръ.
Калянджіевъ Цанъ.	Тряпкинъ Владиміръ.
Карповъ Аполлонъ.	Хохловъ Петръ.
Константиновичъ Аполлонъ.	Шеурленъ Николай.

Изъ 1-го спеціального класса во 2-й спеціальный

а) инженерно-механическаго отдѣленія.

Афанасьевъ Дмитрій.	Ивановъ 2-й Павелъ.
Березинъ Петръ.	Квятковскій Донатъ.
Бондаревъ Евгеній.	Козьминъ Сергѣй.
Великосельскій Константинъ.	Колдаевъ Владиміръ.
Волковичъ Иванъ.	Коленда Константинъ.
Волоховъ Николай.	Коровинъ Александръ.
Ворогушинъ Александръ.	Коротковъ Петръ.
Гомолицкій Владиміръ.	Кронебергъ Алексѣй.

Кузнецовъ Сергѣй.	Салтыковъ Александръ.
Курицынъ Михаилъ.	Сиптиць Петръ.
Михайловъ Василій.	Сумеркинъ Алексѣй.
Некрасовъ Владиміръ.	Сухотинъ Всеволодъ.
Никитинъ Антонъ.	Турчаниновъ Митрофанъ.
Николаевъ Евгеній.	Хлѣбниковъ Сергѣй.
Образцовъ Михаилъ.	Черногрозскій Яковъ.
Окновъ Михаилъ.	Черновъ Павелъ.
Полещукъ Алексѣй.	Шатрюковъ Иларіонъ.
Потресовъ Михаилъ.	Цюндзевицкій Михаилъ.
Пушечниковъ Владиміръ.	Өаддеевъ 2-й Николай.

б) инженерно-технологическаго отдѣленія.

Аркинъ Лазаръ.	Кишкинъ Григорій.
Бардскій Людвигъ.	Круковскій Гирша.
Бойчевскій Петръ.	Кугушевъ Леонидъ.
Гедике Владиміръ.	Митрофановъ Владиміръ.
Гуськовъ Сергѣй.	Никольскій Константинъ.
Доковскій Степанъ.	Оржешко Францъ.
Зарембо Василій.	Рендель Мовша.
Каринъ Петръ.	Таршиловъ Василій.
Карчагинъ Александръ.	

Изъ 2-го спеціального класса въ 3-й спеціальный.

а) инженерно-механическаго отдѣленія.

Анучкинъ Алексѣй.	Енишерловъ Константинъ.
Барсовъ Константинъ.	Кнорре Өедоръ.
Березовскій Иванъ.	Кожевниковъ Петръ.
Бруевичъ Василій.	Кожевниковъ Яковъ.
Бѣловъ Николай.	Костроминъ Сергѣй.
Бубновъ Владиміръ.	Кротковъ Левъ.
Ветчинкинъ Афанасій.	Моргулисъ Исаакъ.
Герасимовъ Сергѣй.	Назаровъ Григорій.
Гречинъ Герасимъ.	Никифоровъ Алексѣй.
Державинъ Алексѣй.	Ольденборгеръ Владиміръ.
Дурденевскій Петръ.	Органовъ Владиміръ.

Ошанинъ Юрій.	Самойловъ Александръ.
Поляковъ Ермолай.	Сперберъ Фридрихъ.
Попелышкинъ - Каськовъ	Толоконниковъ Алексѣй.
Нилъ.	Тропаревскій Иванъ.
Разинъ Константинъ.	Успенскій Яковъ.
Россихинъ Александръ.	Шойгамъ Хаймъ-Юдка.
Саларевъ Петръ.	Юрьевъ Іоасафъ.
Самгинъ Сергѣй.	

б) Инженерно-технологическаго отдѣленія.

Алабинъ Константинъ.	Ливень Германъ.
Бонковскій Александръ.	Медвѣдниковъ Иванъ.
Булашевичъ Павелъ.	Михальскій Антоній.
Васильевъ Петръ.	Овсяниковъ Николай.
Вилькенъ Карлъ.	Плакцикій Петръ.
Горбачевъ Петръ.	Розановъ Алексѣй.
Горбенко Яковъ.	Сутоцкій Стефанъ.
Давыдовъ Аркадій.	Травинъ Яковъ.
Егоровъ Иванъ.	Трубниковъ Никаноръ.
Епифановъ Степанъ.	Усышкинъ Михаилъ.
Жуковъ Леонидъ.	Фидлеръ Иванъ.
Инштетовъ Александръ.	Ходатаевъ Петръ.
Крапивинъ Владиміръ.	Чернышевъ Сергѣй.
Кропанинъ Леонидъ.	

в) Выпускъ учащихся.

1. Съ званіемъ инженеръ-механика и награжденіемъ Высочайше утвержденнымъ знакомъ отличія:

Боевъ Николай.	Левонтинъ Іехіель.
Брюхановъ Леонтій.	Михальскій Станиславъ.
Данцигеръ Соломонъ.	Подерни Сергѣй.
Дормидонтовъ Алексѣй.	Семеновъ Иванъ.
Зубаревъ Дмитрій.	Соснинъ Владиміръ.
Кордесъ Сергѣй.	Якоби Вильямъ.

2. Съ званіемъ инженеръ-механика.

Симоновичъ Маркъ.

3. *Съ званіємъ инженеръ-технолога и награжденіемъ
Высочайше утвержденнымъ знакомъ отличія.*

Аносовъ Яковъ.	Нечаевъ Семенъ.
Добычинъ Петръ.	Никитинскій Сергѣй.
Дьяконовъ Николай.	Плющовъ Степанъ.
Комовъ Антонъ.	Прокопенковъ Василій.
Котельниковъ 1-й Алексѣй.	Сѣнцовъ Михаилъ.
Кудрявцевъ Алексѣй.	Устимовичъ Николай.
Ланговой Сергѣй.	Шустовъ Александръ.

4. *Съ званіемъ инженеръ-технолога*

Крашенинниковъ Василій.

5. *Съ званіемъ ученаго мастера.*

Дубовъ Николай.

Пѣвницкій Николай.

Теръ-Татеосовъ Аршакъ.

Въ истекшемъ академическомъ году Педагогическимъ Совѣтомъ, на основаніи § 22 Высочайше утвержденного устава училища, удостоенъ званія ученаго инженеръ-механика инженеръ-механикъ Константинъ Алексѣевичъ Казначеевъ за представленное имъ разсужденіе „Механическая технологія дерева“.

По опредѣленію Педагогическаго Совѣта, на основаніи примѣчанія къ § 22 Высочайше утвержденного устава училища, удостоены званія механика-строителя окончившіе курсъ въ бывшемъ ремесленномъ учебномъ заведеніи ученые мастера Самсоновъ Николай и Карташевъ Михаилъ.

По опредѣленію педагогическаго Совѣта, на основаніи § 26 Высочайше утвержденного устава училища, окончившій курсъ въ Императорскомъ Техническомъ училищѣ въ 1874 году съ званіемъ ученаго мастера Василій Петровичъ Давыдовъ удостоенъ званіемъ инженеръ-механика за сдѣланныя имъ значительныя усовершенствованія

ванія въ устройствѣ вѣтряныхъ двигателей и мукомольныхъ поставовъ и за его многолѣтнюю и плодотворную практическую дѣятельность по устройству различнаго рода механическихъ сооружений (мостовъ, стропиль и проч.).

По опредѣленію Педагогическаго Совѣта, на основаніи § 25 Высочайше утвержденнаго устава училища, были удостоены званіемъ ученаго мастера окончившіе курсъ въ бывшемъ ремесленномъ учебномъ заведеніи мастера: Барановъ Сергѣй Ивановичъ, Семеновъ Алексѣй Семеновичъ, Ѳедоровъ Николай Ѳедоровичъ, Кузьмичевъ Владиміръ Ѳедотовичъ, Егоровъ Алексѣй Егоровичъ, Кречмеръ Николай Васильевичъ и Кречмеръ Петръ Васильевичъ; кромѣ того на основаніи того же § 25 удостоены званія ученаго мастера бывшіе воспитанники Императорскаго Техническаго Училища—Голубковъ Дмитрій Александровичъ и Кувшинниковъ Павелъ Павловичъ.

Изъ числа окончившихъ курсъ ученія воспитанниковъ Педагогическимъ Совѣтомъ на основаніи § 12 устава удостоенъ серебряной медали Гартманъ Францъ за представленное имъ сочиненіе на тему: „Распредѣленіе пара клапанами съ отсѣчкою отъ регулятора по системамъ Зульцера, Кольмана и Броуна“ подъ девизомъ „На пути къ совершенству“.

ж) Экскурсіи учащихся и занятія ихъ внѣ училища.

Воспитанники специальныхъ классовъ подъ руководствомъ Гг. профессоровъ, доцентовъ и преподавателей въ теченіе отчетнаго года осматривали слѣдующіе заводы и фабрики: мастерскія и депо Курской желѣзной дороги, стеклянный заводъ Дютфуа, механическій заводъ Доброва и Набгольцъ, керосинный заводъ Губонина въ Кусковѣ, химическій заводъ Лепешкина, Алексѣевское водоподъемное зданіе, фабрику Гивартовскаго, механическій заводъ Бромлей, городскія бойни, гончар-

ный заводъ Гусарева, котельный заводъ Дангауэръ и Кейзеръ, мануфактуру Баранова, металлическій заводъ Гужона, фабрику Морозова въ Орѣховѣ, механическій заводъ Липгартъ, Раменскую мануфактуру Малютиныхъ, рафинадный заводъ Романова и Сергѣева, городской газовый заводъ, ректификаціонный заводъ Кошелева, Трехгорный пивоваренный заводъ, Невскій стеариновый заводъ, газовый заводъ при мастерскихъ Московско-Брестской желѣзной дороги.

Въ теченіе двухъ недѣль воспитанники I и II спеціальныхъ классовъ занимались на Раменской мануфактурѣ Малютиныхъ.

з) Темы для сочиненій на 1888—89 учебный годъ.

А) На золотую медаль:

1. Пароходныя машины съ послѣдовательнымъ расширеніемъ пара въ одномъ, двухъ и трехъ цилиндрахъ.
2. Примѣненіе электролиза въ бѣленіи и крашеніи.

Б) На премію Политехнической выставки:

1. Аккумуляторы и примѣненіе ихъ къ электрическому освѣщенію.
2. Трансформаторы въ примѣненіи къ электрическому освѣщенію.

IV. Учебныя пособія.

1. Лабораторія.

Къ началу 1887—88 академическаго года состояло по инвентарю аппаратовъ и приборовъ	2688	на сумму 14.885 р. 69 к.
Въ теченіе года приобрѣтено	88 " "	191 " 96 "
Итого къ 1888—89 г. числится аппаратовъ и приборовъ	2776	на сумму 15.077 р. 65 к.

Въ 1887—1888 учебномъ году въ аналитической лабораторіи занимались, подъ руководствомъ доцента В. Е. Павлова и ассистента Е. В. Куклина, два класса: III общій (15 человекъ—9 часовъ въ недѣлю) въ теченіе всего учебнаго года и I спеціальный—въ теченіе перваго полугодія (18 человекъ, 12 часовъ въ недѣлю).

Воспитанники III общаго класса изучали реакціи металловъ, металлоидовъ и ихъ соединеній, приемы качественного анализа, производили анализы смѣсей неизвѣстнаго имъ состава (а также нѣкоторыхъ минераловъ) и давали устные отчеты о ходѣ своихъ занятій. Воспитанники I спеціальнаго класса занимались въсовымъ и объемнымъ анализомъ (послѣднимъ преимущественно). Въ виду необходимости контроля надъ степенью точности производимыхъ анализовъ, занимающимся выдавались для анализа растворы различныхъ тѣлъ предварительно проанализированные.

Работы воспитанниковъ въ технической лабораторіи за 1887—1888 учебный годъ состояли въ изученіи методовъ технического анализа нѣкоторыхъ сырыхъ материаловъ и важнѣйшихъ заводскихъ продуктовъ. Кромѣ того воспитанниками были произведены нѣкоторые техническія работы: полученіе керосина и смазочныхъ маселъ, сухая перегонка дерева, полученіе льнянаго масла посредствомъ экстракціи, полученіе различныхъ сортовъ мыла и проч.

2. Физическій кабинетъ.

Къ началу 1887—88 года числилось по инвентарю:

Физическихъ приборовъ,			
инструментовъ, таблицъ,			
книгъ, мебели и пр. . .	729	на сумму	15.379 р. 44 к.
Въ теченіе года приобрѣтено	65	" "	468 " 19 "
Итого къ 1888—89 г. чис-			
лится.	794	на сумму	15.847 р. 63 к.

Въ 1887—88 году въ физической лабораторіи происходили практическія занятія съ учениками II общаго класса химическаго отдѣленія.

3. Механическій кабинетъ.

Къ началу 1887—88 г. въ механическомъ кабинетѣ числилось:

Кинематическихъ моделей, машинъ и деталей машинъ, инструментовъ и чертежей 406 нум. 553 предм., на сумму 7455 руб. 54¹/₄ коп.

Въ теченіе 1887—88 г. приобрѣтено черезъ контору Тольхъ, въ Москвѣ, 2 модели гидравлическихъ машинъ, на сумму 58 руб. и внесено въ инвентарь оказавшихся въ наличности и не записанныхъ до сего времени 27 нум. 36 предм., на сумму 256 руб.; всего 29 нум. 38 предм., на сумму 314 руб.

Въ теченіе того же года перечислено въ кабинетъ строительнаго искусства 1 модель моста стоимостію 50 руб. и исключено за негодностію 26 нум. 35 предм., на сумму 49 руб. 60 коп.; всего 27 нум. 36 предм., на сумму 99 руб. 60 коп.

Такимъ образомъ къ началу 1888—89 уч. г. въ механическомъ кабинетѣ числится:

Кинематическихъ моделей, машинъ и деталей машинъ, инструментовъ и чертежей 408 нум. 555 предм., на сумму 7669 руб. 94¹/₄ коп.

Въ продолженіе настоящаго учебнаго года, вслѣдствіе перехода механическаго кабинета въ новое помѣщеніе, трудами ассистента В. А. Румянцева было пересмотрѣно имущество кабинета и составленъ новый инвентарь его, причемъ, съ утвержденія хозяйственнаго комитета, измѣнено было число отдѣловъ инвентаря и исправлена нумерація предметовъ.

Такимъ образомъ къ 1888—89 г. въ механическомъ кабинетѣ, по новому инвентарю, числится:

- | | | |
|-----------------------------|----------|------------|
| 1) Кинематическихъ моделей | 106 нум. | 117 предм. |
| 2) Моделей машинъ и деталей | | |
| машинъ | 148 „ | 162 „ |

3) Измѣрительныхъ приборовъ и инструментовъ	88 нум.	99 предм.
4) Книгъ, чертежей и таблицъ.	16 „	177 „

Итого. 358 нум. 555 предм.

на сумму 7669 руб. 94 $\frac{1}{4}$ коп.

4. Кабинетъ естественной исторіи.

Къ началу 1887—88 учебнаго года по инвентарю числилось:

Минераловъ, моделей кристалловъ и пр.	1847
Зоологическихъ препаратовъ, моделей и пр., и по анатоміи человѣка	511
Ботаническихъ моделей, продуктовъ и пр.	116
Инструментовъ.	53
Атласовъ, таблицъ, книгъ и пр.	132
Итого.	2659 пр.

Сверхъ того мебели 61 пр.

Вновь приобрѣтено въ теченіе года:

Минераловъ.	1
Итого къ 1888—89 году числится всего въ коллекціяхъ	2660 пр.
Мебели.	61 пр.

5. Геодезическій кабинетъ.

Къ началу 1887—88 академическаго года по инвентарю числилось:

Различныхъ геодезическихъ инструментовъ	34
Въ теченіе года исключено	5
Къ началу 1888—89 г. числится	29
На сумму.	848 р. 17 к.

6. Пособія по начертательной геометріи.

Къ началу 1887—88 академическаго года по инвентарю числилось:

Таблицъ начертательной геометріи.	43
---	----

Лекаль.	40
Коллекція рельефныхъ моделей.	1
Всего	84

Въ теченіе года исключено:

Лекаль.	23
Къ началу 1888—89 г. числится	61
На сумму.	4 р. 45 к.

7. Учебныя пособія по черченію.

Къ началу 1887—88 академическаго года по инвентарю числилось:

Разныхъ коллекцій чертежей, оригиналовъ, моделей и инструментовъ 1156 на сумму 1288 р. 01³/₄ к.

Въ теченіе года вновь поступило 35 „ „ 145 „ 06 „

Къ началу 1888—89 г. числится всего 1191 на сумму 1433 р. 07³/₄ к.

8. Учебныя пособія по рисованію.

Къ началу 1887—88 академическаго года числилось по инвентарю:

Академическихъ рисунковъ, рисунковъ геометрическихъ тѣлъ, коллекцій гипсовыхъ орнаментовъ, деталей машинъ и пр. 1033 на сумму 430 р. 37 к.

Въ теченіе года никакихъ приобрѣтеній и исключеній не было.

Къ началу 1888—89 года всего числится 1033 на сумму 430 р. 37 к.

9. По предмету проектированія деталей и машинъ.

Къ началу 1887—88 академическаго года по инвентарю числилось:

Различныхъ коллекцій чертежей, оригиналовъ, книгъ, моделей и инструментовъ 372 экз.

Въ истекшемъ академическомъ году посту-
пило вновь 175 экз.
Къ 1888—89 числится всего 547 „
на сумму 2099 р. 8½ к.

10. Пособія по технологіи металловъ и дерева.

Къ началу 1887—88 учебнаго года числилось по
инвентарю:

Чертежей	17
Образцовъ-орудій	28
Разныхъ коллекцій	7
Всего	52

Въ теченіе года поступленій не было:

Къ началу 1888—89 числится 52 экземпляра на
сумму 487 руб. 39 коп.

11. Кабинетъ механической технологіи воло- книстыхъ веществъ.

Къ началу 1887—88 академическаго года состояло:

- 1 приборъ для опредѣленія титра шелка.
- 1 вѣски для опредѣленія вѣса и № пряжи.
- 1 динамометръ Perreaux.
- 1 приборъ M. Alcan для испытанія пряжи.
- 1 модель волкъ-машины.
- 1 модель ленточной машины.
- 1 модель скатывающаго холстоваго аппарата.
- 86 настѣнныхъ таблицъ чертежей.
- 1 коллекція образцовъ волокн. веществъ въ сырѣ.
- 1 коллекція образцовъ пряжи и тканей.
- 4 коллекціи, иллюстрирующія послѣдовательный ходъ
фабричныхъ производствъ.
- 1 коллекція кардныхъ лентъ русскихъ и иностранныхъ.
- 1 коллекція образцовъ орудій и разныхъ принадлеж-
ностей для прядильныхъ и ткацкихъ фабрикъ.
- 1 ручной ткацкій станъ съ приборомъ Жаккара.

1 дифференціальный механизмъ для банкоброшей.

1 замокъ для банкоброшей.

1 машинка стараго типа для наборки кардъ.

Въ теченіе года поступило:

1 коллекція кардныхъ лентъ изъ желѣзной и стальной проволоки на резиновой, кожаной и шерстяной прокладкахъ—съ англійской фабрики Horsfall and Bickham.

1 приборъ для опредѣленія крѣпости и эластичности пряжи.

12. Библиотека.

Къ началу 1887—88 академическаго года числилось 8597 соч. въ 14,101 т.

на сумму. 26,031 р. 99 к.

Въ теченіе года поступило 93 соч. въ 116 т.

на сумму. 1056 р. 95 к.

Къ 1888—89 академич. году числится 8690 соч. въ 14,217 т.

на сумму. 27,088 р. 94 к.

Изъ числа поступившихъ пожертвовано разными лицами и учрежденіями 20 соч. въ 27 том.

13. Учебныя мастерскія.

а) Кабинетъ учебныхъ мастерскихъ.

Къ началу 1887—88 академическаго года въ кабинетъ учебныхъ мастерскихъ числилось по инвентарю:

Разныхъ образцовыхъ инструментовъ, приборовъ, таблицъ, коллекцій и машинъ. 817

Разнаго рода предметовъ 23

Въ теченіе года поступленій и исключеній не было.

Къ началу 1888—89 академическаго года числится 840 штукъ на сумму 5284 р. 19³/₄ к.

б) Учебная токарная по дереву мастерская.

Въ истекшемъ 1887—88 академическомъ году въ токарной по дереву мастерской занималось 89 воспитанниковъ, которыми исполнено 2639 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1887—88 академическаго года въ мастерской числилось по инвентарю:

Токарныхъ станковъ (одинъ для овальнаго точенія)	47 шт.
Верстаковъ	3 „
Точиль	2 „
Станокъ для узорной пилы	1 „
Шаблоновъ	500 „
Разныхъ инструментовъ	1032 „
Разнаго рода предметовъ	48 „
Въ теченіе года приобрѣтено:	
Разныхъ инструментовъ	158 шт.

Итого къ началу 1888—89 академическаго года числится 1791 шт. на сумму 3135 руб. 20 $\frac{1}{4}$ коп.

Учебныя пособія мастерской:

Коллекція образцовъ нарѣзыванія, состоящая изъ	12 экз.
Коллекція образцовъ моделей, состоящая изъ	25 „
Коллекція образцовыхъ инструментовъ, состоящая изъ	163 „
Коллекція инструментовъ изъ дерева, увеличенныхъ въ 6 разъ, состоящая изъ	24 экз.

Итого на сумму. 196 р. 99 к.

в) Учебная модельно-столярная мастерская.

Въ истекшемъ 1887—88 академическомъ году въ модельно-столярной мастерской занималось 89 воспитанниковъ; которыми исполнено было 1190 упражненій и 110 вполне законченныхъ моделей.

Къ началу 1887—88 академическаго года въ мастерской числилось по инвентарю:

Верстаковъ столярныхъ	60
Станковъ токарныхъ	5
Универсальная пила съ принадлежностями.	1
Точиль	2

Сверлильная ручная машина для сверленія	
подъ разными углами	1
Шкафовъ для храненія работъ	2
Разныхъ инструментовъ	1527
Въ теченіе года приобрѣтено разныхъ ин-	
струментовъ.	101
Итого къ началу 1888—89	
академическаго года	
числится	1699 шт. на сумму 1497 р. 68 к.

Учебныя пособія мастерской:

Двѣ коллекціи соединеній дерева, состоя-	
щія изъ	135 шт.
Коллекція моделей, состоящая изъ	34 „
Коллекція инструментовъ изъ дерева, увели-	
ченныхъ въ 6 разъ, состоящая изъ	31 „
Коллекція инструментовъ для строганія де-	
рева, состоящая изъ	21 „
Коллекція инструментовъ для пиленія де-	
рева, состоящая изъ	19 „
Двѣ коллекціи инструментовъ для сверленія	
и долбленія дерева, состоящія изъ	89 „
Коллекція измѣрительныхъ инструментовъ,	
состоящая изъ.	22 „

Итого на сумму 1513 р. 67 к.

г) Учебная металло-токарная мастерская.

Въ истекшемъ 1887—88 академическомъ году въ металло-токарной мастерской занималось 90 воспитанни-
ковъ, которыми исполнено было 1005 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1887—88 академическаго года въ мастер-
ской числилось по инвентарю:

Самоточка.	1
Суппортовъ	10
Токарныхъ станковъ съ принадлежностями	34
Точиль съ чугунными ящиками.	2
Горнъ съ вентиляторомъ.	1

Наковальня	1
Разныхъ инструментовъ и принадлежностей мастерской	471 экз.

Въ теченіе года приобрѣтено разныхъ инструментовъ 12 и исключено 12.

Къ началу 1888—89 академическаго года числится 520 штукъ на сумму 3820 руб. 71 коп.

Учебныя пособія мастерской:

Двѣ коллекціи образцоваго инструмента, состоящія изъ.	193 экз.
--	----------

Двѣ коллекціи образцовъ токарнаго по металлу искусства, состоящія изъ	106 „
---	-------

Итого на сумму 154 р. 24 к.

д) Учебная слесарная мастерская.

Въ истекшемъ 1887—88 академическомъ году въ учебной слесарной мастерской занималось 75 воспитанниковъ, которыми исполнено 379 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1887—88 академическаго года числилось по инвентарю:

Верстаковъ	20
Тисокъ слесарныхъ.	78
Машинъ стругальныхъ ручныхъ	2
Машинъ сверлильныхъ ручныхъ	5
Станокъ для сверленія коловоротомъ.	1
Точило двойное	1
Горнъ съ вентиляторомъ.	1
Столовъ чугунныхъ.	3
Разнаго рода предметовъ.	1041
Разныхъ слесарныхъ инструментовъ.	3911

Въ теченіе года приобрѣтено разныхъ слесарныхъ инструментовъ.	32 шт.
---	--------

Итого къ началу 1888 — 89 академическаго года числится 5095 шт. на сумму 4845 р. 45 $\frac{1}{4}$ к.

Учебныя пособія мастерской отнесены къ кабинету учебныхъ мастерскихъ.

е) Учебная чугунно-мѣдно-литейная мастерская.

Въ истекшемъ 1887—88 академическомъ году въ чугунно-мѣдно-литейной мастерской занималось 18 воспитанниковъ, которыми исполнено 288 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1887—88 академическаго года въ мастерской числилось по инвентарю:

Паровой горизонтальный двигатель въ 4	
силы съ котломъ системы Фильда	1
Вентиляторовъ	1
Вагранка о двухъ фурмахъ	1
Самодувный горнъ для трехъ тиглей	1
Печь системы Ріат для плавки мѣди	1
Литейный кранъ	1
Опокъ чугунныхъ	613
Чугунныхъ грузовъ 28 штукъ	814 пуд.
Печь для сушки стержней	1
Станковъ для шаблонной формовки	2
Верстаковъ съ козлами	7
Комплектовъ формовочнаго инструмента по	
4 въ каждомъ	20 экз.
Разнаго инструмента	26
Чугунныхъ моделей	9

Итого къ началу 1888—89 академическаго года числится 712 шт. на сумму . . . 6861 р. 21 к.

Учебныя пособія мастерской:

Коллекція образцоваго инструмента, состоящая изъ 76 шт.

Итого на сумму 35 руб.

ж) Учебная кузнечная мастерская.

Въ истекшемъ 1887—88 академическомъ году въ кузнечной мастерской занималось 18 воспитанниковъ, которыми исполнено 442 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1887—88 академическаго года числилось по инвентарю:

Паровой молотъ съ наковальнями	1
Горнъ съ наковальнями и принадлежностями	6
Вентиляторъ для дутья	1
Вѣсы десятичные съ гириями и разновѣсками	1
Шкафовъ для храненія работъ	2
Горнъ переносный съ вентиляторомъ . . .	1
Резервуаровъ желѣзныхъ для воды	2
Мѣхъ со станкомъ для горна	1
Жомъ для гнутья колѣнчатыхъ валовъ . .	1
Тисокъ столовыхъ желѣзныхъ	2
Разнаго мелкаго кузнечнаго инструмента.	700
Станокъ для сварки желѣза	1

Въ теченіе года приобрѣтено:

Разнаго мелкаго инструмента	52
---------------------------------------	----

Итого къ началу 1888—89 академическаго года числится по инвентарю 771 шт. на сумму 3134 р. 38 к.

Учебныя пособія мастерской:

Образцовая коллекція кузнечнаго инструмента, состоящая изъ	110 шт.
--	---------

Образцовая коллекція кузнечныхъ работъ, состоящая изъ	40 „
---	------

Итого на сумму 224 р. 29¹/₄ к.

з) Учебная механическая мастерская.

Въ истекшемъ 1887—88 академическомъ году въ учебной механической мастерской занималось 76 воспитанниковъ, исполнившихъ около 60 отдѣльныхъ работъ. Между работами наиболѣе выдающіяся: паровая водопкачка, стругальная поперечная ручная, паровая машина въ 2 силы, токарныя станки съ переборомъ, винторѣзная машина, насосы, супорты, тиски и проч.

Къ началу 1887—88 академическаго года по учебной механической мастерской числилось по инвентарю:

Трубчатый паровой котель въ 30 силъ	1
Постоянный котель съ 4 подогревателями	1
Вертикальная паровая машина системы Уатта, съ коромысломъ, въ 25 силъ	1
Паровыхъ водокачекъ	1
Водомѣръ Шмидта	1
Приводовъ-трансмиссій	3

Сверлильныхъ машинъ разныхъ системъ:

Приводныхъ	6
Ручныхъ	3
Стругальныхъ машинъ	6
Долбежныхъ машинъ	2
Шпоночныхъ машинъ	1
Винторѣзныхъ машинъ	1
Фрезовыхъ машинъ	1
Дѣлительныхъ машинъ	1
Станковъ токарныхъ по металлу	10
Самоточекъ разныхъ величинъ	9
Разныхъ принадлежностей къ машинамъ	1992
Тисокъ слесарныхъ	65
Верстаковъ слесарныхъ	8
Разнаго рода предметовъ	250
Разнаго мелкаго инструмента	5729
Въ теченіе года приобрѣтено разныхъ инструментовъ	435

Итого къ началу 1888—89 академическаго года числится 8527 шт. на сумму 32491 р. 52 к.

Учебныя пособія отнесены къ кабинету учебныхъ мастерскихъ.

Учебно-механическая мастерская при участіи остальныхъ мастерскихъ, кромѣ занятій съ воспитанниками, съ помощью наемныхъ рабочихъ, съ 1-го Сентября 1887 г. по 1-е Сентября 1888 года исполнила заказовъ для частныхъ лицъ на сумму 64,707 р.

Выдающимися работами изъ числа этихъ заказовъ были слѣдующія:

Турбинъ разныхъ	3
Паровыхъ машинъ	5
Паровыхъ водокачекъ	4
Вѣтряныхъ двигателей	4
Стругальныхъ разныхъ	5
Самоточекъ	2
Токарныхъ станковъ	12
Сверлильныхъ	4
Винторѣзныхъ	3
Шлифовальныхъ	3
Бумагорѣзательныхъ	1
Скоропечатныхъ билетныхъ	1
Машинъ для высверливанія сучьевъ въ де- ревѣ	1
Насосовъ разныхъ	21
Тисокъ разныхъ и супортовъ	41
Прессовъ разныхъ и штамповъ	12
Приводовъ фабричныхъ	9
Моделей деревянныхъ для черченія	25

Краткій отчетъ о дѣятельности Политехническаго Общества, состоящаго при Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ,

за 1887—88 годъ.

Къ началу 1887—88 г. Политехническое Общество считало 28 почетныхъ членовъ, 122 дѣйствительныхъ членовъ и 6 членовъ сотрудниковъ. Въ истекшемъ году Общество понесло горестную утрату въ лицѣ своего почетнаго члена, профессора Техническаго Училища Алексѣя Васильевича Лѣтникова, скончавшагося 28 февр. 1888 года.

Въ теченіе 1887—88 г. Политехническое Общество имѣло 9 обыкновенныхъ собраній, 1 экстраординарное и 1 годовичное. Кромѣ того, по приглашенію Московскаго Отдѣленія Императорскаго Русскаго Техническаго Общества, оно принимало участіе въ слушаніи и обсужденіи реферата Я. И. Вейнберга.

Въ обыкновенныхъ собраніяхъ, кромѣ текущихъ дѣлъ, обсуждались сообщенія по различнымъ вопросамъ техническихъ наукъ и технического образованія, сдѣланныя слѣд. лицами: почетными членами Н. Е. Жуковскимъ, О. Е. Орловымъ и М. М. Черепашинскимъ; дѣйствительными членами А. И. Пермяковымъ, В. О. Вейссе, О. И. Щеголевымъ, А. Э. Ливень, Я. Я. Никитинскимъ, П. К. Эйгельмейеръ, Е. Т. Покровскимъ, О. П. Григоровичемъ, Ф. О. Гартманъ и С. А. Владимірскимъ; членомъ-сотрудникомъ Е. Э. Бромлей, Д. С. Зерновымъ

и воспитанниками Техническаго Училища С. Э. Кордесъ и Я. Я. Кожевниковымъ.

Въ ноябрѣ 1887 г. почетный членъ Общества Ю. С. Нечаевъ-Мальцевъ въ письмѣ на имя и. д. президента Общества препроводилъ двѣ тысячи рублей на поощреніе трудовъ по приложенію электричества къ обработкѣ стекла и хрусталя.—Обыкновенное собраніе Общества 21 дек. 1887 г., находя полезнымъ распространить выдачу премій за труды по другимъ отраслямъ промышленности, поручило Совѣту Общества обратиться къ Ю. С. Нечаеву-Мальцеву за утвержденіемъ слѣд. порядка употребленія пожертвованнаго имъ капитала: 1) капиталъ долженъ оставаться неприкосновеннымъ и носить имя жертвователя; 2) проценты съ капитала должны употребляться на выдачу премій за сочиненія по техническимъ вопросамъ на темы, предложенныя Обществомъ; 3) первою темою для соисканія премій должна быть объявлена тема, предложенная жертвователемъ. Въ мартѣ 1888 г. отъ Ю. С. Нечаева-Мальцева получено было выраженіе полного согласія на вышеприведенный порядокъ употребленія капитала съ тѣмъ добавленіемъ, чтобы премія была не менѣе 300 руб. На этихъ главныхъ основаніяхъ вице-президентомъ Общества выработаны положенія о преміи имени Юрія Степановича Нечаева-Мальцева для внесенія на утвержденіе Годичнаго Собранія.

Въ исполненіе постановленія годичнаго собранія 16 Апр. 1886 г., а также вслѣдствіе измѣнившагося положенія Политехническаго Общества съ переходомъ Императорскаго Техническаго Училища изъ вѣдомства учреждений Императрицы Маріи въ вѣдѣніе Министерства Народнаго Просвѣщенія, обыкновенное Собраніе Общества 25 февр. 1888 г. назначило комиссію для предварительной разработки проекта измѣненій и дополненій въ дѣйствующемъ уставѣ Политехническаго Общества. По окончаніи работъ комиссіи, составленный ею проектъ измѣненій и дополненій устава былъ

разосланъ всѣмъ членамъ Общества съ просьбою представить свои замѣчанія или принять участіе въ его обсужденіи. Экстраординарное собраніе Общества 14 апр. 1888 г., по обсужденіи проекта, внесло въ него нѣкоторыя редакціонныя поправки и новыя измѣненія и постановило внести его въ окончательномъ видѣ на утвержденіе Годичнаго Собранія.

27 апр. 1888 г. Политехническое Общество имѣло торжественное засѣданіе по случаю исполнившагося десятилѣтія его дѣятельности. Передъ началомъ засѣданія въ домовоѣ церкви Техническаго Училища былъ отслуженъ молебенъ протоіереемъ Д. И. Кастальскимъ въ сослуженіи священниковъ В. М. Славскаго и Н. С. Виноградова, по окончаніи котораго законоучителемъ Н. С. Виноградовымъ было сказано слово. Засѣданіе открыто было рѣчью и. д. президента Общества И. В. Аристова. Послѣ рѣчи и. д. президента дѣйствительный членъ Общества О. П. Григоровичъ прочиталъ составленный имъ очеркъ десятилѣтней дѣятельности Политехническаго Общества. На принесенныя отъ имени Московскаго Отдѣленія Императорскаго Русскаго Техническаго Общества и Ученаго Отдѣла Общества распространенія техническихъ знаній поздравленія вице-президентъ Общества Ѳ. Е. Орловъ отвѣчалъ рѣчью, въ которой очертилъ задачи дѣятельности Политехническаго Общества. Въ заключеніе послана была привѣтственная телеграмма В. К. Делла-Восъ, какъ основателю и первому президенту Общества.

Въ Годичномъ Собраніи 27 апр. 1888 г. избраны въ почетныя члены 11, въ дѣйствительныя члены 34 и сотрудники 1 лицо. За отказомъ прежнихъ должностныхъ лицъ, единогласно избраны О. П. Григоровичъ—секретаремъ Общества и Совѣта, В. А. Румянцевъ—библіотекаремъ, П. П. Протопоповъ—секретаремъ справочнаго отдѣла, Е. Т. Покровскій—секретаремъ инженерномеханическаго отдѣла и Я. Я. Никитинскій—предсѣдателемъ отдѣла по техническому образованію. Въ томъ

же собраніи утверждены были положенія о преміи Ю. С. Нечаева-Мальцева и проектъ измѣненій и дополненій въ уставѣ Политехническаго Общества; кромѣ того, по предложенію И. Ю. Варенникова—образовать капиталъ для учрежденія стипендіи имени покойнаго профессора А. В. Лѣтникова—Собраніе рѣшило присоединиться въ этомъ дѣлѣ къ Педагогическому Совѣту Техническаго Училища, по постановленію котораго должна открыться подписка между служащими въ училищѣ для образованія стипендіи или преміи имени покойнаго А. В. Лѣтникова.

Въ истекшемъ году Общество издало годичный отчетъ о своей дѣятельности за 1886—87 годъ. Кромѣ того Справочнымъ отдѣломъ изданъ списокъ лицъ, окончившихъ курсъ въ Императорскомъ Техническомъ Училищѣ, составленный секретаремъ Справочнаго отдѣла И. Ю. Варенниковымъ.

Справочный Отдѣлъ Политехническаго Общества имѣлъ въ отчетномъ году 8 собраній для обсужденія различныхъ вопросовъ, касавшихся его дѣятельности. Всѣхъ лицъ, обращавшихся въ отдѣлъ съ просьбами о доставленіи мѣстъ, было 84; предложеній мѣстъ поступило въ отдѣлъ 79; изъ нихъ 42 мѣста заняты при посредствѣ и рекомендаціи отдѣла. Изъ числа послѣднихъ 18 мѣстъ падаетъ на долю педагогической дѣятельности и, главнѣйшимъ образомъ, въ желѣзнодорожныхъ техническихъ училищахъ Министерства Путей Сообщенія. Предоставленіемъ этихъ мѣстъ отдѣлъ обязанъ просвѣщенному содѣйствію управляющаго Учебнымъ Отдѣломъ Министерства Путей Сообщенія, почетному члену Политехническаго Общества, В. К. Делла-Вось. Остальные 24 мѣста падаютъ преимущественно на долю заводской и фабричной дѣятельности.

Испытательная станція при Политехническомъ Обществѣ, находящаяся въ завѣдываніи проф. М. М. Черепашинскаго, устроена въ отведенномъ для нея помѣщеніи, въ зданіи Техническаго Училища, и, по отно-

шенію къ испытанію каменныхъ строительныхъ матеріаловъ, ее можно считать открытою. Посредствомъ находящагося въ ней гидравлическаго прессиа произведено уже нѣсколько опытовъ надъ камнями, присланными для этой цѣли комиссіей по сооруженію клиникъ на Дѣвичьемъ полѣ, въ Москвѣ. Опыты надъ цементомъ, кирпичемъ и пр. еще не начинались, но могутъ быть начаты въ непродолжительномъ времени, такъ какъ нужные для этого приборы имѣются налицо. Къ сожалѣнію средства станціи въ настоящее время крайне ограничены, что и составляетъ главный тормазъ развитія ея правильной дѣятельности. Имѣющіеся приборы не даютъ возможности производить опыты надъ сопротивленіемъ металловъ, что для испытательной станціи такого Общества, какъ Политехническое, имѣетъ несомнѣнно еще большую важность, чѣмъ опыты надъ камнемъ.

Что касается денежныхъ средствъ Общества, то въ отчетномъ году, сравнительно съ прошлымъ годомъ, средства на изданія Общества увеличились отъ пожертвованій, продажи изданій и процентовъ съ 234 р. 43 к. до 364 р. 35 к.; капиталъ на учрежденіе стипендіи имени Д. Н. Лебедева увеличился отъ процентовъ и пожертвованій съ 334 р. 45 к. до 851 р. 70 к.; фондъ для вспомошествованія нуждающимся техникамъ отъ пожертвованій, процентовъ, поступленія изъ кассы и отъ платы за предоставленныя мѣста съ 50 р. увеличился до 625 р. 88 к. Итого, считая основной капиталъ и капиталъ въ 2000 р., пожертвованный Ю. С. Нечаевымъ-Мальцевымъ, денежные средства Политехническаго Общества къ 1 апр. 1888 г. составляютъ 7246 р. 16 к.

КРАТКІЙ ОТЧЕТЪ

О ДѢЯТЕЛЬНОСТИ

ИМПЕРАТОРСКАГО

МОСКОВСКАГО ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА

за 1888—89 академическій годъ.

КРАТКІЙ ОТЧЕТЪ

О ДѢЯТЕЛЬНОСТИ

ИМПЕРАТОРСКАГО МОСКОВСКАГО ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА

за 1888—89 академическій годъ.

1 Дѣятельность Педагогическаго Совѣта.

Въ истекшемъ академическомъ году Педагогическій Совѣтъ имѣлъ 10 засѣданій, изъ которыхъ 2 были экстраординарными.

Въ засѣданіи Совѣта 3 октября 1888 г. были рассмотрѣны и одобрены Совѣтомъ нижеслѣдующія правила о веденіи графическихъ занятій въ Училищѣ.

1) Занятія воспитанниковъ Императорскаго Московскаго Техническаго Училища по рисованію, черченію и проектированію ведутся согласно программамъ, утвержденнымъ Совѣтомъ. Въ сихъ программахъ опредѣляются какъ графическія работы, которыя должны быть исполнены въ теченіе учебнаго года, такъ и сроки, къ которымъ каждая изъ этихъ работъ должна быть совершенно окончена.

2) Графическія работы исполняются воспитанниками въ назначенныхъ для сего помѣщеніяхъ въ Училищѣ подъ руководствомъ профессоровъ, доцентовъ и преподавателей соотвѣтственныхъ предметовъ, которые назначаютъ имъ данныя для каждой отдѣльной работы, слѣ-

дять за исполненіемъ работъ, дѣлають необходимыя указанія и объясненія, исправляють могущія встрѣтиться ошибки и при наступленіи срока, назначеннаго для окончанія работъ, принимаютъ ихъ отъ воспитанниковъ.

3) Предварительно окончательнаго вычерчиванія какого-либо предмета воспитанникъ долженъ сдѣлать подробный эскизъ его и расчетъ, если таковые требуются. Эскизы и расчеты представляются руководящему занятіями, который или одобряетъ оные, или указываетъ на необходимыя измѣненія; по полученіи одобренія эскиза и расчета отъ руководящаго воспитанникъ приступаетъ къ выполненію чертежа въ карандашѣ, который представляетъ на разсмотрѣніе руководящаго и только по полученіи одобренія обводитъ чертѣжъ тушью и покрываетъ красками.

4) Выносъ чертежей и рисунковъ и исполненіе ихъ внѣ стѣнъ училища не разрѣшаются.

5) При наступленіи срока, назначеннаго для исполненія каждой графической работы, чертежи и рисунки принимаются отъ воспитанниковъ въ томъ видѣ, въ какомъ они къ этому сроку находятся, и воспитанники немедленно переходятъ къ слѣдующей по программѣ графической работѣ. Воспитанники, представившіе работы къ назначенному сроку въ неоконченномъ видѣ, получаютъ право оканчивать эти работы въ томъ только случаѣ, если слѣдующія по очереди работы будутъ ими представлены до назначеннаго срока. Оканчиваніе работъ далѣе послѣдняго срока не разрѣшается.

6) По каждому роду графическихъ работъ производится оцѣнка баллами въ теченіе учебнаго года. За непредставленную въ срокъ работу выставляется единица, которая можетъ быть исправлена по окончаніи работы согласно предыдущимъ правиламъ.

7) Если для графическихъ занятій кромѣ преподавателя назначены совѣтомъ ассистенты, то воспитанники соотвѣтственныхъ классовъ раздѣляются инспекторомъ Училища въ алфавитномъ порядкѣ на группы, предна-

значаемыя для занятій подъ руководствомъ профессора или доцента и ихъ ассистентовъ. Ассистенты являются для занятій въ назначенное по росписанію время и руководятъ своими группами самостоятельно на основаніи вышеизложенныхъ правилъ, но въ общемъ ходѣ работъ подчиняются указаніямъ профессора или доцента. Каждый изъ проектовъ, представленныхъ для оцѣнки, долженъ быть подписанъ руководителемъ группы.

Въ засѣданіи Совѣта 3 ноября 1888 г. былъ составленъ и въ подлинникѣ подписанъ всѣми членами Совѣта адресъ Его Императорскому Величеству по поводу событія 17 октября 1888 г. нижеслѣдующаго содержанія:

Ваше Императорское Величество,

Всемиловѣйшій Государь!

Дивнымъ Промысломъ Божіимъ драгоцѣннѣйшая жизнь ВАШЕГО ИМПЕРАТОРСКАГО Величества и ВАШЕЙ АВГУСТѢЙШЕЙ Семьи спасена отъ угрожавшей опасности.

Сильные духомъ Вѣры и глубокою преданностію Державному Своему Вождю сыны необъятной Россіи соединяются въ теплыхъ и сердечныхъ благодареніяхъ къ Господу, явившему въ чудесномъ спасеніи Вашемъ знаменіе милости Своей къ Россіи, призываемой къ благоденствію и процвѣтанію подъ Державнымъ водительствомъ Вашимъ.

Московское Техническое Училище, имѣющее счастье состоять подъ непосредственнымъ Вашихъ Императорскихъ Велиществъ покровительствомъ, воодушевляясь безпредѣльною радостію, дерзаетъ вмѣстѣ со всѣмъ народомъ русскимъ повергнуть къ стопамъ Вашимъ, Всемиловѣйшій Государь, свои глубокія вѣрноподданическія чувства любви и преданности и молить Всемогущаго Бога о ниспосланіи Вашему Императорскому Величеству и ВАШЕЙ Царственной Семьѣ здравія и долгоденствія на благо и процвѣтаніе нашего дорогого отечества.

Въ засѣданіи Совѣта 4 ноября 1888 г. былъ составленъ и подписанъ всѣми членами Совѣта нижеслѣдующій адресъ Его Высочайшему, Господину Министру Народнаго Просвѣщенія, статсъ-секретарю И. Д. Делянову по поводу исполнившагося 50-лѣтія его государственнаго служенія:

Ваше Высочайшее,

Глубокоуважаемый

Иванъ Давидовичъ!

ИМПЕРАТОРСКОЕ МОСКОВСКОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧИЛИЩЕ,
Державною Волею переданное изъ вѣдомства Учрежденій Императрицы Маріи въ вѣдѣніе Министерства Народнаго Просвѣщенія, второй разъ имѣетъ счастье состоять подъ Вашимъ просвѣщеннымъ руководствомъ и нынѣ, въ торжественный день исполнившагося пятидесятилѣтія Вашего государственнаго служенія, считаетъ своимъ пріятнымъ долгомъ принести Вашему Высочайшему почтительнѣйшее поздравленіе.

Полувѣковая разнообразная и плодотворная административная дѣятельность Вашего Высочайства, Ваша неутомимая заботливость о развитіи истиннаго просвѣщенія въ Россіи на началахъ преданности Престолу и любви къ Отечеству и Ваши сердечныя и доброжелательныя отношенія къ учащемуся юношеству, съ особенною силою выразившіяся во время послѣдней ревизіи Вашей высшихъ учебныхъ заведеній Имперіи, невольно внушаютъ чувства глубочайшаго уваженія и искреннѣйшей признательности къ Вашему Высочайству.

ИМПЕРАТОРСКОЕ МОСКОВСКОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧИЛИЩЕ, выражая эти чувства, душевно желаетъ Вашему Высочайству еще много лѣтъ быть исполнителемъ мудрыхъ предначертаній нашего дорогаго Монарха.

Въ засѣданіи Совѣта 26 мая 1889 г. обсуждался вопросъ о выборѣ кандидата изъ лицъ, окончившихъ курсъ въ Училищѣ, для посылки его за границу на проценты съ капитала, пожертвованнаго М. Ф. Морозовой. *Было положено:* 1) установить очередь въ этихъ командировкахъ для инженеръ-механиковъ и инженеръ-технологовъ, 2) командировать въ нынѣшнемъ году инженеръ-механика И. В. Лухина для изученія машиностроенія. Копія съ означенной статьи протокола согласно § 4 утвержденныхъ правилъ о пользованіи капиталомъ имени М. Ф. Морозовой была представлена на утвержденіе Маріи Федоровны Морозовой и ею было выражено согласіе на командированіе И. В. Лухина за границу.

II. Личный составъ служащихъ.

а) Почетные члены Педагогическаго Совѣта.

Его Императорское Высочество Великій Князь Константинъ Николаевичъ.

Его Императорское Высочество Николай Максимиліановичъ Романовскій, герцогъ Лихтенбергскій.

Генераль-адъютантъ, генераль отъ кавалеріи, князь Владиміръ Андреевичъ Долгоруковъ.

Дѣйствительный тайный совѣтникъ, графъ Дмитрій Андреевичъ Толстой † 25 Апрѣля 1889 г.

Тайный совѣтникъ Иванъ Алексѣевичъ Вышнеградскій.

Академикъ, тайный совѣтникъ Пафнутій Львовичъ Чебышевъ.

Предсѣдатель Императорскаго Русскаго Техническаго Общества, Петръ Аркадьевичъ Кочубей.

Тайный совѣтникъ Петръ Іоновичъ Губонинъ.

Военный инженеръ, генераль-маіоръ Амандъ Егоровичъ Струве.

Президентъ технологическаго института въ Бостонѣ, профессоръ Джонъ Рункль.

Дѣйствительный статскій совѣтникъ Викторъ Карловичъ Делла-Вось.

Дѣйствительный статскій совѣтникъ Дмитрій Ивановичъ Менделѣевъ.

б) Корреспондентъ Совѣта.

Инженеръ Александръ Веніаминовичъ Бари.

в) Управление училищемъ и служащіе въ ономъ по административной и учебно-воспитательной части.

Попечитель Московскаго Учебнаго Округа, графъ Павелъ Алексѣевичъ Капнистъ.

Исправляющій должность директора, инспекторъ училища, дѣйствительный статскій совѣтникъ Иванъ Васильевичъ Аристовъ.

Исправляющій должность инспектора, статскій совѣтникъ Василій Ѳеодоровичъ Давыдовскій.

Исправляющій должность помощника инспектора, коллежскій совѣтникъ Николай Петровичъ Циркуновъ.

Профессоры:

Прикладной механики: Орловъ, Ѳеодоръ Евпловичъ, магистръ чистой математики Московскаго Университета, статскій совѣтникъ.

Химической технологии и металлургии: Коссовъ, Ильдефонсъ Казимировичъ, магистръ химической технологии, дѣйствительный статскій совѣтникъ.

Химической технологии: Рудневъ, Владиміръ Матвѣевичъ, магистръ химіи С.-Петербургскаго Университета, статскій совѣтникъ.

Строительнаго искусства: Черепашинскій, Михаилъ Михайловичъ, состоящ. въ V-мъ кл.

Составленія проектовъ машинъ и заводовъ:

Химической технологии по отдѣлу крашенія:

Органической и неорганической химіи:

Общей и прикладной физики:

Аналитической механики:

Эшлиманъ, Александръ Карловичъ, кандидатъ математическихъ наукъ С.-Петербургскаго Университета, инженеръ-технологъ 1-го разряда, статскій совѣтникъ.

Петровъ, Петръ Петровичъ, ученый инженеръ-технологъ, коллежскій совѣтникъ.

Колли, Александръ Андреевичъ, магистръ химіи Московскаго Университета, статскій совѣтникъ.

Щегляевъ, Владиміръ Сергѣевичъ, магистръ физики Московскаго университета, сост. въ V-мъ кл.

Жуковскій, Николай Егоровичъ, докторъ прикладной математики Московскаго Университета, статскій совѣтникъ.

Доценты:

По кафедрѣ химіи:

Павловъ, Владиміръ Евграфовичъ, кандидатъ С.-Петербургскаго Университета, коллежскій секретарь.

По кафедрѣ технологии металловъ и дерева:

Мальцовъ, Павелъ Ивановичъ, инженеръ-механикъ, коллежскій секретарь.

По кафедрѣ машиностроенія:

Худяковъ, Петръ Кондратьевичъ, ученый инженеръ-механикъ, губернский секретарь (онъ же секретарь Педагогическаго Совѣта).

По кафедрѣ высшей математики:

Шапошниковъ, Николай Александровичъ, магистръ чистой математики Московскаго Университета, статскій совѣтникъ.

По кафедрѣ технологии волокнистыхъ веществъ:

Федоровъ, Семенъ Андреевичъ, ученый инженеръ-механикъ, сост. въ VII-мъ кл.

Репетиторы:

Михалевскій, Иванъ Елеазаровичъ, статскій совѣтникъ.

Карельскихъ, Константинъ Павловичъ, инженеръ-механикъ.

Тумскій, Константинъ Ивановичъ, статскій совѣтникъ.

Гавриленко, Александръ Павловичъ, инженеръ-механикъ.

Ассистенты:

По кафедрѣ механики: Румянцевъ, Василій Алексѣевичъ, инженеръ-механикъ, губернский секретарь.

По кафедрѣ физики: Величковскій, Анатолій Порфирьевичъ, кандидатъ С.-Петербургскаго Университета, коллежскій секретарь.

Лаборанты:

Главный лаборантъ: Никитинскій, Яковъ Яковлевичъ, ученый инженеръ-технологъ, коллежскій совѣтникъ.

Помощники главного лаборанта: { Поляковъ, Александръ Андреевичъ, инженеръ-технологъ, коллежскій секретарь.

{ Солонина, Василій Андреевичъ, кандидатъ С.-Петербургскаго Университета, коллежскій секретарь (съ 17 января 1889 г.).

Законоучитель:

Виноградовъ, Николай Сергѣевичъ, священникъ, кандидатъ богословія.

Преподаватели:

Строительнаго искусства:	Залѣсскій, Василій Герасимовичъ, коллежскій совѣтникъ.
Французскаго языка:	Давиньонъ, Левъ Францовичъ, статскій совѣтникъ.
Нѣмецкаго языка:	Бикъ, Евгеній Николаевичъ, статскій совѣтникъ.
Естественной исторіи:	Мѣшаевъ, Викторъ Дмитріевичъ, статскій совѣтникъ.
Статистики:	Фуксъ, Владиміръ Александровичъ, надворный совѣтникъ.
Бухгалтеріи:	Владиміровъ, Моисей Евстафіевичъ, коллежскій ассесоръ.
Черченія:	{ Гансъ, Адольфъ Христофоровичъ, статскій совѣтникъ.
	{ Ронжинъ, Николай Васильевичъ, титулярный совѣтникъ.
Рисованія:	Турчаниновъ, Капитонъ Ѳеодоровичъ, статскій совѣтникъ.

Учители:

Церковн. пѣнія:	Мамонтовъ, Викторъ Николаевичъ, хормейстеръ Императорскихъ Московскихъ театровъ.
Ганцованія.	Литавкинъ, Спиридонъ Александровичъ, артистъ Императорскихъ Московскихъ театровъ.

Воспитатели:

Пѣвницкій, Викторъ Ивановичъ, статскій совѣтникъ.

Дмитревскій, Иванъ Петровичъ, коллежскій секретарь, (онъ же библіотекаръ).

Смирновъ, Владиміръ Александровичъ, губернский секретарь.

Письмоводитель при инспекторъ:

Кречетовъ, Петръ Семеновичъ, (онъ же помощникъ библіотекаря).

Служащіе по хозяйственной и административной части:

Помощникъ директора по хозяйственной части: Панинъ, Павелъ Ѳеодоровичъ, титулярный совѣтникъ (онъ же временно исполняетъ обязанности казначея и полицеймейстера съ 25 апрѣля 1889 г.).

Правитель дѣлъ: Еремѣевъ, Ѳеодоръ Дмитріевичъ, надворный совѣтникъ.

Бухгалтеръ: Лакашинъ, Владиміръ Петровичъ, надворный совѣтникъ.

Архитекторы: { Каминскій, Александръ Степановичъ, коллежскій секретарь (по 30 января 1889 г.).

{ Никифоровъ, Александръ Алексѣевичъ, статскій совѣтникъ (временно исп. обяз. по найму съ 10 февраля 1889 г.).

И. д. эконома: Поляковъ, Андрей Гавриловичъ, коллежскій совѣтникъ.

Казначей и полицеймейстеръ: Фроловъ, Сергій Николаевичъ, надворный совѣтникъ (за болѣзнію числится въ отпуску съ 25 апрѣля 1889 г.).

Кастелянша: Хавская, Елизавета Алексѣевна.

При церкви:

Священникъ: Виноградовъ, Николай Сергѣевичъ, кандидатъ богословія.

Діаконъ (на вакансіи псаломщика): Соколовъ, Яковъ Ивановичъ, (по 14 марта 1889 г.).

Любимовъ, Александръ Александровичъ, (съ 4 апрѣля 1889 г.).

Церковный староста: Бородинъ, Николай Михайловичъ, потомственный почетный гражданинъ.

При лазаретѣ:

Врачъ: Карлинъ, Михаилъ Арсеньевичъ, дѣйствительный статскій совѣтникъ.

Сверхштатный врачъ. Боголюбовъ, Мелитонъ Петровичъ, статскій совѣтникъ.

Старшій фельдшеръ: Воронцовъ, Петръ Никитичъ, коллежскій регистраторъ.

Младшій фельдшеръ: Кирилловъ, Александръ Кирилловичъ, коллежскій регистраторъ.

Учебныя мастерскія и механическій заводъ.

Инспекторъ учебныхъ мастерскихъ: Протопоповъ, Павелъ Петровичъ, коллежскій секретарь.

Завѣдующіе механическимъ заводомъ:

Главный инженеръ механикъ: Пермяковъ, Александръ Ивановичъ, коллежскій секретарь.

Помощникъ главнаго инженеръ-механика: Петровъ, Никаноръ Петровичъ, коллежскій секретарь.

Бухгалтеръ: Липинскій, Юсифъ Юмичъ, статскій совѣтникъ.

Завѣдующіе отдѣльными мастерскими:

Учебно - слесарною: Протопоповъ, Павелъ Петровичъ, коллежскій секретарь.

Чертежною:	{	Шестаковъ, Сергѣй Сергѣевичъ,
		инженеръ-механикъ (по 21 февраля 1889 г.).
Токарною по дереву:	{	Поповъ, Степанъ Дмитріевичъ,
		ученый мастеръ (съ 15 марта 1889 г.).
Кузнечною:	{	Козловъ, Владиміръ Ильичъ, мастеръ (испр. долж.).
		Буровъ, Семень Васильевичъ, ученый мастеръ.
Модельною:	{	Михайловъ, Андрей Михайловичъ,
		ученый мастеръ.
Токарною по металлу:	{	Поповъ, Степанъ Дмитріевичъ,
		ученый мастеръ.
Литейною:	{	Ларионовъ, Герасимъ Ларионовичъ,
		ученый мастеръ

Служащіе при мастерскихъ:

Магазинъ — вахтеръ:	Доковскій, Нарцызъ Петровичъ, дворянинъ.
Смотритель мастерскихъ:	Благообразовъ, Николай Ивановичъ, потомственный почетный гражданинъ.

г) Движеніе по службѣ.

Уволены по прошеніямъ: отъ должности: состоящій на псаломщической вакансіи діаконъ Соколовъ — съ 14 марта 1889 г.; *отъ службы по найму:* завѣдующій чертежною мастерскою инженеръ-механикъ Шестаковъ — съ 21 февраля 1889 года.; *отъ дѣйствительной службы въ отставку:* архитекторъ коллежскій секретарь Каминскій — съ 30 января 1889 года.

Умеръ: почетный членъ Педагогическаго Совѣта дѣйствительный тайный совѣтникъ графъ Дмитрій Андреевичъ Толстой — 25 апрѣля 1889 года.

Определены: завѣдующій по найму токарною по металлу мастерскою ученый мастеръ Поповъ завѣдующимъ чертежною мастерскою, съ оставленіемъ за нимъ преподаванія токарнаго по металлу искусства, съ 15 марта 1889 года, на вакансію псаломщика діаконъ Любимовъ, съ 4 апрѣля 1889 года, и временно исполняющимъ обязанности архитектора статскій совѣтникъ Никифоровъ съ 10 февраля 1889 года.

Назначены: состоящій на службѣ по Министерству Финансовъ въ качествѣ эксперта химика при С.-Петербургской Сухопутной Таможнѣ коллежскій секретарь Солонина—помощникомъ главнаго лаборанта Училища, съ 17 января 1889 года; преподаватели черченія: статскій совѣтникъ Гансъ и титулярный совѣтникъ Ронжинъ—членами Педагогическаго Совѣта на 1888—89 учебный годъ съ 2 Сентября 1888 года.

Утверждены въ должностяхъ: воспитателя, исправляющій оную должность губернской секретарь Смирновъ—съ 1 марта 1889 года и помощника директора по хозяйственной части, исправляющій оную, титулярный совѣтникъ Панинъ—съ 12 октября 1888 года.

Избраны: въ секретари Педагогическаго Совѣта на 1888—89 учебный годъ губернской секретарь Худяковъ съ 13 сентября 1888 года и въ церковные старосты на 4-е трехлѣтіе потомственный почетный гражданинъ Бородинъ—съ 9 іюня 1889 года.

Временно было поручено исполненіе обязанностей: профессору Эшлиману по должности директора съ 12 ноября по 4 декабря 1888 года; и. д. помощника инспектора Циркунову по должности инспектора—съ 1 іюня по 1 августа 1889 года и помощнику директора по хозяйственной части Панину по должности казначея и полицеймейстера съ 25 апрѣля 1889 года.

Удостоенъ званія ученаго инженеръ-механика доцентъ Федоровъ—3 октября 1888 года.

Произведены за выслугу лѣтъ со старшинствомъ: въ *статскіе совѣтники*: И. д. инспектора Давыдовскій—съ 1 октября 1887 года, репетиторъ Тумскій съ 15-го сентября 1887 года, преподаватель Гансъ—съ 23 февраля 1888 года и сверхштатный врачъ Боголюбовъ (по службѣ при Императорскихъ Московскихъ театрахъ) съ 23 сентября 1874 года; въ *надворные совѣтники* правитель дѣлъ Еремѣевъ съ 6 ноября 1887 г., въ *титულлярные совѣтники* преподаватель Ронжинъ (по службѣ при Земледѣльческой школѣ) съ 3 декабря 1883 года и въ *коллежскіе секретари* инспекторъ учебныхъ мастерскихъ Протопоповъ съ 1 февраля 1888 г.

Утвержденъ въ чинѣ губернскаго секретаря воспитатель Смирновъ по званію дѣйствительнаго студента Московскаго Университета со старшинствомъ съ 1 марта 1888 года.

Награждены орденами: Св. Станислава 1 ст. профессоръ Коссовъ; *Св. Анны 2 ст.* профессоръ Колли, и. д. помощника инспектора Циркуновъ и по службѣ при Московскомъ Университетѣ профессоръ Жуковскій; *Св. Станислава 2 ст.* преподаватель Залѣвскій, церковный староста Бородинъ и по службѣ при Петровской Академіи профессоръ Рудневъ; *Св. Анны 3 ст.* преподаватель Мѣшаевъ и по службѣ при Московскомъ Коммерческомъ Училищѣ главный лаборантъ Никитинскій.

Награжденъ набодренникомъ священникъ Виноградовъ.

д) **Высочайшія повелѣнія и особыя распоряженія.**

Государь Императоръ, при всеподданнѣйшемъ докладѣ г. Министра Народнаго Просвѣщенія 3 ноября 1888 года, изволилъ выразить особое удовольствіе Свое и Государыни Императрицы по поводу изъявленія чувствъ восторженной радости, которую выказали студенты уни-

верситетовъ и другихъ высшихъ учебныхъ заведеній, а равно и воспитанники всѣхъ прочихъ училищъ при встрѣчѣ Ихъ Величествъ въ Харьковѣ (19 октября), Москвѣ (20 октября) и С.-Петербургѣ (23 октября) послѣ чуда милости Божіей, явленной Царской Семьѣ въ день 17 октября.

Въ день объявленія о семъ воспитанники Императорскаго Техническаго Училища были освобождены отъ учебныхъ занятій.

Комитетъ Общества поощренія трудолюбія въ Москвѣ отношеніемъ отъ 12 ноября 1888 года за № 750 сообщилъ Императорскому Московскому Техническому Училищу о томъ, что Государыня Императрица Августѣйшая Покровительница Общества поощренія трудолюбія въ Москвѣ, по всеподданнѣйшему докладу Помощника Главнаго Попечителя Императорскаго Человѣколюбиваго Общества статсъ-секретаря К. К. Рененкамфа объ успѣхѣ устроенной въ текущемъ году выставки, по случаю исполнившагося 25-лѣтія дѣятельности Общества и объ особыхъ заслугахъ, по устройству выставки, коллежскихъ совѣтниковъ, профессоровъ училища Петра Петровича Петрова и Якова Яковлевича Никитинскаго, Высочайше соизволила повелѣть объявить означеннымъ лицамъ Именную Высочайшую Ея Императорскаго Величества признательность.

Государь Императоръ, на всеподданнѣйшемъ докладѣ Г. Министра Народнаго Просвѣщенія о выраженныхъ подвѣдомственными Министерству учрежденіями и лицами вѣрноподданническихъ чувствъ безпредѣльной любви и преданности по случаю чудеснаго избавленія Ихъ Императорскихъ Величествъ и Августѣйшихъ Дѣтей отъ грозившей опасности на Курско-Харьковско-Азовской желѣзной дорогѣ, 9 декабря 1888 года Собственноручно начертать соизволилъ: „Сердечно благодаримъ всѣхъ“.

Государь Императоръ, по всеподданнѣйшему докладу Господина Министра Финансовъ, въ 21 день апрѣля 1889 года, Высочайше соизволилъ утвердить въ должности

члена Московскаго отдѣленія совѣта торговли и мануфактуръ профессора Императорскаго Техническаго Училища статскаго совѣтника Александра Андреевича Колли на четырехлѣтіе.

Съ разрѣшенія Его Сіятельства, Господина Попечителя Московскаго Учебнаго Округа, графа Павла Алексѣевича Капниста отъ 11 января 1889 года за № 185 сооружена и поставлена въ домовоѣ церкви Императорскаго Московскаго Техническаго Училища икона Спасителя съ нижеслѣдующей надписью: „Икона сія сооружена иждивеніемъ служащихъ и учащихся въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ въ память чудеснаго избавленія Его Императорскаго Величества, Благочестивѣйшаго Государя Императора Александра III Александровича и Его Августѣйшей Семьи отъ угрожавшей опасности при крушеніи поѣзда 17 октября 1888 года на Курско-Харьково-Азовской желѣзной дорогѣ“.

По распоряженію Господина Министра Народнаго Просвѣщенія, изложенному въ предложеніи Г. Попечителя Московскаго учебнаго округа отъ 12 ноября 1888 года за № 12040, и. д. Директора Императорскаго Техническаго Училища дѣйствительный статскій совѣтникъ Аристовъ былъ командированъ по дѣламъ службы въ С.-Петербургъ. Въ означенной командировкѣ находился съ 12 ноября по 4 декабря 1888 года.

Предложеніемъ Г. Попечителя Московскаго Учебнаго Округа отъ 19 ноября 1888 года за № 12531 въ составъ учрежденной 8 февраля того же года комиссіи для выработки проекта новаго устава Императорскаго Московскаго Техническаго Училища назначены въ число членовъ ея профессоръ названнаго училища Петровъ, доцентъ Федоровъ и преподаватель Залѣвскій.

Предложеніемъ Его Сіятельства, Графа П. А. Капниста, отъ 14 іюня 1889 года за № 6186 и. д. директора Императорскаго Техническаго Училища дѣйствительный статскій совѣтникъ Аристовъ назначенъ членомъ совѣта Попечителя Московскаго Учебнаго Округа.

е) Особые труды профессоровъ и преподавателей.

Профессоръ Н. Е. Жуковскій напечаталъ въ журналѣ Русскаго Физико-химическаго Общества статью „О движеніи подпочвенныхъ водъ“.

Профессоръ О. Е. Орловъ редактировалъ приложение къ отчету Политехническаго Общества за 18⁸⁷/₈₈ годъ.

Профессоръ М. М. Черепашинскій напечаталъ въ отчетѣ Императорскаго Техническаго Училища „Теорія сооружений“, выпускъ I.

Доцентъ П. К. Худяковъ составилъ и издалъ „Атласъ конструктивныхъ чертежей деталей машинъ“, въ 2 част., на 112 табл. въ видѣ подробнаго руководства при изученіи курса построения деталей машинъ. Означенный Атласъ Учебнымъ Отдѣломъ Министерства Путей Сообщенія рекомендованъ для библіотекъ желѣзнодорожныхъ училищъ въ качествѣ пособия по преподаванію спеціальнаго черченія и механики.

Доцентъ П. И. Мальцовъ продолжалъ печатаніе второго изданія „Справочной книги для инженеровъ, механиковъ, техникувъ и строителей“.

Преподаватель В. Д. Мѣшаевъ напечаталъ въ журналѣ „Техникъ“ 1889 г. № 171 статью „о прочности хлопчато-бумажныхъ и льняныхъ тканей“.

Репетиторъ К. И. Тумскій готовилъ къ печати сочиненіе: „Технологія нефти“.

III. Личный составъ учащихся.

а) Число учащихся.

Къ началу 1888—1889 учебнаго года состояло на лицо:

Казеннокоштныхъ	72
Своекоштныхъ пансіонеровъ и стипендіатовъ	34
Приходящихъ учениковъ	367
Занимающихся въ мастерскихъ	2

Всего..... 475

По 1-е іюня 1889 года.

а) выпущено:

Съ правами инженеръ-механика	1
„ инженеръ-технолога	26
„ ученаго мастера	2
Всего	29

б) уволено:

Казеннокоштныхъ	1
Своекоштныхъ пансіонеровъ	1
Приходящихъ учениковъ	14
Всего	16

в) принято:

Приходящихъ учениковъ	1
---------------------------------	---

г) перечислено:

Изъ приходящихъ въ пансіонеры	1
„ пансіонеровъ въ приходящіе	1
Всего	2

Къ 1-му іюня 1889 года состояло:

Казеннокоштныхъ	62
Своекоштныхъ пансіонеровъ и стипендіатовъ	31
Приходящихъ учениковъ	338
Итого	431

Съ 1-го іюня 1889 года по 12-е октября

а) выпущено:

Съ правами инженеръ-механика	35
--	----

б) уволено:

Казеннокоштныхъ	1
Своекоштныхъ пансіонеровъ	1
Приходящихъ учениковъ	5
Всего	7

в) умерло:

Приходящихъ учениковъ 1

г) перечислено:

Изъ своекоштныхъ пансіонеровъ въ казен-

нокоштные	1
„ приходящихъ въ казеннокоштные ...	20
„ пансіонеровъ въ приходящіе	3
„ приходящихъ въ пансіонеры	1

Всего..... 25

Подано на открывшіяся вакансіи прошеній:

Въ казеннокоштные.....	2
„ своекоштные пансіонеры	9
„ приходящіе ученики	127

Всего..... 138

Принято по конкурсу:

Въ казеннокоштные.....	2
„ своекоштные пансіонеры	9
„ приходящіе ученики	103

Всего..... 114

Затѣмъ къ началу 1889—1890 учебнаго года состоитъ на лицѣ:

Казеннокоштныхъ.....	72
Своекоштныхъ пансіонеровъ и стипен-	
діатовъ	34
Приходящихъ учениковъ	396

Всего..... 502

Въ теченіе 1888—1889 учебнаго года состояли стипендіатами:

Имени Его Императорскаго Величества (Коломенской городской думы)—Шевелевъ Николай.

Имени въ Божѣ почивающей Императрицы Маріи Теодоровны (Собственной Его Императорскаго Величе-

ства Канцеляріи по учрежденіямъ Императрицы Маріи)—
Сутоцкій Стефанъ.

Имени въ Бозѣ почивающаго Его Императорскаго
Высочества Принца Петра Георгіевича Ольденбургскаго
—Турчаниновъ Митрофанъ.

Имени Его Императорскаго Высочества Великаго Кня-
зя Константина Николаевича (Московского Биржеваго
Комитета)—Дмитріевъ Дмитрій.

Имени бывшаго Министра Финансовъ М. Х. Рей-
терна (Московского Биржеваго Комитета).—Салтычевъ
Иванъ.

Имени Князя С. М. Голицына.—Чижиговъ Алек-
сандръ.

Имени тайнаго совѣтника И. Н. Дурново (Ростов-
ской на Дону Думы)—Ходатаевъ Петръ.

Кавказскими стипендіатами: Степановъ Тикранъ,
Теръ - Іоаннесовъ Акопъ, Худенко Алексѣй, Ки-
феръ Людвигъ, Лебединскій Константинъ, Бур-
жинскій Владиміръ, Котляровъ Филиппъ, Бегра-
мовъ Александръ.

Имени Барона Дельвига—Разинъ Константинъ.

Имени умершаго потомственнаго почетнаго гражда-
нина В. Ѳ. Кокина—Около-Кулакъ Николай.

Имени умершаго Московскаго купца Г. Г. Хлѣбни-
кова—Гололобовъ Александръ.

Имени умершаго инженеръ-механика С. И. Гарели-
на—Митрофановъ Петръ.

Болгарскій стипендіатъ Калянджіевъ Цанъ.

Вспомогательнаго общества купеческихъ прикащи-
ковъ въ Москвѣ—Костроминъ Сергѣй, Хохловъ
Петръ и Тряпкинъ Владиміръ.

Донскаго казачьяго войска — Пѣговъ Дмитрій,
Ротовъ Александръ и Васильевъ Василій.

Имени въ Бозѣ почивающаго Императора Алексан-
дра II (Владикавказской Городской Думы)—Козловскій
Елисѣй.

Терскаго казачьяго войска—Мелиховъ Иванъ.

б) Распределение учащихся по классамъ къ 1-му іюня
1889 года.

К Л А С С Ы.	Казенно- коштныхъ.	Пансіоне- ровъ.	Приходя- щихъ.	ВСЕГО.
Въ 1-мъ общемъ классѣ	1	5	68	74
Во 2-мъ общемъ классѣ	1	5	79	85
Въ 3-мъ общемъ классѣ	14	10	81	105
„ 1-мъ специальномъ классѣ	14	7	55	76
Во 2-мъ специальномъ классѣ	20	2	34	56
Въ 3-мъ специальномъ классѣ	12	2	21	35
И т о г о	62	31	338	431

в) Распределение учащихся по классамъ къ началу
1889—1890-го учебнаго года.

К Л А С С Ы.	Казенно- коштныхъ.	Пансіоне- ровъ.	Приходя- щихъ.	ВСЕГО.
Въ 1-мъ общемъ классѣ	4	9	111	124
Въ 2-мъ общемъ классѣ	5	4	66	75
Въ 3-мъ общемъ классѣ	2	4	74	80
Въ 1-мъ специальномъ классѣ	23	9	64	96
Во 2-мъ специальномъ классѣ	15	6	51	72
Въ 3-мъ специальномъ классѣ	23	2	30	55
И т о г о	72	34	396	502

г) Приѣмъ учащихся.

Послѣ приѣмныхъ испытаній, окончившихся 27-го августа 1889 года, по опредѣленію Педагогическаго Совета, были приняты въ Училище:

Въ 1-й общій классъ.

Абакумовъ Константинъ.	Дроздовъ Николай.
Адамянцъ Александръ.	Звѣржхановскій Николай.
Адашевъ Георгій.	Зерцевъ Михаилъ.
Александровъ Павелъ.	Зубаревъ Николай.
Андреевъ Алексѣй.	Зубковъ Алексѣй.
Андреевъ Николай.	Ивановъ Владиміръ.
Антоновъ Сергѣй.	Ивановъ Николай.
Артемьевъ Николай.	Игнатовъ Константинъ.
Астровъ Александръ.	Измировъ Николай.
Аттаповичъ Константинъ.	Ильинъ Петръ.
Бабанасянцъ Константинъ.	Каменевъ Иванъ.
Бакастовъ Николай.	Канцель Александръ.
Бакаллъ Илья.	Каяловъ Степанъ.
Безходарный Федоръ.	Кивокурцевъ Николай.
Бейнгардтъ Василій.	Коваленко Петръ.
Богомолловъ Владиміръ.	Кольцевъ Сергѣй.
Бурцевъ Николай.	Колчинъ Михаилъ.
Валевахинъ Иванъ.	Коммисаровъ Гавріилъ.
Вансовичъ Іосифъ.	Коноваловъ Карпъ.
Вареновъ Александръ.	Красоткинъ Николай.
Васильевъ 1-й Николай.	Крафтъ Владиміръ.
Васильевъ 2-й Николай.	Кржижановскій Адріанъ.
Вернандеръ Сергѣй.	Кривоносовъ Хаймъ.
Вильбоа Эгмонтъ.	Крыловъ Дмитрій.
Волковъ Николай.	Кузьминъ Николай.
Герасимовъ Дмитрій.	Купріяновъ Сергѣй.
Гладковъ Евгеній.	Лебедевъ Борисъ.
Глинковъ Александръ.	Лебедевъ Николай.
Гриневецкій Василій.	Лейцингеръ Родіонъ.
Дмитріевъ Василій.	Липницкій Иванъ.

Лятошинскій Ѳедоръ.	Синевъ Петръ.
Малининъ Владиміръ.	Скворцевъ Василій.
Мамушинъ Иванъ.	Скворцевъ Николай.
Михайловъ Николай.	Скопкинъ Петръ.
Мошковъ Павелъ.	Соколовъ Михаилъ.
Мѣшковъ Александръ.	Сонгаило Витольдъ.
Недѣлко Владиміръ.	Станкевичъ Іосифъ.
Образцовъ Николай.	Ступинъ Алексѣй.
Обуховъ Макарій.	Сѣриковъ Николай.
Оганесянцъ Оганесъ.	Тарасовъ Андрей.
Ольманъ Артуръ.	Тройниковъ Валентинъ.
Оржешко Вацлавъ.	Турчаниновъ Петръ.
Папфнутьевъ Николай.	Унанянцъ Тикранъ.
Петровъ Геннадій.	Фанталовъ Леонидъ.
Пономаревъ Сергѣй.	Филипповъ Владиміръ.
Поповъ Иванъ.	Цукерманъ Сергѣй.
Поповъ Петръ.	Чемолосовъ Владиміръ
Потемкинъ Иванъ.	Черновъ Гавріилъ.
Прушевскій Феликсъ.	Чернякъ Цемахъ.
Пѣвницкій Сергѣй.	Шешковъ Николай.
Розенблумъ Михаилъ.	Шшилевъ Дмитрій.
Румянцевъ Николай.	Шутковъ Алексѣй.
Семенченко-Даценко Петръ.	Якимовскій Иванъ.
Сергѣевъ Владиміръ.	Ѳоминъ Иванъ.
Симоновъ Михаилъ.	

Во 2 общій классъ.

(Химическаго отдѣленія).

Чевелевъ Алексѣй.

Во 3 общій классъ.

(Механическаго отдѣленія).

Климушинъ Иванъ.

Юрьевъ Григорій (изъ бывшихъ воспитанниковъ).

Во 1 спеціальный классъ.

(Химическаго отдѣленія).

Степановъ Дмитрій (изъ бывшихъ воспитанниковъ).

Во 2 спеціальний классъ.

(Механическаго отдѣленія).

Гипсіусъ Иванъ.

Изъ бывшихъ воспитанниковъ принять:

Во 2 общій классъ.

Агеенко Леонтій.

д) Переходъ учащихся изъ класса въ классъ.

Послѣ годичныхъ экзаменовъ, окончившихся 26 мая 1889 года, по опредѣленію Педагогическаго Совѣта переведены:

Изъ 1-го общаго класса во 2-й общій.

Акуновъ Иванъ.	Кулагинъ Николай.
Алексѣевъ Александръ.	Левитъ Мовша.
Алексѣевъ Константинъ.	Либау Густавъ.
Баккаль Илья.	Лушниковъ Михаилъ.
Вердеревскій Дмитрій.	Любенковъ Владиміръ.
Вилькенъ Густавъ.	Малиновскій 2-й Николай.
Волобуевъ Стефанъ.	Меликъ-Дадаянцъ Айрапетъ.
Волынко Евгеній.	Меньшиковъ Владиміръ.
Воронцовъ Дмитрій.	Мокіевскій-Зубокъ Сергѣй
Гильдебрантдъ Карлъ.	Напалковъ Викторъ.
Грейфе Ернестъ-Германъ.	Некрасовъ Кириллъ.
Давидовъ Иванъ.	Нестроевъ Анатолій.
Долголенко Валеріанъ.	Николаевъ-Назаровъ Влад.
Донде Авраамій.	Нѣмчиновъ Владиміръ.
Ергопуло Викторъ.	Орловскій Сергѣй.
Жонголоновичъ Станиславъ.	Петровъ Владиміръ.
Ижболдинъ Григорій.	Поляковъ Николай.
Карчагинъ Дмитрій.	Поповъ Николай.
Каспаровъ Арташесъ.	Рыкачевъ Николай.
Кронбергъ Дмитрій.	Сараджевъ Артемій.
Кузнецовъ Константинъ.	Сластеновъ Анатолій.

Соколовъ Сергѣй.	Шатровъ Сергѣй.
Солюсъ Георгій.	Шевелевъ Николай.
Тимофеевъ Василий.	Ширяевъ Николай.
Трофимовъ Алексѣй.	Шишкинъ Иванъ.
Федоровъ Иванъ.	Юдичевъ Григорій.
Холевинскій Петръ.	Юзбашянцъ Микиртичъ.
Хобаевъ Василий.	Яковлевъ Дмитрій.
Худенко Алексѣй.	

Изъ 2 общаго класса въ 3-й общій.

а) Механическаго отдѣленія:

Алифатовъ Георгій.	Малиновскій Эдуардъ.
Арцимовичъ Іосифъ.	Машкилейсонъ Ааронъ.
Барановъ Адріанъ.	Миттельштедтъ Юліусъ.
Басовъ Степанъ.	Молинарій Георгій.
Бѣловъ Иванъ.	Овсенскій Ѳаддей.
Гарнищевскій Алексѣй.	Плихановъ Василий.
Горбачевъ Иванъ.	Пузановъ Николай.
Гузинъ Іосифъ.	Русановъ Иванъ.
Гуревичъ Шмуль.	Салтычевъ Иванъ.
Гуськовъ Владиміръ.	Семеновъ Павелъ.
Зворыкинъ Иванъ.	Скржипинскій Казимиръ.
Звѣревъ Сергѣй.	Смирновъ Николай.
Ивановъ Иванъ.	Стахѣевъ Ѳедоръ.
Ильинскій Петръ.	Федотовъ Николай.
Кабачинскій Николай.	Цвибакъ Мееръ.
Казанцевъ Алексѣй.	Шиндлеръ Камилль.
Карпачевскій Иванъ.	Шмидтъ Анатолій.
Киферъ Людвигъ.	Шульгинъ Дмитрій.
Кверцеръ Николай.	Юкинъ Александръ.
Коржевинъ Дмитрій.	Юнге Ѳедоръ.
Леденцовъ Христофоръ.	Юсовъ Александръ.
Мадатовъ Акопъ.	

б) Химическаго отдѣленія.

Бражниковъ Василий.	Власовъ Иванъ
Виноградовъ Федоръ.	Городецкій Гирша.

Громъ Николай.	Петровъ Николай.
Евдокимовъ Василій.	Региреръ Израиль.
Зозулевскій Иванъ.	Розень Ааронъ.
Кругловъ Александръ.	Семеновъ Михаилъ.
Лавровъ Василій.	Скорупскій Александръ.
Лебедевъ Сергѣй.	Соколовъ Николай.
Лихтенштейнъ Нотель.	Теръ-Андреасянцъ Михитаръ.
Малиновскій 1-й Николай.	Фонъ-Бремзенъ Алексѣй.
Мелиховъ Иванъ.	Хмѣлевскій Викторъ.
Никольскій Николай.	Юровскій Нухимъ.
Новоселовъ Иванъ.	

Изъ 3-го общаго класса въ 1-й спеціальный.

а) Инженерно-механическаго отдѣленія.

Алексѣевъ Николай.	Дмитріевъ Дмитрій.
Барановъ Георгій.	Дроздовъ Владиміръ.
Березовскій Николай.	Ефремовъ Михаилъ.
Берченко Николай.	Жаковъ Павелъ.
Бирюковъ Иванъ.	Ждановъ Оедоръ.
Благовѣщенскій Семенъ.	Жученковъ Дмитрій.
Бойчевскій Александръ.	Зиминъ Николай.
Болдыревъ Алексѣй.	Кадагидзе Дмитрій.
Бурджаловъ Георгій.	Калабинъ Николай.
Бутковскій Файвель.	Каплианскій Овсей.
Бухоновъ Иннокентій.	Карнѣевъ Владиміръ.
Войтѣховъ Петръ.	Кастальскій Сергѣй.
Володиміровъ Николай.	Комаровичъ Михаилъ.
Вороновъ Николай.	Котельниковъ Алексѣй.
Гинглатовъ Иванъ.	Котляровъ Филиппъ.
Горбуновъ Григорій.	Лепехинъ Михаилъ.
Горленко Сергѣй.	Марковъ Николай.
Громанъ Борисъ.	Мыльниковъ Андрей.
Грязновъ Алексѣй.	Нейманъ Вацлавъ.
Гулуловъ Степанъ.	Никитскій Иванъ.
Гурляндъ Исаакъ.	Около-Кулакъ Николай.
Давиньонъ Петръ.	Первакъ Яковъ.
Дара Леонидъ.	Первушинъ Алексѣй.

Петровъ Александръ.	Смирновъ Викторъ.
Покровский Яковъ.	Страховъ Петръ.
Полозовъ Александръ.	Судра Иванъ.
Пономаревъ Степанъ.	Туневъ Иванъ.
Поповъ Павелъ.	Тюремновъ Николай.
Сергѣевъ Николай.	Фраловскій Василій.
Скачковъ Михаилъ.	Эпштейнъ Владиміръ.
Слободчиковъ Петръ.	

б) инженерно-технологическаго отдѣленія:

Беграмовъ Александръ.	Лыжинъ Иванъ.
Бирюковъ Дмитрій.	Лялинъ Леонидъ.
Валлеръ Ааронъ.	Малининъ Николай.
Веселовскій Евгений.	Машкилейсонъ Овсей.
Геслеръ Александръ.	Напалковъ Николай.
Гирей-Гаджи Магометъ Оглы	Немолодышевъ Степанъ.
Гольдовскій Игнатій.	Покровский Константинъ.
Добряковъ Иванъ.	Пономаревъ Павелъ.
Долинскій Леонидъ.	Раутенбергъ Михаилъ.
Дукельскій Исаакъ.	Саввинъ Алексѣй.
Егоровъ Семень.	Семилѣтовъ Александръ.
Закъ Лазаръ.	Теръ-Ионнесовъ Акопъ.
Исаковичъ Альбертъ.	Удинъ Михаилъ.
Кирпичниковъ Николай.	Ховренко Михаилъ.
Козловскій Елисѣй.	Шифринъ Авраамъ.
Козьминъ Владиміръ.	Эпштейнъ Борисъ.
Котковъ Сергѣй.	Федоровъ Сергѣй.

Изъ 1-го спеціального класса во 2-й спеціальный

а) инженерно-механическаго отдѣленія.

Абрамовъ Николай.	Бушуевъ Александръ.
Адамовъ Амбарцумъ.	Васильевъ Василій.
Анисимовъ Ильѣ.	Гедговдъ Тимонъ.
Бенкевичъ Анатолій.	Грейнеръ Карлъ.
Близнянскій Яковъ.	Григорьевъ Иванъ.
Бонковскій Юліанъ.	Доковскій Тимоѣй.

Долголенко Викторъ.	Пиотровичъ Петръ.
Дубровинъ Иванъ.	Пушкинъ Константинъ.
Дьяковъ Кузьма.	Пѣговъ Дмитрій.
Засыпкинъ Иванъ.	Ромейко-Гурко Николай.
Зворыкинъ Владиміръ.	Ротовъ Александръ.
Зворыкинъ Гурій.	Савченко Сергѣй.
Ивановъ Николай.	Сахацкій Сергѣй.
Игнатъичевъ Константинъ.	Семеновъ Николай.
Калугинъ Петръ.	Сидоровъ Анатолій.
Кіянницынъ Иванъ.	Сорокинъ Иванъ.
Ковалевскій Петръ.	Сuzдальцевъ Евгеній.
Королевъ Владиміръ.	Теръ-Маркозовъ Иванъ.
Корфъ Михаилъ.	Троицкій Николай.
Куксенко Николай.	Флоровъ Александръ.
Локшинскій Николай.	Четвертининъ Автономъ.
Мухинъ Оедоръ.	Чижиговъ Александръ.
Наумовъ Иванъ.	Шереръ Адольфъ.
Павловъ Петръ.	Штуцеръ Андрей.
Палимпсестовъ Владиміръ.	Щербаковъ Сергѣй.
Пальшау Александръ.	Щепинъ Петръ.
Панфиловъ Николай.	Якимовъ Николай.
Пестичъ Петръ.	Яшновъ Андрей.

б) инженерно-технологическаго отдѣленія.

Бузниковъ Владиміръ.	Левинъ Соломонъ.
Волковъ Николай.	Митрофановъ Петръ.
Гололобовъ Александръ.	Соколовъ Илья.
Завадскій Андрей.	Срѣтенскій Александръ.
Игумновъ Иванъ.	Тряпкинъ Владиміръ.
Карповъ Аполлонъ.	Хохловъ Петръ.
Константиновичъ Аполлонъ.	Шеурленъ Николай.
Кутеповъ Оедоръ.	

Изъ 2-го спеціального класса въ 3-й спеціальный.

а) инженерно-механическаго отдѣленія.

Афанасьевъ Дмитрій.	Бондаревъ Евгеній.
Березинъ Петръ.	Великосельскій Константинъ.

Волковичъ Иванъ.	Николаевъ Евгеній.
Волоховъ Николай.	Образцовъ Михайлъ.
Ворогушинъ Александръ.	Окновъ Михайлъ.
Гуляевъ Римма.	Полещукъ Алексѣй.
Ивановъ Павелъ.	Потресовъ Михайлъ.
Квятковскій Донатъ.	Пушечниковъ Владиміръ.
Козьминъ Сергѣй.	Салтыковъ Александръ.
Колдаевъ Владиміръ.	Сиптиць Петръ.
Коленда Константинъ.	Сумеркинъ Алексѣй.
Коровинъ Александръ.	Сухотинъ Всеволодъ.
Коротковъ Петръ.	Турчаниновъ Митрофанъ.
Кронебергъ Алексѣй.	Хлѣбниковъ Сергѣй.
Кузнецовъ Сергѣй.	Цюндзевицкій Михайлъ.
Курицынъ Михайлъ.	Черновъ Павелъ.
Михайловъ Василій.	Черногрозскій Яковъ.
Никитинъ Антонъ.	Шатрюковъ Иларіонъ.
Некрасовъ Владиміръ.	Ѳаддеевъ Николай.

б) Инженерно-технологическаго отдѣленія.

Аркинъ Лазарь.	Кишкинъ Григорій.
Бардскій Людвигъ.	Круковскій Гирша.
Бойчевскій Петръ.	Кугушевъ Леонидъ.
Гедике Владиміръ.	Митрофановъ Владиміръ.
Гуськовъ Сергѣй.	Никольскій Константинъ.
Доковскій Степанъ.	Оржешко Францъ.
Зарембо Василій.	Рендель Мовша.
Каринъ Петръ.	Таршиловъ Василій.
Карчагинъ Александръ.	

е) Выпускъ учащихся.

1. *Съ званіемъ инженеръ-механика и награжденіемъ Высочайше утвержденнымъ знакомъ отличія:*

Анучкинъ Алексѣй.	Бубновъ Владиміръ.
Барсовъ Константинъ.	Бѣловъ Николай.
Березовскій Иванъ.	Ветчинкинъ Афанасій.
Бруевичъ Василій.	Герасимовъ Сергѣй.

Гречинъ Герасимъ.	Поляковъ Ермолай.
Державинъ Алексѣй.	Попелышкинъ - Каськовъ
Дурденевскій Петръ.	Ниль.
Енишерловъ Константинъ.	Разинъ Константинъ.
Кнорре Ѳеодоръ.	Россихинъ Александръ.
Кожевниковъ Петръ.	Саларевъ Петръ.
Кожевниковъ Яковъ.	Самгинъ Сергѣй.
Кокуринъ Павелъ.	Самойловъ Александръ.
Кротковъ Левъ.	Сперберъ Фридрихъ.
Моргулисъ Исаакъ.	Толоконниковъ Алексѣй.
Назаровъ Григорій.	Тропаревскій Иванъ.
Никифоровъ Алексѣй.	Успенскій Яковъ.
Ольденборгеръ Владиміръ.	Шойгамъ Хаймъ-Юдка.
Органовъ Владиміръ.	Юрьевъ Іоасафъ.
Ошанинъ Юрій.	

*2. Съ званіемъ инженеръ-технолога и награжденіемъ
Высочайше утвержденнымъ знакомъ отличія.*

Алабинъ Константинъ.	Крапивинъ Владиміръ.
Бонковскій Александръ.	Ливень Германъ.
Булашевичъ Павелъ.	Медвѣдниковъ Сергѣй.
Васильевъ Петръ.	Овсяниковъ Николай.
Вилькенъ Карлъ.	Плакцикій Петръ.
Горбачевъ Петръ.	Розановъ Алексѣй.
Горбенко Яковъ.	Сутоцкій Стефанъ.
Давыдовъ Аркадій.	Травинъ Яковъ.
Егоровъ Иванъ.	Трубниковъ Никаноръ.
Епифановъ Степанъ.	Усышкинъ Михаилъ.
Жуковъ Ѳеодоръ.	Фидлеръ Иванъ.
Инштетовъ Александръ.	Ходатаевъ Петръ.
Кропанинъ Леонидъ.	Чернышевъ Сергѣй.

3. Съ званіемъ ученаго мастера.

Зайковскій Николай.	Панченко Семень.
---------------------	------------------

Въ истекшемъ академическомъ году Педагогическимъ Совѣтомъ, на основаніи § 22 Высочайше утвержденнаго устава училища, удостоенъ званія ученаго инженеръ-

механика доцентъ училища инженеръ-механикъ С. А. Оедоровъ за представленное имъ разсужденіе: „Общія изслѣдованія о кардо-чесаніи хлопка“.

Въ истекшемъ академическомъ году Педагогическимъ Совѣтомъ, на основаніи примѣчанія къ § 22 Высочайше утвержденнаго устава училища, удостоены: званія механика-строителя—окончившій курсъ въ бывшемъ ремесленномъ учебномъ заведеніи ученый мастеръ Сакентъ Михайлъ Дмитріевичъ; званія инженеръ - механика — Пропперъ Николай Андреевичъ; званія инженеръ-технолога—Гавриловъ Александръ Гавриловичъ и Хлаповъ Иванъ Александровичъ.

По опредѣленію Педагогическаго Совѣта, на основаніи § 25 Высочайше утвержденнаго устава училища, удостоены званія ученаго мастера бывший воспитанникъ Училища Челушкинъ Юрій Ивановичъ.

ж) Экскурсіи учащихся и занятія ихъ внѣ училища.

Воспитанники спеціальныхъ классовъ подъ руководствомъ Гг. профессоровъ, доцентовъ и преподавателей въ теченіе отчетнаго года осматривали слѣдующіе заводы и фабрики: Коломенскій механическій заводъ, механическій заводъ Доброва и Набгольцъ, механическій заводъ Листа, механическій заводъ Бромлей, кожевенный заводъ Бахрушина, металлическій заводъ Гужона, ремонтныя мастерскія Курской желѣзной дороги, суконную фабрику бр. Носовыхъ, Нефтяной заводъ Россійско-Американской Компаніи въ Кусковѣ, шерсто-прядильную фабрику Дюфурмантель, стеклянный заводъ Дютфуа, Алексѣевскую водокачку, Прохоровскую Трехгорную мануфактуру, химическій заводъ Лепешкина, сахаро-рафинадный заводъ Московскаго Товарищества, парчевую фабрику Сапожниковыхъ, фабрику Баранова, фабрику Морозова въ Орѣховѣ-Зуевѣ, Трехгорный пивоваренный заводъ, Невскій стеариновый заводъ, ткацкую фабрику смѣшанныхъ тканей Бородина, Экспедицію заготовленія

государственныхъ бумагъ, Императорскій стеклянный заводъ, Императорскій фарфоровый заводъ, Обуховскій сталелитейный заводъ, Невскую писчебумажную фабрику Варгуниныхъ, кожевенный заводъ Брусницыныхъ и Музей Горнаго Института.

3) Темы для сочиненій на 1889—90 учебный годъ.

а) На золотую медаль:

1. Паровозы обыкновенные, двойные (системы Ферли) и компаундъ—системы.
2. Примѣненіе нефти для полученія углеродистыхъ водородовъ ароматнаго ряда.

б) На премію Политехнической выставки:

Методы изслѣдованія жировъ и критическая оцѣнка ихъ.

Темы для сочиненій на 1890—91 учебный годъ.

а) На золотую медаль.

1. Фрезы и фрезовыя машины; ихъ конструктивное устройство и работа.
2. О добываніи хлора и соляной кислоты изъ маточныхъ растворовъ отъ соды, получаемой по аміачному способу.

б) На премію Политехнической выставки.

Современное состояніе вопроса о преобразованіи электричества въ механическую работу и осуществленные опыты замѣны, въ вѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, животныхъ, водяныхъ, газовыхъ и паровыхъ двигателей—двигателемъ электрическимъ, съ описаніемъ относящихся къ этому предмету машинъ, аппаратовъ и механическихъ приспособленій.

IV. Учебныя пособія.

I. Лабораторія.

Къ началу 1888—89 академическаго года состояло по инвентарю аппаратовъ и приборовъ . . . 2776 на сумму 15.077 р. 65 к.

Въ теченіе года приобрѣтено	136	"	"	700	"	76 $\frac{1}{2}$	"
Исключено	1054	"	"	4483	"	32	"

Итого къ 1889—90 г. числится аппаратовъ и приборовъ 1858 на сумму 11.295 р. 09 $\frac{1}{2}$ к.

Между различными приборами и аппаратами, приобрѣтенными въ отчетномъ академическомъ году, выдаются: печь Эрленмейера для органическаго анализа, вѣсы Вестфалѣ, аппаратъ Фишера для пробы смазочныхъ маселъ, аппаратъ Орса для изслѣдованія продуктовъ горѣнія топлива, аппаратъ Абея-Пенскаго для опредѣленія температуры вспышки керосина. Въ технической лабораторіи установленъ въ кирпичной кладкѣ мыловаренный котелъ. Къ началу 1889—90 академическаго года отдѣлана въ нижнемъ помѣщеніи лабораторіи комната на 6 человекъ съ установкою стола со шкафами, съ проведеніемъ газа, воды и устройствомъ тяги.

Въ 1888—1889 учебномъ году въ аналитической лабораторіи занимались, подъ руководствомъ доцента В. Е. Павлова, два класса: III общій (35 человекъ—15 часовъ въ недѣлю) въ теченіе всего учебнаго года и I спеціальный—въ теченіе перваго полугодія (16 человекъ—12 часовъ въ недѣлю).

Воспитанники III общаго класса изучали реакціи металловъ, металлоидовъ и ихъ соединеній, приемы качественного анализа, производили анализы смѣсей неизвѣстнаго имъ состава (а также и нѣкоторыхъ минера-

ловъ) и давали устные отчеты о ходѣ своихъ занятій. Воспитанники I спеціального класса занимались въс-
вымъ и объемнымъ анализомъ, послѣднимъ—по преи-
муществу. Въ виду контроля производимыхъ анализовъ,
занимающимся выдавались для анализа растворы различ-
ныхъ тѣлъ и ихъ смѣсей, предварительно проанализи-
рованные.

Работы воспитанниковъ въ технической лабораторіи
за 1888—1889 учебный годъ состояли въ изученіи ме-
тодовъ технического анализа нѣкоторыхъ сырыхъ ма-
териаловъ и важнѣйшихъ заводскихъ продуктовъ. Кромѣ
того воспитанниками были произведены нѣкоторые тех-
ническія работы: получение керосина и смазочныхъ
маселъ, сухая перегонка дерева, получение льняного масла
посредствомъ экстракціи, получение различныхъ сортовъ
мыла и проч.

2. Физическій кабинетъ.

Къ началу 1888—89 года числилось по инвентарю:
Физическихъ приборовъ,
инструментовъ, таблицъ,
книгъ, мебели и пр. . . 794 на сумму 15.847 р. 63 к
Въ теченіе года приобрѣтено 68 „ „ 885 „ 86 „
Итого къ 1889—90 г. чис-
лится. 862 на сумму 16.733 р. 49 к.

Въ 1888—89 году въ физической лабораторіи про-
исходили занятія съ учениками II общаго класса хими-
ческаго отдѣленія.

3. Механическій кабинетъ.

Къ началу 1888—89 г. въ механическомъ кабинетѣ
по инвентарю числилось:

1. Кинематическихъ моделей. 106 нум. 117 предм.
2. Моделей машинъ и деталей
машинъ 148 „ 162 „

3. Измѣрительныхъ приборовъ и инструментовъ	88 нум.	99 предм.
4. Книгъ, чертежей и таблицъ.	16 „	177 „
Итого .	358 нум.	555 предм.

На сумму 7669 руб. 94¹/₄ коп.

Въ теченіе 1888—89 г. приобрѣтено отъ Фойгтъ, въ Берлинѣ, 4 модели муфты, на сумму 245 руб.

Такимъ образомъ къ началу 1889—90 уч. г. въ механическомъ кабинетѣ числятся:

1. Кинематическихъ моделей.	110 нум.	121 предм.
2. Моделей машинъ и деталей машинъ	148 „	162 „
3. Измѣрительныхъ приборовъ и инструментовъ	88 „	99 „
4. Книгъ, чертежей и таблицъ.	16 „	177 „
Итого . .	362 нум.	559 предм.

На сумму 7914 руб. 94¹/₄ коп.

4. Кабинетъ естественной исторіи.

Къ началу 1888—89 учебнаго года по инвентарю числилось:

Минераловъ, моделей кристалловъ и пр.	1848
Зоологическихъ препаратовъ, моделей и пр., и по анатоміи человѣка	511
Ботаническихъ моделей, продуктовъ и пр.	116
Инструментовъ	53
Атласовъ, таблицъ, книгъ и пр.	132
Итого	2660 пр.
Сверхъ того мебели	61 пр.
Въ теченіе года исключено изъ коллекціи	24 пр.
Итого къ 1889—90 году числится всего:	
въ коллекціяхъ	2636 пр.
мебели	61 пр.

5. Геодезическій кабинетъ.

Къ началу 1888—89 академическаго года по инвентарю числилось:

Различныхъ геодезическихъ инструментовъ	29
Въ теченіе года вновь поступило	57
Къ началу 1889—90 г. числится	86
На сумму	1515 р. 17 к.

6. Пособія по начертательной геометріи.

Къ началу 1888—89 академическаго года по инвентарю числилось:

Таблицъ начертательной геометріи.	43
Лекаль	17
Коллекція рельефныхъ моделей.	1
Всего	61

Въ теченіе года приобрѣтеній и исключеній не было.

Къ началу 1889—90 г. числится 61

На сумму 4 р. 45 к.

7. Учебныя пособія по черченію.

Къ началу 1888—89 академическаго года по инвентарю числилось:

Разныхъ коллекцій чертежей, оригиналовъ, моделей и инструментовъ 1191 на сумму 1433 р. 07³/₄ к.

Въ теченіе года вновь поступило 38 „ „ 176 „ 45 „

Къ началу 1889—90 г. числится всего 1229 на сумму 1609 р. 52³/₄ к.

8. Учебныя пособия по рисованію.

Къ началу 1888—89 академическаго года по инвентарю числилось:

Академическихъ рисунковъ,
рисунковъ геометрическихъ
тѣлъ, коллекцій гипсовыхъ орнаментовъ, деталей машинъ и пр. 1033 на сумму 430 р. 37 к.

Въ теченіе года никакихъ приобрѣтеній и исключеній не было.

Къ началу 1889—90 года
всего числится 1033 на сумму 430 р. 37 к.

9. Пособія по предмету проектированія деталей машинъ.

Къ началу 1888—89 академическаго года по инвентарю числилось:

Различныхъ коллекцій чертежей, оригиналовъ, книгъ, моделей и инструментовъ 547 экз.

Въ истекшемъ академическимъ году поступило вновь 65 экз.

Къ 1889—90 числится всего 612 „
на сумму 2690 р. 53½ к.

10. Пособія по технологіи металловъ и дерева.

Къ началу 1888—89 учебнаго года числилось по инвентарю:

Чертежей	17
Образцовъ-орудій	28
Разныхъ коллекцій	7
Всего	52

Въ теченіе года поступленій не было:

Къ началу 1889—90 числится 52 экземпляра на сумму 487 руб. 39 коп.

11. Кабинетъ механической технологіи воло- книстыхъ веществъ.

Къ началу 1888—89 академическаго года состояло:

- 1 приборъ для опредѣленія титра шелка.
- 1 вѣски для опредѣленія вѣса и № пряжи.
- 1 динамометръ Pergeaux.
- 1 приборъ M. Alcan для испытанія пряжи.
- 1 модель волкъ-машины.
- 1 модель скатывающаго аппарата.
- 1 модель ленточной машины.
- 86 настѣнныхъ таблицъ чертежей.
- 1 коллекція образцовъ волокон. веществъ въ сырѣ.
- 1 коллекція образцовъ пряжи и тканей.
- 4 коллекціи, иллюстрирующія послѣдовательный ходъ фабричныхъ производствъ.
- 1 коллекція кардныхъ лентъ русскихъ и иностранныхъ.
- 1 коллекція образцовъ орудій и разныхъ принадлежностей для прядильныхъ и ткацкихъ фабрикъ.
- 1 ручной ткацкій станъ съ машиною Жаккара.
- 1 дифференціальный механизмъ для банкоброшей.
- 1 замокъ для банкоброшей.
- 1 машинка стараго типа для наборки кардъ.
- 1 коллекція кардныхъ лентъ съ фабрики Horsfall and Bickham въ Англіи.
- 1 приборъ для опредѣленія крѣпости и растяжимости пряжи.

Въ теченіе года поступило:

- 6 таблицъ настѣнныхъ чертежей.
- 1 приборъ Salter's для испытанія крѣпости и эластичности пряжи.

12. Библиотека.

Къ началу 1888—89 академическаго года числилось 8690 соч. въ 14,217 т.
на сумму 27,088 р. 94 к.

Въ теченіе года поступило 103 соч. въ 132 т.

на сумму. 1125 р. 40 к.

Къ 1889—90 академич. году числится 8793 соч.
въ 14,349 т.

на сумму. 28,214 р. 34 к.

Изъ числа поступившихъ пожертвовано разными лицами и учрежденіями 11 соч. въ 20 том. на сумму 38 р.

13. Учебныя мастерскія.

а) Кабинетъ учебныхъ мастерскихъ.

Къ началу 1888—89 академическаго года въ кабинетъ учебныхъ мастерскихъ числилось по инвентарю:

Разныхъ образцовыхъ инструментовъ, приборовъ, таблицъ, коллекцій и машинъ. 817

Разнаго рода предметовъ 23

Въ теченіе года приобрѣтеній и исключеній не было.

Итого къ началу 1889—90 академическаго года числится 840 штукъ на сумму 5284 р. 19³/₄ к.

б) Учебная токарная по дереву мастерская.

Въ истѣкшемъ 1888—89 академическомъ году въ токарной по дереву мастерской занималось 62 воспитанника, которыми исполнено 1506 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1888—89 академическаго года въ мастерской числилось по инвентарю:

Токарныхъ станковъ (одинъ для овальнаго точенія) 47 шт.

Верстаковъ 3 "

Точиль 2 "

Станокъ для узорной пилы 1 "

Шаблоновъ 500 "

Разныхъ инструментовъ 1190 "

Разнаго рода предметовъ 48 "

Въ теченіе года исключено.

Разныхъ инструментовъ 147 шт.

Итого къ началу 1889—90 академическаго года числится: 1644 штуки на 3084 руб. 50³/₄ коп.

Учебныя пособія мастерской:

Коллекція образцовъ нарѣзыванія, состоящая изъ 12 экз.

Коллекція моделей, состоящая изъ 25 „

Коллекція образцовыхъ инструментовъ, состоящая изъ 163 „

Коллекція инструментовъ изъ дерева, увеличенныхъ въ 6 разъ, состоящая изъ 24 экз.

Итого на сумму. 196 р. 99 к.

в) Учебная модельно-столярная мастерская.

Въ истекшемъ 1888—89 академическомъ году въ модельно-столярной мастерской занималось 62 воспитанника, которыми исполнено было 890 упражненій и 86 вполнѣ законченныхъ моделей.

Къ началу 1888—89 академическаго года въ мастерской числилось по инвентарю:

Верстаковъ столярныхъ 60

Станковъ токарныхъ 5

Универсальная пила съ принадлежностями. 1

Точиль 2

Сверлильная ручная машина для сверленія подъ разными углами 1

Шкафовъ для храненія работъ 2

Разныхъ инструментовъ 1628

Въ теченіе года исключено:

Верстаковъ столярныхъ 2

Разныхъ инструментовъ 18

Итого къ началу 1889—90

академическаго года

числится 1679 шт. на сумму 1473 р. 88 к.

Учебныя пособія мастерской:

Двѣ коллекціи соединеній дерева, состоя- щія изъ	135 шт.
Коллекція моделей, состоящая изъ	34 „
Коллекція инструментовъ изъ дерева, увели- ченныхъ въ 6 разъ, состоящая изъ	31 „
Коллекція инструментовъ для строганія де- рева, состоящая изъ	21 „
Коллекція инструментовъ для пиленія де- рева, состоящая изъ	19 „
Двѣ коллекціи инструментовъ для сверленія и долбленія дерева, состоящія изъ	89 „
Коллекція измѣрительныхъ инструментовъ, состоящая изъ	22 „
Итого на сумму 1513 р. 67 к.	

г) Учебная металло-токарная мастерская.

Въ истекшемъ 1887—88 академическомъ году въ металло-токарной мастерской занималось 63 воспитанни-
ка, которыми исполнено было 800 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1888—89 академическаго года въ мастер-
ской числилось по инвентарю:

Самоточка	1
Суппортовъ	10
Токарныхъ станковъ съ принадлежностями	34
Точиль съ чугунными ящиками	2
Горнъ съ вентиляторомъ	1
Наковальня	1
Разныхъ инструментовъ и принадлежностей мастерской	471 экз.

Въ теченіе года приобрѣнено разныхъ инструментовъ
и принадлежностей мастерской 3 шт. и исключено 5.

Къ началу 1888—89 академическаго года числится
въ мастерской 518 предметовъ на сумму 3880 р. 63 к.

Учебныя пособія мастерской:

Двѣ коллекціи образцоваго инструмента,
состоящія изъ. 193 экз.

Двѣ коллекціи образцовъ токарнаго по ме-
таллу искусства, состоящія изъ. 106 „

Итого на сумму 154 р. 24 к.

д) Учебная слесарная мастерская.

Въ истекшемъ 1888—89 академическомъ году въ учеб-
ной слесарной мастерской занималось 83 воспитанника,
которыми исполнено 578 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1888—89 академическаго года числилось
по инвентарю:

Верстаковъ	20
Тисокъ слесарныхъ	78
Машинъ строгальныхъ ручныхъ	2
Машинъ сверлильныхъ ручныхъ	5
Станокъ для сверленія коловоротомъ.	1
Точило двойное	1
Горнъ съ вентиляторомъ.	1
Столъ чугунныхъ	3
Разнаго рода предметовъ.	1041
Разныхъ слесарныхъ инструментовъ.	3943

Въ теченіи года приобрѣтено
разнаго рода предметовъ 15 штукъ и исключено разнаго
рода слесарныхъ инструментовъ 421 штука.

Итого къ началу 1889 — 90 академическаго года
числится по инвентарю 4689 шт. на сумму 4644 р. 41 $\frac{1}{4}$ к.

Учебныя пособія мастерской отнесены къ кабинету
учебныхъ мастерскихъ.

е) Учебная чугунно-мѣдно-литейная мастерская.

Въ истекшемъ 1888—89 академическомъ году въ
чугунно-мѣдно-литейной мастерской занималось 40 воспи-
танниковъ, которыми исполнено 697 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1888—89 академическаго года въ мастерской числилось по инвентарю:

Паровой горизонтальный двигатель въ 4	
силы съ котломъ системы Фильда	1
Вентиляторъ	1
Вагранка о двухъ фурмахъ	1
Самодувный горнъ для трехъ тиглей	1
Печь системы Piat для плавки мѣди	1
Литейный кранъ	1
Опокъ чугунныхъ	613
Чугунныхъ грузовъ вѣсомъ 814 пуд.	28
Печь для сушки стержней	1
Станковъ для шаблонной формовки	2
Верстаковъ съ козлами	7
Комплектовъ формовочнаго инструмента по	
4 въ каждомъ	20 экз.
Разнаго инструмента	26
Чугунныхъ моделей	9

Въ теченіе года мастерская расширена пристройкою помѣщенія для занятій 10 воспитанниковъ и приобрѣтено:

Вагранка малая	1
Разнаго рода предметовъ	172

Исключено:

Разнаго рода предметовъ	138
-----------------------------------	-----

Итого къ началу 1889—90 академическаго года числится по инвентарю 747 шт. на сумму 7088 р. 5 к.

Учебныя пособія мастерской:

Коллекція образцоваго инструмента, состоящая изъ	76 шт.
Итого на сумму	35 руб.

ж) Учебная кузнечная мастерская.

Въ истекшемъ 1888—89 академическомъ году въ кузнечной мастерской занималось 38 воспитанниковъ, которыми исполнено 792 отдѣльныхъ работъ.

Къ началу 1888—89 академическаго года числилось по инвентарю:

Паровой молотъ съ наковальнями	1
Горнъ съ наковальнями и принадлежностями	6
Вентиляторъ для дутья	1
Вѣсы десятичные съ гирями и разновѣсками	1
Шкафовъ для храненія работъ	2
Горнъ переносный съ вентиляторомъ	1
Резервуаровъ желѣзныхъ для воды	2
Мѣхъ со станкомъ для горна	1
Жомъ для гнутья колѣнчатыхъ валовъ	1
Тисокъ столовыхъ желѣзныхъ	2
Разнаго мелкаго кузнечнаго инструмента	752
Станокъ для сварки желѣза	1

Въ теченіе года поступленій и исключеній не было.

Къ началу 1889—90 академическаго года числится по инвентарю 771 шт. на сумму 3134 р. 38 к.

Учебныя пособія мастерской:

Образцовая коллекція кузнечнаго инструмента, состоящая изъ 110 шт.

Образцовая коллекція кузнечныхъ работъ, состоящая изъ 40 „

Итого на сумму 224 р. 29 $\frac{1}{4}$ к.

з) Учебная механическая мастерская.

Въ истекшемъ 1888—89 академическомъ году въ учебной механической мастерской занималось 90 воспитанниковъ, исполнившихъ около 60 отдѣльныхъ работъ. Между работами наиболѣе выдающіяся: паровыя водоподкачки, паровыя машины, строгальныя для металла приводныя и ручныя, строгальныя для дерева, станки токарныя, насосы, сунорты, тиски и проч.

Къ началу 1888—89 академическаго года по учебной механической мастерской числилось по инвентарю:

Трубчатый паровой котель въ 30 силъ	1
Постоянный котель съ 4 подогревателями	1
Вертикальная паровая машина системы Уатта, съ коромысломъ, въ 25 силъ	1
Паровыхъ водокачекъ	1
Водомѣръ Шмидта	1
Приводовъ-трансмиссій	3

Сверлильныхъ машинъ разныхъ системъ:

Приводныхъ	6
Ручныхъ	3
Стругальныхъ машинъ	6
Долбежныхъ машинъ	2
Шпоночныхъ машинъ	1
Винторѣзныхъ машинъ	1
Фрезовыхъ машинъ	1
Дѣлительныхъ машинъ	1
Станковъ токарныхъ по металлу	10
Самоточекъ разныхъ величинъ	9
Разныхъ принадлежностей къ машинамъ	1992
Тисокъ слесарныхъ	65
Верстаковъ слесарныхъ	8
Разнаго рода предметовъ	250
Разнаго мелкаго инструмента	6164

Въ теченіе года приобрѣтено разныхъ инструментовъ 1057 шт. и исключено 1495 шт.

Итого къ началу 1889—90 академическаго года числится 8089 шт. на сумму 32186 р. 18 к.

Учебныя пособія отнесены къ кабинету учебныхъ мастерскихъ.

Учебно-механическая мастерская при участіи остальныхъ мастерскихъ, кромѣ занятій съ воспитанниками, съ помощью наемныхъ рабочихъ, съ 1-го Сентября 1888 г.

по 1-е Сентября 1889 года исполнила заказовъ для частныхъ лицъ на сумму 56,988 р.

Выдающимися работами изъ числа этихъ заказовъ были слѣдующія:

Турбинъ	3
Паровыхъ машинъ	2
Водокачекъ	2
Стругальныхъ	3
Сверлильныхъ	4
Самоточекъ	1
Вѣтряныхъ двигателей	3
Насосовъ паровыхъ въ 4000 ведръ	1
„ разныхъ	30
Сновальныхъ машинъ	1
Токарныхъ станковъ	12
Подъемныхъ машинъ	1
Прессовъ разныхъ	3
Приводовъ фабричныхъ	7
Батарей водянаго отопленія	147
Тисокъ разныхъ	22
Супортовъ	12

Краткій отчетъ о дѣятельности Политехническаго Общества, состоящаго при Императорскомъ Техническомъ Училищѣ

за 1888—89 годъ.

Къ началу 1888—89 г. Политехническое Общество считало 38 почетныхъ членовъ, 156 дѣйствительныхъ членовъ и 7 членовъ-сотрудниковъ.

Въ теченіе 1888—89 г. Общество имѣло 7 обыкновенныхъ собраній и 1 годичное.

Въ обыкновенныхъ собраніяхъ, кромѣ текущихъ дѣлъ, обсуждались сообщенія, сдѣланныя слѣд. лицами: почетными членами Н. Е. Жуковскимъ, П. П. Петровымъ и П. И. Мальцовымъ; дѣйствительными членами А. С. Шестаковымъ, А. И. Пермяковымъ, С. О. Сѣдовымъ, А. П. Гавриленко, С. Я. Тимоховичемъ, М. П. Прокунинымъ и Ф. О. Гартманъ и членомъ-сотрудникомъ Д. С. Зерновымъ.

Изъ текущихъ дѣлъ въ истекшемъ году особенное вниманіе обратило общество на изданіе органа Политехническаго Общества и для предварительнаго обсужденія этого вопроса назначило комиссію подъ предсѣдательствомъ вице-президента, которая выработала проспектъ и программу ежемѣсячнаго промышленно-техническаго журнала и составила смѣту расходовъ по его изданію, причемъ выяснилось, что изданіе журнала при 12 номерахъ въ годъ и размѣрѣ каждого номера около 8 печатныхъ листовъ, включая чертежи и политипажи, при стоимости 12 руб. подписной цѣны, общаетъ въ первый годъ изданія не болѣе 4000 руб. дефицита; сумма

эта можетъ понизиться еще, если должностныя лица при журналѣ и сотрудники, хотя бы на первое время, найдутъ возможнымъ отказаться отъ вознагражденія за трудъ; остальная же сумма дефицита можетъ покрыться частными пожертвованіями и правительственной субсидіей. Общество уполномочило комиссію обратиться къ постороннимъ лицамъ за матеріальнымъ содѣйствіемъ по изданію органа и назначило депутацію къ г. Попечителю Московскаго учебнаго округа съ просьбою ходатайствовать передъ Правительствомъ о назначеніи субсидіи на изданіе журнала при Политехническомъ Обществѣ. Изъ частныхъ пожертвованій въ истекшемъ году на дѣло изданія журнала наиболѣе крупнымъ было пожертвованіе Т. С. Морозова, который препроводилъ въ Общество 1000 руб. на изданіе проектируемаго промышленно-техническаго журнала и выразилъ свою готовность и впредь содѣйствовать этому дѣлу, смотря по степени приносимой имъ пользы.

Въ связи съ вопросомъ объ изданіи органа Политехническаго Общества было обсуждаемо предложеніе секретаря Общества О. П. Григоровича объ увеличеніи формата повѣстокъ, приглашающихъ гг. членовъ на засѣданія, съ цѣлію помѣщенія въ нихъ краткихъ отчетовъ о предыдущихъ засѣданіяхъ, а также для опубликованія въ нихъ свѣдѣній о дѣятельности справочнаго отдѣла. Находя, что вышеупомятая замѣна прежнихъ повѣстокъ новымъ типомъ ежемѣсячныхъ бюллетеней можетъ быть особенно полезна въ интересахъ гг. иностранныхъ членовъ, а также для цѣлей справочнаго отдѣла, Общество одобрило Предложеніе г. секретаря.

Принятый предыдущимъ годичнымъ собраніемъ проектъ измѣненій и дополненій въ уставъ Политехническаго Общества, вмѣстѣ съ объяснительною къ нему запискою, былъ представленъ г. Попечителю Московскаго учебнаго округа для внесенія на утвержденіе Правительства.

Пользуясь кратковременнымъ пребываніемъ г. Министра Народнаго просвѣщенія въ Москвѣ, депутація Политехническаго Общества имѣла честь представиться

Его Сіятельству и поднести уставъ, годичные отчеты и всѣ напечатанные до сего времени труды Политехническаго Общества, причемъ депутація ходатайствовала передъ г. Министромъ объ утвержденіи проектированныхъ измѣненій и дополненій въ уставъ Политехническаго Общества и о дарованіи ежегодной субсидіи на изданіе періодическаго журнала при Политехническомъ Обществѣ.

Въ годичномъ собраніи Общества 12 апр. 1889 г. избраны въ почетные члены 3, въ члены-сотрудники 1 и въ дѣйствительные члены 44 лица. Профессоръ О. Е. Орловъ, по выслугѣ 3-хъ лѣтъ въ должности вице-президента, избранъ единогласно вице-президентомъ Политехническаго Общества на слѣдующее 3-лѣтіе. Собраніе постановило передать капиталъ, собранный на учрежденіе стипендіи имени покойнаго профессора Д. Н. Лебедева въ собственность вновь учрежденнаго Общества вспомошествованія нуждающимся воспитанникамъ Императорскаго Техническаго Училища съ тѣмъ, чтобы капиталъ оставался неприкосновеннымъ, а изъ процентовъ онаго выдавалась ежегодно одному изъ нуждающихся воспитанниковъ Техническаго училища стипендія имени Д. Н. Лебедева. Въ томъ же собраніи утверждены предложенія Совѣта о взиманіи съ членовъ Политехническаго Общества 3% сбора съ дѣйствительно получаемого ими въ первый годъ жалованья или вознагражденія за временныя занятія въ случаѣ полученія ими мѣстъ или занятій черезъ посредство справочнаго отдѣла; о покрытіи впредь расходовъ по справочному отдѣлу за счетъ доходовъ самого Отдѣла и о перечисленіи могущихъ быть за симъ остатковъ въ фондъ для вспомошествованія нуждающимся техникамъ. Наконецъ собраніемъ утверждены были временныя правила для выдачи ссудъ изъ вспомогательнаго фонда лицамъ, окончившимъ курсъ въ Императорскомъ техническомъ училищѣ и бывшемъ ремесленномъ учебномъ заведеніи.

Въ отчетномъ году Общество, кромѣ ежемѣсячнаго бюллетеня, издало брошюру подъ заглавіемъ „Десяти-

лѣтіе Политехническаго Общества. 1877—88“ и годичный отчетъ за 1887—88 г., въ которомъ помѣщенъ некрологъ профессора технического училища А. В. Лѣтникова, съ его портретомъ. Въ приложеніи къ годичному отчету помѣщены сообщенія:

Ө. И. Щеголева. О полировкѣ поверхностей.

Я. Я. Никитинскаго. Аллюминій и его сплавы.

С. Э. Кордесъ. Электрогесфестъ.

Я. Я. Кожевникова. Описаніе машины для обмотки проволоки.

Д. С. Зернова. Калориметрическое изученіе паровыхъ машинъ.

Справочнымъ отдѣломъ Политехническаго Общества напечатанъ 2-мъ изданіемъ списокъ лицъ, окончившихъ курсъ въ Императорскомъ Техническомъ Училищѣ, къ которому присоединенъ списокъ лицъ, окончившихъ курсъ въ бывшемъ ремесленномъ учебномъ заведеніи.

Дѣятельность справочнаго отдѣла за прошлый годъ видна изъ слѣд. цифръ. Всѣхъ лицъ, обращающихся въ отдѣлъ съ просьбами о доставленіи мѣстъ было 96; предложеній мѣстъ поступило въ отдѣлъ 74, изъ нихъ 36 мѣстъ замѣщены при посредствѣ и по рекомендаціи отдѣла. Общая сумма взносовъ за предоставленныя мѣста и занятія равняется 425 р. 75 к.

Денежныя средства Политехническаго Общества въ отчетномъ году состояли: 1) изъ основного капитала 3101 р. 23 к., 2) изъ специальныхъ капиталовъ: на изданія Общества 380 р. 59 к., на учрежденіе стипендіи имени Д. Н. Лебедева 897 р. 7 к., для вспоможенія нуждающимся техникамъ 963 р. 88 к., на учрежденіе преміи имени А. В. Лѣтникова 75 р., на премію имени Ю. С. Нечаева-Мальцова 2095 р., на изданіе органа Общества 1000 р., 3) Кассы Общества 382 р. 47 к. и сбора за предоставленныя Справочнымъ отдѣломъ мѣста 466 р. 75 к. Итого къ 1 апр. 1889 г. состоитъ 9361 р. 99 к.

Алексѣй Васильевичъ ЛѢТНИКОВЪ.

(НЕКРОЛОГЪ).

28-го февраля 1888 года скончался на 52-мъ году своей жизни профессоръ математики Техническаго Училища, Алексѣй Васильевичъ Лѣтниковъ.

Техническое училище потеряло въ немъ блестящаго профессора, глубокаго ученаго и выдающагося нравственными качествами человѣка.

Алексѣй Васильевичъ Лѣтниковъ былъ человѣкомъ рѣдкихъ достоинствъ.

Его житейская роль опредѣлилась съ полной ясностью для всѣхъ, кто его зналъ.

Какъ человѣкъ науки онъ очертилъ для себя опредѣленную область изслѣдованія, въ началѣ своей дѣятельности поставилъ себѣ ясно намѣченныя задачи и, постепенно раскрывая въ рѣшеніи этихъ задачъ все большія и большія силы эрудиціи и таланта, занялъ первоклассное мѣсто среди сподвижниковъ ученыхъ, работавшихъ въ той же спеціальной отрасли математическаго анализа.

Какъ профессоръ онъ создалъ полную систему чтанныхъ имъ курсовъ высшей математики, обработалъ эти курсы до мельчайшихъ деталей и оставилъ въ памяти своихъ учениковъ неизгладимый образъ наставника, всегда блестящаго своими знаніями, выдающимся педагогическимъ и лекторскимъ талантомъ и неуклонной, живой, твердой любовью къ дѣлу.

Какъ дѣятель въ общественной и въ частной жизни онъ стяжалъ у всѣхъ знавшихъ его глубочайшее ува-

женіе. Всегда и всѣмъ онъ высказывалъ свои убѣжденія и взгляды съ тою откровенностью, какая присуща сильнымъ натурамъ, и съ тою рѣшительностью, какая характеристична для человѣка, воспитаннаго строгой наукой, привыкшаго мыслить по точнымъ законамъ логики и оцѣнивать каждое явленіе жизни внимательно, глубоко, безпристрастно.

Всегда и вездѣ онъ служилъ дѣлу, вкладывалъ въ это служеніе все свои силы и достигалъ такихъ результатовъ, какіе только могли считаться наилучшими. Всегда и во всемъ его дѣятельность была разумна, широка, плодотворна.

Оцѣнка выдающейся личности покойнаго представляетъ глубокой нравственный интересъ.

Алексѣй Васильевичъ Лѣтниковъ родился 1-го января 1837 года. Происхожденіе его изъ дворянъ.

Его дѣдъ былъ учителемъ математики. Отца своего, занимавшаго незначительное мѣсто въ Московской Казенной палатѣ, онъ потерялъ, еще будучи мальчикомъ. Первоначальное воспитаніе дано ему его матерью.

Алексѣй Васильевичъ началъ свое ученіе во 2-й московской гимназій, куда поступилъ въ 1847-мъ году во второй классъ. Но въ гимназій онъ пробылъ только годъ, перешелъ съ успѣхомъ въ третій классъ и взятъ былъ оттуда по недостатку у матери его денежныхъ средствъ для платнаго обученія сына.

Въ 1848-мъ году Лѣтниковъ былъ опредѣленъ на казенный счетъ въ Константиновскій межевой институтъ, и въ немъ получилъ свое основное образованіе.

Въ это время Константиновскій межевой институтъ преобразовался изъ средняго учебнаго заведенія въ заведеніе перворазрядное. Къ существовавшимъ прежде семи классамъ былъ прибавленъ восьмой, инженерный, гдѣ воспитанники, готовившіеся быть землебрами, получали высшее геодезическое образованіе.

Въ 1856-мъ году 19 лѣтъ отъ роду Лѣтниковъ окончилъ курсъ института и съ этихъ поръ началась его, тогда же опредѣлившаяся, специальная карьера, выра-

жившаяся сначала въ чрезвычайно сложной, систематической подготовкѣ къ научной и преподавательской дѣятельности, а затѣмъ въ еще болѣе широкой и плодотворной утилизаціи плодовъ этой подготовки.

Замѣчательныя способности Алексѣя Васильевича еще въ его бытность въ институтъ обратили на него особое вниманіе его непосредственныхъ руководителей, изъ числа которыхъ онъ въ послѣдствіи съ особой признательностью вспоминалъ личность директора института, генерала Смецкаго и преподавателя математики, Ломовскаго.

Особое значеніе для его послѣдующей карьеры имѣло то обстоятельство, что въ опредѣленіи его дѣятельности принялъ живое, энергическое участіе знаменитый русскій администраторъ, Михаилъ Николаевичъ Муравьевъ, занимавшій тогда постъ управляющаго межевымъ корпусомъ.

Благодаря личному содѣйствію Муравьева, который рѣшилъ привлечь Алексѣя Васильевича къ преподаванію математики въ межевомъ институтѣ и дать ему для этого образцовую подготовку, Алексѣй Васильевичъ могъ дополнить свое образованіе университетскимъ курсомъ въ Московскомъ университетѣ, а затѣмъ еще курсомъ политехнической школы въ Парижѣ.

Такимъ образомъ, немедленно по окончаніи курса въ Константиновскомъ межевомъ институтѣ, Алексѣй Васильевичъ поступилъ вольнымъ слушателемъ на физико-математическій факультетъ Московскаго университета и здѣсь, слушая въ теченіи двухъ лѣтъ лекціи третьяго и четвертаго курсовъ, положилъ начало своему специально-математическому образованію подъ руководствомъ извѣстныхъ профессоровъ Брашмана, Перевощикова и Давидова.

Въ апрѣлѣ 1858-го года, передъ самымъ концомъ университетскихъ занятій Лѣтникова, его покровитель Муравьевъ, придававшій чрезвычайное значеніе повышенію уровня математическихъ занятій въ межевомъ институтѣ, испросилъ Высочайшее повелѣніе объ

отправленіи за границу одного или двухъ офицеровъ, съ назначеніемъ каждому по 2500 рублей въ годъ.

На первый разъ въ іюнь того же 1858-го года былъ отправленъ именно Лѣтниковъ, числившійся тогда по институту подпоручикомъ корпуса межевыхъ инженеровъ.

Его послали въ Парижъ, срокомъ на два года и поставили ему цѣлью командировки—пріобрѣтеніе основательныхъ современныхъ свѣдѣній по чистой математикѣ, геодезіи, астрономіи, теоріи вѣроятностей, механикѣ и оптикѣ, изученіе педагогическихъ приѣмовъ преподаванія математики и обзорѣніе разныхъ специальныхъ училищъ.

Главнымъ образомъ рекомендовались Лѣтникову школы политехническая и центральная, Французская коллегія и Сорбонская академія.

Центромъ личныхъ занятій Алексѣя Васильевича сдѣлалась именно политехническая школа, но и съ другими высшими учебными заведеніями онъ ознакомился вполне обстоятельно.

Занятія Лѣтникова въ Парижѣ продолжались непрерывно въ теченіи двухъ съ половиной лѣтъ по декабрь 1860-го года. Здѣсь, находясь въ самомъ центрѣ тогдашней научно-математической дѣятельности, онъ слушалъ лекціи знаменитыхъ математиковъ Бертрана, Лювилля, Пюизе, Серре и Шаля.

Французская школа положила прочный отпечатокъ на послѣдующую преподавательскую дѣятельность самого Лѣтникова. Въ читанныхъ имъ самимъ лекціяхъ по общему курсу высшей математики онъ былъ точнымъ комментаторомъ именно французскаго направленія математическихъ воззрѣній.

Въ своихъ подготовительныхъ занятіяхъ въ политехнической школѣ Лѣтниковъ шелъ наиболѣе правильнымъ путемъ, посвящая все время слушанію лекцій и изученію знаменитыхъ твореній, но не отвлекаясь нисколько въ сторону преждевременной самостоятельной дѣятельности. Его личное творчество въ наукѣ началось значительно позже, черезъ шесть лѣтъ послѣ воз-

вращенія изъ Парижа и начала преподавательской дѣятельности.

Такимъ образомъ въ основу преподавательской дѣятельности Лѣтникова были положены курсы трехъ высшихъ учебныхъ заведеній, въ основу его научной дѣятельности десятилѣтняя подготовка въ сферѣ высшей математики и ближайшихъ къ ней прикладныхъ наукъ.

Немедленно по возвращеніи въ Москву съ 1-го января 1861-го года Лѣтниковъ былъ утвержденъ Муравьевымъ въ должности преподавателя математики въ офицерскомъ классѣ Константиновскаго межевого института, а еще въ бытность за границей былъ произведенъ въ поручики. Черезъ три года Лѣтниковъ въ чинѣ штабсъ-капитана занялъ преподавательское мѣсто своего бывшего учителя Ломовскаго, который былъ переведенъ на инспекторскую должность.

Самостоятельная литературно-научная дѣятельность Алексѣя Васильевича Лѣтникова началась черезъ 10 лѣтъ по окончаніи имъ курса въ межевомъ институтѣ, въ 1866-мъ году, на 30-мъ году его жизни.

1866-й годъ былъ началомъ изданія журнала Математическаго Сборника, издаваемого Московскимъ математическимъ обществомъ, которое не задолго до того было основано по иниціативѣ Брашмана и Давидова и въ которомъ Лѣтниковъ явился въ числѣ первыхъ по времени членовъ. Почти всѣ послѣдующіе ученые труды Алексѣя Васильевича печатались также въ Математическомъ Сборникѣ.

Въ первомъ томѣ Математическаго Сборника помѣщенъ первый мемуаръ Лѣтникова: „Объ условіяхъ интегрируемости нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій“. Въ этомъ изслѣдованіи авторъ исходилъ изъ весьма общаго принципа, указаннаго Эйлеромъ, и состоящаго въ опредѣленіи зависимости между формой дифференціальнаго уравненія первой степени и формой соотвѣтствующаго этому уравненію интегрирующаго множителя. Слѣдуя отчасти по пути, указанному Дерптскимъ профессоромъ Миндингомъ, Лѣтниковъ обобщилъ нѣкоторые резуль-

таты, полученные этимъ ученымъ, а затѣмъ, изолировавъ свои изслѣдованія по отношенію къ одной частной формѣ дифференціального уравненія, имѣющей важное значеніе, съ большою обстоятельностью разсмотрѣлъ вопросъ объ условіяхъ интегрируемости этого уравненія. Однимъ изъ весьма частныхъ послѣдствій выводовъ Лѣтникова явилась обстоятельная теорія извѣстнаго въ наукѣ уравненія Рикатти, въ которой авторъ получилъ своимъ методомъ и весьма просто различные выводы, полученные до него другими учеными посредствомъ приемовъ, не имѣвшихъ общей связи.

Вышеуказанное изслѣдованіе, съ которымъ авторъ выступилъ на научное поприще, по основному методу стоитъ нѣсколько въ сторонѣ отъ послѣдующихъ его изслѣдованій, принявшихъ со временемъ строго изолированное положеніе. Но по направленію изслѣдованій оно находится въ связи съ дальнѣйшими работами и впослѣдствіи было всецѣло поглощено дальнѣйшими выводами.

Общій характеръ изслѣдованія указываетъ на то, что Лѣтниковъ выступилъ на сцену уже совершенно зрѣлымъ ученымъ, детально изучившимъ общую научную литературу и усвоившимъ себѣ современныя цѣли и ближайшія задачи науки. Въ то же время это изслѣдованіе такъ же наглядно раскрываетъ и особенность научнаго таланта Лѣтникова.

Эта особенность состояла въ стремленіи къ обобщеніямъ частныхъ данныхъ науки, но къ обобщеніямъ такимъ, которыя для данного момента въ историческомъ развитіи науки представлялись вполне возможными, которыя имѣли ближайшую цѣль въ приложеніяхъ и были совершенно чужды общей научной философіи, а тѣмъ болѣе метафизики.

Такое направленіе научныхъ изслѣдованій характеризуетъ и всѣ послѣдующіе научные труды Лѣтникова.

Ставъ сразу и твердо на почву спеціальныхъ научныхъ изысканій, Лѣтниковъ почти одновременно выступилъ и на поприще педагогической литературы, по преимуществу въ сферѣ анализа и аналитической гео-

метріи, касаясь немного и курса элементарной математики. Во второмъ томѣ Математическаго Сборника помѣщены его статьи: „О кривизнѣ поверхности въ данной точкѣ“, „Объ общемъ доказательствѣ тригонометрическихъ формулъ синуса и косинуса суммы“ и „Критическая рецензія курса элементарной геометріи Руше и Комберуса“. Послѣднія двѣ статьи были кажется единственными, въ которыхъ онъ посвящалъ свое вниманіе курсу элементарной математики. Впрочемъ нужно замѣтить, что нѣкоторые изъ рефератовъ его въ математическомъ обществѣ, касавшихся педагогіи математики, не были совсѣмъ напечатаны. Тѣмъ не менѣе извѣстно, что между членами математическаго общества Лѣтниковъ съ наибольшимъ вниманіемъ относился къ вопросу объ усовершенствованіи приѣмовъ преподаванія высшей и элементарной математики. Главнымъ образомъ по его настоянію при Математическомъ Сборникѣ былъ составленъ — приложенный въ нѣсколькихъ первыхъ томахъ второй отдѣлъ Сборника, включавшій статьи педагогическаго характера.

Посвящая свое главное вниманіе безкорыстной научной и педагогической дѣятельности, Алексѣй Васильевичъ Лѣтниковъ мало заботился о личныхъ отличіяхъ. Но стремленіе расширить свою педагогическую дѣятельность, для которой у него былъ заготовленъ запасъ несравненно большій того, какой требовался для одного только межеваго института, заставило его подумать о приобрѣтеніи ученой степени.

Въ концѣ шестидесятыхъ годовъ возникла мысль о преобразованіи бывшаго тогда ремесленного училища въ высшее техническое училище. Такимъ образомъ въ Москвѣ открывалась новая каѳедра высшей математики. Лѣтниковъ, имѣлъ много шансовъ для того, чтобы занять ее. Недоставало только ученой степени. Для полученія же ученой степени магистра, Лѣтникову, какъ воспитаннику спеціального учебнаго заведенія, требовалось идти окольнымъ путемъ, — приобрѣсти сначала степень доктора въ одномъ изъ заграничныхъ универси-

тетовъ и уже потомъ докторскимъ дипломомъ открыть себѣ дорогу къ русскимъ ученымъ степенямъ. Этотъ по видимому трудный и длинный путь не остановилъ Лѣтникова.

Съѣздивъ на короткое время въ Германію, онъ въ Дрезденѣ напечаталъ на нѣмецкомъ языкѣ переводъ своего перваго научнаго сочиненія „Объ условіяхъ интегрируемости нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій“, съ небольшими измѣненіями, и, по представленіи этого трактата философскому факультету Лейпцигскаго университета, безъ труда былъ удостоенъ званія доктора философіи этого университета.

Немедленно по возвращеніи въ Москву Лѣтниковъ приступилъ къ экзаменамъ въ Московскомъ университетѣ на степень магистра чистой математики, а 6-го іюня 1868-го года защитилъ диссертацию, напечатанную за тотъ же 1868-й годъ въ третьемъ томѣ Математическаго Сборника подъ заглавіемъ „Теорія дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ“.

29-го іюня того же года Лѣтниковъ былъ допущенъ къ исправленію должности профессора технического училища. Въ это время по межевому институту, который въ 1867-мъ году былъ преобразованъ изъ военного устройства въ гражданское, онъ числился младшимъ землемѣромъ 2-го разряда и преподавателемъ, и изъ военного чина штабсъ-капитана былъ переименованъ въ соответствующій гражданскій чинъ. Въ ноябрѣ того же года онъ былъ назначенъ младшимъ землемѣромъ 1-го разряда.

Магистерская диссертациія Алексѣя Васильевича положила начало той совершенно изолированной, спеціальной роли, которую онъ занялъ въ исторіи математики, и отъ которой по существу не отклонялся до конца своей жизни. Въ небольшой, но важной, по ея историческому значенію, книгѣ, онъ изложилъ общія научныя основанія особаго рода исчисленія и оформилъ весьма общій принципъ.

Развитая въ сочиненіи Лѣтникова идея о производной произвольнаго порядка возникла въ наукѣ съ самаго начала развитія дифференціального и интегральнаго счисленія. Ее возбудилъ Яковъ Бернулли, обратившійся по этому поводу за разъясненіемъ къ Лейбницу. Послѣдній только вскользь коснулся этого вопроса. Ліувилль былъ первымъ изъ ученыхъ, сдѣлавшимъ серьезную попытку для рѣшенія вопроса. Но и эта попытка была частной и довольно натянутой. Послѣ первыхъ трудовъ Ліувилля, обратившихъ все таки вниманіе ученыхъ на новый вопросъ, слѣдовали въ томъ же направленіи труды Келленда, Тарди, Робертса, не имѣвшіе существеннаго значенія, и наконецъ работа Грюнвальда, поставившаго задачу наиболѣе общимъ и опредѣленнымъ образомъ.

Изслѣдованіе Лѣтникова, напечатанное почти годомъ спустя послѣ изслѣдованія Грюнвальда, исходило изъ той же постановки вопроса. Есть много основаній думать, что Лѣтниковъ напалъ на основной принципъ самостоятельно, независимо отъ Грюнвальда. Это вѣроятно во первыхъ въ виду чрезвычайной простоты основной идеи и также потому, что изслѣдованіе Лѣтникова отличается отъ работы Грюнвальда—и большей точностью, и большей полнотой. Во всякомъ случаѣ, однако историческій пріоритетъ удерживается за Грюнвальдомъ.

Въ диссертациі Лѣтникова, имѣющей сравнительно небольшой объемъ, даны общія основанія теоріи дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ, безъ указанія однако примѣненій этой теоріи.

Черезъ годъ послѣ изготвленія диссертациі Алексѣй Васильевичъ былъ утвержденъ въ должности старшаго преподавателя межевого института и вмѣстѣ съ тѣмъ въ должности профессора технического училища.

Задачи преподавательской дѣятельности надолго привлекли къ себѣ главное вниманіе Лѣтникова. Въ теченіи нѣсколькихъ лѣтъ онъ, постепенно видоизмѣняя свои

и въ началѣ уже образцовые курсы, доводилъ ихъ до большаго и большаго совершенства.

Въ то же время онъ не прекращалъ своей чисто научной дѣятельности и готовилъ новый капитальный вкладъ въ математическую литературу.

Послѣ шестилѣтнихъ подготовительныхъ работъ Лѣтниковъ защитилъ 22-го марта 1874 года свою докторскую диссертацию, напечатанную за тотъ же годъ въ седьмомъ томѣ Сборника подъ заглавіемъ „Исслѣдованія, относящіяся къ теоріи интеграловъ особаго вида“. Въ этомъ сочиненіи авторъ уже вполне овладѣлъ тѣмъ математическимъ принципомъ, на разъясненіе котораго онъ былъ наведенъ своимъ бывшимъ наставникомъ Ливиллемъ, которымъ въ эпоху его магистерскаго диспута былъ у него почти отнятъ Грюнвальдомъ и который съ этихъ поръ сталъ уже неотъемлемой его собственностью.

Чрезвычайно характерно то необычайное научное безпристрастіе, съ которымъ отнесся нашъ замѣчательный ученый къ этой, дорогою цѣною приобрѣтенной имъ, собственности. Казалось бы, что въ качествѣ самостоятельнаго творца вполне имъ оформленнаго ученія о дифференцированіи съ произвольнымъ указателемъ, онъ болѣе другихъ былъ способенъ увлекаться своимъ твореніемъ, придавать ему наибольшее научное значеніе.

Этого однако мы совершенно не видимъ. Диссертация Лѣтникова представляетъ замѣчательный образецъ капитальнаго научнаго изслѣдованія, въ которомъ авторъ, совершенно маскируя передъ читателемъ громадный, имъ выполненный трудъ, даетъ ему необыкновенно простое, точное и изящное выраженіе важнаго научнаго принципа, подвергаетъ этотъ излюбленный имъ принципъ суровой критикѣ и, строго опредѣливъ сферу его примѣненія, раскрываетъ для всѣхъ желающихъ доступные пути для его эксплуатаціи.

Въ первой главѣ диссертации Лѣтниковъ разсматриваетъ рядъ задачъ, поставленныхъ великими геометрами

Абелемъ, Амперомъ, Гауссомъ, Лапласомъ, Пуассономъ, и силой остроумнаго анализа разбиваетъ возрѣнія Лјувилля на эти задачи, какъ на такия, которыя доказываютъ особое могущество новаго метода. Лѣтниковъ показываетъ, что почти всѣ эти задачи могутъ быть безъ особаго затрудненія рѣшены обыкновенными средствами анализа. Съюзивъ такимъ образомъ сферу необходимаго примѣненія новаго принципа, онъ во второй главѣ облекаетъ этотъ принципъ въ новую, вполне опредѣленную и законченную форму. Наконецъ въ третьей главѣ онъ раскрываетъ ту именно область анализа, въ которой примѣненіе принципа можетъ оказать существенную пользу. Въ этой послѣдней главѣ онъ пользуется дифференцированіемъ съ произвольнымъ указателемъ для изслѣдованія свойствъ функцій — общихъ гипергеометрическихъ и въ частности сферическихъ, а также Бесселевыхъ, которыя рассматриваетъ какъ интегралы соответствующихъ имъ дифференціальныхъ уравненій.

Докторская диссертация Лѣтникова принадлежитъ къ числу сочиненій, которыми русская математическая наука вправе гордиться.

Черезъ два мѣсяца послѣ защиты докторской диссертации Алексѣй Васильевичъ получилъ командировку на лѣтнее вакаціонное время за границу для обозрѣнія политехническихъ институтовъ и изученія ихъ учебной части. Это изученіе отразилось благотворно на тѣхъ трудахъ, которые вложилъ онъ въ дѣло организациі Техническаго Училища.

Лѣтомъ 1876-го года онъ снова былъ командированъ съ ученой цѣлью за границу и въ Варшаву на съѣздъ естествоиспытателей. На съѣздѣ были представлены имъ рефераты „Объ интегрированіи линейнаго однороднаго уравненія съ линейными коэффициентами“ и „О приведеніи многократныхъ интеграловъ“. За тотъ же годъ въ 8-мъ томѣ Математическаго Сборника помѣщена имъ небольшая статья педагогическаго характера „Объ интегрированіи двухъ извѣстныхъ уравненій“.

Лѣтомъ 1878-го года Лѣтниковъ посѣтилъ въ Парижѣ всемірную международную выставку. Въ концѣ того же года онъ напечаталъ въ Сборникѣ небольшую статью подѣ заглавіемъ: „Общая формула для интегрированія линейнаго уравненія съ постоянными коэффициентами и со вторымъ членомъ“. Статья эта имѣетъ существенное педагогическое значеніе.

Съ октября 1879-го года въ теченіи 10 мѣсяцевъ Алексѣй Васильевичъ исправлялъ должность инспектора технического училища и при этомъ неоднократно замѣщалъ и директора училища во время выѣздовъ послѣдняго изъ Москвы.

Въ 1881-мъ году Лѣтниковъ напечатанъ во французскомъ журналѣ: „Nouvelles Annales des Mathematiques“ небольшое изслѣдованіе „Объ общихъ свойствахъ фокусовъ кривыхъ 2-го порядка“.

Съ 1882-го года возобновилась, послѣ очевидной предварительной подготовки, прежняя научно-литературная дѣятельность Лѣтникова въ томъ же направленіи примѣненій теоріи дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ къ изслѣдованію интеграловъ частныхъ видовъ гипергеометрическаго уравненія. За этотъ годъ въ десятомъ томѣ Математическаго Сборника появились одинъ за другимъ два обширныхъ мемуара его.

Первый изъ нихъ, подѣ заглавіемъ „Новыя изысканія о тригонометрическихъ функціяхъ“, раскрываетъ въ весьма доступной формѣ пріемы практикуемаго авторомъ особаго исчисленія.

Второй мемуаръ—„О различныхъ выраженіяхъ сферическихъ функцій съ произвольнымъ указателемъ и о разложеніи ихъ въ ряды“ имѣетъ важное значеніе, какъ по существу развиваемой въ немъ теоріи, такъ и по изобилію извѣстныхъ приложеній этой теоріи, дѣлающихъ ученіе о сферическихъ функціяхъ одной изъ настоятельныхъ потребностей для современнаго намъ развитія прикладныхъ математическихъ наукъ. Въ этомъ мемуарѣ Лѣтниковъ далъ наиболѣе общее построеніе теоріи сферическихъ функцій и объединилъ своимъ мето-

домъ множество частныхъ выводовъ, полученныхъ за длинный періодъ времени извѣстными учеными Лапласомъ, Дирихле, Мелеромъ, Айвори, Гейне и другими.

Въ 1883-мъ году въ одиннадцатомъ томѣ Сборника появился новый обширный мемуаръ Лѣтникова „Объ опредѣленныхъ интегралахъ, содержащихъ функціи, удовлетворяющія гипергеометрическому уравненію.“ Въ этомъ мемуарѣ указанъ новый путь, на которомъ помощью принципа дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ могутъ быть получены многіе существенные результаты.

Въ концѣ 1883-го года Лѣтниковъ вышелъ въ отставку по должности преподавателя межевого института, съ ежегодной пенсіей по тысячѣ рублей, но продолжалъ тамъ же свои прежнія преподавательскія занятія изъ платы по найму.

29-го февраля 1884 года онъ былъ назначенъ по министерству финансовъ директоромъ Александровскаго коммерческаго училища.

Этому новому учебному заведенію Лѣтниковъ успѣлъ до конца своей жизни принести громадную пользу почти полной выработкой организаціи его и установленіемъ учебныхъ программъ.

29-го декабря того же года С.-Петербургская академія наукъ избрала Лѣтникова въ члены корреспонденты по разряду математическихъ наукъ.

Въ 1885-мъ году появилось въ 12-мъ томѣ Сборника послѣднее изъ обнародованныхъ сочиненій Лѣтникова „О гиперсферическихъ функціяхъ и о разложеніи произвольной функціи въ ряды расположенные по функціямъ гиперсферическимъ“.

Въ этомъ сочиненіи авторъ изслѣдовалъ новый видъ функцій, на которыя только въ самое послѣднее время было обращено вниманіе ученыхъ, и которыя представляютъ обобщеніе функцій сферическихъ.

Въ посмертныхъ запискахъ Лѣтникова сохранился еще одинъ обширный математическій трактатъ.

Преждевременная смерть похитила выдающегося научного и общественного деятеля в полном расцвете его сил и среди многообразной, глубоко плодотворной деятельности.

Несомненно, что многие еще, богатые результаты дали бы для науки и общества этот светлый, талантливый, энергичный человек.

Техническое училище обязано покойному крупной затратой его дорогого труда.

Глубокий ученый, блестящий лектор и неутомимый труженик вкладывал в свои курсы разветвленные дары эрудиции, таланта и любви к делу.

Он вполне организовал систему математического преподавания, составил и детально обработал целый ряд курсов по всем главным отделам высшей математики и приложил к ним самостоятельные сборники разнообразных, искусно подобранных упражнений.

Но организаторская деятельность покойного не ограничивалась одной отвлеченной стороной преподавания.

Он был деятельным членом педагогического совета, имел в нем вский, уважаемый сотоварищами голос и, безпристрастно направляя свое влияние, отражал его на всех крупных актах советской деятельности.

Задачам административного устройства училища он придавал не меньшее значение, чем задачам научно-педагогическим.

Его отношения к товарищам и к ученикам были проникнуты искренностью душевного чувства, соединенного с принципиальной твердостью убеждений.

Алексей Васильевич Лытников был всегда и во всем широко развитым человеком, соединявшим в себя выдающиеся качества ума, характера и воли.

Неизгладимым впечатком должна лечь память о нем — не только в кругу лиц, которые его близко знали, не только в сфере тех учреждений, которым он служил, но и в общей истории русского просвещения, в которой имя свое он записал отчетливо.

Н. Шапошниковъ.

НОВЫЕ ТИПЫ ФЕРМЪ

(МНОГОРАСКОСНЫЯ, СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДѢЛЕННЫЯ ФЕРМЫ)

и ихъ расчетъ.

Проф. М. Черепашинскаго.





НОВЫЕ ТИПЫ ФЕРМЪ

(МНОГОРАСКОСНЫЯ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДѢЛЕННЫЯ ФЕРМЫ)

и ихъ расчетъ.

Проф. М. Черепашинскаго.

§ 1.

Введеніе.—Правила образованія разсматриваемыхъ въ настоящей статьѣ фермъ указаны въ моемъ сочиненіи: „Упрощенная теорія статически неопредѣленныхъ строительныхъ сооружений“ стр. 22—30.

Мы предполагаемъ, что фермы удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

- 1) Составляющіе ихъ стержни соединены между собою на концахъ шарнирами безъ тренія,
- 2) на мѣстахъ перекрещиванія стержни не имѣютъ никакихъ соединеній,
- 3) фермы имѣютъ неизмѣняемый видъ,
- 4) всѣ на ферму дѣйствующія силы (или равнодѣйствующія этихъ силъ) а также оси составляющихъ ее стержней находятся въ одной плоскости.

Ферма называется *неизмѣняемой*, когда невозможны никакія измѣненія ея геометрической формы безъ измѣненія длинъ стержней. Въ неизмѣняемой фермѣ возможны только такія деформаціи, какія допускаетъ упругость матеріала. Вслѣдствіе незначительности упругихъ деформаций мы будемъ ими при составленіи условій равновѣсія пренебрегать, и будемъ принимать, что ферма и послѣ нагруженія сохраняетъ свой первоначальный видъ. Пока напряженія стержней не превышаютъ предѣла упругости, то послѣднее предположеніе не имѣетъ на получаемые результаты практически никакого вліянія.

Ферма называется *статически опредѣленной*, когда напряженія всѣхъ ея стержней могутъ быть опредѣлены помощію од-

нихъ условій равновѣсія. Такая ферма имѣетъ только *нужные* стержни, т. е. она не имѣетъ, ни одного такого стержня, который могъ бы быть устраненъ безъ нарушенія ея неизмѣняемости. Если означимъ число стержней черезъ S , а число узловъ—черезъ U , то для статически опредѣленной фермы дѣйствительно условіе;

$$S = 2U - 3. \quad (1)$$

т. е. число стержней равняется на 3 уменьшенному удвоенному числу узловъ.

Ферма, не удовлетворяющая послѣднему условію, не можетъ быть статически опредѣленной, но не всякая ферма, удовлетворяющая ему, есть статически опредѣленная. Если $2U - 3$ стержни расположены такимъ образомъ, что образованная ими ферма по виду неизмѣняема, то она всегда статически опредѣленная.

§ 2.

Неизмѣняемые многоугольники. U точекъ могутъ быть соединены $U - 3$ стержнями въ неизмѣняемую систему различнымъ образомъ. Одинъ изъ простѣйшихъ способовъ слѣдующій: Обозначивъ данныя точки цифрами 1, 2, 3... n , въ произвольномъ порядкѣ, соединяемъ 1 съ 2, 2 съ 3 и т. д. Въ полученномъ многоугольникѣ, имѣющемъ U сторонъ, проводимъ $U - 3$ діагонали; если послѣднія проведены такимъ образомъ, что въ многоугольникѣ остается не болѣе двухъ вершинъ, изъ которыхъ не выходитъ ни одна діагональ, и если обѣ эти вершины не смежны, то можно вообще принять, что полученная фигура представляетъ неизмѣняемую ферму.

На черт. 1 и 2 представлены двѣ неизмѣняемыя системы стержней, изъ которыхъ каждая имѣетъ по 6 узловъ и $2 \times 6 - 3 = 9$ стержней. Узлы имѣютъ въ обѣихъ системахъ одинаковое относительное положеніе, но въ системѣ 2 они соединены стержнями не въ томъ порядкѣ, что въ системѣ 1.

Въ обоихъ случаяхъ стержни образуютъ шестиугольникъ (1234561) съ діагоналями 63, 52 и 43, въ системѣ 1, и—26, 14 и 53—въ системѣ 2.

Представленный на черт. 3 шестиугольникъ имѣетъ тоже три діагонали, но такъ какъ отъ двухъ непосредственно по себѣ слѣдующихъ вершинъ 1 и 6 не выходитъ ни одна діагональ, то этотъ шестиугольникъ не имѣетъ свойства неизмѣняемости, и легко увидѣть, что не измѣняя длины ни одного изъ его стержней, можно вершинамъ 1 и 6 придать безчисленное множество другихъ положеній 1' и 6'. Представленная этимъ шестиугольникомъ ферма удовлетворяетъ условію (1), но не имѣетъ неизмѣняемаго вида, она поэтому статически неопредѣленная.

На черт. 8—14 представлено нѣсколько неизмѣняемыхъ статически опредѣленныхъ многоугольниковъ, которые могутъ быть употреблены для образованія фермъ; каждый изъ этихъ многоугольниковъ имѣетъ при U сторонахъ $U-3$ діагонали. Если означимъ число сторонъ черезъ S , а діагоналей—черезъ D , то для

черт. 8 :	$s = 3$	$d = 3 - 3 = 0$
„ 9 :	$s = 4$	$d = 4 - 3 = 1$
„ 10—10b:	$s = 5$	$d = 5 - 3 = 2$
„ 11—11b:	$s = 6$	$d = 6 - 3 = 3$
„ 12—12d:	$s = 7$	$d = 7 - 3 = 4$
„ 13—13a:	$s = 8$	$d = 8 - 3 = 5$
„ 14—14c:	$s = 9$	$d = 9 - 3 = 6$

Изъ этихъ примѣровъ видно, что измѣняя въ одномъ и томъ же многоугольникѣ расположеніе діагоналей, получаются фермы различнаго вида. Но не всѣ эти фермы имѣютъ одинаковыя свойства неизмѣняемости, въ томъ отношеніи, что устраненіе одного стержня можетъ нарушить неизмѣняемость только на нѣкоторыхъ мѣстахъ фермы, или на всемъ ея протяженіи. Такъ легко видѣть, что устраненіе діагонали $\overline{26}$, въ фиг. 11a, нарушаетъ неизмѣняемость только въ четырехугольникѣ (2 3 6 1), а неизмѣняемость части (3 6 5 4) отъ этого не страдаетъ. Но если въ фиг. 11 устранимъ напр. діагональ (25), то будетъ уничтожена неизмѣняемость всего многоульника, такъ что всякая вершина можетъ измѣнять свое положеніе по отношенію къ остальнымъ. При устраненіи діагонали (26) въ фермѣ, представленной на черт. 14, послѣдняя распадается на треугольники (1 2 9), (3 4 8) (5 7 6), которые въ извѣстныхъ предѣлахъ могутъ измѣнять свое относительное положеніе; устраненіе діагонали (2 6) въ фиг. 14a нарушитъ неизмѣненость относительнаго положенія треугольниковъ (1 2 9) и (3 4 5), и точекъ 6, 7 и 8, а отсутствіе какой нибудь діагонали въ фиг. 14b уничтожаетъ неизмѣняемость всего многоугольника.

Мы будемъ называть многоугольникъ или ферму, въ которыхъ для неизмѣняемости недостаетъ одного только стержня, *раскосной цѣпью*, а ея неизмѣняемыя части—*членами*. Раскосныя цѣпи, въ которыя превращаются многоугольники фиг. 11, 11a, 14, 14a и 14b состоятъ изъ слѣдующихъ членовъ:

фиг. 11a: четырехугольникъ (3 6 5 4) и стержни $\overline{16}$, $\overline{12}$ и $\overline{23}$; всего 4 члена.

фиг. 14: треугольники (1 2 9), (3 4 8) (5 6 7) и стержни: $\overline{23}$, $\overline{45}$, $\overline{78}$, $\overline{89}$ и $\overline{15}$;

фиг. 14a: треугольники (1 2 9) и (3 4 5) и стержни $\overline{23}$, $\overline{56}$, $\overline{67}$, $\overline{78}$, $\overline{89}$, $\overline{18}$, $\overline{38}$ и $\overline{74}$

фиг. 11 и 14b: каждый стержень представляет одинъ членъ; число членовъ равно, поэтому, числу стержней.

Существуетъ родъ многоугольниковъ, которые при $n=3$ диагоналяхъ не имѣютъ свойства абсолютной неизмѣняемости, и потому для образованія фермъ не годятся. Съ такими многоугольниками мы познакомимся ниже.

§ 3.

Неизмѣняемая ферма.

Фермы состоятъ изъ неизмѣняемыхъ многоугольниковъ, посредствомъ соединенія послѣднихъ въ одну неизмѣняемую систему.

Для образованія статистически опредѣленной фермы могутъ быть употреблены слѣдующіе 3 способа соединенія плоскихъ системъ A и B :

Соединяемъ A съ B .

1) помощію трехъ стержней 1, 2, 3 (черт. 4) не пересѣкающихся въ одной точкѣ, и не параллельныхъ между собою. Точки p и q , въ которыхъ продолженія этихъ стержней встрѣчаются, называютъ „воображаемыми шарнирами“. На черт. 4a стержни 1, 2 и 3 образуютъ дѣйствительные шарниры p и q .

2) помощію одного шарнира S (черт. 5) и одного стержня 1.

3) обѣ системы A и B имѣютъ одинъ стержень ab (черт. 6) общимъ.

Если означимъ число стержней и узловъ

для системы A —черезъ s и u

для системы B —черезъ s_1 и u_1

а для составленной изъ нихъ фермы AB —черезъ S и U , то, такъ какъ по предположенію A и B —статически опредѣленные системы

$$\begin{aligned} s &= 2u - 3 \\ s_1 &= 2u_1 - 3 \end{aligned}$$

Для фермы фиг. 4 имѣемъ:

$$S = s + s_1 + 3 = (2u - 3) + (2u_1 - 3) + 3 = 2(u + u_1) - 3$$

и такъ какъ въ этомъ случаѣ

$$\begin{aligned} U &= u + u_1 \\ \text{то } S &= 2U - 3 \end{aligned}$$

Для фермы фиг. 5.

$$\begin{aligned} S &= s + s_1 + 1 \\ U &= u + u_1 - 1 \end{aligned}$$

слѣдовательно

$$S = (2u - 3) + (2u_1 - 3) + 1 = 2(u + u_1 - 1) - 3$$

$$S = 2U - 3$$

Для фермы фиг. 6.

$$S = s + s_1 - 1$$

$$U = u + u_1 - 2$$

$$S = (2u - 3) + (2u_1 - 3) - 1 = 2(u + u_1 - 2) - 3$$

$$S = 2U - 3$$

Каждая изъ полученныхъ фермъ удовлетворяетъ, поэтому, условію (1), а такъ какъ эти фермы неизмѣняемы, то онѣ статически опредѣленныя.

Очевидно что доказанное для двухъ системъ *A* и *B* дѣйствительно для соединенія указанными способами произвольнаго числа системъ въ одну ферму.

4) Кромѣ указанныхъ здѣсь способовъ образованія фермъ изъ многоугольниковъ имѣетъ важное практическое значеніе еще одинъ, состоящій въ томъ, что къ данной системѣ (1 2 3 5 4) фиг. 7 добавляются новые узлы. посредствомъ прикрѣпленія къ ней новыхъ точекъ, употребляя для каждой точки по два стержня. Такъ на черт. 7 точка 6 прикрѣплена къ системѣ *A* посредствомъ стержней 6 и 6, соединяющихъ ее съ узлами 5 и 3, точка 7—помощію стержней 7 и 7, а точка 8—помощію стержней 8 и 8. Если число добавленныхъ такимъ образомъ узловъ означимъ черезъ *m*, то число добавленныхъ стержней = $2m$, слѣдовательно

$$S = s + 2m$$

и такъ какъ $s = 2u - 3$

то

$$S = 2u - 3 + 2m = 2(u + m) - 3$$

$$\text{но } u + m = U$$

поэтому

$$S = 2U - 3$$

т. е. полученная ферма—статически опредѣленная.

Когда составленная этимъ послѣднимъ образомъ ферма имѣетъ только одинъ неизмѣняемый многоугольникъ, то мы будемъ называть его *основнымъ многоугольникомъ*.

На черт. 16, 17, 18 и 21 представлены образцы фермъ, составленныхъ изъ многоугольниковъ, при чемъ ферма фиг. 16 состоитъ изъ треугольниковъ (или четырехугольниковъ типа фиг. 9 и треугольниковъ) фиг. 17—изъ шестиугольниковъ типа фиг. 11.

фиг. 18—изъ семиугольниковъ типа фиг. 12 *a*

фиг. 21—изъ девятиугольниковъ типа фиг. 14 *b*.

Изображенныя на фиг. 22—30 фермы образованы по способу 4. За основной многоугольникъ принять: для фермъ

фиг. 22, 23 и 26 : пятиугольникъ *abcdf*

фиг. 24 : шестиугольникъ *abcdefg*

фиг. 25 : семиугольникъ *abcdefgh*

фиг. 27 : девятиугольникъ *abcdefghik*

фиг. 28 и 29 : каждая изъ этихъ фермъ состоитъ изъ многоугольника *abcd* къ которому прикрѣплены узлы, обозначенные цифрами, 1, 2, 3.

Фермы фиг. 15 и 15 *a* составлены изъ многоугольниковъ, образованныхъ такимъ образомъ, что къ неизмѣняемому пятиугольнику *abcdf* прикрѣпленъ помощію двухъ стержней узелъ *h*.

§ 4.

Расчетъ многораскосныхъ, статически опредѣленныхъ фермъ.

Когда ферма не состоитъ изъ однихъ треугольниковъ, то при опредѣленіи напряженій нѣкоторыхъ стержней часто бываетъ невозможно разрѣзать ферму такимъ образомъ, чтобы были пересѣчены не болѣе трехъ стержней съ неизвѣстными напряженіями, такъ что напряженія этихъ стержней не могутъ быть опредѣлены изъ одного только уравненія. Хотя для расчета такихъ фермъ условія равновѣсія вполне достаточны, но при употребленіи обыкновенныхъ методовъ опредѣленіе неизвѣстной изъ болѣе или менѣе значительнаго числа уравненій можетъ сдѣлать расчетъ сложнымъ и затруднительнымъ.

Обыкновенно приложенію простыхъ методовъ мѣшаетъ одинъ или два стержня, которые препятствуютъ также употребленію простыхъ графическихъ способовъ. Предварительное опредѣленіе напряженій этихъ стержней устраняетъ встрѣчаемыя затрудненія, такъ что напряженія остальныхъ стержней могутъ быть опредѣлены помощію способовъ, употребляемыхъ при расчетѣ простыхъ треугольныхъ системъ.

Въ слѣдующемъ указываются методы, облегчающіе расчетъ въ тѣхъ случаяхъ, когда употребленіе простыхъ способовъ приводитъ къ сложнымъ вычисленіямъ.

§ 4а.

1. Методъ временныхъ стержней.

Этотъ методъ состоитъ въ томъ, что положеніе нѣкоторыхъ стержней фермы измѣняемъ такимъ образомъ, чтобы она, оставаясь неизмѣняемой, могла быть рассчитана обыкновеннымъ способомъ. Для краткости будемъ называть тѣ стороны преобразованной фермы, которыхъ данная ферма не имѣетъ, *временными стержнями*.

Опредѣляемъ напряженія временныхъ стержней

1) происходящія въ нихъ тогда, когда ферма не нагружена, и напряженіе одного изъ устраненныхъ стержней равно произвольной величинѣ P .

2) произведенныя дѣйствующими на ферму внѣшними силами.

Если напряженіе одного изъ временныхъ стержней, произведенное внѣшними силами, означимъ черезъ W , а его напряженія, произведенныя силами P , замѣняющими напряженія устраненныхъ стержней $I, II, \dots$ — черезъ $w_1, w_2, \dots$ то полное напряженіе этого стержня

$$S = W + w_1 + w_2 + \dots \quad (2)$$

Означимъ дѣйствительныя напряженія стержней $I, II, \dots$ черезъ $N_1, N_2, \dots$, то для опредѣленія этихъ неизвѣстныхъ имѣемъ слѣдующія условія:

1) Данную ферму можно разсматривать какъ ферму неимѣющую устраненныхъ стержней, на которую кромѣ внѣшнихъ силъ дѣйствуютъ силы $N_1, N_2, \dots$, равныя напряженіямъ этихъ стержней. Произведенныя этими силами во временныхъ стержняхъ напряженія будутъ, очевидно, $= \frac{w_1}{P} N_1, \frac{w_2}{P} N_2$

2) Въ данной фермѣ временныхъ стержней нѣтъ, ихъ дѣйствительное напряженіе, поэтому $= 0$.

На основаніи этихъ условій получаемъ вмѣсто выраженія (2) уравненіе

$$0 = W + \frac{w_1}{P} N_1 + \frac{w_2}{P} N_2 + \dots \quad (3)$$

Для каждаго временнаго стержня получимъ одно такое уравненіе, число уравненій будетъ слѣдовательно равно числу неизвѣстныхъ N , изъ которыхъ всѣ неизвѣстныя могутъ быть опредѣлены.

Примѣръ 1. Определить напряженія стержней неизмѣняемаго шестиугольника фиг. произведенныя дѣйствующими на него силами, 1, 2, 3 ..

Если стержень I устранимъ, и вмѣсто его введемъ въ ферму стержень V, то получимъ неизмѣняемый шестиугольникъ фиг. 31а расчетъ котораго можетъ быть исполненъ легко однимъ изъ обыкновенныхъ способовъ. На фиг. 31б эта задача рѣшена графически.

На данныхъ силахъ построены сначала замкнутый многоугольникъ (123456), фиг. 31б. Затѣмъ на силахъ 2, а и b, уравновѣшивающихъ узелъ α, построены треугольникъ, посредствомъ котораго опредѣлились напряженія a_1 и b_1 , послѣ чего послѣдовательно построены замкнутые многоугольники силъ для узловъ β, γ и δ. Помощію послѣдняго изъ этихъ многоугольниковъ получено $W = \varepsilon\varphi$.

Такимъ же образомъ построены многоугольники силъ фиг. 31а для случая, когда ферма ненагружена, а напряженіе уstra- неннаго стержня $I = P$, гдѣ P — произвольная величина (фиг. 31с). Посредствомъ послѣдняго многоугольника получено

$$w = \overline{\mu\nu}$$

По (3)

$$o = W + \frac{w}{P}N$$

гдѣ N — дѣйствительное напряженіе стержня I.

Изъ этого уравненія получаемъ

$$N = - \frac{W}{w}P.$$

Для построенія величины N откладываемъ на сторонахъ прямого угла (фиг. 31f) отъ его вершины Z

$$\overline{zw} = w$$

$$\overline{zW} = W$$

$$\overline{zP} = P = \overline{\pi\rho} \quad (\text{фиг. 31d})$$

Соединяемъ w съ W, а черезъ P приводимъ

$$\overline{PN} \parallel \overline{Ww}$$

до пересѣченія съ $\overline{zW}$ въ N, то напряженіе $N = \overline{zN}$

Такъ какъ W и w отрицательны, то N тоже отрицательно, т. е. стержень I сжимается.

Теперь разсматриваемъ N какъ внѣшнія силы, и опредѣляемъ напряженія остальныхъ стержней, произведенныя данными силами 1, 2, 3, и силами N и — N (фиг. 31 g.). Для графиче-

ческаго рѣшенія строимъ на этихъ силахъ замкнутый многоугольникъ *klrstmk* (фиг. 31*h*), въ которомъ сила *lr* есть равнодѣйствующая силъ 2 и *N*, а сила *mn*—равнодѣйствующая силъ 5 и *N*. Напряженія *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h*, *i*, опредѣлены помощью этого многоугольника обыкновеннымъ образомъ.

При употребленіи аналитическаго способа для расчета величины *W* нужно сначала провести сѣченіе *mn* (фиг. 31*a*) и опредѣлить напряженіе стержня $\gamma\chi$. Если h_1 и h_2 —вертикальныя разстоянія точекъ γ и χ отъ пересѣченныхъ стержней $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$, M_1 и M_2 —моменты вѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на ферму слѣва сѣченія, и α —уголъ стержня $\gamma\chi$ съ вертикалью, то напряженіе этого стержня

$$D = - \left(\frac{M_2}{h_2} - \frac{M_1}{h_1} \right) \operatorname{cosec} \alpha \quad (4)$$

*) Пусть фиг. 32 представляетъ часть фермы произвольнаго наружнаго очертанія. Чтобы получить напряженіе стержня *gc*, проведемъ сѣченіе *mn* и означимъ черезъ

ω и ν —углы образуемые пересѣченными верхнимъ и нижнимъ стержнями *bc* и *gh*, съ горизонталью.

W и *N*—напряженія этихъ стержней,

α — уголъ стержня *gc* съ вертикалью.

D — его напряженіе,

h_1 и h_2 —вертикальныя разстоянія его концевыхъ точекъ *g* и *c*, отъ пересѣченныхъ стержней *bc* и *gd*.

M_1 и M_2 — моменты вѣшнихъ силъ, находящихся по одну сторону сѣченія, взятыхъ по отношенію къ точкамъ *g* и *m*.

Принимая за точку моментовъ сначала точку *g*, а затѣмъ точку *m*, получимъ

$$Wh_1 \cos \omega + M_1 = 0$$

$$Wh_2 \cos \omega + Dh_2 \sin \alpha + M_2 = 0$$

Раздѣлимъ первое изъ этихъ уравненій на h_1 , а послѣднее — на h_2 ,

$$W \cos \omega + \frac{M_1}{h_1} = 0$$

$$W \cos \omega + D \sin \alpha + \frac{M_2}{h_2} = 0$$

Изъ обоихъ уравненій слѣдуетъ

$$\frac{M_1}{h_1} = + D \sin \alpha + \frac{M_2}{h_2}$$

откуда

$$D = - \left(\frac{M_2}{h_2} - \frac{M_1}{h_1} \right) \operatorname{cosec} \alpha$$

Это выраженіе можетъ быть употреблено только для наклонныхъ стержней потому что для вертикальныхъ $\operatorname{cosec} \alpha = \infty$. Для послѣднихъ имѣется формула

$$V = Q - \frac{M}{h} (\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \nu)^2$$

гдѣ

h — длина вертикали

Q — равнодѣйствующая вѣшнихъ силъ находящихся слѣва сѣченія, и

h — моментъ этихъ силъ по отношенію къ вертикали.

Когда напряженіе стержня $\gamma\kappa$ извѣстно, то помощію сѣченія pq получается напряженіе W стержня $и$.

Такимъ же образомъ можетъ быть опредѣлено напряженіе w .

Примѣръ 2. При расчетѣ представленной на фиг. 30 фермы опредѣляемъ сначала напряженія стержней 1 и 1, выходящихъ изъ узла 1, затѣмъ переходимъ къ узлу 2, получаемъ напряженія стержней 2 и 2, далѣе къ узлу 3, 4. 5...пока наконецъ не дойдемъ до узловъ a и k . Дѣйствуя подобнымъ образомъ начиная съ праваго конца влѣво, дойдемъ до узловъ d и f . Такъ какъ отъ каждаго изъ узловъ (a , k , d и f) выходятъ по 3 стержня съ неизвѣстными напряженіями то многоугольникъ ($abcdfghik$) расчитываемъ по методу временныхъ стержней.

Дѣйствующія на этотъ многоугольникъ силы указаны на фиг. 30b стрѣлками, и обозначены буквами g , и буквами α , β , γ , δ , ϵ , α_1 , β_1 , γ_1 , δ_1 , ϵ_1 . Эти послѣднія, греческими буквами обозначенныя силы суть напряженія соотвѣтственныхъ стержней (фиг. 30), опредѣленные предыдущимъ расчетомъ, которыя теперь разсматриваемъ какъ внѣшнія силы. Для упрощенія находимъ для тѣхъ узловъ, на которые дѣйствуетъ болѣе чѣмъ 1 сила, равнодѣйствующія соотвѣтствующихъ имъ силъ.

Устраняемъ стержни af и dk , обозначенны цифрами I и II, и вмѣсто ихъ ставимъ стержни bh и ch (которые на фиг. 30c обозначены буквами V_a и V_b). Опредѣляемъ напряженія W_a и W_b послѣднихъ стержней, произведенныя дѣйствующими на многоугольникъ силами (фиг. 30c), затѣмъ—ихъ напряженія w_{a1} и w_{b1} произведенныя напряженіемъ $= P$ стержня I (фиг. 30d) и напряженія w_{a2} и w_{b2} , произведенныя напряженіемъ стержня II, тоже равнымъ P (фиг. 30 f).

Для опредѣленія напряженій N_1 и N_2 стержней I и II, имѣемъ по (3), уравненія:

$$0 = W_a + \frac{w_{a1}}{P} N_1 + \frac{w_{a2}}{P} N_2$$

$$0 = W_b + \frac{w_{b1}}{P} N_1 + \frac{w_{b2}}{P} N_2$$

Изъ этихъ уравненій получаемъ

$$N_1 = \frac{-W_a w_{b2} + W_b w_{a2}}{A} P$$

$$N_2 = \frac{-W_b w_{a1} + W_a w_{b1}}{A} P$$

гдѣ

$$A = w_{a1} w_{b2} - w_{b1} w_{a2}$$

Если числители этихъ выраженій имѣютъ конечныя значенія, а знаменатель $A = 0$, то N_1 и N_2 равны ∞ .

Если $A = 0$, и при томъ оба числителя $= 0$, то ферма статически неопредѣленная и тогда N_1 и N_2 могутъ имѣть произвольныя значенія.

Когда напряженія N_1 и N_2 опредѣлены, то рассматриваемъ ихъ какъ вѣшныя силы, и опредѣляемъ напряженія остальныхъ стержней посредствомъ расчета многоугольника фиг. 30g, который стержней I и II не имѣетъ, но на который кромѣ данныхъ силъ g и опредѣленныхъ предварительнымъ расчетомъ силъ α , β , γ ... дѣйствуютъ еще 4 силы N_1 , N_2 и $-N_1, -N_2$.

§ 5.

II. Методъ параллельныхъ многоугольниковъ.

Уже предыдущій примѣръ показываетъ, что расчетъ напряженій по методу временныхъ стержней, при большомъ числѣ этихъ стержней, приводитъ къ довольно сложнымъ вычисленіямъ. Къ неудобствамъ этого метода принадлежитъ также то обстоятельство, что для расчета стержней многоугольника необходимо знать напряженія всѣхъ, не принадлежащихъ ему, но выходящихъ изъ его узловъ, стержней, (стержни α , β , γ ... въ фиг. 30) чѣмъ значительно усложняется вычисленіе предѣльныхъ напряженій, производимыхъ подвижной нагрузкой, когда каждый почти стержень рассчитывается при предположеніи другой нагрузки, наиболѣе для него невыгодной. Такъ въ послѣднемъ примѣрѣ было бы вообще нужно приведенный въ немъ расчетъ дѣлать два раза, одинъ разъ для наиболѣе невыгодной нагрузки стержня I, а другой—для такой-же нагрузки стержня II. Расчетъ усложняется еще болѣе, когда кромѣ максимальныхъ требуются и минимальныя напряженія.

Въ такихъ случаяхъ гораздо проще получаютъ требуемые результаты помощію другого метода, который будемъ называть *методомъ параллельныхъ многоугольниковъ*.

Пусть (12345) фиг. 32, произвольный неизмѣняемый и статически опредѣленный многоульнѣкъ, на который дѣйствуютъ находящіеся между собою въ равновѣсіи силы P_1 , P_2 , P_3 ,... и положимъ, что требуется опредѣлить напряженіе стержня g .

Устранимъ стержень g , а на мѣсто его приложимъ силы N и $-N$, замѣняющія производимое имъ на ферму дѣйствіе, которая, поэтому, равна его напряженію. Построимъ другой многоульнѣкъ (1'2'3'4'5') такъ, чтобы его стороны и діагонали были соотвѣтственно параллельны стержнямъ многоульнѣка, но съ условіемъ, чтобы прямая новаго многоульнѣка, со-

отвѣтствующая тому стержню, котораго напряженіе ищется, не была параллельна этому стержню. Этотъ второй многоугольникъ будемъ называть *параллельной фигурой*. Изъ послѣдняго условія слѣдуетъ, что параллельная фигура не должна быть подобной тому многоугольнику, котораго одинъ стержень устраненъ, который, слѣдовательно, не представляетъ неизмѣняемую ферму, но раскосную цѣпь.

Длины двухъ сторонъ параллельной фигуры могутъ быть взяты произвольно, остальные вершины его опредѣляются уже условіемъ параллельности. Въ фиг. 32 прямая a' и f' проведены параллельно прямымъ a и f на произвольныхъ отъ послѣднихъ разстояніяхъ, и на нихъ взяты произвольно точки 2' и 5'. Для полученія точки 3' проводимъ черезъ 2' $b\|b$, и черезъ 5' $g\|g$, а для полученія точки 4' нужно провести черезъ 3' $c\|c$, и черезъ 5' $d\|d$.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи будемъ обозначать:

длину перпендикуляра, опущеннаго на внѣшнюю силу P_m изъ точки m' , соотвѣтствующей ей точкѣ приложенія m —черезъ y_m , напряженіе устраненнаго стержня—черезъ N ,

длину перпендикуляра, опущеннаго на напряженіе N изъ точки v' , соотвѣтствующей его точкѣ приложенія v , черезъ n , напряженіе произвольнаго стержня q , черезъ T_q

разстояніе стержня q отъ соотвѣтственной ему прямой q' , черезъ t_q .

Такъ какъ въ каждомъ узлѣ внѣшнія силы уравниваются направленіями встрѣчающихся въ этомъ узлѣ стержней, то сумма моментовъ внѣшнихъ силъ и напряженій, дѣйствующихъ на какой-нибудь узелъ u , взятыхъ по отношенію къ его соотвѣтственной точкѣ u , должна равняться нулю. Если составимъ такіа уравненія для узловъ 1, 2, 3..., принимая за точки моментовъ (соотвѣтственно) точки 1', 2', 3'..., то получимъ слѣдующія выраженія:

$$\text{для узла 1 : } -P_1y_1 - Nn_1 + T_at_a - T_ft_f = 0$$

$$\text{„ „ 2 : } -P_2y_2 + T_bt_b - T_at_a = 0$$

$$\text{„ „ 3 : } +P_3y_3 + T_ct_c - T_bt_b - T_gt_g = 0$$

$$\text{„ „ 4 : } -P_4y_4 - T_ct_c + T_at_a + Nn_4 = 0$$

$$\text{„ „ 5 : } -P_5y_5 - T_at_a + T_ft_f + T_gt_g = 0$$

Сложивъ всѣ эти уравненія въ одну общую сумму получаемъ

$$N(n_4 - n_1) - P_1y_1 - P_2y_2 + P_3y_3 - P_4y_4 - P_5y_5 = 0$$

или, обозначивъ алгебраическую сумму статическихъ моментовъ P_y черезъ ΣP_y , а плечо $(n_4 - n_1)$ —черезъ n ,

$$Nn + \Sigma P_y = 0$$

откуда

$$(I) \quad N = - \frac{\sum Py}{n}$$

Послѣднее уравненіе содержитъ только одну неизвѣстную N .

Чтобы получить N построениемъ откладываемъ на сторонахъ произвольнаго угла AmB отъ его вершины m $\overline{mn} = \alpha n$, гдѣ α — произвольное цѣлое число, и затѣмъ $np_1 = P_1$ $np_2 = P_2 \dots$ $my_1 = y_1$ $my_2 = y_2 \dots$ Соединяемъ n съ $y_1, y_2 \dots$, а черезъ $p_1, p_2 \dots$ проводимъ параллельныя mB , до пересѣченія съ my_1 въ x_1 , съ my_2 въ x_2 и т. д. Тогда

$$x_1 p_1 = \frac{P_1 y_1}{\alpha n} \quad x_2 p_2 = \frac{P_2 y_2}{\alpha n} \dots$$

и слѣдовательно

$$N = - \alpha \sum \overline{xp}$$

$\frac{\sum Py}{n}$ получается также легко помощію построенія веревочнаго многоугольника, принимая $P_1, P_2 \dots$ за параллельныя силы, дѣйствующія на разстояніяхъ $y_1, y_2 \dots$ отъ какой-нибудь постоянной точки o . Если полюсное разстояніе возьмемъ $= \alpha n$, и означимъ отрѣзокъ прямой, проведенной черезъ o параллельно принятому направленію силъ P , отрѣченный крайними сторонами веревочнаго многоугольника, черезъ η , то

$$\frac{\sum Py}{n} = \alpha \cdot \eta.$$

Въ фиг. 34 это построеніе исполнено для многоугольника фиг. 32. Силы P приняты всѣ положительными и отложены на прямой ow сверху внизъ. Разстоянія y считались положительными для положительныхъ Py , и отрицательными — для отрицательныхъ Py . Положительныя y отложены отъ точки o вправо, а отрицательныя — влево. Построеніе видно изъ фигуры, и не требуетъ поясненія.

Когда $n=0$, то N бесконечно велико; но N получается $= \infty$ вслѣдствіе пренебреженія деформации, произведенной внѣшними силами P . Въ дѣйствительности оно не будетъ бесконечно велико, но все таки будетъ столь значительно, что многоугольники, для которыхъ $n=0$, для образованія фермъ не пригодны. Какъ примѣръ такого многоугольника можетъ служить шестиугольникъ Паскаля, котораго частный случай представленъ на фиг. 35.

Въ фермѣ имѣющей многоугольники послѣдняго рода, равновѣсіе возможно только тогда, когда $\sum Py = 0$, въ какомъ случаѣ всякое конечное значеніе величины N удовлетворяетъ уравненію

I, оно имѣть поэтому безконечное число рѣшеній Въ такой фермѣ могутъ быть вызваны напряженія и въ ненагруженномъ состояннiи, (всѣ $P=0$) напр. неравномѣрнымъ нагрѣтiемъ ея, или натяженiемъ какого нибудь стержня, она въ этомъ отношенiи имѣть слѣдовательно свойства статически неопредѣленной фермы. Чтобы ферма была неизмѣняемая и статически опредѣленная необходимо, чтобы n не было $=0$.

Выраженное уравненiемъ I правило дѣйствительно для всякой статически опредѣленной неизмѣняемой фермы, потому что всякая такая ферма можетъ быть разсматриваема какъ одинъ многоугольникъ. Такъ число наружныхъ стержней фермы фиг. 18 = 27, а внутреннихъ—24, ферма можетъ быть слѣдовательно разсматриваема какъ многоугольникъ, имѣющій 27 сторонъ, и $27-3=24$ диагонали. Ферма фиг. 30 представляетъ многоугольникъ, имѣющій 41 сторону и 38 диагоналей, и т. д.

§ 6.

Полюсъ члена раскосной цѣпи.

Если въ представленной на фиг. 36 фермѣ стержень 4f устранимъ, то она превратится въ раскосную цѣпь, состоящую изъ слѣдующихъ членовъ, обозначенныхъ цифрами I, II, III, IV: изъ неизмѣняемаго шестиугольника (123456)

изъ стержня $\overline{4a}$

стержня $\overline{5f}$ и

неизмѣняемаго пятиугольника $abcdf$.

Для построения параллельной фигуры беремъ точки a' и d' произвольно. Чтобы получить 4' проводимъ черезъ a' и d' прямыя параллельныя $a4$ и $d4$; т. е.

$$a'4' \parallel a4 \quad d'4' \parallel d4$$

Точно также для построения точки f' , соотвѣтствующей точкѣ f , соединенной съ a и d стержнями fa и fd , проводимъ черезъ a' и d'

$$a'f' \parallel af \text{ и } d'f' \parallel df$$

Такимъ же образомъ могутъ быть получены другія точки параллельной фигуры.

Параллельная фигура, соотвѣтствующая шестиугольнику (123456) будетъ подобный ему шестиугольникъ, потому что всѣ стороны обоихъ многоугольниковъ будутъ соотвѣтственно параллельны между собою. Но два подобные и параллельные многоугольника имѣютъ слѣдующія свойства:

1) Всѣ прямыя, соединяющія точки одного многоугольника съ соотвѣтствующими имъ точками другого, пересѣкаются въ одной точкѣ, называемой центромъ подобія.

2) Прямая, соединяющая двѣ произвольныя точки одного многоугольника параллельна прямой, соединяющей соотвѣтственные имъ точки другого.

Изъ этого слѣдуетъ непосредственно:

1) Всѣ прямыя, соединяющія точки неизмѣняемаго многоугольника съ соотвѣтственными имъ точками его параллельной фигуры, пересѣкаются въ одной точкѣ. Эту точку будемъ называть *полюсомъ многоугольника*, а проведенныя отъ полюса къ его точкамъ прямыя—*лучами этихъ точекъ*.

2) Прямая параллельной фигуры, соотвѣтственная какому-нибудь стержню многоугольника, параллельна этому стержню.

Изъ перваго пункта слѣдуетъ, что если $4'$ и d' точки, соотвѣтственные точкамъ 4 и d члена I, то соединивъ $4'$ и d' съ 4 и d , получимъ въ пересѣченіи прямыхъ $44'$ и dd' полюсъ π_1 члена I. Черезъ этотъ полюсъ проходятъ всѣ прямыя $11'$, $22'$, $33'$ соединяющія точки 1, 2, 3... съ ихъ соотвѣтственными точками $1'$, $2'$, $3'$,...

Полюсъ π_2 члена II (стержня $\overline{4a}$) находится въ пересѣченіи прямыхъ $44'$ и aa' , полюсъ π_3 члена III (стержня $5f$) — въ пересѣченіи прямыхъ $55'$ и ff' , а полюсъ π_4 члена IV (пятиугольника $abcdf$)—въ пересѣченіи прямыхъ aa' и ff' .

Употребленіе полюсовъ часто облегчаетъ построеніе соотвѣтственныхъ точекъ.

Изъ 2-го пункта слѣдуетъ, что если соединимъ двѣ произвольныя точки одного и того же члена цѣпи, напр. точки 3 и 1, то прямая 31 будетъ параллельна прямой $3'1'$, соединяющей ихъ соотвѣтственныя точки $3'$ и $1'$. Чтобы поэтому для произвольной точки q члена I найти соотвѣтственную ей точку q' , можно дѣйствовать слѣдующимъ образомъ: Соединяемъ точку q съ какой-нибудь другой точкой того же члена, которой соотвѣтственная точка уже имѣется, напр. съ 5, то q' будетъ находиться на прямой, проведенной черезъ $5'$ параллельно прямой $q5$; кромѣ того q' лежитъ на лучѣ $q\pi_1$ точки q . Въмѣсто луча $q\pi_1$ можно было соединить q съ другой точкой напр. 4, и провести черезъ $4'4z \parallel 4q$ до пересѣченія съ $5'q'$ въ точкѣ q' .

Величины y въ формулѣ I означаютъ разстоянія точекъ, соотвѣтственныхъ точкамъ приложенія силъ P , отъ этихъ силъ. Если будемъ разсматривать прямую sm (фиг. 37), опредѣляющую положеніе силы P_m , связанной неизмѣняемо съ тѣмъ чле-

номъ цѣпи, которому ея точка приложенія m принадлежитъ, то соотвѣтственная ей прямая $s'm'$ будетъ параллельна sm . Для опредѣленія величины y_m можно поэтому вмѣсто точки m взять произвольную другую точку на силѣ P_m напр. точку t или q , и опредѣлить соотвѣтственную ей точку t' или q' . Такъ какъ обѣ послѣднія точки находятся на прямой $s'm'$, то ихъ разстоянiе отъ силы P_m , взятое по какому-нибудь направленiю, точно такое, какъ и разстоянiе точки m' отъ тойже силы, измѣренное по тому же направленiю.

§ 7.

Линiя разстоянiй y неизмѣняемой системы.—Пусть $a, b, c \dots$ произвольныя точки неизмѣняемой системы, π —полюсъ послѣдней, и $a', b', c' \dots$ точки, соотвѣтственныя точкамъ $a, b, c \dots$. Такъ какъ прямыя $a'b', b'c' \dots$ параллельны прямымъ $ab, bc \dots$ а прямыя $aa', bb', cc' \dots$ пересекаются въ одной точкѣ, то

$$\frac{\overline{aa'}}{\overline{a\pi}} = \frac{\overline{bb'}}{\overline{b\pi}} = \frac{\overline{cc'}}{\overline{c\pi}} \dots = C$$

гдѣ C означаетъ постоянную величину.

Проведемъ черезъ $a, b, c \dots$ прямыя $a\alpha_1, b\beta_1, c\gamma_1 \dots$, параллельныя произвольной прямой P , и означимъ разстоянiя $a'\alpha, b'\beta, c'\gamma \dots$ точекъ $a', b', c' \dots$ отъ этихъ прямыхъ, измѣренные по какому нибудь направленiю AB , черезъ y , а разстоянiя $\pi\alpha_0, \pi\beta_0, \pi\gamma_0 \dots$ полюса π отъ тѣхъ же прямыхъ, взятые по тому же направленiю AB , черезъ x , то

$$\frac{\overline{aa'}}{\overline{a\pi}} = \frac{\overline{a'\alpha}}{\overline{\alpha_0\pi}} = \frac{\overline{b'\beta}}{\overline{\beta_0\pi}} \dots = \frac{y}{x} = C$$

откуда

$$y = Cx.$$

Изъ послѣдняго уравненiя слѣдуетъ: Если будемъ проектировать точки $a, b, c \dots$ прямыми, параллельными P , на прямую AB , и отложимъ отъ ихъ проэкцiй $a_1, b_1, c_1 \dots$ на проектирующихъ прямыхъ

$$\overline{a_1\alpha_1} = \overline{a'\alpha} \quad \overline{b_1\beta_1} = \overline{b'\beta} \quad \overline{c_1\gamma_1} = \overline{c'\gamma}.$$

то точки $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots$ получатся на прямой, проходящей черезъ проэкцiю π_1 точки π .

Это свойство упрощаетъ построенiе разстоянiй y для неизмѣняемыхъ членовъ цѣпи въ случаѣ, когда дѣйствующiя на ферму силы параллельны между собою.

Примѣръ. На ферму, представленную на черт. 39, лежащую на опорахъ 1 и о, дѣйствуютъ вертикальные грузы P_a , P_b и P_g ; опредѣлить напряженіе стержня 6f.

Устраняемъ стержень 6f, а на его мѣсто ставимъ силы D_b и D_f равныя его напряженію; также устраняемъ опоры 1 и о, и ихъ дѣйствіе замѣняемъ реакціями R_1 и R_o . Ферма находится теперь въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ силъ P_a , P_b , P_g , D_b , D_f , R_1 и R_o , изъ которыхъ силы D_b и D_f равны и прямо противоположны другъ другу.

Вслѣдствіе устраненія стержня 6f ферма превратилась въ раскосную цѣпь, имѣющую членами неизмѣняемый многоугольникъ $d78ohfd$, заштрихованный на чертежѣ, и находящіеся слѣва 7d стержни.

Строимъ для этой цѣпи соотвѣтственную ей „параллельную фигуру“. Чтобы точки 6' и f' этой фигуры не получились на прямой, параллельной 6f (т. е. параллельной устраненному стержню, § 5) начинаемъ построеніе съ четырехугольника 67cd, не имѣющаго діагонали. Беремъ точки 6' и f' произвольно, но такъ чтобы прямая 6'f' не была параллельна прямой 6f, проводимъ черезъ 6' $6'7' \parallel 67$, и черезъ f' $f'7' \parallel f7$, до пересѣченія съ 6'7' въ 7'; положеніе всѣхъ остальныхъ точекъ параллельной фигуры этими тремя точками 6', 7', и f' совершенно опредѣлено. Построеніе этихъ точекъ уясняетъ слѣдующая таблица:

Узелъ.	Соединенъ съ узлами	Стержнями или прямыми	Слѣдовательно точка	Находится на прямыхъ	Проведенныхъ черезъ	Параллельно
d	7 и f	7d и fd	d'	7'd' и f'd'	7' и f'	7d и fd
5	6 и d	d5 и 65	5'	d'5' и 6'5'	d' и 6'	d5 и 65
c	6 и d	6c и dc	c'	6'c' и d'c'	6' и d'	6c и dc
b	5 и c	5b и cb	b'	5'b' и c'b'	5' и c'	5b и cb
4	5 и c	54 и c4	4'	5'4' и c'4'	5' и c'	54 и c4
3	4 и b	43 и b3	3'	4'3' и b'3'	4' и b'	43 и b3
о	7 и f	7o и fo	o'	7'o' и f'o'	7' и f'	7o и fo

При чтеніи этой таблицы нужно, переходя отъ одной графы къ слѣдующей, прочесть предварительно заглавіе этой послѣдней графы. Такъ н. пр. строку, соотвѣтствующую точкѣ 4, слѣдуетъ читать такъ: Узелъ 4 — соединенъ съ узлами 5 и c — стержнями 54 и c4 — слѣдовательно точка 4' — находится на прямыхъ 5'4' и c'4' — проведенныхъ черезъ 5' и c' — параллельно 54 и c4.

При построении точек $\bar{a}'$, $\bar{b}'$... удобно пользоваться соответственными полюсами, посредством которых может быть контролирована точность построения. На фиг. 39а определены полюсы для раскосного члена и для стержня cd .

Проводим прямую IO , перпендикулярную к силам P_1 принимаем ее за ось абсцисс, и проецируем на нее прямыми, параллельными силам P_1 узлы 1, a , b , c ... получим точки I , a_0 , b_0 , c_0 ... Откладываем от этих точек как ординаты проекции прямых $11'$, aa_1 , bb_1 ... т. е. откладываем

$$\overline{11_0} = \bar{z}_1 = y_1 \quad y_a = \bar{\alpha}a_0 = \bar{z}_1 a_1 \quad y_b = \bar{\beta}b_0 = \bar{z}_2 b_1 \quad . \quad . \quad .$$

и соединяем точки 1_0 , a_0 , b_0 , c_0 , d_0 и ω прямыми линиями. Если перпендикуляры, опущенные из b' и f' на D означим через n_b и n_f , то можем написать

$$R_1 y_1 - P_a y_a - P_b y_b - D(n_b + n_f) + P_s y_s - R_0 y_0 = 0$$

откуда

$$D = \frac{R_1 y_1 - R_0 y_0 - P_a y_a - P_b y_b + P_s y_s}{n}$$

где $n = n_b + n_f$.

Последнему уравнению можно придать другой, более простой вид.

Так как

$$R_1 = \frac{P_a(l-x_a)}{l} + \frac{P_b(l-x_b)}{l} + \frac{P_s(l-x_s)}{l}$$

$$\text{и } R_0 = \frac{P_a x_a}{l} + \frac{P_b x_b}{l} + \frac{P_s x_s}{l}$$

то

$$D = \frac{1}{n} \left[P_a \left(\frac{l-x_a}{l} y_1 - y_a - \frac{x_a}{l} y_0 \right) + P_b \left(\frac{l-x_b}{l} y_1 - y_b - \frac{x_b}{l} y_0 \right) + P_s \left(\frac{l-x_s}{l} y_1 + y_s - \frac{x_s}{l} y_0 \right) \right] \quad (5)$$

Соединим 1_0 (черт. 39а) с o и ω , и означим точки пересечения ординат y_a , y_b , y_c ... с $\overline{1_0 0}$ через α_1 , β_1 , γ_1 ..., а с $\overline{1_0 \omega}$ — через α_2 , β_2 , γ_2 ... Примем $\overline{1_0 \omega}$ за ось абсцисс, и означим ординаты многоугольника $1_0 a_0 b_0 c_0$..., взятые по направлению сил P , через η , то

$$\eta_a = \overline{a_2 a_0}, \quad \eta_b = \overline{b_2 b_0}, \quad \eta_c = \overline{c_2 c_0} \dots$$

Из черт. 39а получаем легко

$$\overline{b_2 b_0} = \eta_\beta = \overline{\beta \beta_1} - \overline{\beta b_0} - \overline{\beta_1 \beta_2} = y_1 \frac{l-x_b}{l} - y_b - y_0 \frac{x_b}{l}$$

Такимъ же образомъ получимъ

$$\tau_2 = \frac{l - x_a}{a_2 a_0} = y_1 \frac{l - x_a}{l} - y_2 - y_0 \frac{x_a}{l}$$

Помощію этихъ значеній уравненіе получаетъ видъ

$$(II) \quad D = (-P_a \tau_a + P_b \tau_b + P_s \tau_s) \frac{1}{n}$$

Послѣднее уравненіе не содержитъ реакцій R и даетъ правило, что напряженіе равно алгебраической суммъ произведеній силъ P на соответствующія имъ ординаты τ .

§ 8.

Второй способъ построенія ординатъ y . — Пусть $a b c d f$ (черт. 40) произвольный статически опредѣленный многоугольникъ, представляющій, вслѣдствіе отсутствія одной діагонали, (напр. діагонали ac) раскосную цѣпь. Возьмемъ точки a' и c' произвольно. Чтобы получить точку b' проводимъ (такъ какъ узелъ b соединенъ съ узлами c и a стержнями cb и ab) черезъ c' $c'b' \parallel cb$, и черезъ a' $a'b' \parallel ab$. Подобнымъ образомъ можно теперь построить точку d' , а затѣмъ f' .

Проведемъ черезъ b $ba_1 \parallel aa'$ до пересѣченія съ $a'b'$ въ a_1 , и $bc_1 \parallel cc'$ до пересѣченія съ $c'b'$ въ c_1 , получаемъ для опредѣленія точки b' изъ четырехугольника Bc_1ba_1 слѣдующее построение: (фиг. 40а).

Черезъ произвольную точку z_0 проводимъ

$$z_0 a'_0 \parallel aa' \text{ и } z_0 c_0 \parallel cc'$$

дѣлаемъ

$$z_0 a_0 = aa' \quad z_0 c_0 = cc'$$

и проводимъ

$$\text{черезъ } c_0 \quad c_0 b_0 \parallel cb$$

$$\text{и черезъ } a_0 \quad a_0 b_0 \parallel ab$$

получаемъ въ пересѣченіи обѣихъ послѣднихъ прямыхъ точку b_0 такъ, что

$$z_0 b_0 = bb' \text{ и } z_0 b_0 \parallel bb'$$

Для построенія точки d_0 нужно (такъ какъ точка d соединена съ узлами c и b стержнями dc и db) провести черезъ b_0 $b_0 d_0 \parallel bd$, и черезъ c_0 $c_0 d_0 \parallel cd$, а точка f_0 получается помощію прямыхъ $a_0 f_0$ и $d_0 f_0$, параллельныхъ стержнямъ af и df . Легко узнать,

что если полученные такимъ образомъ точки $b_0, \partial_0, f_0 \dots$ соединимъ съ z_0 , то

$$\begin{array}{llll} b_0 z & \text{равно и параллельно} & bb' \\ \partial_0 z & " & " & dd' \\ f_0 z & " & " & ff' \end{array}$$

Если силы, дѣйствующія на данный многоугольникъ параллельны прямой P , то ординаты $y_a, y_b, y_c \dots$ для силъ, дѣйствующихъ въ точкахъ $a, b, c \dots$ равны разстояніямъ точекъ $a_0, b_0, c_0 \dots$ (фиг. 40b) отъ прямой MN , проведенной черезъ z_0 параллельно P .

Если всю фигуру 40_a повернемъ на 90° , то получимъ фигуру 40_b которой всѣ линіи будутъ соотвѣтственно перпендикулярны къ линіямъ фиг. 40_a или, что все равно — къ соотвѣстственнымъ линіямъ фигуры 40. Фиг. 40_b получается поэтому помощію такогожъ построенія, какъ фиг. 40_a, только знакъ $\parallel$ нужно замѣнить знакомъ $\perp$. Первая отличается отъ послѣдней тѣмъ преимуществомъ, что въ ней разстоянія точекъ $a_1, b_1, c_1 \dots$ отъ прямой AB , проведенной черезъ z перпендикулярно къ P , параллельны ординатамъ y .

На фиг. 39_b указано построеніе ординатъ y для фермы фиг. 39 по послѣднему способу. Прямая $z7$ и zf , и точки 7 и f на нихъ, беремъ произвольно, (для согласованія получаемыхъ послѣднимъ построеніемъ ординатъ y съ построенными прежде принято на фиг. 39_b $zf_0 \perp$ и $=ff'$ и $z\partial_0 \perp$ и $=d\partial'$). Чтобы получить точку 7₀ проводимъ (соотвѣтственно прямымъ $\overline{67}$ и $\partial 7$, посредствомъ которыхъ узелъ 7 соединенъ съ узлами 6 и ∂) черезъ 6₀ $6_0 7_0 \perp \overline{67}$ и черезъ ∂_0 $\partial_0 7_0 \perp \partial 7$. Затѣмъ получаемъ

точку c_0 помощію	прямыхъ $\partial_0 c_0$ и $6_0 c_0$	перпендикулярн. въ ∂c и $6c$
" 5 ₀	" " 6 ₀ 5 ₀ и $\partial_0 5_0$	" " 65 и $\partial 5$
" 4 ₀	" " 5 ₀ 4 ₀ и $c_0 4_0$	" " 54 и $c4$
" 6 ₀	" " $c_0 b_0$ и $5_0 b_0$	" " cb и $5b$
" a_0	" " 4 ₀ a_0 и $6_0 a_0$	" " 4a и ba

Черезъ z проводимъ zI перпендикулярно къ силамъ P , а черезъ $1_0, a_0, b_0, c_0 \dots$ прямые $1_0 1_0, a_0 a_0, b_0 b_0, c_0 c_0 \dots$, параллельныя Iz , до пересѣченія съ прямыми $1I, a\alpha, b\beta \dots$, параллельными P , въ точкахъ $1_1, a_0, b_0 \dots$, которыя соединяемъ прямыми линіями. какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

Помощію послѣдняго способа можно опредѣлять ординаты y независимо отъ ранѣе указаннаго способа, или употреблять его для провѣрки построенія, исполненнаго по первому способу.

§ 9.

Упрощеніе построения параллельной фигуры.—Параллельная фигура для данной раскосной цѣпи можетъ быть построена слѣдующимъ образомъ (фиг. 43): На одномъ изъ членовъ цѣпи, который обозначимъ черезъ A (въ фигурѣ этотъ членъ заштрихованъ), беремъ двѣ произвольныя точки m и n , проводимъ гдѣ нибудь прямую cd параллельно mn , и беремъ на ней точки m' и n' произвольно. Этими послѣдними точками полюсъ π члена A вполне опредѣленъ. Затѣмъ на смежномъ членѣ B , имѣющемъ на A шарниръ f , беремъ произвольную точку d (вмѣсто точки d взятой на фигурѣ, можно было взять любую точку на членѣ df), проводимъ черезъ f $f\delta$ параллельно fd , и беремъ на $f\delta$ точку d' опять произвольно. Этими тремя точками: m' , n' и d' параллельная фигура вполне опредѣлена. (Построеніе остальныхъ точекъ этой фигуры видно изъ черт. 43, и не требуетъ поясненій).

Построеніе параллельной фигуры часто упрощается тѣмъ, что первыя двѣ точки m' и n' принимаемъ на точкахъ m и n , такъ, что m' совпадаетъ съ m , и n' съ n , потому что тогда членъ A , которому эти точки принадлежатъ, будетъ уже собственной параллельной фигурой. Такъ какъ въ этомъ случаѣ точка f совпадаетъ съ точкой f , то и прямая $f\delta$ совпадаетъ съ прямой fd , и точкой d' будетъ произвольная точка на fd .

Примѣръ. Представленная на фиг. 44 статически опредѣленная и неизмѣняемая ферма превращается по устраненіи стержня $A2$ въ раскосную цѣпь, состоящую изъ заштрихованныхъ въ фигурѣ раскосныхъ членовъ M и N , и изъ находящихся между ними 18 стержней, проведенныхъ двойными линиями; цѣпь имѣетъ, слѣдовательно, 20 членовъ. Если примемъ, что точки h' и $6'$ совпадаютъ съ точками h и 6 , то членъ N будетъ собственной параллельной фигурой. Поэтому беремъ точку g' на gh произвольно и опредѣляемъ точку $5'$ ($g'5' \parallel g5$ $6'5' \parallel 65$). Такъ какъ прямая $6'5'$ совпадаетъ съ 65 (вслѣдствіе совпаденія точекъ $6'$ и 6) то для полученія точки $5'$ нужно только провести черезъ g' $g'5' \parallel g5$ до пересѣченія съ 65 въ $5'$. Остальныя точки получаютъ теперь весьма просто по даннымъ ранѣе правиламъ.

При такомъ способѣ построения параллельной фигуры упрощается, кромѣ построения послѣдней, также уравненіе I, такъ какъ для всѣхъ силъ дѣйствующихъ на тотъ членъ, который принять за собственную параллельную фигуру, равны нулю, эти

силы, поэтому, въ уравненіе I не входятъ. Если на ферму фиг. 44 дѣйствуютъ силы P_1 до P_8 то произведенное ими въ стержнѣ A2 напряженіе N опредѣлится, по I, изъ уравненія:

$$-Nn + R_0y_0 - P_1y_1 - P_3y_3 - P_5y_5 = 0. \quad (6)$$

Задача:—Для фермы, представленной на фиг. 45, соединенной съ опорой въ B шарниромъ, а которой другой конецъ можетъ перемѣщаться вдоль прямой rs , построить параллельную фигуру такъ, чтобы двѣ точки послѣдней, соотвѣтственныя двумъ точкамъ цѣпи, образованной этой фермой по устраненіи одного изъ ея стержней, взятымъ на двухъ различныхъ членахъ цѣпи, удовлетворяли слѣдующимъ условіямъ:

1) Одна изъ точекъ цѣпи должна быть собственной соотвѣтственной точкой.

2) Точка, соотвѣтственная другой точкѣ цѣпи, должна находиться на данной прямой.

Эта задача рѣшена на фиг. 45 для стержня ac , при чемъ принято, что собственной соотвѣтственной точкой должна быть точка B , а точка o' , соотвѣтственная точкѣ o , должна находиться на прямой om , перпендикулярной къ rs . Очевидно что при исполненіи этихъ условій для опредѣленія напряженія стержня не будетъ надобности опредѣлять опорныя реакціи.

По устраненіи стержня ac ферма превращается въ цѣпь, состоящую изъ двухъ раскосныхъ членовъ I и IV, заштрихованныхъ въ фигурѣ 45, и изъ двухъ стержней II и III. Такъ какъ по предположенію B' совпадаетъ съ B , то B есть уже полюсъ члена IV, точки b' и c' находятся поэтому на лучахъ bB и cB точекъ b и c .

Беремъ b' на bB произвольно, и проводимъ черезъ $b'—b'c' \parallel bc$, до пересѣченія съ cB въ c' . Точка a' должна находиться на прямой $b'x$ проведенной черезъ b' параллельно ba , точка d' —на прямой $c'y$, параллельной cd , а точка o' —на om . Такъ какъ точки a , d , и o принадлежатъ неизмѣняемому члену I и образуютъ треугольникъ ado , то точки a' , d' и o' будутъ образовывать треугольникъ, параллельный послѣднему. Для полученія этихъ точекъ нужно, слѣдовательно, построить треугольникъ, котораго вершины находились бы на данныхъ прямыхъ $b'x$, $c'y$ и om , а стороны были бы параллельны сторонамъ треугольника $o a d$. Для этого пользуемся слѣдующей геометрической теоремой:

Если многоугольникъ, имѣющій n сторонъ, движется, измѣняя свою форму, такимъ образомъ, что его стороны вращаются около постоянныхъ точекъ (которыя могутъ находиться и въ бесконеч-

ности) а $n-1$ вершинъ описываютъ прямыя линіи, то и послѣдняя вершина описываетъ прямую линію.

Строимъ два треугольника $a_0 d_0 o_0$ и $a_2 d_2 o_2$, параллельные треугольнику ado , такъ, чтобы вершины a_0 и a_2 находились на прямой $b'x$, а вершины d_0 и d_2 — на прямой $c'y$; ихъ третьи вершины получаются въ o_0 и o_2 . Если соединимъ o_0 съ o_2 , то на основаніи предыдущей теоремы, получимъ въ пересѣченіи прямой $o_0 o_2$ съ ot , точку o' . Проводимъ черезъ o' $o'a' \parallel oa$, до пересѣченія съ $a_0 a_2$ въ a' и — прямую $o'd' \parallel od$ до пересѣченія съ $d_0 d_2$ въ d' . Полученная такимъ образомъ прямая $a' d'$ будетъ параллельна ad .

Для опредѣленія напряженія стержня N нужно составить уравненіе I. Въ фигурѣ обозначены силы, дѣйствующія на верхній поясъ, буквами Q , а на нижній — буквами P . Силы Q_4 и P_1 до P_6 — вертикальны, а силы Q_1 , Q_6 , Q_2 и Q_3 имѣютъ различныя направленія. На послѣднихъ силахъ беремъ произвольныя точки h , k , l и g ; соотвѣтственные имъ точки h' , k' , l' и g' опредѣляемъ слѣдующимъ образомъ:

точку h соединяемъ съ a и d , и черезъ a' и d' проводимъ

$$a'h \parallel a h \text{ и } d'h \parallel d h;$$

если продолжимъ dd' до пересѣченія съ $o o'$ въ π_1 , то получимъ полюсъ члена I. Точка k' лежитъ на лучѣ $k\pi_1$ и на прямой $a'h$ проведенной черезъ a' параллельно ak ;

точка l взята на стержнѣ ab , поэтому l' лежитъ на $a'b'$ и на лучѣ точки l ; для опредѣленія полюса члена ab продолжены прямыя aa' и bb' до взаимнаго пересѣченія;

точка g взята на прямой bB , проходящей черезъ полюсъ B члена IV, вслѣдствіе чего точка g' получается въ пересѣченіи bB съ прямой $c'g'$, проведенной черезъ c' параллельно cg .

Для вертикальныхъ силъ построены многоугольники $o_3 d_0 c_0 B$, котораго ординаты $o_1 o_3$, $d_1 d_0$, $c_1 c_0$... равны горизонтальнымъ разстояніямъ точекъ o' , d' , c' отъ точекъ o , d , c . $o_3 d_0$ проходитъ черезъ проекцію полюса π_1 , а $c_0 B_1$ — черезъ проекцію полюса B . Проекція полюса члена III получается въ точкѣ пересѣченія прямой $d_0 c_0$ съ осью абсциссъ $o_1 B_1$.

Если означимъ перпендикуляры, опущенные изъ точекъ h' , k' , l' и g' на соотвѣтственные силы, черезъ q_1 , q_2 , q_6 и q_3 , и употребимъ для обозначенія плечъ напряженія N и параллельныхъ силъ P — прежнія буквы n и y , то изъ чертежа получимъ:

$$N(n_a + n_c) + P_1 y_1 + P_2 y_2 + Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + Q_6 q_6 - P_3 y_3 - P_5 y_5 - P_6 y_6 - \\ - y_4 - Q_3 y_3 = 0$$

откуда

$$N = \frac{1}{n_a + n_c} \left[-P_1 y_1 - P_2 y_2 - Q_1 q_1 - Q_2 q_2 + Q_6 q_6 + P_3 y_3 + P_5 y_5 + \right. \\ \left. + P_6 y_6 + Q_4 y_4 + Q_3 q_3 \right] \quad (7)$$

Изъ этого примѣра видно, что всѣ силы, находящіяся слѣва точки z (вращающія вправо), производятъ въ ac отрицательное — а силы, дѣйствующія справа z (вращающія влѣво) — положительное напряженіе. Сила, проходящая черезъ полюсъ того члена, на который она дѣйствуетъ, производитъ $N=0$. Если бы имѣлись силы, дѣйствующія на стержень ac , то для опредѣленія производимаго ими напряженія было бы нужно разложить ихъ на слагающія, проходящія черезъ точки a и c .

§ 10.

Хотя параллельная фигура тремя точками вполне опредѣлена, но можетъ случиться, что этихъ трехъ точекъ для построенія ея будетъ недостаточно. Такой случай имѣется на фиг. 40. Изображенному на ней многоугольнику (123456789) недостаетъ для неизмѣняемости одной діагонали, онъ представляетъ по-этому раскосную цѣпь.

Для построенія параллельной фигуры принимаемъ стержень $1'9'$ за собственную параллельную сторону $1'9'$. Беремъ точку $2'$ на 12 произвольно и проводимъ черезъ нее $2'8' \parallel 28$ до пересѣченія съ 98 въ $8'$. Такъ какъ ни одна изъ остальныхъ вершинъ $3, 4, 5, 6$ и 7 не соединена съ четырехугольникомъ (1289) двумя стержнями, то дальнѣйшее построеніе параллельной фигуры по обыкновенному способу невозможно. Но для продолженія построенія знаемъ, что

точка $3'$	должна лежать на прямой $2'\delta$, проведенной черезъ $2' \parallel 23$
" $6'$	" " " " $2'\varphi$, " " $2' \parallel 26$
" $7'$	" " " " $8'\mu$, " " $8' \parallel 87$
" $4'$	" " " " 94

Одну изъ этихъ точекъ беремъ на соотвѣтственной прямой произвольно. Въ фигурѣ взята точка 3_α на прямой $2'\delta$; если черезъ 3_α проведемъ $3_\alpha 7_\alpha \parallel 37$ то получимъ точку 7_α , которая вообще не упадетъ на 94 .

Беремъ на $2'\varphi$ другую произвольную точку 3_β , и находимъ по-мощію ея 7_β , и затѣмъ 4_β . На основаніи приведенной въ предыдущемъ параграфѣ геометрической теоремы заключаемъ, что

точка 4' будетъ находиться на прямой 4 α 4 β , а такъ какъ она должна лежать также на $\overline{94}$, то она получится въ пересѣченіи прямыхъ 4 α 4 β и $\overline{94}$. Помощію точки 4' можно теперь построить точку 3', затѣмъ — точку 7', и наконецъ — точку 6'.

§ 11.

Инфлюэнтныя линіи.

Положимъ что на данную неизмѣняемую систему дѣйствуютъ силы $P_1, P_2, P_3, \dots$, и означимъ дѣйствіе, произведенное ими въ какомъ-нибудь мѣстѣ этой системы, черезъ X . Этимъ дѣйствіемъ можетъ быть: напряженіе, опорная реакція, сгибающій моментъ, и т. п.

Если дѣйствіе, произведенное одной только силой P , означимъ черезъ x_1 , одной только силой P_2 — черезъ x_2 , и т. д., то

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

Пусть y_1 — дѣйствіе, произведенное силой P_1 въ случаѣ, когда она $= 1$, y_2 — дѣйствіе, произведенное силой $P_2 = 1, \dots$ то

$$x_1 = P_1 y_1 \quad x_2 = P_2 y_2 \quad \dots$$

и слѣдовательно

$$X = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots$$

Когда силы $P_1, P_2, \dots$ параллельны между собою, то опредѣленіе величины X часто облегчается построениемъ линіи, выражающей вліяніе силы $= 1$ въ ея всевозможныхъ положеніяхъ, какія она можетъ занимать на данной системѣ или фермѣ. Эта линія называется *линіей вліянія*, или *инфлюэнтной линіей*. Инфлюэнтная линія относится всегда къ опредѣленной точкѣ, сѣченію или стержню фермы.

Если $o_3 d_0 c_0 B_1$ (фиг. 45а) инфлюэнтная линія для напряженія стержня ab (фиг. 45) то ея ордината y равняется напряженію этого стержня, произведенному силой $= 1$ тогда, когда ея положеніе опредѣлено этой ординатой. Если сила 1 будетъ замѣнена силой P_1 , то напряженіе будетъ $= P_1 y_1$, а когда на ферму дѣйствуютъ параллельныя силы $P_1, P_2, P_3, \dots$, которымъ соотвѣтствуютъ ординаты $y_1, y_2, y_3, \dots$, то произведенное ихъ совмѣстнымъ дѣйствіемъ напряженіе стержня ab

$$N = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots \quad (8)$$

при чемъ, очевидно, какъ силы P , такъ и ординаты y , нужно, вводить въ послѣднее уравненіе съ соотвѣтственными знаками.

При сравненіи уравненія (8) съ уравненіемъ (7) замѣчаемъ легко, что послѣднее отличается отъ перваго только знаменателемъ $n_a + n_c$, такъ что если положимъ

$$n_a + n_c = 1$$

то оба уравненія будутъ совершенно однородны. Изъ этого заключаемъ, что принимая за единицу силы длину $n_a + n_c$, получимъ какъ инфлюэнтную линію для напряженія стержня ac (фиг. 45)—ломанную линію $o_3 d_0 c_0 B_1$.

Для построенія инфлюэнтной линіи напряженія даннаго стержня нужно, поэтому, превратить ферму, посредствомъ устраненія этого стержня, въ цѣпь, и построить для послѣдней параллельную фигуру, причемъ единица силы должна быть взята равной алгебраической суммѣ плечъ того стержня, котораго напряженіе ищется.

Если на ферму дѣйствуетъ непрерывная нагрузка, которой единичный грузъ (постоянный или переменный), равенъ g , то элементу dx фермы соотвѣтствуетъ грузъ gdx , а произведенное имъ въ стержнѣ напряженіе будетъ

$$dN = (g \cdot dx) y$$

гдѣ y —ордината инфлюэнтной линіи, соотвѣтствующая этому грузу gdx . Вся нагрузка, начинающаяся на разстояніи x_1 и кончающаяся на разстояніи x_2 —отъ лѣвой опоры, произведетъ поэтому напряженіе

$$N = \int_{x_1}^{x_2} gdx \cdot y \dots \dots \dots (9)$$

Когда непрерывная нагрузка равномерна то g — величина постоянная, и тогда

$$N = g \int_{x_1}^{x_2} y dx \dots \dots \dots (10)$$

Послѣдній интеграль выражаетъ площадь инфлюэнтной линіи, заключенную между ординатами y_m и y_n , соотвѣтствующими предѣльнымъ точкамъ m и n непрерывной нагрузки. Если означимъ площадь $(mm_0 d_0 xm)$ (фиг. 45а) черезъ ω_1 , а площадь $(xc_0 n_0 nx)$ —черезъ ω_2 , то

$$N = g (-\omega_1 + \omega_2)$$

Инфлюэнтныя линіи весьма удобны для нахождения такихъ положеній подвижной нагрузки, при которыхъ напряженія въ данныхъ мѣстахъ достигаютъ своихъ предѣльныхъ значеній. Особенно просто получаются эти положенія для непрерывной равномерной нагрузки. — Такъ изъ формы инфлюэнтной линіи фиг. 45а слѣдуетъ непосредственно, что въ стержнѣ ab произойдетъ наибольшее положительное напряженіе тогда, когда будетъ нагружена часть xB_1 , и когда на части o_1x не будетъ никакой нагрузки. Отрицательное максимумъ произойдетъ при нагруженіи части o_1x , и ненагруженіи части xB_1 .

Когда подвижная нагрузка состоитъ изъ сосредоточенныхъ грузовъ, то наиболѣ невыгодное положеніе будетъ то, при которомъ одинъ изъ тяжелыхъ грузовъ совпадаетъ съ одной изъ наибольшихъ ординатъ инфлюэнтной линіи, а другіе тяжелые грузы сосредоточены по возможности вблизи большихъ ординатъ. На отрицательной части линіи должно въ это время находиться какъ можно менѣ грузовъ. Такое положеніе получается легко устанавливая нагрузку въ нѣсколько такихъ положеній, которыя кажутся наиболѣ невыгодными, и опредѣляя для каждого изъ нихъ ΣPy ; наиболѣ невыгоднымъ будетъ то положеніе для котораго ΣPy будетъ больше, чѣмъ для остальныхъ. Это положеніе получается помощію инфлюэнтной линіи значительно скорѣе, чѣмъ аналитическимъ путемъ *).

§ 12.

Задача. Построить инфлюэнтную линію напряженій для стержня $\overline{bh}$ представленной на фиг. 41 фермы.

Устраняемъ стержень $\overline{bh}$, и для полученной такимъ образомъ цѣпи строимъ параллельную фигуру. Цѣпь состоитъ изъ раскоснаго члена, заштрихованнаго въ фигурѣ, и изъ остальныхъ стержней фермы.

Раскосный членъ принимаемъ за собственную параллельную фигуру. Точку $4'$ беремъ на $\overline{45}$ произвольно, и проводимъ черезъ $4'$ $4'h' \parallel 4h$, до пересѣченія съ hi въ h' ; теперь опредѣляемъ точку g' (она совпадаетъ съ точкой g .) затѣмъ помощію g' и $4'$ получаемъ точку $3'$, и т. д.

Проектируемъ узлы a, b, c, d, f, g, h, i , и s на ось a_1s_0 получаемъ точки $a_1, b_1, c_1, d_1, f_1, g_1, h_1, i_1$ и s_0 , которыя соединяемъ между собою прямыми линіями, образующими многоугольникъ $a_2b_0c_0d_2f_0g_0h_0i_0s_0$. Если соединимъ a_2 съ s_0 , то

*) Болѣе подробно объ инфлюэнтныхъ линіяхъ см.: „Черепашинскій: Теорія сооруженій“. Вып. 1. стр. 116—126 §§. 71—75.

последній многоульникъ, по отношенію къ оси $a_2 s_0$ представляетъ инфлюэнтную линію стержня $6 h$.

Въ самомъ дѣлѣ: положимъ, что грузъ $= 1$ дѣйствуетъ на разстояніи x_1 отъ лѣвой опоры въ точкѣ p . Если разстояніе опоръ означимъ черезъ l , то реакція опоры a

$$R_a = \frac{l-x_1}{l}$$

а произведенное этимъ грузомъ въ стержнѣ $6 h$ напряженіе получится изъ уравненія

$$R_a \cdot \overline{aa'} - 1 \cdot \overline{pp'} + V \cdot n = 0$$

откуда

$$V = -\frac{1}{n} (R_a \cdot \overline{aa'} - 1 \cdot \overline{pp'})$$

и подставивъ для R_a значеніе,

$$V = -\frac{1}{n} \left(\frac{l-x_1}{l} \cdot \overline{aa'} - \overline{pp'} \right)$$

Продолжимъ линію груза 1 до пересѣченія съ $a_1 s_0$ въ p , съ $c_0 d_2$ въ p_0 , и съ $a_2 s_0$ — въ p_2 , то получимъ

$$\overline{p_0 p_2} = \overline{p_1 p_2} - \overline{p_1 p_0}$$

$$\overline{p_1 p_2} = \frac{a_1 a_2}{l} \cdot (l-x_1)$$

и такъ какъ по построенію

$$\overline{p_1 p_0} = \overline{pp'} \text{ и } \overline{a_1 a_2} = \overline{aa'}$$

то обозначивъ $\overline{p_0 p_2}$ черезъ η ,

$$\eta = \frac{aa'}{l} (l-x_1) - \overline{pp'}$$

Помощію этого уравненія получаемъ

$$V = -\frac{1}{n} \eta$$

и для $n = 1$.

$$V = -\eta$$

Если, поэтому, за единицу силы примемъ длину $= n$, то ординаты многоугольника $a_2 b_0 c_0 \dots$ (фиг. 41 а) взятые по отношенію къ оси $a_2 s_0$, будутъ равны напряженіямъ стержня $6 h$, произведеннымъ грузомъ $= 1$ во время его передвиженія вдоль фермы.

Инфлюэнтная линия стержня $\overline{4h}$.

Когда грузъ $= 1$ приложенъ къ точкѣ h (фиг. 41) то изъ условій равновѣсія получаемъ (фиг. 41 с)

$$Dcsx + V - 1 = 0$$

откуда

$$Dcsx = 1 - V$$

Если этотъ грузъ находится на какомъ-нибудь другомъ мѣстѣ, напр. слѣва h на узлѣ c , или справа h на узлѣ n , то

$$Dcsx + V = 0$$

и

$$Dcsx = -V$$

Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ, что ординаты инфлюэнтной линіи для $Dcsx$, равны, но противоположны ординатамъ инфлюэнтной линіи для V . Исключеніе составляетъ только ордината узла h , которая для $Dcsx$ на 1 меньше ординаты h_0h_2 .

Инфлюэнтная линія для $Dcsx$ представлена на фиг. 41b. Для ея построенія отложено

$$\beta_1\beta_0 = b_0b_2 \quad \gamma_1\gamma_0 = c_2c_0 \quad \delta_1\delta_0 = \delta_2\delta_2$$

$$\varphi_1\varphi_0 = f_2f_0 \quad x_1x_0 = g_2g_0 \quad h_3h_2 = \overline{h_1h_0} - 1 = \overline{h_1h_0} - n$$

Задача. Построить инфлюэнтную линію для стержня $\overline{7l}$ фермы, представленной на фиг. 42a.

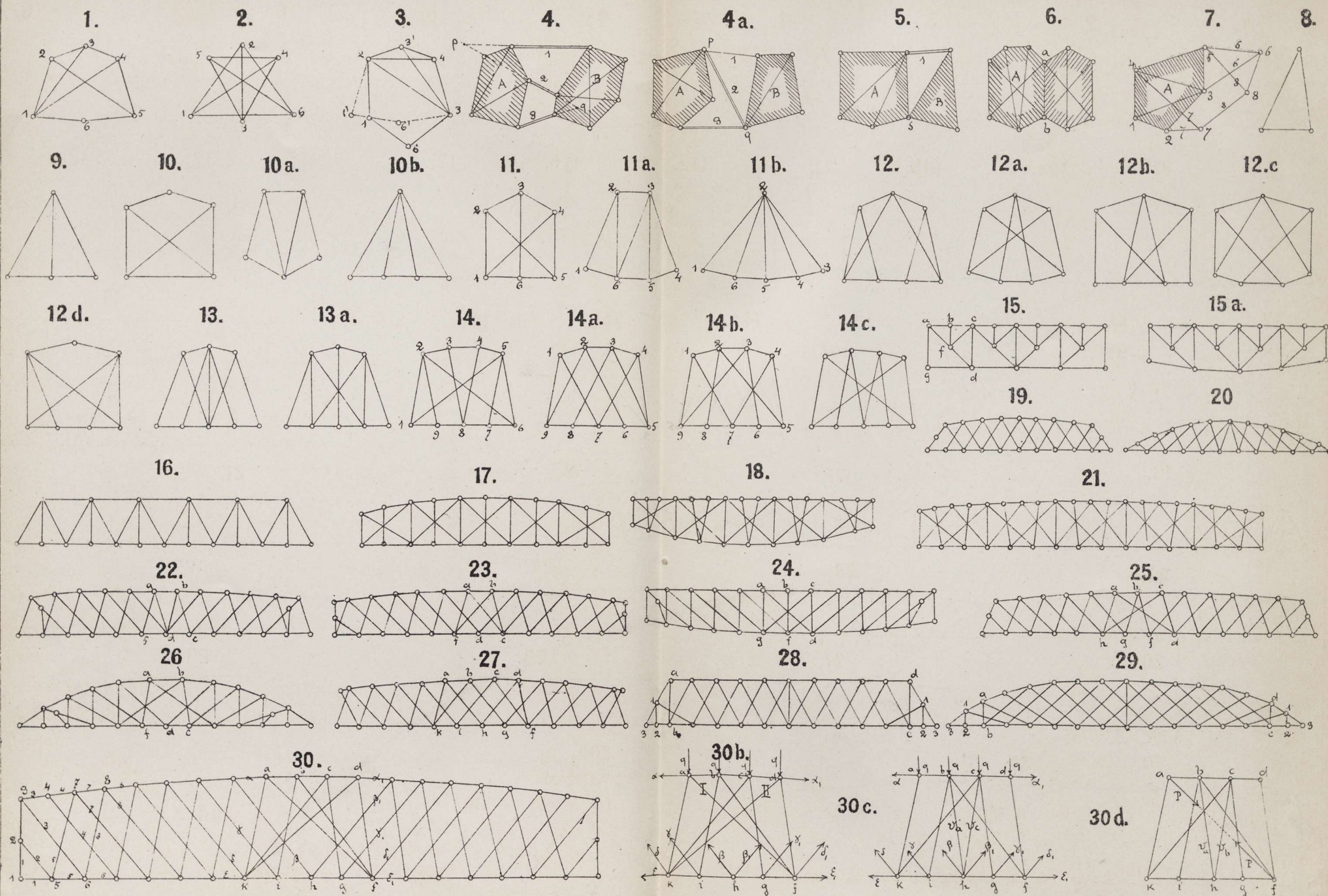
Устраненіе стержня $\overline{7l}$ нарушаетъ неизмѣняемость всей фермы, и превращаетъ ее въ цѣпь, имѣющую столько членовъ сколько стержней. Для построенія параллельной фигуры принято, что точки $7'$ и $7''$ совпадаютъ съ точками 7 и i . Точку $6'$ беремъ на $\overline{67}$, (или на продолженіи $\overline{67}$), произвольно; точка h' получается въ пересѣченіи прямой $\overline{6'K'}$, проведенной черезъ $6'$ параллельно $\overline{6h}$, съ продолженіемъ прямой $\overline{ih}$; точка $5'$ находится на прямыхъ $\overline{i5}$ и $\overline{6'5'}$, изъ которыхъ послѣдняя параллельна $\overline{65}$, точка g' —на прямыхъ $\overline{5'g'}$ и $\overline{h'g'}$, параллельныхъ $\overline{5g}$ и $\overline{hg}$, и т. д.

Такимъ же образомъ получаютъ точки $8'$, $9'$... k' . l' ... для узловъ справа $\overline{7i}$. Такъ k' находится на прямыхъ $\overline{ik}$ и $\overline{6'K'}$, $8'$ —на прямыхъ $\overline{78}$ и $\overline{k'8'}$, и т. д.

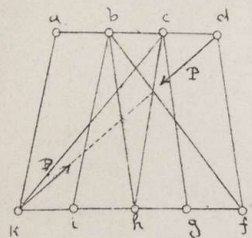
Помощію разстояній aa' , bb' , cc' dd' ... полученъ многоугольникъ $\alpha\beta\gamma\delta$... Для этого отложено $\alpha_1\alpha = aa'$ $\beta_1\beta = bb'$ $\gamma_1\gamma = cc'$

$\delta\delta=dd\dots$ и полученные точки $\alpha, \beta, \gamma, \delta\dots$ соединены между собою прямыми линиями. Также соединяемъ прямой линіей крайнія точки α и σ этого многоугольника, соотвѣтствующія крайнимъ узламъ a и s фермы.

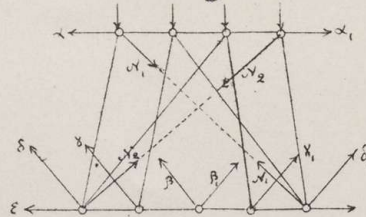
Если за единицу груза примемъ длину n_1 (перпендикуляръ, опущенный изъ V на N) то многоугольникъ $\alpha\beta\gamma\delta\dots\pi q_0\rho\sigma\alpha$ будетъ инфлюэнтной линіей для стержня 71. Доказательство можетъ быть получено такимъ же образомъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ для стержня 61.



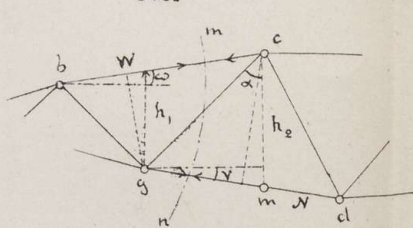
30f



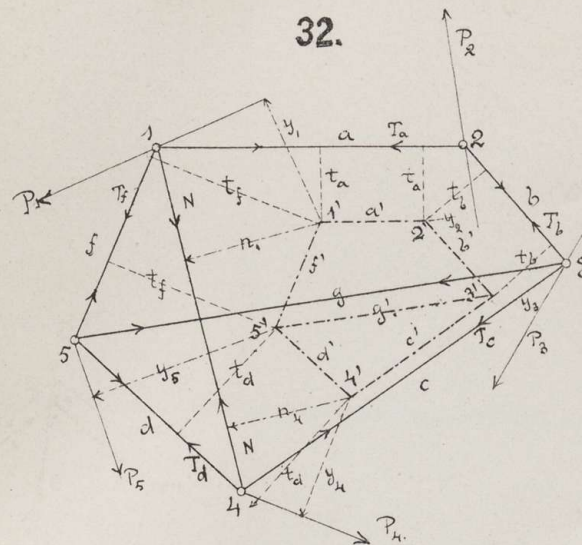
30g



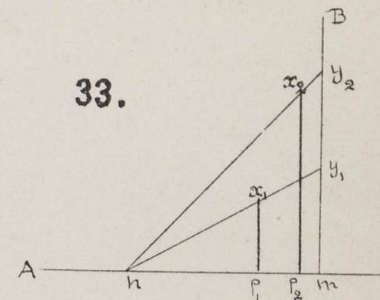
32'



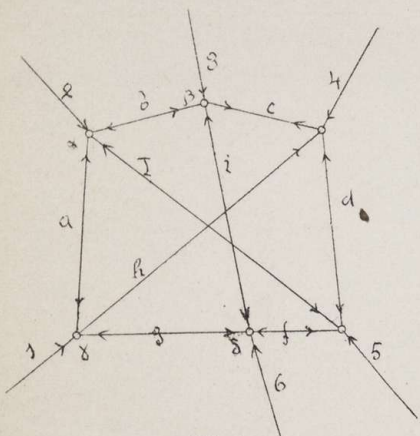
32.



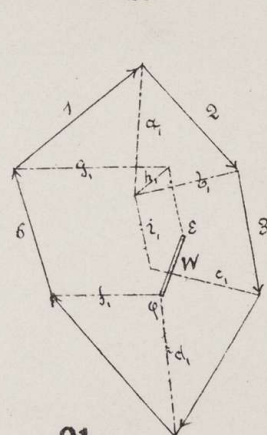
33.



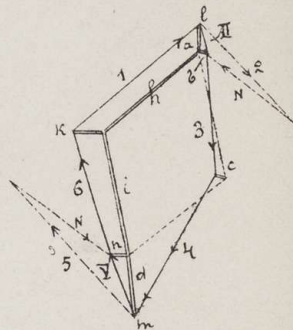
31.



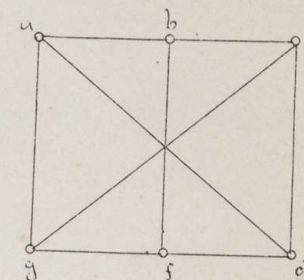
31b.



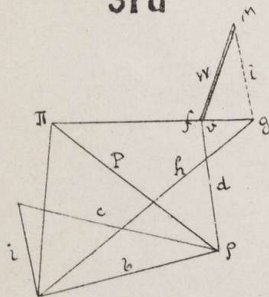
31h.



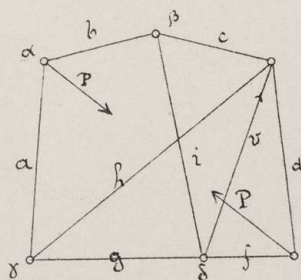
35.



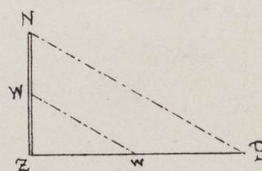
31d



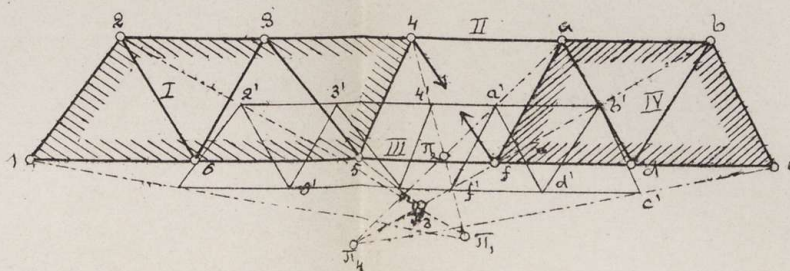
31c.



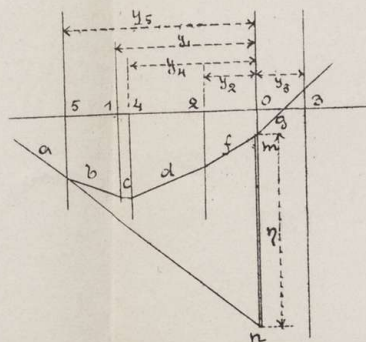
31f.



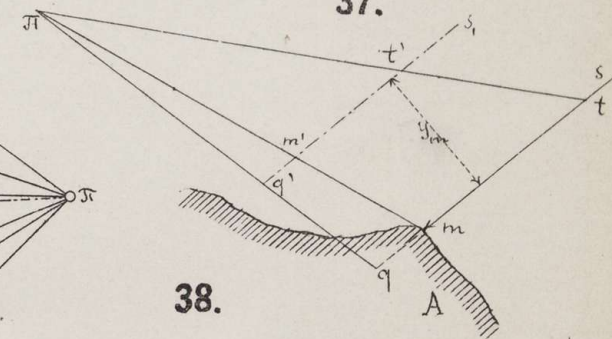
36.



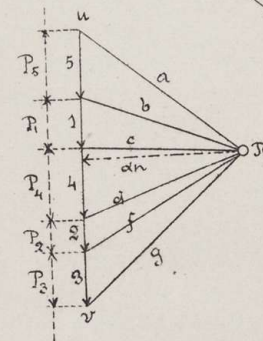
34.



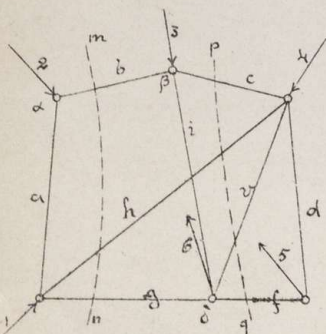
37.



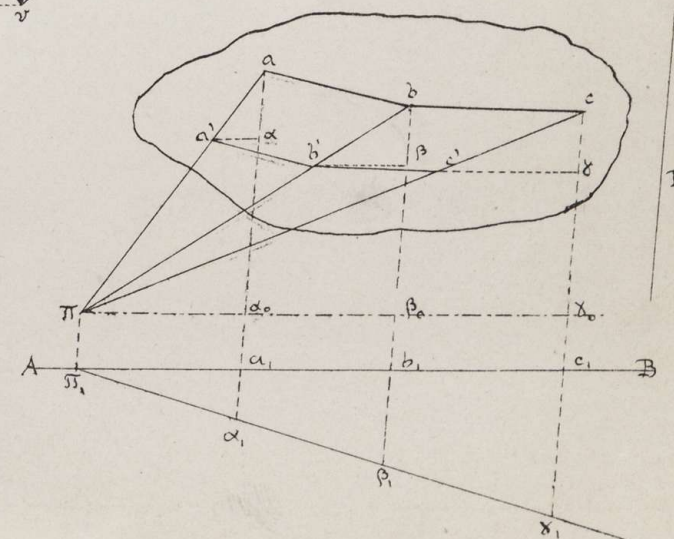
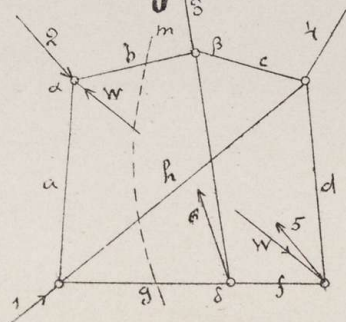
38.

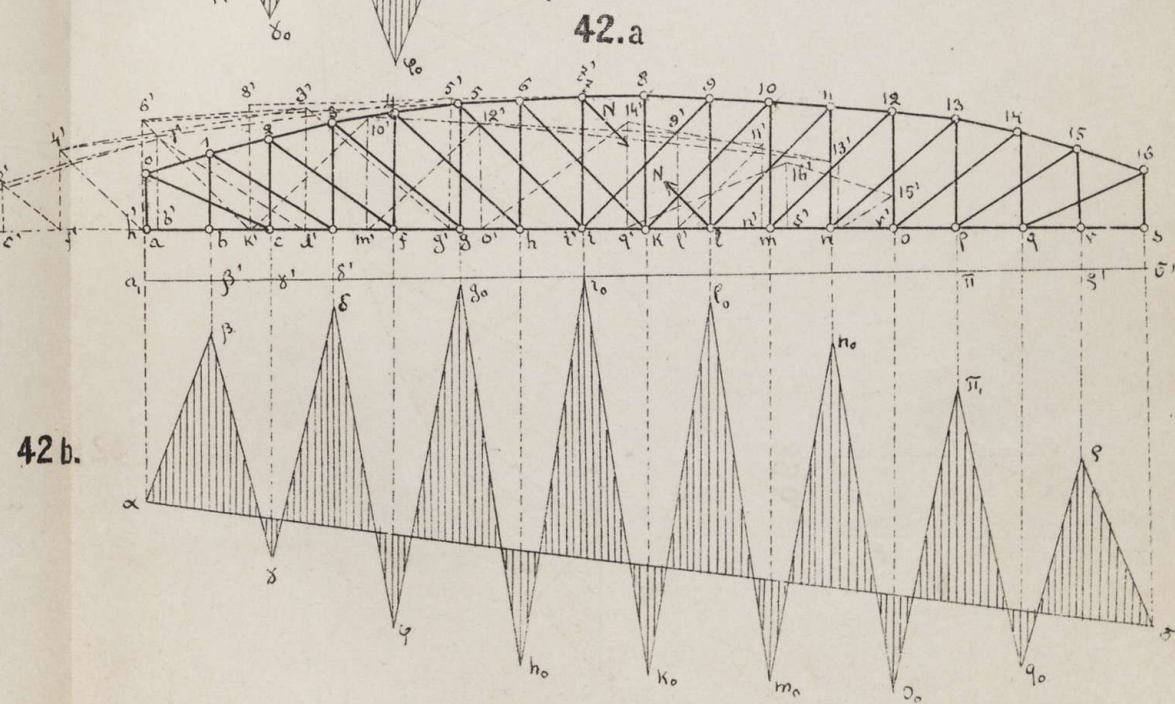
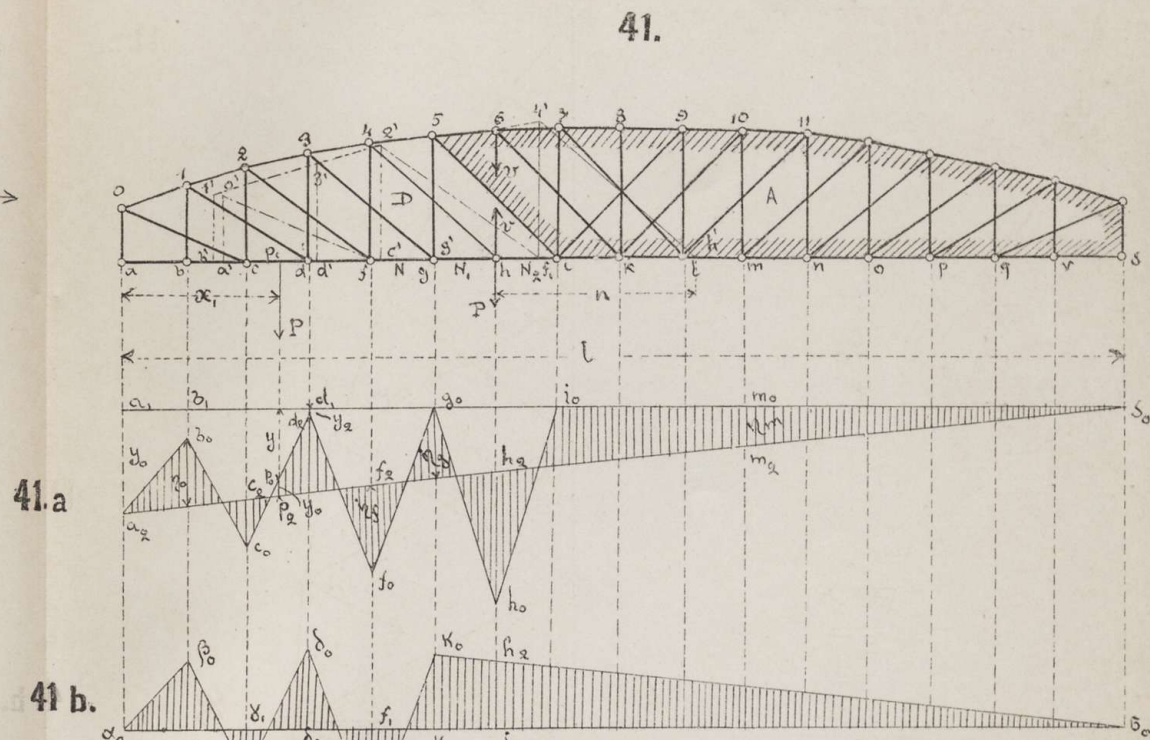
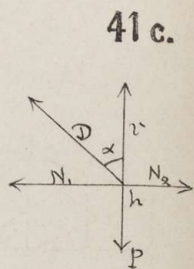
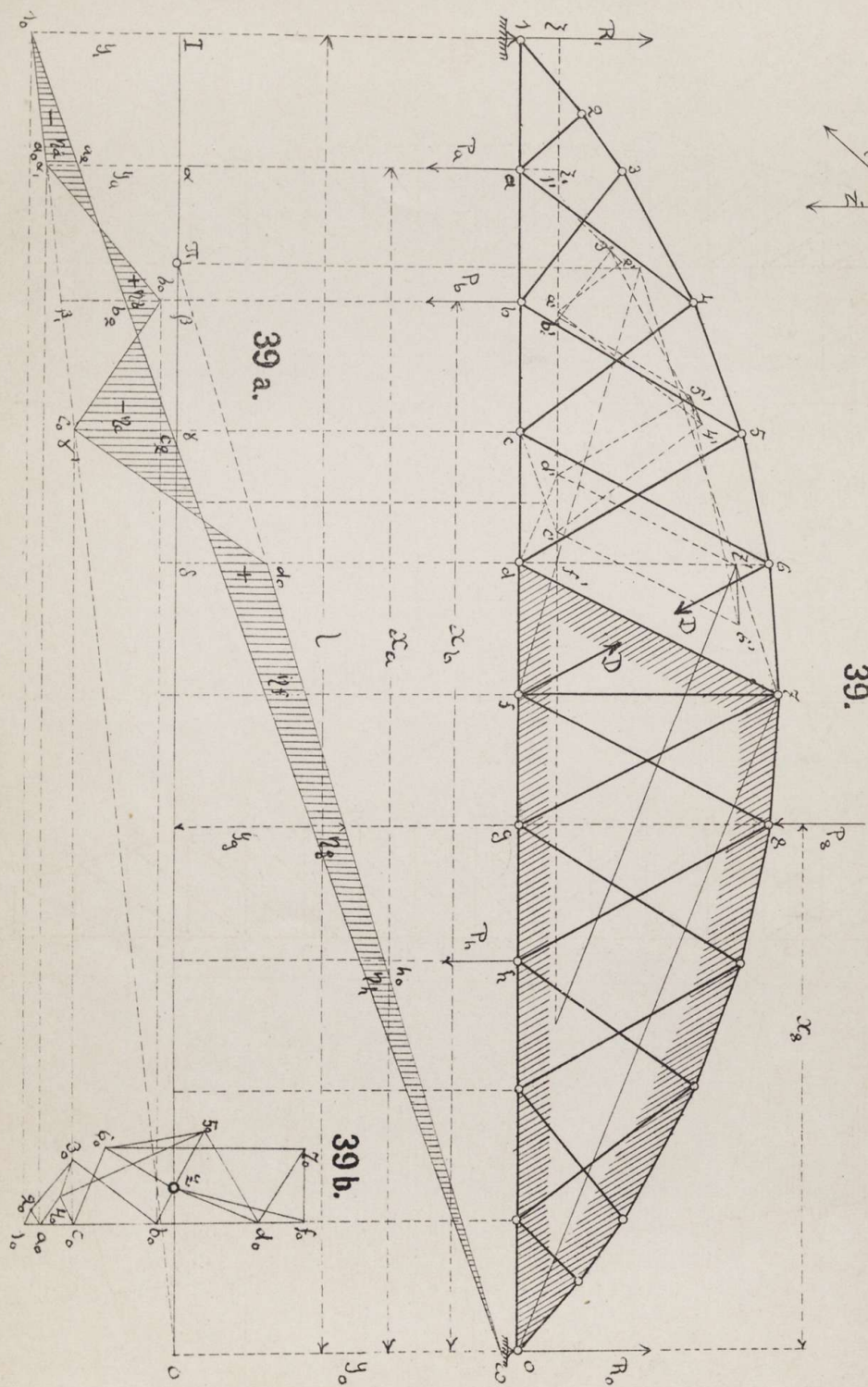


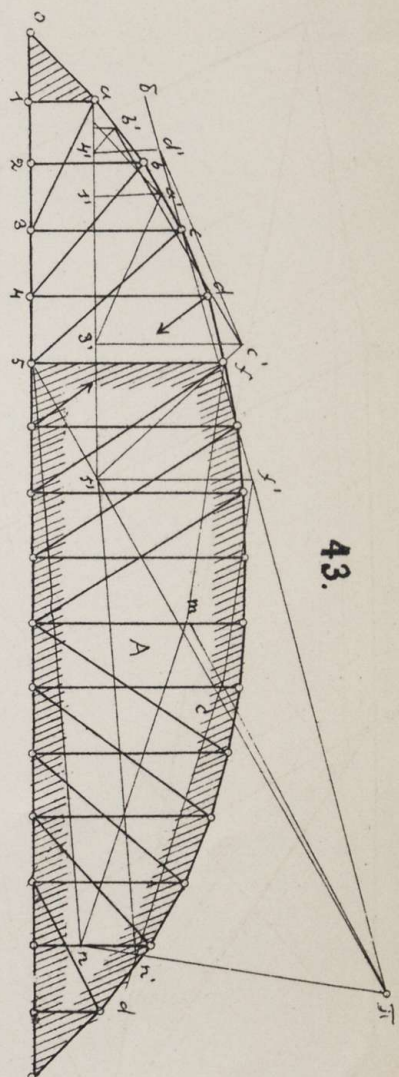
31a.



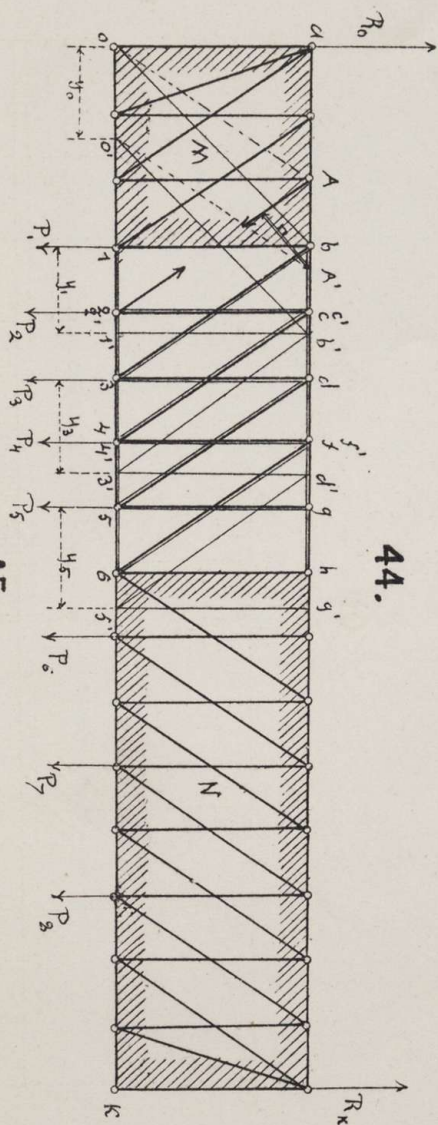
31g.





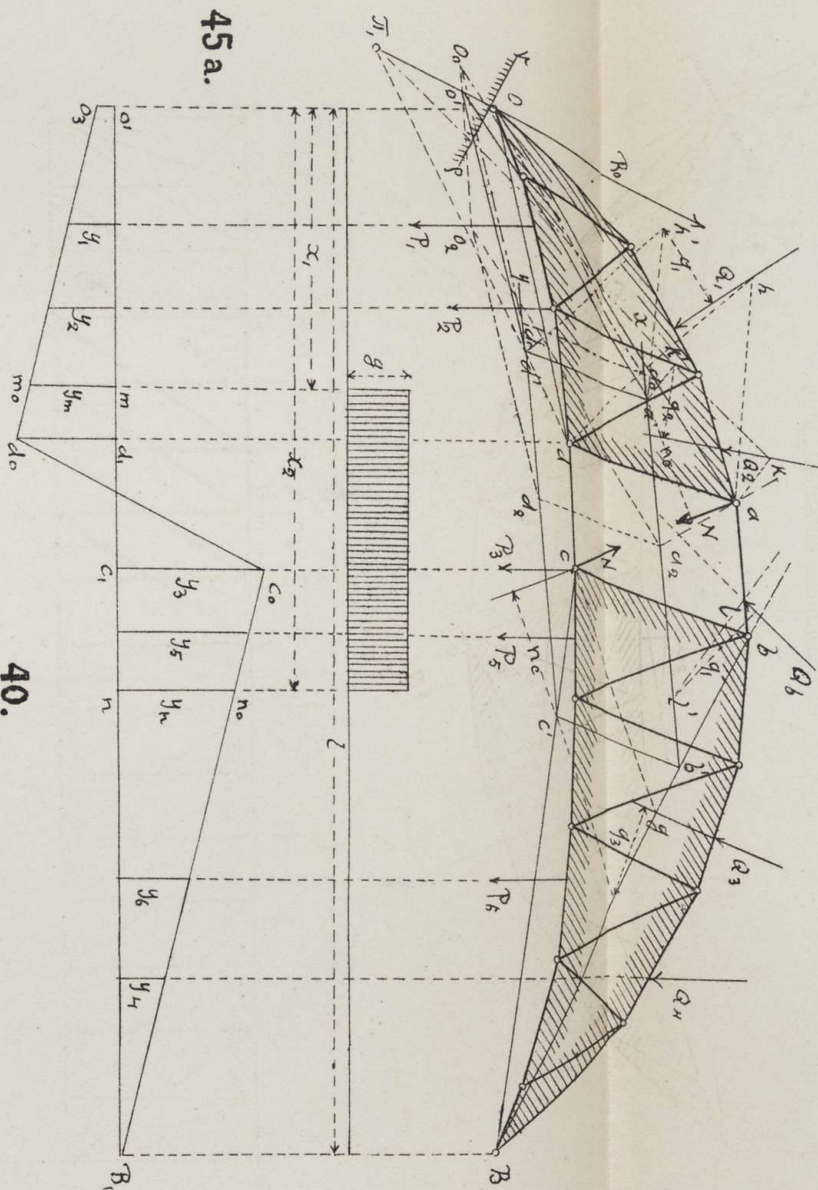


43.



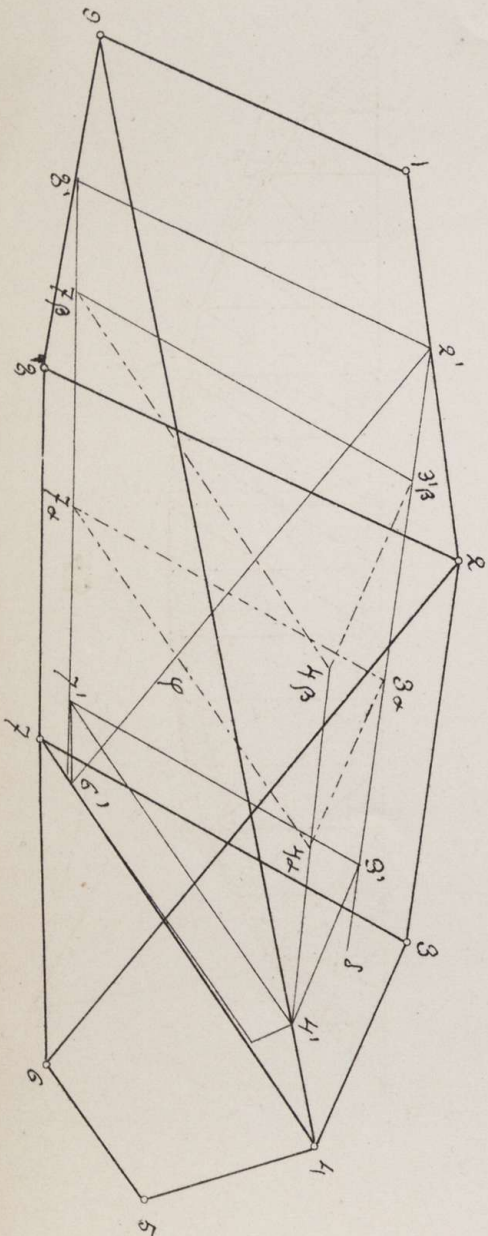
44.

45.



45a.

40.



КУРСЪ ВАРІАЦІОННАГО И СЧИСЛЕНІЯ.

Лекціи профессора математики **А. В. Лѣтникова**, читанныя на
II спеціальномъ курсѣ Императорскаго Московскаго Тех-
ническаго Училища въ 1878—9 г.

МОСКВА.

1891.

ВАРІАЦІОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

ВВЕДЕНІЕ.

Варіаціонное исчисленіе имѣетъ въ виду преимущественно дать способы для рѣшенія особаго рода задачъ о наибольшихъ и наименьшихъ. Задачи о *maxima* и *minima* уже рѣшались нами въ дифференціальномъ исчисленіи; въ нихъ требовалось опредѣлить тѣ значенія независимыхъ переменныхъ, при которыхъ данная функція получаетъ наибольшее или наименьшее значеніе.

Въ варіаціонномъ исчисленіи разсматриваются выраженія, — большую частію опредѣленные интегралы, —которыя въ своемъ составѣ заключаютъ нѣкоторую неизвѣстную функцію и ея производныя. Задача состоитъ въ томъ, что-бы найти тотъ видъ или форму, которую надо дать неизвѣстной функціи для того, чтобы разсматриваемое выраженіе получило наибольшее или наименьшее значеніе; неизвѣстнымъ вопроса является форма функціи.

Въ интегральномъ исчисленіи намъ уже встрѣчались вопросы, въ которыхъ неизвѣстнымъ была форма функціи; такъ было при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій. Искомыя функціи опредѣлялись интегрированіемъ этихъ уравненій. Тѣмъ-же самымъ процессомъ находится видъ функціи и въ варіаціонномъ исчисленіи. Мы увидимъ впослѣдствіи, какъ здѣсь составляется дифференціальное уравненіе, интегрированіе котораго даетъ неизвѣстную функцію.

Понятіе о *maximum*'ѣ и *minimum*'ѣ въ варіаціонномъ исчисленіи остается тоже, что и въ дифференціальномъ; для того, чтобы отличать *maximum* или *minimum*, предстоитъ и здѣсь сравнивать величины разсматриваемаго выраженія со смежными его значеніями, но только для полученія этихъ смежныхъ значеній должно измѣнить безконечно мало форму или видъ функціи, оставляя безъ переменны величины переменныхъ независимыхъ. Такія безконечно-малыя измѣненія формы функціи называются варіаціями. Употребленіе этихъ безконечно малыхъ составляетъ особенность варіаціоннаго исчисленія. Подобныя-же безконечно малыя играютъ важную роль въ теоретическихъ построеніяхъ механики. Прежде чѣмъ приступить къ изложенію

началь вариационнаго исчисления, я считаю полезнымъ сообщить въ сжатомъ очеркѣ нѣкоторыя историческія свѣдѣнія о происхожденіи и развитіи теоріи наибольшихъ и наименьшихъ, тѣмъ болѣе, что исторія возникновенія этихъ вопросовъ тѣсно связана съ началомъ развитія анализа вообще. Обработка этой теоріи весьма много способствовала уясненію истинныхъ началъ науки. Геніальные математики прошлаго и настоящаго столѣтія посвящали ей свои труды.

Въ первый разъ вопросы о наибольшихъ и наименьшихъ встрѣчаются у греческаго геометра Апполонія (родившагося за 200 лѣтъ до Р. Х.). Апполоній Пергейскій былъ творцомъ теоріи коническихъ сѣченій. Въ своемъ трактатѣ объ этихъ кривыхъ онъ ставитъ и рѣшаетъ вопросъ о нахожденіи наибольшаго и наименьшаго разстояній данной точки отъ даннаго коническаго сѣченія. Рѣшеніе этого вопроса, соотвѣтствующаго проведенію черезъ данную точку нормали, мало поучительно для насъ по своему чисто синтетическому характеру. Апполоній просто предлагаетъ построеніе и затѣмъ доказываетъ, что всякая другая линія, проведенная отъ точки до сѣченія, будетъ въ случаѣ minimum'a длиннѣе той, которая дается построеніемъ.

Настоящее начало ученія о наибольшихъ и наименьшихъ относится къ XVII столѣтію. Французскій математикъ Ферматъ, современникъ и другъ знаменитаго Паскаля, жившій въ срединѣ XVII столѣтія и слѣдовательно послѣ Декарта, но до открытія дифференціальнаго и интегральнаго исчисления Лейбницемъ и Ньютономъ, первый далъ истинный принципъ, могущій служить для опредѣленія наибольшихъ и наименьшихъ значеній функціи. Онъ замѣтилъ, что, когда функція, измѣняясь, подходитъ къ наибольшему или наименьшему значенію, малыя измѣненія ея становятся все меньше и меньше и наконецъ, въ сосѣдствѣ съ тахімумъ или мінімумъ, дѣлаются совсѣмъ нечувствительными. Не трудно видѣть, что это есть тотъ самый принципъ, которымъ мы пользуемся и теперь въ дифференціальномъ исчисленіи для отысканія тахімум'a и мінімум'a. Дѣйствительно; если $y = f(x)$, то приращеніе функціи Δy выразится, какъ извѣстно, такъ:

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \dots$$

Изъ этого мы видимъ, что вообще Δy есть безконечно-малая величина того-же порядка, какъ и Δx ; но для значеній наибольшихъ или наименьшихъ $\frac{dy}{dx} = 0$, а потому:

$$\Delta y = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3 y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \dots$$

слѣдовательно Δu будетъ безконечно-малымъ въ сравненіи съ Δx , т. е. измѣненія функціи дѣлаются нечувствительными въ соотвѣствіе ея наибольшихъ и наименьшихъ значеній. Способъ Фермата столь близокъ къ способу дифференціального исчисления, что Лагранжъ и Лапласъ, великіе авторитеты въ дѣлѣ науки, считали Фермата изобрѣтателемъ новаго анализа. Самый способъ Фермата состоитъ въ слѣдующемъ: чтобы найти максимум или minimum функціи, надо написать уравненіе, выражающее, что эта функція равна той-же функціи, въ которой переменному дано неопредѣленно малое приращеніе; по сокращеніи въ обѣихъ частяхъ одинаковыхъ членовъ и раздѣленіи на это приращеніе, мы получимъ уравненіе, дающее рѣшеніе вопроса.

Для примѣра разсмотримъ максимумъ выраженія:

$$u = bx^2 - x^3.$$

Этотъ максимумъ соотвѣтствуетъ наибольшему объему цилиндра, вписаннаго въ данный конусъ, при чемъ b есть высота конуса, а x разстояніе верхняго основанія цилиндра отъ вершины конуса. Дадимъ x неопредѣленно-малое приращеніе ε и напомнимъ, что величина функціи не измѣнится отъ этого приращенія; будемъ имѣть:

$$bx^2 - x^3 = b(x + \varepsilon)^2 - (x + \varepsilon)^3$$

откуда

$$0 = 2bx\varepsilon + b\varepsilon^2 - 3x^2\varepsilon - 3x\varepsilon^2 - \varepsilon^3;$$

по раздѣленіи на ε получимъ:

$$0 = 2bx + b\varepsilon - 3x^2 - 3x\varepsilon - \varepsilon^2.$$

Пренебрегая членами содержащими ε по ихъ неопредѣленной малости, находимъ:

$$3x^2 = 2bx,$$

откуда:

$$x = \frac{2b}{3}.$$

Не трудно замѣтить, что способъ этотъ въ сущности одинаковъ съ предлагаемымъ въ дифференціальномъ исчисленіи.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $u = f(x)$; тогда по способу Фермата

$$f(x) = f(x + \varepsilon)$$

или:

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = 0.$$

Раздѣляя на ε , находимъ:

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = 0.$$

Затѣмъ должно сдѣлать $\varepsilon = 0$; но

$$\left(\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = f'(x)$$

и такимъ образомъ способъ Фермата приводитъ къ уравненію

$$f''(x) = 0.$$

Ферматъ не указалъ однако общихъ приѣмовъ для отыскиванія производныхъ отъ всякихъ функцій, почему при каждомъ приложеніи его способа приходилось выполнять на самомъ дѣлѣ все указанное выше вычисленіе. Вычисленіе это, вслѣдствіе присутствія въ уравненіи радикаловъ, тригонометрическихъ функцій и т. п. дѣлалось иногда затруднительнымъ, и потому способъ Фермата не всегда оказывался приложимымъ.

Лейбницъ, раздѣляющій съ Ньютономъ славу открытія дифференціального исчисления, въ первомъ своемъ мемуарѣ объ этомъ предметѣ (въ 1684 году), далъ общій способъ для нахождения наибольшихъ и наименьшихъ значеній функцій. Припомнимъ въ нѣсколькихъ словахъ, въ чемъ заключается сущность этого способа. Пусть:

$$u = f(x, y, \dots).$$

Максимумомъ называется значеніе этой функціи большее смежныхъ съ нимъ значеній, а минимумомъ—значеніе меньшее смежныхъ, такъ-что разность

$$f(x+h, y+k, \dots) - f(x, y, \dots)$$

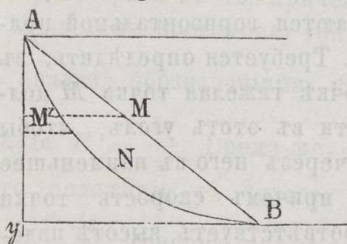
для maximum'a отрицательна, а для minimum'a положительна. Разность эта есть полное приращеніе функціи Δu , которое, по строкѣ Тейлора, напишется такъ:

$$\Delta u = du + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \dots,$$

гдѣ $du = \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \dots$ есть совокупность членовъ съ бесконечно малыми 1-го порядка. Доказывается, что для значеній maximum и minimum должно-быть $du = 0$, и что по знаку d^2u можно различить maximum отъ minimum'a. Такимъ образомъ процессъ отысканія наибольшихъ и наименьшихъ значеній состоитъ изъ двухъ частей: 1) въ полномъ измѣненіи функціи совокупность бесконечно малыхъ членовъ 1-го порядка должна быть приравнена нулю и 2) знакъ суммы бесконечно малыхъ членовъ 2-го порядка служить для отличія maximum'a отъ minimum'a. Тотъ-же въ сущности методъ употребляется и въ вариационномъ исчисленіи.

Въ 1687 году появилось безсмертное твореніе Исаака Ньютона „Математическія начала естественной философіи“, содержащее въ себѣ между прочимъ и основанія новаго математическаго ученія, получившаго впослѣдствіи наименованіе дифференціального и интегральнаго исчисленія. Въ книгѣ Ньютона была помѣщена слѣдующая задача: найти кривую линію, которая при вращеніи около оси образовала-бы тѣло, испытывающее при движеніи въ жидкости по направленію оси наименьшее сопротивленіе, при чемъ сопротивленіе жидкости принимается пропорціональнымъ квадрату скорости. Ньютонъ рѣшилъ эту задачу, давъ дифференціальное уравненіе кривой, которое служить для ея построенія, но при этомъ не указалъ способа, которымъ онъ дошелъ до дифференціального уравненія. Задача Ньютона была первою задачею о минимумѣ особаго рода: въ ней требовалось опредѣлить, какой видъ нужно дать неизвѣстной функціи, для того чтобы нѣкоторое выраженіе, ее содержащее (интегралъ, выражающій величину сопротивленія), получило наименьшее значеніе. Задача эта была рѣшена впослѣдствіи Иваномъ Бернулли (въ 1701 году).

Въ 1696 г. Иванъ Бернулли предложилъ въ Лейпцигскихъ актахъ на рѣшеніе математиковъ задачу о брахистохронѣ *), или кривой наискорѣйшаго ската. Задача эта состоитъ въ слѣдующемъ: тяжелая точка падаетъ изъ точки *A* въ точку *B* по какойнибудь кривой; требуется опредѣлить видъ кривой, по которой точка дойдетъ отъ *A* до *B* въ наименьшее время.

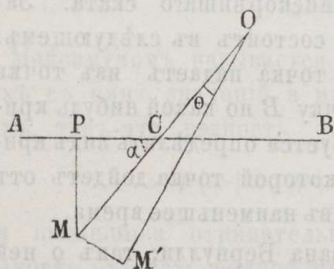


Задача эта была извѣстна и до Ивана Бернулли; такъ о ней размышлялъ еще Галилей, который ошибочно считалъ брахистохроною дугу круга; другіе полагали, что брахистохрона есть прямая линія, что съ перваго взгляда казалось довольно правдоподобнымъ. Впрочемъ достаточно сдѣлать одно простое замѣчаніе, чтобы поселить сомнѣніе въ томъ, что брахистохрона есть непременно прямая. Дѣйствительно, тяжелая точка, опускаясь по дугѣ кривой, которая въ началѣ пути ближе подходитъ къ вертикальной линіи чѣмъ прямая, приобрететъ въ меньшее время извѣстную скорость, и потому пройденное ею пространство можетъ-быть значительно болѣе того, которое она прошла-бы, двигаясь по прямой линіи *AB*. Вслѣдствіе этого, по крайней мѣрѣ въ началѣ движенія, проекція точки, движущейся по кривой линіи, на вертикальную линію *Ay* будетъ впереди проекціи точки,

*) Названіе это происходитъ отъ двухъ греческихъ словъ; *βραχυστος* — кратчайшій и *χρόνος* — время.

движущейся по прямой и начавшей свое движение одновременно съ первою точкою. Очевидно, что то-же можетъ быть и во все время движенія, и тогда точка, движущаяся по кривой, дойдетъ до B скорѣе точки, перемѣщающейся по прямой AB .

Бернулли еще до напечатанія задачи сообщилъ ее въ письмѣ Лейбницу, который рѣшилъ ее тотчасъ-же по полученіи письма. Тогда они вдвоемъ условились предложить ее для рѣшенія всѣмъ геометрамъ, давши одинъ годъ времени для состязанія. Еще до истеченія установленнаго срока, было предложено три рѣшенія: одно принадлежало Якову Бернулли, брату Ивана Бернулли, занимавшему должность профессора въ Базелѣ, другое маркизу Лопиталю, а третье появилось въ Извѣстіяхъ Лондонскаго Королевскаго общества (Philosophical Transactions) безъ имени автора. Иванъ Бернулли, рассмотрѣвъ рѣшенія, тотчасъ узналъ безыменнаго автора по его львинымъ когтямъ, какъ онъ выразился (*tanquam ex ungue leonem*). Рѣшеніе это принадлежало Ньютону. По прошествіи года Иванъ Бернулли напечаталъ и свое рѣшеніе. Оно отличалось синтетическимъ характеромъ и основывалось на рѣшеніи слѣдующей задачи. Въ вертикальной плоскости дается безконечно малый уголъ Θ , стороны котораго



пересѣкаются горизонтальною прямою AB . Требуется опредѣлить, въ какой точкѣ тяжелая точка M должна войти въ этотъ уголъ, чтобы пройти черезъ него въ наименьшее время, причемъ скорость точки въ M соотвѣтствуетъ высотѣ паденія, равной разстоянію отъ AB , то есть она равна $\sqrt{2g \cdot MP}$. Пусть $OC = l$, $MC = x$, $MP = y$, $\angle MCP = \alpha$. Тогда скорость точки M будетъ $v = \sqrt{2gy}$, $\text{arc} MM' = (x+l) \Theta$, а время, въ которое точка M пройдетъ безконечно малый элементъ MM' , выразится такъ:

$$t = \frac{(x+l)\Theta}{\sqrt{2gy}},$$

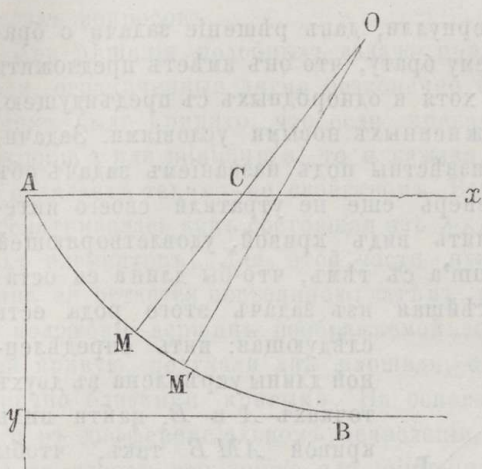
ибо движеніе по элементу должно быть принимаемо равномернымъ; но $y = x \cdot \sin \alpha$ и потому:

$$t = \frac{\Theta}{\sqrt{2g \sin \alpha}} \cdot \frac{x+l}{\sqrt{x}}.$$

Положивъ для отысканія минимума $\frac{dt}{dx} = 0$, найдемъ, что время

t будетъ наименьшимъ при $x = l$.

Переходя затѣмъ къ рѣшенію задачи о брахистохронѣ, замѣтимъ, что точка должна проходить не только всю дугу AB , но и каждый элементъ этой кривой въ наименьшее время. Возьмемъ



оси координатъ какъ показано на чертежѣ; пусть M и M' будутъ двѣ бесконечно близкія точки брахистохроны, а MO и $M'O$ двѣ смежныя нормали; тогда должно быть по доказанному $MC = OC$; но MC есть величина нормали N , а OM радиусъ кривизны ρ . Поэтому брахистохрона есть кривая, обладающая тѣмъ свойствомъ, что $\rho = 2N$, а такая кривая, какъ намъ

извѣстно изъ интегральнаго исчисленія, есть циклоида, имѣющая точку возврата въ A , причемъ основаніе ея находится на Ax .

Приведемъ постановку той же задачи съ общеупотребительными въ анализѣ обозначеніями. Скорость всякаго движенія $v = \frac{ds}{dt}$,

откуда $dt = \frac{ds}{v}$. Время-же, въ которое точка пройдетъ изъ одного положенія въ другое, выразится слѣдующимъ образомъ:

$t = \int \frac{ds}{v}$, причемъ интеграль долженъ быть взятъ между соответствующими предѣлами. Для падающей тяжелой точки

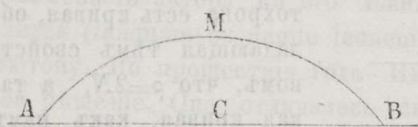
$v = \sqrt{2gy}$; притомъ $ds = \sqrt{1+p^2} \cdot dx$, гдѣ $p = \frac{dy}{dx}$; поэтому:

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2gy}} \cdot dx.$$

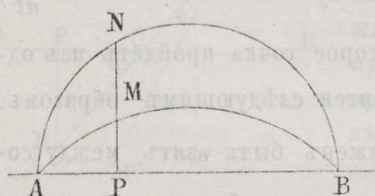
Это выраженіе должно быть наименьшимъ. Понятно, что для нахождения этого минимума мы не можемъ приложить извѣстнаго намъ способа. Дѣйствительно мы прежде всего должны были бы произвести интегрированіе, но оно въ настоящемъ случаѣ невыполнимо, такъ какъ мы не знаемъ y и p въ функціи x . Варіаціонное исчисленіе дастъ намъ способъ для опредѣленія того вида, или той формы, которую нужно дать неизвѣстной функціи y въ послѣднемъ выраженіи для того, чтобы оно получило наименьшее значеніе.

Приведенное выше рѣшеніе Ив. Бернулли не указываетъ намъ пути, къ рѣшенію задачъ, аналогичныхъ задачѣ о брахистохронѣ: оно основывается на соображеніяхъ исключительно приложимыхъ къ этой задачѣ.

Въ 1697 году Яковъ Бернулли, давъ рѣшеніе задачи о брахистохронѣ, сообщилъ своему брату, что онъ имѣетъ предложить для рѣшенія много задачъ, хотя и однородныхъ съ предыдущею, но болѣе трудныхъ и усложненныхъ новыми условіями. Задачи, о которыхъ онъ говорилъ, извѣстны подъ названіемъ задачъ объ изопериметрахъ; онѣ и теперь еще не утратили своего интереса. „Требуется опредѣлить видъ кривой, удовлетворяющей извѣстному условію maximum'a съ тѣмъ, что-бы длина ея оставалась постоянной“. Простѣйшая изъ задачъ этого рода есть



слѣдующая: нить опредѣленной длины укрѣплена въ двухъ точкахъ A и B , найти видъ кривой AMB такъ, чтобы площадь $AMBCA$ была наибольшая. Вопросъ рѣшается элементарнымъ путемъ; искомая кривая есть дуга круга. Первая задача объ изопериметрахъ, предложенная Яковомъ Бернулли, состояла въ слѣдующемъ:



пусть имѣются двѣ кривыя AMB и ANB . Ордината NP есть извѣстная функція ординаты MP , требуется опредѣлить видъ кривой AMB , такъ, чтобы длина ея оставалась постоянной, а площадь $ANBA$ была-бы maximum. Ив.

Бернулли далъ рѣшеніе этой задачи, которое оказалось невѣрнымъ, и когда братъ его указалъ на ошибку, онъ не хотѣлъ съ нимъ согласиться, что повело къ непріятному спору между двумя знаменитыми братьями. Задачи объ изопериметрахъ впоследствии обратили на себя вниманіе Эйлера, который далъ общій способъ для рѣшенія этихъ и другихъ аналогичныхъ имъ вѣтвѣ; способъ этотъ, называемый способомъ относительныхъ наибольшихъ и наименьшихъ, до сихъ поръ остается въ варіаціонномъ исчисленіи и носить имя Эйлера.

Работы Якова Бернулли по рѣшенію задачъ объ изопериметрахъ должны быть признаны особенно замѣчательными. Не должно забывать, что работы эти появились всего чрезъ 10 лѣтъ послѣ открытія дифференціального исчисленія, въ то время, когда обращеніе съ этимъ новымъ математическимъ орудіемъ сопряжено было съ большими затрудненіями,

Не имѣя времени для подробнаго разбора изслѣдованій Якова Бернулли, я ограничусь краткимъ изложеніемъ сущности его пріема рѣшенія задачъ объ изопериметрахъ. Тотъ-же способъ съ небольшими измѣненіями онъ прикладывалъ и къ рѣшенію другихъ вопросовъ.

При рѣшеніи подобныхъ задачъ приходилось сравнивать площади, ограниченныя двумя безконечно близкими кривыми. Принципомъ было принято, что если кривая обладаетъ свойствомъ *maximum'a* или *minimum'a*, то и каждая безконечно малая часть ея обладаетъ такимъ-же свойствомъ. Безконечно малая часть эта рассматривалась какъ состоящая изъ 2-хъ, 3-хъ, 4-хъ прямолинейныхъ элементовъ. Для этой части нужно было выразить, что длина ея остается постоянною; затѣмъ, измѣнивъ безконечно мало положеніе вершинъ воображаемой ломанной линіи, замѣняющей кривую, получали двѣ площади, ограниченныя двумя безконечно близкими кривыми. На основаніи принципа, доказаннаго въ дифференціальномъ исчисленіи, разность этихъ площадей въ случаѣ *maximum'a* или *minimum'a* площади должна быть равна нулю, такъ какъ эта разность представляетъ безконечно малое измѣненіе площади, предполагаемой наибольшею или наименьшею. Исключивъ изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія и изъ уравненія, выражающаго условіе задачи, безконечно малыя измѣненія координатъ, получали уравненіе, рѣшающее вопросъ.

Послѣ Якова Бернулли вопросами того-же рода занимались съ успѣхомъ Тейлоръ, Германъ, Маклоренъ и наконецъ знаменитый Эйлеръ. Послѣдній былъ приглашенъ къ рѣшенію подобныхъ задачъ Иваномъ Бернулли, предложившимъ ему задачу о проведеніи кратчайшей линіи между двумя точками на данной поверхности. Для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, именно: для поверхностей цилиндрическихъ, коническихъ и нѣкоторыхъ коноидовъ рѣшенія этого вопроса даны были еще Яковомъ Бернулли, который однако не сообщилъ подробностей употребленнаго имъ анализа. Эйлеръ, тогда еще молодой математикъ (въ 1729 году), въ запискахъ Петербургской Академіи Наукъ, далъ общее рѣшеніе вопроса. Съ того времени Эйлеръ не разъ возвращался къ вопросамъ этого рода. Такъ въ 1732 году онъ напечаталъ еще мемуаръ, въ которомъ былъ указанъ общій способъ для рѣшенія задачъ объ относительныхъ наибольшихъ и наименьшихъ,—такъ названы имъ всѣ задачи, въ которыхъ искомая кривая линія, обладающая свойствомъ *maximum'a* или *minimum'a*, должна при томъ удовлетворять какому-либо данному условію; понятно, что къ этой категоріи вопросовъ относятся и задачи объ изопериметрахъ.

По способу Эйлера всѣ задачи этого рода приводятся къ простѣйшимъ, въ которыхъ на искомую кривую линію не налагается никакихъ условій. Дальнѣйшія изслѣдованія Эйлера были напечатаны въ 1736 и въ 1741 годахъ; наконецъ въ 1744 году явился самый большой и подробный мемуаръ Эйлера о варіаціонномъ исчисленіи. Въ этомъ мемуарѣ были рѣшены почти всѣ задачи, извѣстныя до того времени, и множество другихъ, общимъ и однороднымъ приемомъ. При рѣшеніи всѣхъ вопросовъ Эйлеръ выходитъ изъ общаго принципа, прилагаемаго и теперь, а именно: чтобы найти максимумъ или минимумъ интеграла, содержащаго нѣкоторую функцію, должно измѣнить безконечно мало форму функціи и измѣненіе, происшедшее отъ этого въ интегралѣ, приравнять нулю.

Приемы Эйлера въ приложеніи къ частнымъ случаямъ встрѣчали однако не мало затрудненій, часто непреодолимыхъ. Самые начала анализа не были еще поставлены съ полною ясностью и нѣкоторыя изъ соображеній, основанныхъ на разсмотрѣніи безконечно малыхъ измѣненій формы безконечно малыхъ-же частей кривыхъ линій, оставляли многого желать со стороны точности.

Послѣ Эйлера изслѣдованіями того-же рода занимался знаменитый Лагранжъ, первыя работы котораго были направлены къ устраненію недостатковъ способа, бывшаго до того времени въ употребленіи. Онъ нашелъ необходимымъ измѣнить самыя начала новаго исчисленія; устранивъ геометрическія соображенія, къ которымъ обыкновенно обращались его предшественники, онъ придалъ этимъ началамъ чисто аналитическій характеръ, черезъ что сдѣлалъ ихъ болѣе общими. Расширивъ вмѣстѣ съ тѣмъ весьма значительно поле изысканій, относящихся къ разсматриваемому предмету, онъ сдѣлалъ въ то-же время его болѣе доступнымъ, вслѣдствіе совершеннаго устраненія имъ многихъ неясностей и неточностей, остававшихся въ старыхъ способахъ изслѣдованія. Въ рукахъ Лагранжа варіаціонное исчисленіе приняло совершенно новый видъ, который оно сохраняетъ за немногими исключеніями и до сего времени. Самъ Эйлеръ первый съ восхищеніемъ отнесся къ новымъ изысканіямъ Лагранжа, которыя заставляли позабыть весьма многое изъ его собственныхъ открытій.

Первыя работы Лагранжа сдѣлались извѣстными Эйлеру еще до появленія ихъ въ печати. Въ письмѣ къ Лагранжу, писанномъ въ 1754 году, Эйлеръ говоритъ, что аналитическое рѣшеніе задачи объ изопериметрахъ, данное Лагранжемъ, не оставляетъ ничего болѣе желать; онъ находитъ, что новое исчисленіе доведено теперь до полнаго совершенства. Въ томъ-же письмѣ Эйлеръ сообщаетъ Лагранжу, что, руководствуясь его указаніями,

онъ и самъ, слѣдуя аналитическому методу, достигъ до новыхъ результатовъ, но, что онъ не будетъ ихъ печатать до тѣхъ поръ, пока Лагранжъ не обнародуетъ своихъ открытій, чтобы не лишить Лагранжа, хотя бы и въ малой степени, той чести, которая должна ему принадлежать всецѣло, какъ творцу новаго исчисленія. Эйлеру пришлось ждать до 1760 года, когда Лагранжъ впервые обнародовалъ въ запискахъ Туринской Академіи свои изысканія по предмету варіаціоннаго исчисленія. Для Лагранжа вопросы о кривыхъ линіяхъ, обладающихъ свойствами maximum'a и minimum'a, стали вскорѣ предметомъ второстепеннаго интереса; цѣль, которую онъ имѣлъ въ виду при усовершенствованіи этихъ теорій, простиралась гораздо далѣе: онъ ставилъ ихъ въ основу своихъ изысканій въ теоретической механикѣ, гдѣ однимъ изъ главнѣйшихъ принциповъ являлось начало наименьшаго дѣйствія, впервые имъ уясненное при помощи варіаціоннаго исчисленія. Знаменитый трактатъ по Аналитической Механикѣ, изданный Лагранжемъ, навсегда останется памятникомъ необычайной силы теоретическаго мышленія. Со времени Лагранжа взглядъ на варіаціонное исчисленіе вполне установился и оно сдѣлалось необходимою частью классическаго курса математическаго анализа.

Въ настоящемъ столѣтіи работы по варіаціонному исчисленію продолжались въ направленіи, указанномъ Лагранжемъ, при чемъ трудами многихъ геометровъ поле приложеній новаго исчисленія значительно расширено и разрѣшены нѣкоторые вопросы теоріи, оставленные почти незатронутыми Лагранжемъ. Изъ ученыхъ, наиболѣе способствовавшихъ новымъ успѣхамъ варіаціоннаго исчисленія, можно назвать Гаусса, Пуассона, Остроградскаго, Сарруса, Коши и Якоби. Большинство этихъ ученыхъ принимали то понятіе о варіаціи функціи, котораго держался и Лагранжъ и которое нѣкоторые (Коши, Остроградскій) доводили до весьма значительной степени общности, расширявшей область варіаціоннаго исчисленія до того, что дифференціальное исчисленіе являлось въ немъ лишь частнымъ случаемъ. Обобщеніе это, хотя и весьма выгодное съ теоретической стороны, вело однако и къ весьма важному неудобству: при немъ понятіе о варіаціи функціи, и безъ того довольно отвлеченное, становилось частію неопредѣленнымъ и трудно постигаемымъ. Вслѣдствіе этого многіе изъ новѣйшихъ авторовъ, желая достигнуть возможно большей ясности въ своихъ сочиненіяхъ по предмету варіаціоннаго исчисленія, принуждены были, возвращаясь къ тому существенному значенію варіаціи, которое было указано Эйлеромъ и Лагранжемъ, ограничить это понятіе, относя его исключительно къ измѣненію формы и не подвергая въ то-же время измѣненіямъ

величины переменных независимых. Такое определение вариации функции принято в наиболее подробных и обстоятельных курсах нового времени, между которыми слѣдуетъ указать сочиненія Штрауха, Желлета, Штегмана, Муаньо-Линделова и Тодген-тера, изъ которыхъ послѣдній авторъ издалъ превосходный трудъ по критической исторіи вариационнаго исчисленія въ XIX столѣтіи.

Въ слѣдующихъ лекціяхъ я буду держаться тѣхъ воззрѣній на вариацию, которыя были развиты новѣйшими писателями объ этомъ предметѣ. Тѣмъ не менѣе, такъ какъ другое болѣе общее понятіе о вариации до сихъ поръ еще принимается многими учеными и уже успѣло проникнуть въ область прикладныхъ наукъ, я нахожу необходимымъ изложить здѣсь также сущность этого другаго воззрѣнія на предметъ, что и рассчитываю сдѣлать въ концѣ настоящаго краткаго курса вариационнаго исчисленія.

Приступимъ затѣмъ къ изложенію занимающаго насъ предмета.

Объ измѣненіяхъ формы функции. Понятіе о вариации.

Въ вариационномъ исчисленіи, какъ было сказано выше, рассматриваются измѣненія величины функции, происходящія отъ измѣненія ея формы, при чемъ величина переменнаго независимаго остается постоянной. Пусть

$$y = f(x)$$

есть нѣкоторая функция x извѣстнаго вида.

Положимъ, что мы измѣнили этотъ видъ, не измѣняя величины переменнаго независимаго, и рассматриваемъ другую функцию $F(x)$. Тогда разность

$$F(x) - f(x)$$

представитъ измѣненіе, происшедшее въ величинѣ первоначально данной функции, вслѣдствіе измѣненія ея формы. Это измѣненіе можно назвать конечной вариацией функции.

Но въ вариационномъ исчисленіи рассматриваются не конечныя вариации, а непрерывное измѣненіе формы функции, такъ что переходъ $f(x)$ къ функции $F(x)$ совершается не скачкомъ, но непрерывно, чрезъ безконечно малыя измѣненія величины функции.

Чтобы представить себѣ эти безконечно малыя измѣненія формы функции, обратимся къ мысли, высказанной еще Эйлеромъ. Именно, данную намъ функцию $f(x)$ будемъ рассматривать, какъ частный случай другой болѣе общей функции, содержащей кромѣ переменнаго независимаго x еще нѣкоторый переменный параметръ t . Пусть эта функция будетъ:

$$Y = \varphi(x, t),$$

такъ-что при $t = t_0$, гдѣ t_0 есть нѣкоторая опредѣленная постоянная величина, мы должны имѣть:

$$\varphi(x, t_0) = f(x).$$

Если мы эту функцію φ выберемъ такъ, чтобы еще при $t = t_1$, гдѣ t_1 также нѣкоторая опредѣленная постоянная величина,

$$\varphi(x, t_1) = F(x),$$

тогда, измѣняя непрерывно параметръ t отъ $t = t_0$ до $t = t_1$, мы непрерывно, чрезъ рядъ безконечно-малыхъ приращеній, перейдемъ отъ функціи $f(x)$ къ функціи $F(x)$.

Выбрать такую функцію φ , которая удовлетворяетъ двумъ вышесказаннымъ условіямъ, можно безчисленнымъ множествомъ способовъ. Дѣйствительно, мы можемъ, напримѣръ, взять:

$$Y = \varphi(x, t) = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} f(x) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} F(x),$$

потому что тогда будемъ имѣть при $t = t_0$

$$\varphi(x, t_0) = f(x),$$

а при $t = t_1$

$$\varphi(x, t_1) = F(x).$$

Но очевидно, что коэффиціенты при $f(x)$ и $F(x)$ можно возвысить въ какія угодно положительныя степени, и функція $\varphi(x, t)$ будетъ все таки имѣть требуемыя свойства; можно также замѣнить эти коэффиціенты множествомъ другихъ функцій t , лишь-бы эти функція были таковы, чтобы коэффиціентъ при $f(x)$ обращался въ 1 при $t = t_0$ и въ нуль при $t = t_1$, а коэффиціентъ при $F(x)$ дѣлался-бы равнымъ 1 при $t = t_1$ и нулю при $t = t_0$. Наконецъ очевидно къ данному выше выраженію для $\varphi(x, t)$ можно прибавить какую угодно функцію x и t , лишь-бы эта функція обращалась въ нуль при $t = t_0$ и при $t = t_1$, для чего было-бы достаточно ввести въ нее множитель $(t - t_0)(t - t_1)$. Однимъ словомъ требуемыхъ функцій φ очевидно можно найти безчисленное множество.

И такъ, возьмемъ опять данную намъ функцію $f(x)$ и примемъ, что она есть частный случай болѣе общей функціи $\varphi(x, t)$, такъ что при $t = t_0$

$$\varphi(x, t_0) = f(x).$$

Разсмотримъ безконечно-малое измѣненіе этой функціи болѣе общаго вида, происходящее отъ безконечно малаго измѣненія па-

параметра t , т. е. разность $\varphi(x, t + dt) - \varphi(x, t)$; это безконечно малое измѣненіе разложимъ по стокрѣ Тейлора; тогда получимъ:

$$\varphi(x, t + dt) - \varphi(x, t) = \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt + \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot \frac{dt^2}{2} + \frac{d^3\varphi}{dt^3} \cdot \frac{dt^3}{2 \cdot 3} + \dots$$

Сдѣлаемъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства $t = t_0$, тогда:

$$\varphi(x, t_0 + dt) - f(x) = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_0 \cdot dt + \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right)_0 \cdot \frac{dt^2}{2} + \left(\frac{d^3\varphi}{dt^3} \right)_0 \cdot \frac{dt^3}{2 \cdot 3} + \dots$$

Мы ко всѣмъ производнымъ приставили значки (0) для того, чтобы обозначить, что въ нихъ вмѣсто t поставлено t_0 . Это разложеніе представляетъ безконечно малую вариацию, или измѣненіе величины функціи $f(x)$, происходящее отъ измѣненія ея вида вслѣдствіе приращенія dt , полученнаго параметромъ t . Мы будемъ называть эту вариацию полною и обозначимъ ее черезъ ∇y , такъ-что:

$$\nabla y = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_0 \cdot dt + \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right)_0 \cdot \frac{dt^2}{2} + \dots$$

Членъ 1-го порядка въ этомъ разложеніи называется вариациею 1-го порядка или просто вариациею функціи y и обозначается чрезъ δy ; поэтому

$$\delta y = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_0 dt$$

Членъ 2-го порядка называется вариациею 2-го порядка и обозначается чрезъ $\delta^2 y$, т. е.

$$\delta^2 y = \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right)_0 \cdot dt^2,$$

причемъ дѣлитель 2 не относятъ къ вариации. Точно также вариациею 3-го порядка будетъ:

$$\delta^3 y = \left(\frac{d^3\varphi}{dt^3} \right)_0 \cdot dt^3$$

и т. д. Такъ что полная вариация

$$\nabla y = \delta y + \frac{\delta^2 y}{2} + \frac{\delta^3 y}{2 \cdot 3} + \dots$$

Такимъ образомъ, по этому опредѣленію, вариации функціи не отличаются отъ дифференціаловъ. Вариация, какъ видимъ, есть дифференціалъ функціи, взятый по параметру t , при част-

номъ значеніи этого параметра. Полная-же вариация составляет-ся изъ вариаций различныхъ порядковъ точно такъ, какъ приращеніе функціи составляется изъ дифференціаловъ различныхъ порядковъ. Разсмотримъ теперь ближе, что такое δy , $\delta^2 y$, $\delta^3 y$

Производныя $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0$, $\left(\frac{d^3\varphi}{dt^3}\right)_0$, всѣ должны быть разсматриваемы, какъ совершенно произвольныя функціи x . Въ самомъ дѣлѣ, во 1-хъ, очевидно, что это суть функціи одного x , такъ какъ вмѣсто t въ нихъ поставлено t_0 ; во 2-хъ, видѣ функціи $\varphi(x, t)$ зависитъ отъ нашего произвола, нужно только, чтобы она удовлетворяла одному опредѣленному условію, выражающемуся равенствомъ:

$$\varphi(x, t_0) = f(x);$$

поэтому мы можемъ положить, что:

$$\varphi(x, t) = y + (t-t_0)\psi_1(x) + \frac{(t-t_0)^2}{2} \psi_2(x) + \frac{(t-t_0)^3}{2 \cdot 3} \psi_3(x) + \dots,$$

гдѣ $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$,... суть какія угодно функціи x . Это положеніе мы можемъ сдѣлать, такъ какъ главное требованіе при этомъ удовлетворяется, то есть при $t=t_0$

$$\varphi(x, t_0) = y = f(x).$$

Возьмемъ теперь производную отъ обѣихъ частей равенства:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \psi_1(x) + (t-t_0) \psi_2(x) + \frac{(t-t_0)^2}{2} \cdot \psi_3(x) + \dots$$

и при $t=t_0$ получимъ $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = \psi_1(x)$ и слѣдовательно $\delta y = \psi_1(x) dt$,

т. е. вариация δy равняется совершенно произвольной функціи x .

Точно также:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \psi_2(x) + (t-t_0) \psi_3(x) + \dots,$$

а при $t=t_0$ будемъ имѣть $\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0 = \psi_2(x)$, которая тоже есть произвольная функція, и т. д. для всѣхъ прочихъ производныхъ.

Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \delta y &= \psi_1(x) \cdot dt \\ \delta^2 y &= \psi_2(x) \cdot dt^2 \\ \delta^3 y &= \psi_3(x) \cdot dt^3 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

и ясно стало-быть, что эти вариации суть произвольныя функціи x и при томъ имѣютъ величины бесконечно малыя 1-го, 2-го, 3-го и т. д. порядковъ.

Кромѣ функціи y въ выраженія, отъ которыхъ приходится брать вариации, обыкновенно входятъ еще производныя различныхъ порядковъ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$. Посмотримъ сначала, чему равняются вариации этихъ производныхъ и при томъ вариации 1-го порядка, такъ какъ мы пока ограничимся въ нашихъ послѣдующихъ разсмотрѣніяхъ бесконечно малыми 1-го порядка.

Пусть y перемѣнился на

$$y + \nabla y = y + \delta y + \frac{\delta^2 y}{2} + \dots;$$

тогда $\frac{dy}{dx}$ перемѣнится на:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta y}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d\delta^2 y}{dx} + \dots;$$

слѣдовательно вариация

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}$$

т. е. вариация производной функціи равняется производной вариации функціи. Точно также 2-я производная $\frac{d^2y}{dx^2}$ перемѣнится на

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} + \dots$$

и

$$\delta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2\delta y}{dx^2}.$$

Вообще:

$$\delta \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n \delta y}{dx^n}.$$

Такимъ образомъ вариация отъ производной равняется производной отъ вариации.

Далѣе разсмотримъ вариацию функціи отъ y и ея производныхъ. Пусть:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right).$$

Обозначимъ:

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \dots, \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)};$$

тогда:

$$V = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}).$$

Чтобы получить вариацию V , ограничиваясь первым порядком безконечно малых, перемѣнимъ y на $y + \delta y$; вслѣдствіе этого y' перемѣнится на $y' + \delta y'$, y'' перемѣнится на $y'' + \delta y''$ Вариация нашей функціи будетъ:

$$\delta V = f(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'', \dots) - f(x, y, y', y'', \dots)$$

съ тѣмъ, чтобы въ этой разности были удержаны только члены 1-го порядка. Разлагая ее по строку Тейлора, получимъ:

$$\delta V = \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dy'} \delta y' + \frac{dV}{dy''} \delta y'' + \dots$$

Примемъ теперь такія обозначенія (Муаньо):

$$\frac{dV}{dy} = P; \quad \frac{dV}{dy'} = P_1; \quad \frac{dV}{dy''} = P_2, \dots$$

Тогда

$$\delta V = P \delta y + P_1 \delta y' + P_2 \delta y'' + \dots + P_n \delta y^{(n)}.$$

Если замѣтимъ, что

$$\delta y' = \frac{d\delta y}{dx}, \quad \delta y'' = \frac{d^2\delta y}{dx^2}, \dots$$

то получимъ окончательно вариацию нашей функціи въ видѣ:

$$\delta V = P \delta y + P_1 \frac{d\delta y}{dx} + P_2 \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \dots + P_n \frac{d^n\delta y}{dx^n}.$$

Небезполезно сравнить вариацию функціи съ дифференціаломъ. Пусть

$$y = f(x);$$

тогда

$$dy = f(x + dx) - f(x);$$

ограничиваясь въ этой разности только членомъ 1-го порядка, имѣемъ

$$dy = f'(x) \cdot dx,$$

при чемъ $f'(x)$ есть опредѣленная функція. Чтобы получить вариацию, мы должны взять такую функцію $\varphi(x, t)$, чтобы при $t = t_0$ было $\varphi(x, t_0) = f(x)$, и тогда:

$$\delta y = \varphi(x, t_0 + dt) - f(x);$$

ограничиваясь также только членомъ 1-го порядка, найдемъ

$$\delta y = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_0 . dt = \psi_1(x) . dt,$$

гдѣ $\psi_1(x)$ совершенно произвольная функція. Возьмемъ теперь дифференціалъ отъ V :

$$dV = \frac{dV}{dx} . dx + \frac{dV}{dy} . dy + \frac{dV}{dy'} . dy' + \frac{dV}{dy''} . dy'' + \dots$$

Сравнивая это разложение съ разложениемъ δV , мы видимъ во 1-хъ, что здѣсь есть лишній членъ: $\frac{dV}{dx} . dx$; во 2-хъ, множители $\delta y, \delta y', \dots$ суть функціи x совершенно произвольнаго вида, тогда какъ $dy, dy', \dots$ суть тоже функціи x , но не произвольныя.

Варіація опредѣленнаго интеграла съ постоянными предѣлами.

Положимъ мы имѣемъ выраженіе:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

гдѣ x_1 и x_2 суть постоянныя количества, а подынтегральная функція V есть:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right),$$

гдѣ y есть неизвѣстная функція x . Чтобы получить варіацію этого интеграла, представимъ себѣ, ограничиваясь безконечно малыми 1-го порядка, что y измѣнился на $y + \delta y$, вслѣдствіе чего и $\frac{dy}{dx}$ измѣнится на $\frac{dy}{dx} + \delta \frac{dy}{dx}$, или на $\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta y}{dx}$ и т. д. Функція V измѣнится на $V + \delta V$ и слѣдовательно варіація δS будетъ равна разности:

$$\int_{x_1}^{x_2} (V + \delta V) dx - \int_{x_1}^{x_2} V dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta V . dx.$$

Варіація δV была уже вычислена; такимъ образомъ, употребляя принятые обозначенія, будемъ имѣть:

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left(R \delta y + P_1 \frac{d\delta y}{dx} + P_2 \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \dots + P_n \frac{d^n\delta y}{dx^n} \right) . dx.$$

Преобразуемъ теперь это выраженіе такъ, чтобы подъ знакъ интеграла не входили производныя отъ δy , а только само δy . Этого можно достигнуть чрезъ интегрированіе по частямъ. Пер-

вый членъ $\int_{x_1}^{x_2} P \delta y \cdot dx$ такъ и останется. Второй членъ преобразовываемъ чрезъ интегрированіе по частямъ:

$$\int_{x_1}^{x_2} P_1 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} P_1 \cdot \delta y - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dP_1}{dx} \cdot \delta y \cdot dx.$$

Я употребляю здѣсь знакъ $\int_{x_1}^{x_2}$, данный Саррусомъ и называемый знакомъ подстановки. Онъ показываетъ, что въ выраженіе, стоящее за нимъ, надо вставить вмѣсто x сначала верхній предѣлъ x_2 , а потомъ нижній x_1 и взять разность, вычитая изъ перваго результата второй. Если-же знакъ $\int$ имѣетъ только одинъ указатель (x_1), то это значить, что въ послѣдующее выраженіе просто надо вставить вмѣсто переменнаго x количество x_1 .

Возьмемъ въ выраженіи δS третій членъ

$$\int_{x_1}^{x_2} P_2 \frac{d^2 \delta y}{dx^2} \cdot dx$$

и интегрируемъ по частямъ два раза; послѣ перваго интегрированія получимъ:

$$\int_{x_1}^{x_2} P_2 \frac{d^2 \delta y}{dx^2} \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} P_2 \frac{d\delta y}{dx} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dP_2}{dx} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot dx.$$

Взявъ по частямъ интегралъ во 2-й части, найдемъ:

$$\int_{x_1}^{x_2} P_2 \frac{d^2 \delta y}{dx^2} \cdot dx = \left[\left(P_2 \frac{d\delta y}{dx} - \frac{dP_2}{dx} \cdot \delta y \right) + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 P_2}{dx^2} \cdot \delta y \cdot dx \right].$$

Подобнымъ же образомъ поступимъ съ четвертымъ членомъ въ выраженіи δS и т. д. Законъ образованія послѣдовательныхъ равенствъ очевиденъ и по аналогіи можемъ прямо написать слѣ-

дующее выражение общего члена, также получаемого чрезъ интегрирование по частямъ:

$$\int_{x_1}^{x_2} P_n \cdot \frac{d^n \delta y}{dx^n} \cdot dx =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(P_n \frac{d^{n-1} \delta y}{dx^{n-1}} - \frac{dP_n}{dx} \cdot \frac{d^{n-2} \delta y}{dx^{n-2}} + \frac{d^2 P_n}{dx^2} \frac{d^{n-3} \delta y}{dx^{n-3}} - \dots + \frac{d^{n-1} P_n}{dx^{n-1}} \cdot \delta y \right)$$

$$\pm \int_{x_1}^{x_2} \frac{dP_n}{dx^n} \cdot \delta y \cdot dx.$$

Теперь всё эти выражения надо вставить въ данное выше выражение вариации δS . Такъ какъ окончательная формула получится очень сложною, то для сокращенія введемъ слѣдующія новыя обозначенія. Коэффициентъ при δy подъ знакомъ интеграла обозначимъ чрезъ (P) ; онъ будетъ:

$$P = \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2 P_2}{dx^2} - \dots \pm \frac{d^n P_n}{dx^n} = (P).$$

Внѣ знака интеграла всё члены будутъ находиться подъ знакомъ подстановки. Коэффициентъ при δy подъ знакомъ подстановки обозначимъ чрезъ (P_1) , т. е. положимъ

$$P_1 = \frac{dP_2}{dx} + \frac{d^2 P_3}{dx^2} - \dots \pm \frac{d^{n-1} P_n}{dx^{n-1}} = (P_1).$$

Подъ тѣмъ-же знакомъ подстановки коэффициентъ при $\frac{d\delta y}{dy}$ обозначимъ чрезъ (P_2) ; онъ будетъ:

$$P_2 = \frac{dP_3}{dx} + \frac{d^2 P_4}{dx^2} - \dots \pm \frac{d^{n-2} P_n}{dx^{n-2}} = (P_2).$$

Далѣе получимъ рядъ подобныхъ-же выраженій, служащихъ коэффициентами при $\frac{d^2 \delta y}{dx^2}, \frac{d^3 \delta y}{dx^3}, \dots$ подъ тѣмъ-же знакомъ подстановки; обозначимъ ихъ чрезъ $(P_3), (P_4) \dots$ и т. д. Послѣдній коэффициентъ при $\frac{d^{n-1} \delta y}{dx^{n-1}}$ будетъ просто P_n . Мы его по аналогіи обозначимъ чрезъ (P_n) . Наше выражение вариации δS будетъ такимъ образомъ:

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left[(P_1) \delta y + (P_2) \frac{d\delta y}{dx} + (P_3) \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + \dots + (P_n) \frac{d^{n-1} \delta y}{dx^{n-1}} \right] + \int_{x_1}^{x_2} (P) \delta y \cdot dx. (I)$$

Это и есть искомое выражение вариации опредѣленнаго интеграла съ постоянными предѣлами.

Формула (I) есть основная въ вариационномъ исчисленіи: по-
мощію ея рѣшаются всѣ вопросы о наибольшихъ и наименьшихъ
значеніяхъ простыхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Относительно
ея состава сдѣлаемъ слѣдующія замѣчанія.

Замѣчаніе 1. Въ коэффициенты

$$(P), (P_1), (P_2) \dots \dots \dots$$

входятъ производныя

$$\frac{dP}{dx}, \frac{dP_1}{dx}, \frac{d^2P_2}{dx^2} \dots \dots \dots$$

Нужно замѣтить, что это суть полныя (а не частныя) про-
изводныя $P, P_1, P_2 \dots$ по x ; я хочу этимъ сказать, что въ выра-
женіе P_1 , напримѣръ, можетъ входить x явно и кромѣ того въ
него входятъ $y, y', y'' \dots$, которые суть неизвѣстныя функціи
 x ; поэтому, при составленіи производной $\frac{dP_1}{dx}$, надо дифферен-
цировать P_1 сначала по x , а потомъ по $y, y', y'' \dots$, рассматривая
последнія, какъ функціи x .

Замѣчаніе 2. Мы видимъ, что вариация опредѣленнаго инте-
грала съ постоянными предѣлами состоитъ изъ двухъ частей, су-
щественно различныхъ. Во первыхъ изъ интеграла

$$\int_{x_1}^{x_2} (P) \cdot \delta y \, dx;$$

эта часть зависитъ, очевидно, отъ формы, которая будетъ при-
дана безконечно малой функціи δy . Другая часть:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[(P_1) \cdot \delta y + (P_2) \frac{d\delta y}{dx} + \dots + (P_n) \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} \right]$$

не зависитъ отъ этой формы, по крайней мѣрѣ непосредственно,
потому что въ нее не входитъ сама функція δy , а только зна-
ченія, получаемыя ею и ея производными при предѣлахъ инте-
грированія. Вотъ и все, что надо было сказать о вариации опре-
дѣленнаго интеграла съ постоянными предѣлами.

Наибольшія и наименьшія значенія интеграла съ постоян- ными предѣлами.

Разсмотримъ опредѣленный интеграль

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V \, dx.$$

гдѣ V имѣетъ указанное прежде значеніе, и положимъ, что намъ требуется найти, какую форму надо дать неизвѣстной функціи y для того, чтобы этотъ интегралъ получилъ наибольшую или наименьшую величину.

Вопросъ этотъ можетъ быть приведенъ къ обыкновенному вопросу о maximum'ѣ или minimum'ѣ, который разсматривался въ дифференціальномъ исчисленіи. Пусть

$$y=f(x)$$

есть искомый видъ функціи, при которомъ интегралъ будетъ maximum или minimum.

Будемъ эту функцію разсматривать, какъ частный случай другой—болѣе общаго вида, которая кромѣ x содержитъ въ себѣ переменный параметръ t и которая при частномъ значеніи параметра обращается въ $f(x)$. Пусть эта функція будетъ $\varphi(x, t)$ и положимъ, что при $t=t_0$, гдѣ t_0 опредѣленное число, эта функція обращается въ искомую $f(x)$, такъ-что

$$\varphi(x, t_0) = f(x).$$

Вообразимъ теперь, что вмѣсто y въ интегралъ вставлена эта функція $\varphi(x, t)$; тогда весь интегралъ представится, какъ нѣкоторая функція параметра t , и эта функція при $t=t_0$, по предположенію, будетъ maximum или minimum, а потому, по извѣстной теоремѣ о наибольшихъ и наименьшихъ, производная этой функціи $\frac{dS}{dt}$ должна быть $= 0$ при $t=t_0$ и, слѣдовательно, также

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_0 \cdot dt = 0.$$

Но первая часть этого равенства и представляетъ то самое, что мы называли выше варіаціею функціи S , ибо по опредѣленію:

$$\delta S = \left(\frac{dS}{dt}\right)_0 \cdot dt.$$

Такимъ образомъ выходитъ, что въ случаѣ maximum'а или minimum'а мы необходимо должны имѣть равенство:

$$\delta S = 0.$$

Для отличія maximum'а отъ minimum'а нужно, какъ намъ извѣстно изъ дифференціальнаго исчисленія, разсматривать $\frac{d^2S}{dt^2}$ и опредѣлить ея знакъ при $t=t_0$. Но этотъ знакъ будетъ очевидно одинаковъ со знакомъ 2-й варіаціи $\delta^2 S$, которая по опре-

дѣленію $= \left(\frac{d^2 S}{dt^2} \right)_0 \cdot dt^2$. И такъ, здѣсь maximum отъ minimum'a отличается по знаку 2-й вариации $\delta^2 S$.

Мы остановимся пока исключительно на разсмотрѣніи 1-го необходимаго условія $\delta S = 0$; что касается до отличія maximum'a отъ minimum'a, то хотя въ теоретическомъ отношеніи вопросъ объ этомъ предметѣ имѣетъ высокую важность для вариационнаго исчисленія, мы должны будемъ, въ виду большой сложности относящихся сюда изслѣдованій, оставить его безъ разсмотрѣнія. Если позволить время, я изложу впослѣдствіи его рѣшеніе, но только для простѣйшихъ частныхъ случаевъ. Полное рѣшеніе этого вопроса для простыхъ интеграловъ составляетъ одно изъ лучшихъ открытій Якоби. Съ практической стороны для большей части вопросовъ о наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ интеграловъ признаки, отличающіе maximum отъ minimum'a, не являются необходимыми, потому что это отличіе легко дѣлается a priori изъ свойствъ самой задачи.

Возьмемъ теперь выведенное выше выраженіе δS и приравняемъ его 0. Равенство это должно имѣть мѣсто, какую-бы форму мы ни придали безконечно малой функціи δy . Чтобы выполнить это требованіе, я утверждаю, что необходимо положить $(P) = 0$; иначе оно не можетъ-быть выполнено. Дѣйствительно, если (P) не $= 0$, а будетъ $>$ или $<$ 0, то всегда можно будетъ выбрать для δy такую форму, что δS не будетъ равно нулю, и слѣдовательно S не будетъ ни maximum'омъ ни minimum'омъ. Въ самомъ дѣлѣ, дадимъ δy видъ

$$\alpha(x-x_1)^{2n}(x-x_2)^{2n},$$

гдѣ α произвольная безконечно малая функція x . Если я дамъ δy такую форму, то легко видѣть, что всѣ члены, стоящіе внѣ знака интеграла въ формулѣ (I), будутъ $= 0$.

Дѣйствительно, самая функція δy и всѣ ея производныя до $n-1$ порядка очевидно будутъ при этомъ содержать множителей $x - x_1$ и $x - x_2$ въ положительныхъ степеняхъ; поэтому всѣ эти члены обратятся въ нули, когда сдѣлаемъ $x = x_1$ или $x = x_2$; и такимъ образомъ при этой формѣ функціи δy выраженіе вариации приведетъ къ виду:

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} (P) \cdot \delta y \cdot dx.$$

Теперь, такъ какъ α совершенно произвольно, то мы можемъ взять его такъ, чтобы при $(P) > 0$ было и $\alpha > 0$, а при $(P) < 0$ было-бы и $\alpha < 0$; тогда въ этомъ интегралѣ всѣ элементы будутъ

положительны и потому δS не будетъ $= 0$ и слѣдовательно условіе maximum'a или minimum'a не будетъ соблюдено. И такъ, нельзя предположить, чтобы (P) не равнялось нулю и, слѣдовательно, въ случаѣ maximum'a или minimum'a необходимо должно быть:

$$(P) = 0. \quad (II)$$

Затѣмъ, если $(P) = 0$, то должно-быть также:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[(P_1) \delta y + (P_2) \frac{d\delta y}{dx} + \dots + (P_n) \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} \right] = 0. \quad (III)$$

Эти-то два уравненія (II) и (III) и дадутъ все, что нужно, для полного рѣшенія занимающаго насъ вопроса.

Разсмотримъ эти уравненія нѣсколько ближе. Уравненіе (II) есть дифференціальное: производныя $y', y'', y''' \dots$ входятъ въ V , а слѣдовательно и въ $P, P_1, \dots P_n$. Высшая производная, входящая въ V есть $\frac{d^n y}{dx^n}$. Эта-же производная будетъ вообще входить

и въ $P_n = \frac{dV}{dy^{(n)}}$. А потому выраженіе $\frac{d^n P_n}{dx^n}$, входящее въ составъ (P) , будетъ содержать $\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}}$ и, слѣдовательно, уравненіе (II) бу-

детъ дифференціальное уравненіе $2n$ порядка. Порядокъ его, какъ видимъ, вдвое болѣе порядка высшей производной, входящей въ выраженіе подынтегральной функціи V . Интегрированіе этого уравненія и должно намъ доставить форму неизвѣстной функціи y . Общій интегралъ уравненія не опредѣлитъ однако исполнѣ этой функціи, потому что, какъ извѣстно, онъ будетъ содержать $2n$ произвольныхъ постоянныхъ и рѣшеніе этого уравненія, если мы его найдемъ, будетъ имѣть видъ

$$y = F(x, c_1, c_2, c_3, \dots, c_{2n}).$$

Наша задача тогда только будетъ рѣшена, когда мы найдемъ величины всѣхъ этихъ произвольныхъ постоянныхъ. Но мы имѣемъ еще уравненіе (III). Вотъ это-то уравненіе и послужитъ намъ для опредѣленія всѣхъ произвольныхъ постоянныхъ.

Тутъ надо различать слѣдующіе два случая:

1-й случай. Положимъ, что намъ не дано никакихъ условій, стѣсняющихъ измѣненія y и его производныхъ при предѣлахъ интегрированія. Тогда я говорю, что значенія

$$\delta y, \frac{d\delta y}{dx}, \frac{d^2\delta y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n\delta y}{dx^n}$$

при $x=x_1$ и при $x=x_2$ должны быть разсматриваемы, какъ совершенно произвольныя количества, конечно, безконечно малыя. Въ этомъ нетрудно удостовѣриться изъ слѣдующихъ замѣчаній.

Припомнимъ, что вариация

$$\delta y = \psi_1(x) dt,$$

гдѣ $\psi_1(x)$ есть совершенно произвольная функція x ; поэтому будемъ имѣть:

$$\frac{d\delta y}{dx} = \psi_1'(x) dt,$$

$$\frac{d^2\delta y}{dx^2} = \psi_1''(x) dt \text{ и т. д.}$$

Предположимъ, что произвольная функція $\psi_1(x)$ содержитъ въ своемъ составѣ нѣсколько произвольныхъ постоянныхъ $A, B, C, \dots$. Пусть число этихъ постоянныхъ будетъ равно или больше $2n$, такъ что:

$$\psi_1(x) = \psi(x, A, B, C, \dots).$$

Тогда ясно, что, располагая величинами этихъ $2n$ постоянныхъ, мы всегда можемъ удовлетворить слѣдующимъ равенствамъ:

$$\psi_1(x_1) = a_1, \psi_1'(x_1) = b_1, \psi_1''(x_1) = c_1, \dots, \psi_1^{(n-1)}(x_1) = l_1$$

и далѣе

$$\psi_1(x_2) = a_2, \psi_1'(x_2) = b_2, \psi_1''(x_2) = c_2, \dots, \psi_1^{(n-1)}(x_2) = l_2,$$

гдѣ $a_1, b_1, c_1, \dots, l_1, a_2, b_2, c_2, \dots, l_2$ — произвольныя числа.

Очевидно, что, если выберемъ значенія $a_1, b_1, c_1, \dots, l_1, a_2, b_2, c_2, \dots, l_2$, то всегда имѣемъ возможность опредѣлить изъ поставленныхъ $2n$ уравненій постоянныя A, B, C и т. д. такъ, чтобы всѣ эти уравненія были удовлетворены.

Тогда выйдетъ, что:

$$\int_{x_1}^{x_1} \delta y = a_1 dt; \int_{x_1}^{x_1} \frac{d\delta y}{dx} = b_1 dt; \dots \int_{x_1}^{x_1} \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} = l_1 dt$$

при верхнемъ предѣлѣ и

$$\int_{x_2}^{x_2} \delta y = a_2 dt; \int_{x_2}^{x_2} \frac{d\delta y}{dx} = b_2 dt; \dots \int_{x_2}^{x_2} \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} = l_2 dt$$

при нижнемъ предѣлѣ.

Если всѣ эти выраженія внесемъ въ уравненіе (III), то, сокративъ на dt , получимъ въ немъ сумму членовъ, имѣющихъ множителями совершенно произвольныя количества $a_1, b_1, \dots, l_1, a_2, b_2, \dots, l_2$, и эта сумма должна быть $= 0$. Чтобы это было, не-

обходимо, чтобы всѣ коэффициенты при $a_1, b_1, \dots, l_1, a_2, b_2, \dots, l_2$ каждый отдѣльно были равны нулю. Такимъ образомъ это уравненіе разложится на $2n$ слѣдующихъ уравненій

$$\int_{x_1}^{x_1} (P_1) = 0; \int_{x_1}^{x_1} (P_2) = 0; \int_{x_1}^{x_1} (P_3) = 0 \dots \int_{x_1}^{x_1} (P_n) = 0$$

$$\int_{x_2}^{x_2} (P_1) = 0; \int_{x_2}^{x_2} (P_2) = 0; \int_{x_2}^{x_2} (P_3) = 0 \dots \int_{x_2}^{x_2} (P_n) = 0.$$

Этимъ $2n$ уравненіямъ должна будетъ удовлетворять искомая функція y . Вставивъ вмѣсто y въ эти уравненія его выраженіе $F(x, c_1, c_2, \dots, c_{2n})$, найденное чрезъ интегрированіе уравненія (II), получимъ $2n$ уравненій съ $2n$ неизвѣстными постоянными $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{2n}$. Изъ этихъ уравненій мы найдемъ величины всѣхъ постоянныхъ и функція y будетъ вполне опредѣлена.

2-й случай. Положимъ, что даны нѣкоторыя условія, стѣсняющія измѣненія y и его производныхъ при одномъ или при обоихъ предѣлахъ интегрированія. Пусть дано p такихъ условій *), связывающихъ между собою варіаціи:

$$\int_{x_1}^{x_1} \delta y, \int_{x_2}^{x_2} \delta y, \int_{x_1}^{x_1} \frac{d\delta y}{dx}, \dots$$

Тогда всѣ варіаціи уже не будутъ произвольны, потому что изъ этихъ p условій мы будемъ въ состояніи выразить p варіацій въ функціи остальныхъ $2n-p$. Эти остальные $2n-p$ варіацій остаются уже произвольными. Поэтому, если внесемъ въ уравненіе (III) вмѣсто p варіацій ихъ выраженія въ функціи остальныхъ $2n-p$, опредѣленные изъ p данныхъ условій, то въ 1-й части этого уравненія получимъ $2n-p$ членовъ, изъ которыхъ каждый будетъ умноженъ на произвольную варіацію. Удовлетворить этому уравненію

*) Эти условія необходимо будутъ имѣть линейный видъ относительно варіацій. Дѣйствительно, если-бы намъ было дано уравненіе

$$F(y_1, y_2, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1, \dots) = 0,$$

которому должны удовлетворять предѣльныя величины y и его производныхъ, то, взявъ варіацію, и, слѣдовательно, ограничиваясь безконечно малыми перваго порядка, будемъ имѣть

$$\delta F = \frac{dF}{dy} \cdot \delta y_1 + \frac{dF}{dy_2} \cdot \delta y_2 + \frac{dF}{dy_1'} \cdot \delta y_1' + \dots = 0,$$

или, по прежнему обозначенію,

$$\frac{dF}{dy_1} \int_{x_1}^{x_1} \delta y + \frac{dF}{dy_2} \int_{x_2}^{x_2} \delta y + \frac{dF}{dy_1'} \int_{x_1}^{x_1} \frac{d\delta y}{dx} + \dots = 0.$$

можно, стало-быть, только тогда, когда коэффициенты при этихъ $2n-p$ произвольныхъ варіаціяхъ будутъ приравнены нулю каждый отдѣльно. Сдѣлавши это, мы получимъ $2n-p$ уравненій. Если присоединимъ къ нимъ еще p данныхъ уравненій, то будемъ имѣть всего $2n$ уравненій, которыя вполне достаточны для опредѣленія всѣхъ постоянныхъ

$$c_1, c_2, \dots, c_{2n}.$$

Условія, связывающія варіаціи при предѣлахъ, чаще всего выражаются слѣдующимъ образомъ. Требуется соблюсти, чтобы y и нѣкоторые изъ его производныхъ имѣли данныя величины при верхнемъ или нижнемъ предѣлѣ, или при обоихъ предѣлахъ. Напримѣръ, положимъ, что требуется, чтобы при $x=x_1$ y и y' имѣли данныя величины A и B , то-есть чтобы

$$\int_{x_1} y = A \text{ и } \int_{x_1} y' = B.$$

При такомъ требованіи очевидно, что

$$\int_{x_1} \delta y = 0,$$

такъ-какъ y при $x = x_1$ имѣетъ постоянную величину. Точно также изъ 2-го требованія слѣдуетъ, что:

$$\int_{x_1} \frac{d\delta y}{dx} = \int_{x_1} \delta y' = 0.$$

Въ этомъ примѣрѣ уравненіе (III) будетъ содержать только $2n-2$ произвольныхъ варіацій, коэффициенты при которыхъ приравняются 0. Такимъ образомъ будемъ имѣть $2n-2$ уравненій. Изъ $2n$ уравненій вышерассмотрѣннаго случая два не имѣютъ мѣста: именно, теперь будемъ имѣть вообще, что

$$\int_{x_1} (P_1) \text{ не } = 0 \text{ и } \int_{x_1} (P_2) \text{ не } = 0.$$

Но взаимѣнъ этихъ двухъ уравненій намъ даны другія два уравненія:

$$\int_{x_1} y = A, \quad \int_{x_1} y' = B,$$

которымъ должна удовлетворять функція

$$y = F(x, c_1, c_2, \dots, c_{2n}),$$

такъ что мы все-таки будемъ имѣть $2n$ уравненій, достаточныхъ для опредѣленія всѣхъ постоянныхъ.

При рѣшеніи вопросовъ о наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ опредѣленныхъ интеграловъ вся сила заключается въ интегрированіи уравненія (II), такъ что указанія о возможности упрощенія этого уравненія въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ весьма полезны, потому мы и сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній объ этомъ предметѣ.

Замѣчанія объ интегрированіи уравненія (II).

Уравненіе (II) вообще будетъ $2n$ -го порядка. Укажемъ на слѣдующіе случаи, въ которыхъ порядокъ его можетъ быть пониженъ на одну или на двѣ единицы.

1-й случай. Положимъ, что функція V не содержитъ x .

Чтобы показать, какъ упростится уравненіе (II) въ этомъ случаѣ, предположимъ, что V не содержитъ производныхъ выше y''' , при чемъ мы это дѣлаемъ только для простоты вычисленій: тѣ-же разсужденія могли-бы быть приложены, когда V содержало-бы $y^{(n)}$. И такъ пусть:

$$V = f(y, y', y'', y''').$$

Въ этомъ случаѣ производная

$$\frac{dV}{dx} = Py' + P_1 y'' + P_2 y''' + P_3 y^{IV}.$$

Изъ уравненія

$$(P) = 0$$

слѣдуетъ, что

$$P = \frac{dP_1}{dx} - \frac{d^2 P_2}{dx^2} + \frac{d^3 P_3}{dx^3}.$$

Вставивъ это выраженіе P въ выраженіе производной $\frac{dV}{dx}$ и расположивъ члены такъ, чтобы указатели при P возрастали, получимъ:

$$\frac{dV}{dx} = \left(Py'' + \frac{dP_1}{dx} y' \right) + \left(P_2 y''' - \frac{d^2 P_2}{dx^2} y' \right) + \left(P_3 y^{IV} + \frac{d^3 P_3}{dx^3} y' \right).$$

Каждая изъ скобокъ представляетъ полную производную, именно будетъ имѣть:

$$\frac{dV}{dx} =$$

$$\frac{d}{dx} \left(P_1 y' \right) + \frac{d}{dx} \left(P_2 y'' - \frac{dP_2}{dx} y' \right) + \frac{d}{dx} \left(P_3 y''' - \frac{dP_3}{dx} y'' + \frac{d^2 P_3}{dx^2} y' \right).$$

что можно непосредственно проверить. Такъ какъ въ обѣ части этого равенства входятъ только производныя по x , то мы можемъ его обинтегрировать одинъ разъ и тогда получимъ

$$V = c + P_1 y' + P_2 y'' - \frac{dP_2}{dx} \cdot y' + P_3 y''' - \frac{dP_3}{dx} \cdot y' + \frac{d^2 P_3}{dx^2} \cdot y'.$$

Такимъ образомъ вмѣсто уравненія

$$(P) = 0,$$

которое было-бы въ нашемъ случаѣ 6-го порядка, мы получили уравненіе, тоже дифференціальное, но только 5-го порядка (такъ-какъ $\frac{d^2 P_3}{dx^2}$ содержитъ вообще y^V), и такимъ образомъ понизили порядокъ уравненія на единицу.

Здѣсь важны два частныхъ случая, которые часто встрѣчаются въ приложеніяхъ.

а) Положимъ, что V не содержитъ x , но содержитъ только y и y' , такъ-что

$$V = f(y, y').$$

Въ этомъ случаѣ

$$P_2 = 0 \text{ и } P_3 = 0$$

и уравненіе наше обратится въ

$$V = c + P_1 y'.$$

Это будетъ дифференціальное уравненіе 1-го порядка, интегрированіе котораго доставитъ y .

б) Положимъ V содержитъ только y и y'' , такъ что

$$V = f(y, y'').$$

Въ этомъ случаѣ

$$P = 0, \quad P_3 = 0$$

и уравненіе наше обратится въ

$$V = c + P_1 y' + P_2 y'' - \frac{dP_2}{dx} \cdot y'.$$

Это уравненіе еще упрощается, такъ какъ уравненіе

$$(P) = 0$$

въ этомъ случаѣ будетъ

$$\frac{dP_1}{dx} - \frac{d^2 P_2}{dx^2} = 0.$$

Отсюда интегрированіемъ получимъ:

$$P_1 = c_1 + \frac{dP_2}{dx}.$$

Вставивъ это выраженіе P_1 въ V , найдемъ

$$V = c + c_1 y' + \frac{dP_2}{dx} \cdot y' + P_2 y'' - \frac{dP_2}{dx} \cdot y'$$

и по сокращеніи

$$V = c + c_1 y' + P_2 y''.$$

Это дифференціальное уравненіе 2-го порядка, а непосредственно получили бы уравненіе 4-го порядка.

2-й случай. Положимъ, что V не содержитъ y , тогда

$$P = 0$$

и уравненіе

$$(P) = 0$$

приводится къ такому:

$$\frac{dP_1}{dx} - \frac{d^2P_2}{dx^2} + \frac{d^3P_3}{dx^3} - \dots = 0.$$

По интегрированіи этого уравненія, получимъ

$$P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \frac{d^2P_3}{dx^2} - \dots = c,$$

или

$$(P_1) = c.$$

Это будетъ дифференціальное уравненіе порядка $2n-1$.

Если положимъ, что V не содержитъ y и y' , тогда

$$P=0 \text{ и } P_1=0$$

и уравненіе (II) будетъ:

$$\frac{d^2P_2}{dx^2} - \frac{d^3P_3}{dx^3} + \dots = 0.$$

Это уравненіе можно обьинтегрировать два раза, послѣ чего получимъ:

$$P_2 - \frac{dP_3}{dx} + \dots = c + c_1x,$$

или

$$(P_2) = c + c_1x.$$

Это будетъ уравненіе порядка $2n-2$.

Точно также, еслибы V не содержало y , y' , y'' то порядокъ уравненія (II) можно было-бы понизить на 3 единицы и т. д.

Примѣры рѣшенія задачъ.

Мы будемъ разсматривать одно необходимое условіе maximum'a и minimum'a, состоящее въ томъ, что

$$\delta S = 0.$$

Чтоже касается до отличія maximum'a отъ minimum'a, то мы его пока не будемъ дѣлать, а будемъ по самому свойству вопроса заключать, допускаетъ-ли онъ maximum или minimum.

Задача 1. Найти кратчайшее разстояніе между двумя точками на плоскости.

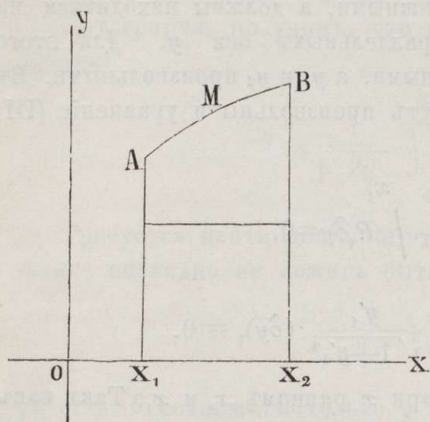
Эта задача, очевидно, приведена нами только съ цѣлью показать приложеніе выведенныхъ правилъ и формулъ.

Пусть двѣ данныя точки будутъ A и B , абсциссы ихъ x_1 и x_2 . Если $\text{arc} AM = s$, то

$$ds = \sqrt{1+y'^2} \cdot dx;$$

слѣдовательно:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2} \cdot dx.$$



Требуется найти такой y , чтобы этотъ интегралъ былъ minimum. Очевидно, что тахитимъ здѣсь быть не можетъ.

Здѣсь подынтегральная функція

$$V = \sqrt{1+y'^2}$$

не содержитъ y , потому можно взять уравненія случая (2), то есть уравненіе

$$(P_1) = c.$$

Но для настоящаго примѣра:

$$(P_1) = P_1 = \frac{dV}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

слѣдовательно:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const.};$$

отсюда

$$y' = c_1$$

и

$$y = c_1 x + c_2.$$

Это есть уравненіе прямой линіи, и потому искомая линія есть прямая.

Для опредѣленія постоянныхъ c_1 и c_2 нужно имѣть предѣльные условія. Положимъ, что точки A и B неподвижны. Тогда

$$\int_{x_1}^{x_1} \delta y = (\delta y)_1 = 0 \quad \text{и} \quad \int_{x_2}^{x_2} \delta y = (\delta y)_2 = 0.$$

Уравненіе (III) въ этомъ случаѣ будетъ:

$$\int_{x_1}^{x_2} (P_1) \cdot \delta y = 0.$$

Это уравнение само собою удовлетворяется, такъ что оно само по себѣ ничего не даетъ; слѣдовательно, постоянныя определяются изъ условія, что прямая проходить чрезъ двѣ данныя точки, которое даетъ

$$\int_{y=y_1}^{x_1} ; \int_{y=y_2}^{x_2}$$

гдѣ y_1 и y_2 данныя ординаты нашихъ точекъ.

Пусть будутъ даны другія условія. Положимъ на примѣръ, что точки A и B не даны неподвижными, а должны находиться на двухъ прямыхъ линіяхъ, параллельныхъ оси y . Для этого надо положить x_1 и x_2 постоянными, а y_1 и y_2 произвольными. Въ этомъ случаѣ $(\delta y)_1$ и $(\delta y)_2$ будутъ произвольны и уравненіе (III) приведетъ къ такому

$$\int_{x_2}^{x_1} P_1 \delta y - \int_{x_1}^{x_2} R_1 \delta y = 0,$$

или

$$\frac{y'_2}{\sqrt{1+y'^2_2}} (\delta y) - \frac{y'_1}{\sqrt{1+y'^2_1}} (\delta y)_1 = 0,$$

гдѣ y'_2 и y'_1 суть значеніе y' при x равномъ x_2 и x_1 . Такъ какъ (δy_2) и (δy_1) произвольны, то коэффиціенты при нихъ должны равняться 0. Слѣдовательно нужно, чтобы было:

$$y'_2 = 0 \text{ и } y'_1 = 0.$$

Но такъ какъ мы нашли выше, что

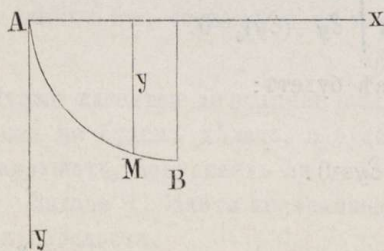
$$y' = c_1,$$

то оба уравненія удовлетворятся, когда положимъ $c_1 = 0$, и уравненіе прямой будетъ:

$$y = c_2.$$

Это есть прямая, параллельная оси x и на произвольномъ отъ нея разстояніи, что и должно-быть.

Задача 2. Въ вертикальной плоскости даны двѣ точки. Требуется найти для тяжелой точки линію кратчайшаго ската, идущую отъ 1-й точки ко 2-й.



Примемъ начало координатъ въ верхней точкѣ A ; за ось y возьмемъ вертикальную линію, идущую внизъ, а за ось x горизонтальную линію. Другая точка пусть будетъ B . Искомая кривая должна идти отъ A къ B .

Возьмемъ точку, движущуюся подъ дѣйствиемъ силы тяжести по этой кривой, въ какойнибудь моментъ времени t . Пусть ея положеніе тогда будетъ M , а ордината y . Скорость въ этотъ моментъ:

$$v = \sqrt{2gy} = \frac{ds}{dt};$$

отсюда:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} \cdot dx.$$

Интегрируя, получимъ, что время прохожденія отъ A до B будетъ:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} \cdot dx.$$

Требуется найти minimum этого интеграла (здѣсь также maximum'a очевидно не можетъ быть). Въ этомъ случаѣ:

$$V = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}},$$

то есть V содержитъ только y и y' , а не содержитъ x .

Поэтому беремъ уравненіе случая (а):

$$V = c + P_1 y';$$

здѣсь

$$P_1 = \frac{dV}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{1+y'^2}},$$

слѣдовательно

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} = c + \frac{y'^2}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{1+y'^2}},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{1+y'^2}} = c.$$

Отсюда

$$y(1+y'^2) = \frac{1}{c^2} = 2a,$$

и

$$y'^2 = \frac{2a}{y} - 1; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2a-y}}{y}.$$

Раздѣляемъ переменныя и потомъ интегрируемъ:

$$dx = \frac{y \cdot dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = \frac{a - (a - y)}{\sqrt{2ay - y^2}} dy$$

$$x = c' - a \int \frac{d(a-y)}{\sqrt{a^2 - (a-y)^2}} + \int \frac{(a-y) d(a-y)}{\sqrt{a^2 - (a-y)^2}}$$

$$x = c' + a \cdot \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Постоянное c' легко опредѣлится, если замѣтимъ, что при $y = 0$ имѣемъ и $x = 0$, стало-быть $c' = 0$ и

$$x = a \cdot \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Это есть уравненіе циклоиды, для которой верхняя точка есть точка возврата; основаніе-же циклоиды направлено по оси x .

Для опредѣленія произвольнаго постояннаго a рассмотримъ предѣльное условіе, то есть уравненіе (III). Такъ какъ подынтегральная функція

$$V = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$$

зависитъ только отъ y и y' , то $P_2 = 0$ и $(P_1) = P_1$. Слѣдовательно уравненіе (III) для нашего случая будетъ:

$$\int_0^{x_1} P_1 \cdot \delta y = 0.$$

Замѣняя въ этомъ уравненіи P_1 его величиной

$$\frac{dV}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \frac{y'}{\sqrt{2a}}$$

и производя дѣйствіе, указанное знакомъ подстановки, получимъ предѣльное условіе въ такомъ видѣ:

$$\frac{y'_1}{\sqrt{2a}} \cdot (\delta y)_1 - \frac{y'_0}{\sqrt{2a}} \cdot (\delta y)_0 = 0,$$

гдѣ y'_1 и y'_0 суть значенія y' при $x = x_1$ и при $x = 0$, а $(\delta y)_1$ и $(\delta y)_0$ суть варіаціи y при тѣхъ-же значеніяхъ независимаго перемѣннаго.

Если точки A и B даются неподвижными, то $(\delta y)_0 = 0$ и $(\delta y)_1 = 0$ и предѣльное условіе, удовлетворяясь само собою, не опредѣляетъ произвольнаго постояннаго a .

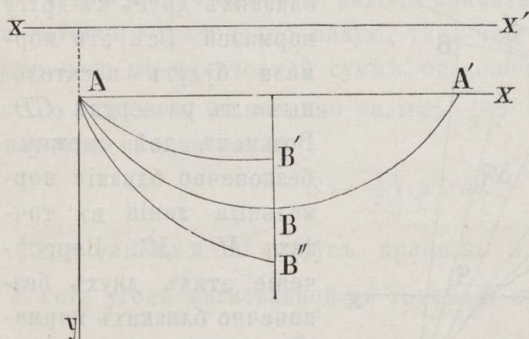
Это показываетъ, что въ самой задачѣ имѣются условія для опредѣленія произвольнаго постояннаго. Въ самомъ дѣлѣ въ этомъ случаѣ постоянное a можетъ-быть опредѣлено изъ того условія, что кривая должна проходить чрезъ точку B , координаты которой даны.

Положимъ точка A дана неподвижной, тогда какъ для точки B дана только постоянная абсцисса x_1 , ордината-же y_1 произвольна. Въ этомъ случаѣ $(\delta y)_0 = 0$, а $(\delta y)_1$ есть произвольная бесконечно малая функція x_1 ; слѣдовательно, предѣльное условіе будетъ:

$$\frac{y'_1}{\sqrt{2a}} \cdot (\delta y)_1 = 0.$$

Такъ какъ $(\delta y)_1$ вообще не равно нулю, то полученное уравненіе можетъ быть удовлетворено только, когда положимъ $y'_1 = 0$. Это равенство и послужитъ для опредѣленія постоянного a . Оно показываетъ, что касательная къ циклоидѣ въ точкѣ B параллельна оси x , то есть, что вершина циклоиды находится въ точкѣ B ; а потому абсцисса

$$x_1 = \frac{AA'}{2} = \frac{2\pi a}{2} = \pi a, \text{ откуда } a = \frac{x_1}{\pi}.$$



Разстояніе точки B отъ оси x , соотвѣтствующее наименьшему времени, будетъ $y_1 = 2a = \frac{2x_1}{\pi}$.

Еслибы тяжелая точка выходила изъ A съ данной начальной скоростью v_0 , то за ось x приняли-бы горизонтальную линію $x'x'$, лежащую выше Ax и на такомъ разстояніи, чтобы тяжелая точка, идя отъ нея до A , приобрѣтала въ A скорость, равную данной начальной скорости v_0 .

Это разстояніе y_0 найдется изъ слѣдующаго соотношенія, существующаго между скоростью и высотой паденія:

$$v_0 = \sqrt{2gy_0}.$$

Выраженіе скорости въ произвольной точкѣ останется тоже, что и въ предыдущемъ случаѣ:

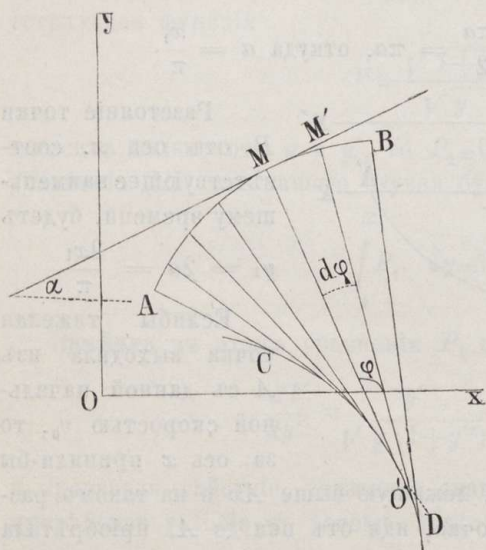
$$v = \sqrt{2gy}.$$

слѣдовательно и рѣшеніе задачи останется безъ перемѣны. Но точка возврата циклоиды будетъ находиться въ этомъ случаѣ на оси $x'x'$. Произвольныя постоянныя c' и a , въ случаѣ неподвижности точекъ A и B , опредѣлятся изъ условія, что кривая должна проходить чрезъ эти двѣ данныя точки. Если-же точка

A неподвижна, а точка B может измѣнять свое положеніе, всегда оставаясь на вертикальной линіи, имѣющей своей абсциссой x_1 , то постоянныя c' и a опредѣлятся изъ условія, что циклоида проходить чрезъ точку A и что вершина ея находится въ точкѣ B .

Задача 3. Между двумя данными точками провести такую кривую, для которой площадь, ограниченная этой кривой, двумя радиусами кривизны въ ея крайнихъ точкахъ и ея разверткой, была-бы наименьшая.

Положимъ, что на плоскости xy даны двѣ постоянныя точки A и B . Нужно провести кривую AB такъ, чтобы площадь $CABD$ была minimum. AC и BD радиусы кривизны въ точкахъ A и B , CD развертка кривой AB .



Представимъ себѣ, что проведено безчисленное множество бесконечно близкихъ другъ къ другу нормалей. Всѣ эти нормали будутъ касательными къ разверткѣ CD . Возьмемъ двѣ смежныя бесконечно близкія нормальныя линіи въ точкахъ M и M' . Пересѣченіе этихъ двухъ бесконечно близкихъ нормалей, точка O' , въ предѣлѣ будетъ центромъ кривизны кривой AB для точки M , и слѣдова-

тельно будетъ лежать на разверткѣ CD . Всю площадь $CABD$ можно разсматривать, какъ предѣлъ суммы бесконечно малыхъ площадей такихъ секторовъ какъ MOM' .

Имѣя въ виду нахожденіе предѣла суммы бесконечно малыхъ площадей, мы при опредѣленіи величины площади MOM' можемъ отбросить бесконечно малыя высшаго порядка предъ бесконечно малыми низшаго порядка. Обозначая уголъ нормали MO' съ осью x чрезъ φ и бесконечно малый уголъ MOM' чрезъ $d\varphi$, найдемъ, что площадь круговаго сектора при радиусѣ равномъ MO' и при углѣ $d\varphi$ будетъ $= \frac{1}{2} MO' \cdot MO' \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \overline{MO'}^2 d\varphi$.

Нетрудно убѣдиться, что найденная величина площади круговаго сектора отличается отъ площади криволинейнаго сектора MOM' на бесконечно малую величину высшаго порядка.

Проведемъ изъ точки O двѣ дуги круга: одну радіусомъ OM до пересѣченія съ продолженіемъ нормали OM , другую радіусомъ OM до пересѣченія съ нормалью OM . Такимъ образомъ получимъ два круговыхъ сектора. Площадь перваго круговаго сектора будетъ болѣе площади $MO'M$, а площадь втораго будетъ менѣе площади $MO'M$. Выражая это, получимъ:

$$\frac{1}{2} \overline{MO'}^2 d\varphi = \frac{1}{2} (MO + \varepsilon)^2 \cdot d\varphi > \text{пл. } (MO'M) > \frac{1}{2} \overline{MO'}^2 \cdot d\varphi,$$

гдѣ ε есть величина безконечно малая. Такъ какъ два крайнихъ члена неравенства отличаются другъ отъ друга на безконечно малыя высшаго порядка относительно $d\varphi$, то слѣдовательно площадь $MO'M$ отличается отъ $\frac{1}{2} \overline{MO'}^2 \cdot d\varphi$ только на безконечно малыя высшаго порядка.

Называя всю искомую площадь черезъ S , будемъ имѣть:

$$S = \lim \sum \frac{1}{2} \overline{MO'}^2 \cdot d\varphi.$$

Но MO' отличается отъ радіуса кривизны ρ въ точкѣ M также на величину безконечно малую, такъ что $MO' = \rho + \varepsilon'$; вслѣдствие чего въ полученной суммѣ безконечно малое $\frac{1}{2} \overline{MO'}^2 \cdot d\varphi$ можно замѣнить безконечно малымъ $\frac{1}{2} \rho^2 \cdot d\varphi$ и такимъ образомъ получимъ окончательно

$$S = \frac{1}{2} \int \rho^2 \cdot d\varphi.$$

Припомнимъ, что радіусъ кривизны $\rho = \frac{ds}{d\alpha}$, гдѣ $s = \text{arc } AM$, а α есть уголъ касательной въ точкѣ M съ осью x , и такъ какъ

$$\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}, \text{ то } d\alpha = d\varphi \text{ и } \rho = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Вставляя эту величину въ найденное выраженіе для S , получимъ:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int \rho \frac{ds}{d\varphi} \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \int \rho \, ds = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \int \frac{(1+y'^2)^2}{y''} \cdot dx. \end{aligned}$$

Называя абсциссы точекъ A и B черезъ x_1 и x_2 , будемъ имѣть:

$$S = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(1+y'^2)^2}{y''} \cdot dx.$$

Разсматривая найденное выраженіе, видимъ, что подъ интегральная функція

$$V = \frac{(1+y'^2)^2}{y''}$$

зависитъ только отъ y' и y'' . Для этого случая, какъ было показано выше, уравненіе, которое должно доставить неизвѣстную функцію y , будетъ:

$$V = c + c_1 y' + P_2 y'',$$

гдѣ

$$P_2 = \frac{dV}{dy''} = - \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}.$$

Замѣняя P_2 и V ихъ величинами, найдемъ

$$\frac{(1+y'^2)}{y''} = c + c_1 y' - \frac{(1+y'^2)^2}{y''},$$

или

$$2 \frac{(1+y'^2)^2}{y''} = c + c_1 y'.$$

Это уравненіе есть дифференціальное 2-го порядка и содержать только y' и y'' . Интегрировать его можно было-бы по общему правилу, указанному въ курсѣ интегральнаго исчисленія. Но въ видахъ упрощенія вычисленія мы воспользуемся частнымъ приѣмомъ.

Вставивъ $\frac{dy'}{dx}$ вмѣсто y'' , найдемъ

$$2(1+y'^2)^2 \cdot dx = c dy' + c_1 y' dy'.$$

Раздѣливъ обѣ части равенства на $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$, получимъ:

$$2 \sqrt{1+y'^2} \cdot dx = \frac{c \cdot dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c_1 y' \cdot dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Такъ какъ

$$\sqrt{1+y'^2} \cdot dx = ds,$$

то, интегрируя предъидущее уравненіе, находимъ:

$$2(s - c_2) = c \int \frac{dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} + c_1 \int \frac{y' \cdot dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

положимъ $y' = tg \alpha$, тогда $dy' = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$ и

$$2(s - c_2) = c \int \frac{\cos^2 \alpha}{(1+tg^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} + c_1 \int \frac{y' \cdot dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

замѣняя

$$\frac{1}{1+tg^2 \alpha} \text{ чрезъ } \cos^2 \alpha$$

и проинтегрировавъ второй членъ, получимъ

$$2(s - c_2) = c \int \cos \alpha \cdot d\alpha + c_1 \frac{1}{2} \frac{(1+y'^2)}{-\frac{3}{2} + 1} - \frac{3}{2} + 1$$

или

$$2(s-c_2)=c \sin \alpha - \frac{c_1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Замѣняя $\sin \alpha$ чрезъ его выраженіе по $\operatorname{tg} \alpha = y'$, будемъ имѣть:

$$2(s-c_2)=\frac{cy'}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{c_1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{cy'-c_1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Умноживъ обѣ части равенства на $ds = \sqrt{1+y'^2} \cdot dx$, найдемъ:

$$2(s-c_2)ds = c \, dy - c_1 \cdot dx.$$

Интегрируя это послѣднее уравненіе, получимъ уравненіе, отвѣчающее на вопросъ:

$$(s-c_2)^2 = cy - c_1x + c_3$$

Чтобы упростить это уравненіе, перенесемъ начало координатъ такъ, чтобы

$$x=x' + \frac{c_3}{c_1}, \text{ а } y=y',$$

тогда

$$(s-c_2)^2 = cy' - c_1x'.$$

Перемѣнивъ начало счета дугъ такъ, чтобы

$$s-c_2 = s',$$

будемъ имѣть:

$$s'^2 = cy' - c_1x'.$$

Чтобы упростить это уравненіе, повернемъ оси координатъ x' , y' около начала на уголъ ϑ и воспользуемся неопредѣленностью угла ϑ .

— Формулы перехода будутъ:

$$x' = x_2 \cos \vartheta - y_2 \sin \vartheta$$

$$y' = x_2 \sin \vartheta + y_2 \cos \vartheta$$

и уравненіе кривой приметъ видъ:

$$s'^2 = (c \sin \vartheta - c_1 \cos \vartheta)x_2 + (c \cos \vartheta + c_1 \sin \vartheta)y_2;$$

допустимъ, что ϑ выбрано такъ, что

$$c \sin \vartheta - c_1 \cos \vartheta = 0,$$

т. е.: $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{c_1}{c}$. Тогда получимъ

$$s'^2 = Ay_2,$$

или, опустивъ значки,

$$s^2 = Ay.$$

Нетрудно убѣдиться, что уравненіе это представляетъ циклоиду. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ дифференціалъ отъ обѣихъ частей уравненія $s^2 = Ay$; находимъ:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy = 2\sqrt{Ay},$$

откуда:

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{1}{4Ay} - 1 = \frac{1-4Ay}{4Ay} = \frac{4A-y}{4Ay} = \frac{2a-y}{y}, \text{ гдѣ } 2a = \frac{1}{4A}.$$

Перенеся начало координатъ и измѣнивъ направленіе оси y , сдѣлаемъ

$$2a - y = \eta,$$

найдемъ

$$dy = -d\eta \text{ и } \frac{dx^2}{d\eta^2} = \frac{\eta}{2a-\eta},$$

или

$$\frac{d\eta}{dx} = \sqrt{\frac{2a-\eta}{\eta}}.$$

Это дифференціальное уравненіе мы интегрировали уже въ предъидущей задачѣ и результатомъ получили циклоиду. Для опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ c, c_1, c_2, c_3 рассмотримъ предѣльное условіе. Такъ какъ въ нашемъ вопросѣ входятъ только y' и y'' и, слѣдовательно, только P_1 и P_2 , то предѣльное условіе будетъ:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(P_1) \delta y + (P_2) \delta y'] = 0.$$

Положимъ, что точки A и B даны неподвижными, тогда

$$(\delta y)_1 = 0, (\delta y)_2 = 0$$

и мы будемъ имѣть:

$$\int_{x_1}^{x_2} (P_2) \delta y' = 0,$$

гдѣ

$$(P_2) = P_2 = \frac{dV}{dy''} = -\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}.$$

Вставляя вмѣсто (P_2) его выраженіе и освобождаясь отъ знака подстановки, получимъ:

$$-\frac{(1+y'_2)^2}{y''_2^2} (\delta y')_2 + \frac{(1+y'_1)^2}{y''_1^2} (\delta y')_1 = 0.$$

Если кромѣ неподвижности точекъ A и B дано, что касательныя въ этихъ точкахъ должны имѣть опредѣленные данныя направленія, то

$$(\delta y')_2 = 0 \text{ и } (\delta y')_1 = 0$$

и предѣльное условіе удовлетворится само собою. Въ этомъ случаѣ произвольныя постоянныя опредѣляются изъ условія, что кривая проходитъ чрезъ точки A и B и что касательныя въ этихъ точкахъ имѣютъ данныя направленія. Если-же точки A и B даны неподвижными, а направленіе касательныхъ въ этихъ точкахъ произвольно или—что тоже,—радіусы кривизны въ двухъ крайнихъ точкахъ A и B могутъ измѣнять свое направленіе, то предѣльное условіе, вслѣдствіе произвольности $(\delta y')_2$ и $(\delta y')_1$, даетъ слѣдующія два уравненія:

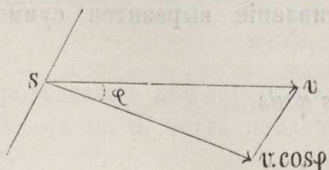
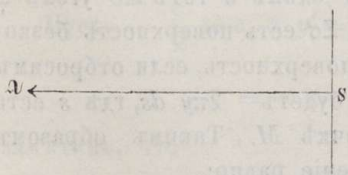
$$\frac{(1+y'^2_2)^2}{y''^2_2} = 0 \text{ и } \frac{(1+y'^2_1)^2}{y''^2_1} = 0.$$

Эти уравненія могутъ быть удовлетворены только тогда, когда $y''_2 = \infty$ и $y''_1 = \infty$, то есть радіусы кривизны въ двухъ крайнихъ точкахъ A и B должны быть равны нулю. А это показываетъ, что двѣ точки возврата циклоиды (гдѣ радіусъ кривизны, какъ извѣстно, равенъ нулю) находятся въ двухъ данныхъ точкахъ A и B , и слѣдовательно, прямая AB будетъ служить основаніемъ полной вѣтви циклоиды, идущей отъ A къ B . Это послѣднее условіе и послужитъ намъ для опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ.

Задача Ньютона. (4). Найти форму, которую нужно дать тѣлу вращенія для того, чтобы при поступательномъ его движеніи въ жидкости по направленію параллельному оси вращенія, оно испытывало-бы наименьшее сопротивленіе.

При рѣшеніи этой задачи, примемъ въ основаніе слѣдующее опытное положеніе: если нѣкоторая площадь s перемѣщается въ

жидкости по направленію къ ней перпендикулярному, со скоростью v , то сопротивленіе, оказываемое жидкостью будетъ $k\rho sv^2$ гдѣ k постоянный коэффициентъ, а ρ плотность жидкости. Положимъ, что та же плоская стѣна движется со скоростью v по направленію, образуемому угломъ φ съ перпендикуляромъ къ плоскости s . Разложимъ скорость v на двѣ: одну, направленную въ площади s , другую, идущую по перпендикуляру къ этой площади; эта послѣдняя скорость удетъ $v \cos \varphi$, а потому давленіе на стѣнку, происходящее по



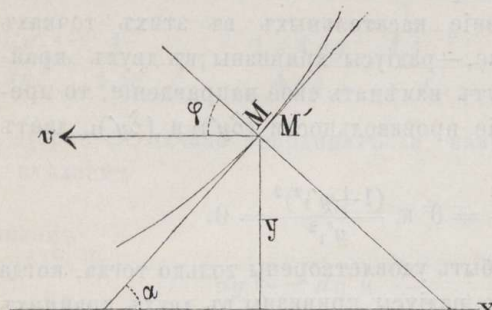
направленію, перпендикулярному къ ней, и слѣдовательно зависящее только отъ слагающей $v \cos \varphi$, будетъ

$$p = k \rho s v^2 \cos^2 \varphi.$$

Давленіе-же по направленію движенія будетъ

$$k \rho s v^2 \cos^3 \varphi.$$

Вообразимъ кривую, которая, вращаясь около оси x ,



производитъ искомую поверхность вращенія. Эту поверхность можно разсматривать, какъ составленную изъ безконечнаго множества безконечно малыхъ поверхностей усѣченныхъ конусовъ, имеющихъ общую ось x .

Возьмемъ безконечно малый элементъ MM' . При вращеніи кривой около оси x этотъ элементъ опишетъ поверхность безконечно малаго усѣченного конуса. Проведемъ черезъ ось x рядъ безконечно близкихъ другъ къ другу плоскостей. Эти плоскости раздѣлятъ поверхность усѣченного конуса на безконечно малыя площадки. Сопротивленіе, встрѣчаемое каждой безконечно малой площадкой σ , будетъ по предыдущему

$$k \rho s v^2 \cos^3 \varphi,$$

слѣдовательно сопротивленіе, встрѣчаемое всею поверхностію усѣченного конуса, будетъ равно

$$\Sigma k \rho s v^2 \cos^3 \varphi = k \rho v^2 \cos^3 \varphi \Sigma \sigma,$$

такъ какъ всѣ площади σ образуютъ одинъ и тотъ-же уголъ φ съ перпендикулярами къ нимъ. Здѣсь $\Sigma \sigma$ есть поверхность безконечно малаго усѣченного конуса. Эта поверхность, если отбросимъ безконечно малыя высшаго порядка, будетъ $= 2\pi y \cdot ds$, гдѣ s есть дуга кривой, оканчивающаяся въ точкѣ M . Такимъ образомъ видимъ, что элементарное сопротивленіе равно:

$$k \rho v^2 \cos^3 \varphi \cdot 2\pi y \cdot ds.$$

Для полной поверхности сопротивленіе выразится суммою подобныхъ выраженій, то есть

$$R = 2\pi k \rho v^2 \int y \cos^3 \varphi \cdot ds.$$

Такъ какъ

$$\cos \varphi = \sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

то будемъ имѣть

$$R = 2\pi k \rho v^2 \int y \frac{y'^3}{V(1+y'^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi k \rho v^2 \int \frac{y y'^3}{1+y'^2} dx.$$

Суммирование надо распространить на всѣ элементы кривой, лежащія между двумя данными точками, и опредѣлить функцію y подъ условіемъ, чтобы выраженіе

$$u = \int_x^{x_2} \frac{y \cdot y'^3}{1+y'^2} dx$$

было minimum.

Въ нашемъ случаѣ подынтегральная функція

$$V = \frac{y y'^3}{1+y'^2}$$

содержитъ только y и y' , а потому для опредѣленія y надо интегрировать уравненіе

$$V = c + P_1 y';$$

но

$$P_1 = \frac{dV}{dy'} = \frac{3y y'^2(1+y'^2) - 2y y'^4}{(1+y'^2)^2} = \frac{3y y'^2 + y y'^4}{(1+y'^2)^2}$$

и уравненіе наше приметъ видъ

$$\frac{y y'^3}{1+y'^2} = c + \frac{3y y'^3 + y y'^5}{(1+y'^2)^2},$$

или по сокращеніи

$$-\frac{2y y'^3}{(1+y'^2)^2} = c,$$

откуда:

$$y = -\frac{c}{2} \frac{(1+y'^2)^2}{y'^3}.$$

Пусть $-\frac{c}{2} = c_1$ и $y' = u$, тогда будемъ имѣть

$$y = c_1 \frac{(1+u^2)^2}{u^3};$$

замѣтивъ, что

$$y' = u = \frac{dy}{dx}, \text{ откуда } dx = \frac{dy}{u},$$

напишемъ y въ видѣ:

$$y = c_1 \left[\frac{1}{u^3} + \frac{2}{u} + u \right],$$

произведемъ дифференцированіе и полученный результатъ раздѣлимъ на u , тогда найдемъ

$$dx = c_1 \left[-\frac{3}{u^4} - \frac{2}{u^3} + \frac{1}{u} \right],$$

откуда чрезъ интегрированіе имѣемъ

$$x - c_2 = c_1 \left[\frac{3}{4u^4} + \frac{1}{u^2} + \ln u \right].$$

Такимъ образомъ мы получили x и y въ функціи u ; эти два уравненія вмѣстѣ могутъ быть разсматриваемы какъ уравненія искомой кривой. Чтобы нѣсколько упростить видъ этихъ уравненій, перенесемъ начало координатъ, положивъ

$$x - c_2 = x';$$

тогда получимъ

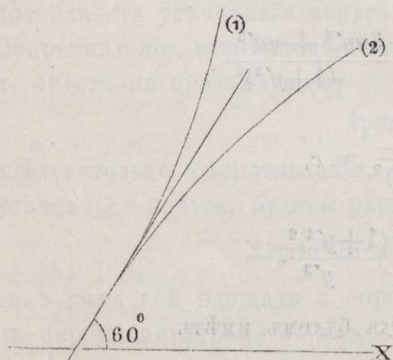
$$x = c_1 \left[\frac{3}{4u^4} + \frac{1}{u^2} + \ln u \right]$$

$$y = c_1 \left[\frac{1}{u^3} + \frac{2}{u} + u \right].$$

По этимъ двумъ уравненіямъ изслѣдуемъ видъ кривой.

Во первыхъ замѣтимъ, что u не можетъ быть отрицательно, такъ какъ въ этомъ случаѣ x былъ-бы мнимымъ, слѣдовательно u можетъ измѣняться отъ 0 до $+\infty$.

Найдемъ первыя и вторыя производныя x и y по u ; будемъ имѣть:



$$\frac{dx}{du} = c_1 \frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^5}$$

$$\frac{dy}{du} = c_1 \frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^4}$$

$$\frac{d^2x}{du^2} = c_1 \frac{15 + 6u^2 - u^4}{u^6}$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = 4c_1 \frac{3 + u^2}{u^2}.$$

При $u = +\sqrt{3}$ получаемъ $\frac{dx}{du} = 0$, $\frac{dy}{du} = 0$, $\frac{d^2x}{du^2}$ и $\frac{d^2y}{du^2}$ положительны, слѣдовательно при этомъ значеніи u x и y получаютъ наименьшія величины; затѣмъ при измѣненіи u отъ $+\sqrt{3}$ до ∞ производныя $\frac{dx}{du}$ и $\frac{dy}{du}$ будутъ положительны, слѣдовательно x и y будутъ непрерывно возрастать съ возрастаніемъ u и при $u = \infty$ будемъ имѣть очевидно $x = \infty$, $y = \infty$. Если-же u измѣняется отъ $+\sqrt{3}$ до нуля, то производныя $\frac{dx}{du}$ и $\frac{dy}{du}$ будутъ отрицательны; а это показываетъ, что и съ уменьшеніемъ u отъ $u = \sqrt{3}$

x и y также возрастаютъ, и при $u=0$ опять будемъ имѣть:

$$x=+\infty, y=+\infty$$

Изъ этого мы видимъ, что кривая состоитъ изъ двухъ вѣтвей, простирающихся въ безконечность и имѣющихъ общую касательную въ той точкѣ, гдѣ x и y minimum, при чемъ касательная въ этой точкѣ дѣлаетъ съ осью x уголъ въ 60° , ибо въ ней $u=y'=\sqrt{3}$. Чтобы узнать, будетъ-ли кривая вогнута или выпукла относительно оси x , рассмотримъ $\frac{d^2y}{dx^2}$;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{1}{c_1} \frac{u^5}{(1+u^2)(u^2-3)}$$

$$\text{при } u > \sqrt{3} \text{ имѣемъ } \frac{d^2y}{dx^2} > 0,$$

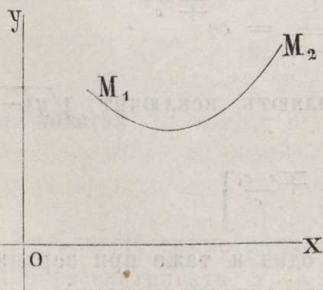
$$\text{а при } u < \sqrt{3} \text{ получаемъ } \frac{d^2y}{dx^2} < 0,$$

слѣдовательно первая вѣтвь кривой выпукла, а вторая вогнута. Чтобы узнать, какая вѣтвь кривой удовлетворяетъ вопросу, надо обратиться къ признакамъ, отличающимъ maximum отъ minimum. Мы не будемъ теперь останавливаться на этомъ, скажемъ только, что вопросу удовлетворяетъ вторая вѣтвь кривой; впоследствии мы вернемся къ этой задачѣ.

Задача 5. Между двумя данными точками провести кривую, которая, обращаясь около данной оси, дала-бы наименьшую поверхность вращения.

Выраженіе поверхности вращения будетъ:

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1+y'^2} \cdot dx.$$



Функция y должна быть опредѣлена подъ условіемъ, чтобы этотъ интегралъ былъ minimum.

Въ этомъ случаѣ

$$V = y \sqrt{1+y'^2}$$

и слѣдовательно

$$P = \frac{dV}{dy} = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}};$$

V содержитъ только y и y' и потому для опредѣленія y мы должны интегрировать уравненіе

$$V = c + P_1 y',$$

которое въ нашемъ случаѣ будетъ имѣть видъ

$$y \sqrt{1+y'^2} = c + \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}};$$

по сокращеніи найдемъ

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c,$$

или

$$(1+y'^2) = \left(\frac{y}{c}\right)^2,$$

откуда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1} = \pm \sqrt{\frac{y^2 - c^2}{c^2}}.$$

Такимъ образомъ мы получили дифференціальное уравненіе перваго порядка, въ которомъ переменныя могутъ быть раздѣлены. Изъ него находимъ:

$$dx = \pm \frac{cdy}{\sqrt{y^2 - c^2}},$$

интегрируя-же, получимъ:

$$x - c_1 = \pm c.l(y + \sqrt{y^2 - c^2}) \mp c_1 l c,$$

(при чемъ мы произвольное постоянное, въ виду большаго удобства дальнѣйшихъ преобразованій, написали въ видѣ $-c_1 \pm c_1 l c$); такимъ образомъ

$$x - c_1 = \pm c.l \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c},$$

откуда

$$y + \sqrt{y^2 - c^2} = ce^{\pm \frac{x - c_1}{c}}.$$

Замѣтивъ, что

$$(y + \sqrt{y^2 - c^2})(y - \sqrt{y^2 - c^2}) = c^2,$$

будемъ имѣть еще

$$y - \sqrt{y^2 - c^2} = \frac{c^2}{y + \sqrt{y^2 - c^2}} = ce^{\mp \frac{x - c_1}{c}}.$$

Два выведенныя равенства позволяютъ исключить $\sqrt{y^2 - c^2}$; складывая ихъ, находимъ

$$y = \frac{c}{2} \left[e^{\pm \frac{x - c_1}{c}} + e^{\mp \frac{x - c_1}{c}} \right].$$

Замѣтимъ, что величина y остается одна и таже при верхнихъ и при нижнихъ знакахъ; удержимъ поэтому одни верхніе знаки и напомнимъ уравненіе нашей кривой такъ:

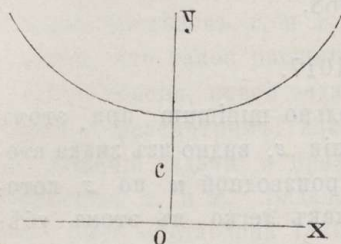
$$y = \frac{c}{2} \left[e^{\frac{x - c_1}{c}} + e^{-\frac{x - c_1}{c}} \right].$$

Это есть уравненіе цѣпной линіи, отнесенной къ ея направляющей, которая служитъ осью абсциссъ и есть линія, обладающая тѣмъ свойствомъ, что нормаль относительно ея, какъ оси x , равняется радіусу кривизны цѣпной линіи.

Что-же касается до предѣльнаго условія

$$\frac{x_2}{x_1} P_1 \delta y = 0,$$

то оно удовлетворяется само собою, такъ какъ кривая должна проходить чрезъ двѣ данныя точки и слѣдовательно $(\delta y)_1 = 0$ и $(\delta y)_2 = 0$. Постоянныя c и c_1 опредѣляются изъ условія, что кривая проходитъ чрезъ двѣ данныя точки M и M_1 . Впрочемъ оказывается, что задача эта не всегда возможна, такъ какъ чрезъ



двѣ данныя точки не всегда можно провести цѣпную линію такимъ образомъ, чтобы данная прямая линія служила ей исправляющей. Чтобы убѣдиться въ этомъ, перенесемъ начало координатъ въ точку $(x=c_1; y=0)$; тогда уравненіе кривой представится въ видѣ

$$y = \frac{c}{2} (e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}})$$

и кривая расположится, какъ извѣстно, симметрично относительно оси y . Разсмотримъ отношеніе $\frac{y}{x} = u$. Выраженіе u можетъ быть представлено такъ:

$$u = \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{\frac{x}{c}}$$

или, полагая $\frac{x}{c} = z$,

$$u = \frac{1}{2} \frac{e^z + e^{-z}}{z}.$$

Вслѣдствіе симметричнаго расположенія кривой намъ достаточно разсматривать x , а слѣдовательно и z , только положительнымъ. Выраженіе u имѣетъ minimum при нѣкоторомъ значеніи z ; чтобы отыскать его, беремъ производную u по z и приравняемъ ее нулю:

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{2} \frac{z(e^z - e^{-z}) - e^z - e^{-z}}{z^2} = 0,$$

откуда

$$z(e^z - e^{-z}) - e^z - e^{-z} = 0,$$

или

$$e^z(z-1) - e^{-z}(z+1) = 0.$$

Умножая на e^z , имѣемъ

$$e^{2z}(z-1) - (z+1) = 0,$$

откуда

$$e^{2z} = \frac{z+1}{z-1},$$

$$e_z = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}.$$

Уравненіе это можетъ быть рѣшено послѣдовательнымъ приближеніемъ; оно даетъ

$$z = \frac{x}{c} = 1,19968,$$

причемъ $\frac{y}{c}$ получится равнымъ 1,81017.

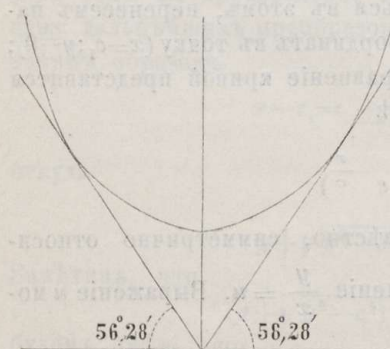
Что величина u будетъ дѣйствительно minimum при этомъ

значеніи z , видно изъ знака второй производной u по z , которая, какъ легко въ этомъ убѣдиться, будетъ положительна при найденномъ значеніи z . По вычисленіи окажется, что наименьшее значеніе u будетъ:

$$u = k = 1,50888 = \text{tg } 56^\circ 28'.$$

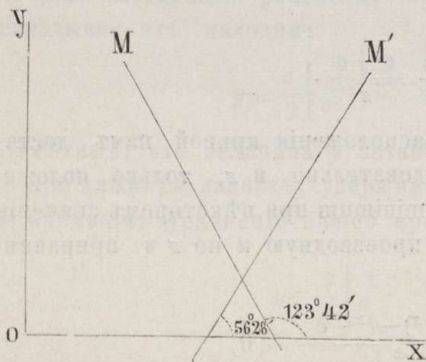
Изъ этого мы видимъ, что,

если построить прямую $\frac{y}{x} = k$,



или $y = kx$, то всѣ точки дѣйной линіи будутъ лежать выше этой прямой. Понятно, что точки кривой по лѣвую сторону оси y будутъ лежать выше прямой $y = -kx$. Отсюда ясно, что для

того, чтобы узнать, можно ли построить дѣйную линію по данной направляющей и двумъ точкамъ, надо провести чрезъ эти точки прямая, дѣлающія съ направляющей углы въ $56^\circ 28'$ и $123^\circ 42'$. Если эти прямая пересѣкутся выше направляющей, или на самой направляющей, то задача возможна; въ противномъ случаѣ она невозможна.



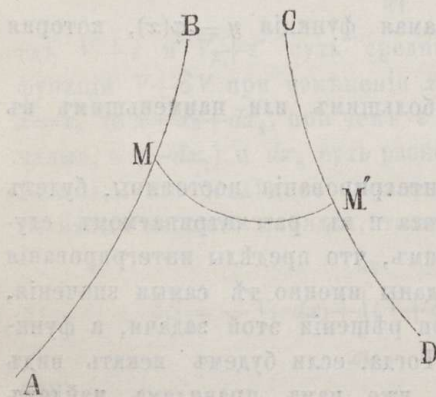
Этой задачей мы закончимъ разсмотрѣніе интеграловъ съ постоянными предѣлами и перейдемъ къ другому вопросу, нѣсколько болѣе общему.

Интегралы съ переменными предѣлами.

Возьмемъ опять выраженіе

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

для котораго желаемъ найти наибольшее или наименьшее значеніе, и положимъ, что измѣненія S происходятъ не только отъ измѣненія функций, входящихъ въ выраженіе V , но и отъ варьирования предѣловъ x_1 и x_2 . Можно убѣдиться простымъ разсужденіемъ, что такое расширеніе вопроса не представляетъ, собственно говоря, новой задачи для варіаціоннаго исчисленія. Для примѣра разсмотримъ, какія измѣненія должны быть сдѣланы въ рѣшеніи задачи о брахистохронѣ въ случаѣ переменныхъ предѣловъ x_1 и x_2 . Задача въ этомъ обобщенномъ видѣ можетъ быть поставлена такимъ образомъ.



Даны въ вертикальной плоскости двѣ кривыя AB и CD . Требуется найти кривую, по которой тяжелая точка перейдетъ съ AB на CD въ наименьшее время, предполагая на примѣръ, что она начинаетъ движеніе безъ начальной скорости. Во первыхъ, можно доказать, что кривая кратчайшаго ската будетъ и въ этомъ случаѣ циклоида. Дѣйстви-

тельно, каковы бы ни были точки M' и M'' , взятые на кривыхъ AB и CD , между ними всегда можно провести циклоиду, имѣющую точку возврата въ M' и ось, направленную горизонтально, и эта кривая будетъ по предыдущему кривой наискорѣйшаго ската для тяжелой точки, начинающей движеніе изъ M' безъ начальной скорости; никакая другая кривая, проведенная между точками M' и M'' , не обладаетъ этимъ свойствомъ. И такъ, мы можемъ считать извѣстнымъ, что искомая кривая должна быть циклоидой, оп редѣленнымъ образомъ расположенной, и этимъ часть вопроса, зависящая отъ варіаціоннаго исчисленія,

можетъ считаться окончательно рѣшенною. Что же касается до опредѣленія положенія точекъ M' и M'' на кривыхъ AB и CD , то это уже будетъ вопросъ дифференціального исчисленія. Дѣйствительно, время прохожденія тяжелой точки отъ M' до M'' по циклоидѣ, уравненіе которой будетъ содержать координаты крайнихъ точекъ M' и M'' , черезъ которыя она должна проходить, выразится въ функціи ординатъ (или абсциссъ) начальной и конечной точки, и слѣдовательно намъ придется только найти по правиламъ дифференціального исчисленія minimum для этой функціи двухъ переменныхъ.

Сказанное относится только къ частному примѣру, но можно доказать справедливость этого замѣчанія и въ общемъ случаѣ. Положимъ, имѣемъ

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V. dx,$$

гдѣ $V = f(x, y, y', y'' \dots y^{(n)})$

а x_1 и x_2 суть переменныя величины, и пусть требуется найти неизвѣстный видъ функціи y и числовыя величины предѣловъ x_1 и x_2 такъ, чтобы рассматриваемый интегралъ S былъ maximum или minimum.

Я утверждаю, что таже самая функція $y = \varphi(x)$, которая

дѣлаетъ интегралъ $\int_{x_1}^{x_2} V. dx$ наибольшимъ или наименьшимъ въ

предположеніи, что предѣлы интегрированія постоянны, будетъ служить намъ рѣшеніемъ вопроса и въ рассматриваемомъ случаѣ. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ, что предѣлы интегрированія x_1 и x_2 постоянны и что имъ даны именно тѣ самыя значенія, которыя должны получиться при рѣшеніи этой задачи, а функція y оставлена неизвѣстною. Тогда, если будемъ искать видъ функціи y , то по извѣстнымъ уже намъ правиламъ найдемъ $y = \varphi(x)$ и ясно, что никакая другая функція не можетъ быть найдена, такъ-какъ именно эта функція при постоянныхъ, но совершенно произвольныхъ значеніяхъ предѣловъ x_1 и x_2 дѣлаетъ интегралъ S наибольшимъ или наименьшимъ. Если затѣмъ вообразимъ, что эта функція $y = \varphi(x)$ вставлена въ интегралъ и произведено интегрированіе между неизвѣстными предѣлами x_1 и x_2 , то выраженіе S будетъ функціей только двухъ независимыхъ переменныхъ x_1 и x_2 , а потому наибольшее или наименьшее значеніе S найдется по обыкновеннымъ правиламъ дифференціального исчисленія.

Такимъ образомъ ясно, что разсматриваемый нами случай не требуетъ ни какого существеннаго дополненія. Прежній приемъ вычисленія, соединенный съ обыкновенными правилами дифференціального исчисленія, даетъ полное рѣшеніе вопроса. Тѣмъ не менѣ въ послѣдующемъ мы изложимъ, что было придумано для того, чтобы и этотъ случай заключить въ общемъ разсмотрѣніи.

Покажемъ, какъ нужно измѣнить выведенныя прежде формулы для того, чтобы можно было приложить ихъ къ общему случаю. Пусть y измѣняется на $y + \delta y$, а x_1 и x_2 на $x_1 + dx_1$ и $x_2 + dx_2$; тогда, ограничиваясь безконечно-малыми перваго порядка, найдемъ

$$\delta S = \int_{x_1 + dx_1}^{x_2 + dx_2} (V + \delta V) dx - \int_{x_1}^{x_2} V dx;$$

но

$$\int_{x_1 + dx_1}^{x_2 + dx_2} (V + \delta V) dx = \int_{x_1 + dx_1}^{x_1} (V + \delta V) dx + \int_{x_1}^{x_2} (V + \delta V) dx + \int_{x_2}^{x_2 + dx_2} (V + \delta V) dx =$$

$$(V_1 + \varepsilon) (-dx_1) + \int_{x_1}^{x_2} (V + \delta V) dx + (V_2 + \varepsilon') dx_2$$

гдѣ $V_1 + \varepsilon$ и $V_2 + \varepsilon'$ суть среднія величины подынтегральной функціи $V + \delta V$ при измѣненіи x отъ $x = x_1$ до $x = x_1 + dx_1$ и отъ $x = x_2$ до $x = x_2 + dx_2$, при чемъ ε и ε' суть количества безконечно малыя, а $(-dx_1)$ и dx_2 суть разности предѣловъ интегрированія. Вставляя это послѣднее выраженіе въ δS и отбрасывая безконечно-малыя высшаго порядка, то есть $-\varepsilon dx_1$ и $-\varepsilon' dx_2$, найдемъ

$$\delta S = -V_1 dx_1 + \int_{x_1}^{x_2} (V + \delta V) dx + V_2 dx_2 - \int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

или

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \delta V. dx + V_2 dx_2 - V_1 dx_1.$$

Въ выраженіи S x_1 и x_2 суть количества, измѣняющіяся совершенно произвольно, независимо отъ другихъ. Слѣдовательно мы можемъ разсматривать ихъ, какъ совершенно произвольныя функціи переменнаго параметра t

$$x = \psi(t); \quad x_2 = \phi(t).$$

Допустимъ, что ψ и ϕ таковы, что при $t=t_0$ даютъ для x_1 и x_2 тѣ самыя значенія, которыя удовлетворяютъ вопросу. Очевидно, что это послѣднее условіе нисколько не уменьшаетъ общности нашего разсмотрѣнія.

Полагая теперь, какъ и прежде, что неизвѣстная функція $y=F(x)$, удовлетворяющая вопросу, есть частный случай другой болѣе общей функціи $\varphi(x, t)$, то есть, что при $t=t_0$

$$\varphi(x, t_0) = F(x) = y,$$

мы найдемъ, что выраженіе S есть функція переменнаго t , которая при $t=t_0$ дѣлается maximum'омъ или minimum'омъ, а потому $\left(\frac{dS}{dt}\right)_0 = 0$ и слѣдовательно

$$\delta S = \left(\frac{dS}{dt}\right)_0 dt = 0.$$

И такъ, условіе maximum'a и minimum'a остается тоже, что и прежде:

$$\delta S = 0,$$

или подробнѣе для настоящаго случая

$$V_2 \cdot dx_2 - V_1 \cdot dx_1 + \int_{x_1}^{x_2} \delta V \, dx = 0.$$

Послѣдній интегралъ преобразуется также, какъ и прежде, и окажется состоящимъ изъ тѣхъ-же 2-хъ частей, такъ-что окончательно будемъ имѣть:

$$V_2 \cdot dx_2 - V_1 dx_1 + \int_{x_1}^{x_2} \left[(P_1) \delta y + (P_2) \frac{d\delta y}{dx} + \dots \right] + \int_{x_1}^{x_2} (P) \delta y \cdot dx.$$

Уравненіе это должно существовать при совершенно произвольныхъ dx_1 и dx_2 . Слѣдовательно, оно должно имѣть мѣсто и при $dx_1=0$ и $dx_2=0$. Принявъ это и повторивъ тѣ же самыя разсужденія, которыми пользовались при отысканіи y для наибольшихъ значеній интеграловъ съ постоянными предѣлами, мы придемъ къ необходимости положить

$$(P) = 0.$$

Это будетъ дифференціальное уравненіе $2n$ порядка. Общій интегралъ его дастъ y въ функціи x и $2n$ произвольныхъ постоянныхъ. Кромѣ этого, вслѣдствіе произвольности dx_1 и dx_2 , мы должны будемъ положить $V_1=0$ и $V_2=0$. Затѣмъ, исключивъ зависимыя варіаціи (если есть условія, стѣсняющія измѣненія y

при предѣлахъ интеграла) и приравнявъ коэффициенты при независимыхъ варіаціяхъ нулю, получимъ еще $2n$ уравненій, считая въ томъ числѣ и уравненія, стѣсняющія измѣненія y при предѣлахъ. Такимъ образомъ видимъ, что вся разница заключается только въ томъ, что кромѣ прежнихъ $2n$ уравненій будемъ имѣть еще 2 уравненія

$$V_1 = 0 \text{ и } V_2 = 0,$$

но зато прибавится и два лишнихъ неизвѣстныхъ x_1 и x_2 . Случай, когда x_1 и x_2 совершенно произвольны, не представляетъ интереса въ приложеніяхъ. Гораздо важнѣе тотъ случай, когда предѣлы x_1 и x_2 связаны съ y_1 и y_2 данными уравненіями, какъ это было въ задачѣ о брахистохронѣ, которая должна быть проведена между двумя данными кривыми линіями. Положимъ, что соотношеніе между y и x при верхнемъ предѣлѣ x_2 выразится уравненіемъ

$$y = \phi(x),$$

а при нижнемъ предѣлѣ x_1 уравненіемъ

$$y = \psi(x).$$

Мы рассмотримъ предѣльныя величины, отмѣченныя значкомъ I. Пусть предѣльныя величины x и y до варьированія будутъ x_1 и y_1 , тогда имѣемъ:

$$y_1 = \psi_1(x_1).$$

Если x не измѣняется при варьированіи, то предѣльныя величины координатъ послѣ варьированія, когда y перемѣнится на $Y = y + \delta y$, будутъ:

$$x_1 \text{ и } y_1 + (\delta y)_1 = (y + \delta y)_1 = Y_1.$$

Если-же при варьированіи и x_1 измѣнится на $x_1 + dx_1$, то y_1 измѣнится не только отъ того, что y получитъ приращеніе δy , но также отъ того, что x_1 въ $(y + \delta y)_1 = Y_1$ перемѣнится на $x_1 + dx_1$. Это новое значеніе y_1 , по строку Тейлора, напишется такъ:

$$(y_1) = \left[Y + \frac{dY}{dx} \cdot dx + \frac{d^2Y}{dx^2} \frac{dx^2}{2} + \dots \right];$$

отбрасывая безконечно-малыя выше перваго порядка, будемъ имѣть:

$$(y_1) = \left[Y + \frac{dY}{dx} \cdot dx \right]_1.$$

Вставляя вмѣсто Y его выраженіе $y + \delta y$, получимъ:

$$(y_1) = y_1 + (\delta y)_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 dx_1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 dx_1.$$

Послѣдній членъ, какъ безконечно-малое выше перваго порядка, можно отбросить, такъ что окончательно будемъ имѣть:

$$(y_1) = y_1 + (\delta y)_1 + y_1 dx_1;$$

но, съ другой стороны, принимая во вниманіе, что

$$y_1 = \psi(x_1),$$

получимъ, ограничиваясь безконечно-малыми 1-го порядка,

$$(y_1) = \psi(x_1 + dx_1) = y_1 + \psi'(x_1) \cdot dx_1.$$

Сравнивая эти два выраженія (y_1) , найдемъ

$$y_1 + (\delta y)_1 + y'_1 \cdot dx_1 = y_1 + \psi'(x_1) \cdot dx_1,$$

откуда:

$$(\delta y)_1 = (\psi'(x_1) - y'_1) \cdot dx_1.$$

Тѣмъ-же самымъ путемъ отыщемъ подобное-же соотношеніе и для предѣльныхъ величинъ, отмѣченныхъ значкомъ 2, именно:

$$(\delta y)_2 = (\psi'(x_2) - y'_2) \cdot dx_2.$$

Такимъ образомъ видимъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ изъ четырехъ безконечно-малыхъ

$$dx_1, (\delta y)_1, dx_2 \text{ и } (\delta y)_2$$

только два совершенно произвольны, а остальные два опредѣлятся изъ найденныхъ соотношеній.

Пояснимъ геометрически выведенныя нами соотношенія.

Для этого рассмотримъ какое-нибудь одно изъ нихъ, напирмѣръ первое:

$$(\delta y)_1 = (\psi'(x_1) - y'_1) \cdot dx_1.$$

Вообразимъ оси координатъ (xy) . Пусть AB искомая кривая, предѣльная точка которой B должна находиться на неподвижной кривой MN , и пусть $A'B$ есть измѣненное положеніе кривой AB вслѣдствіе перемѣны y на $y + \delta y$, тогда $BC = (\delta y)_1$, а $BD = dx_1$. Изъ прямоугольнаго треугольника BDC имѣемъ $CD = y'_1 \cdot dx_1$. Если уравненіе неподвижной кривой MN есть $y = \psi(x)$, то изъ прямоугольнаго треугольника BDB' будемъ имѣть:

$$BD = \psi'(x_1) \cdot dx_1$$

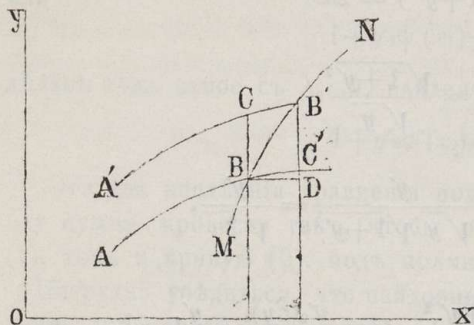
Такъ что выведенное выше соотношеніе

$$(\delta y)_1 = \psi'(x_1) \cdot dx_1 - y'_1 \cdot dx_1,$$

геометрически представленное, приводится къ равенству

$$BC = B'D - C'D = B'C'.$$

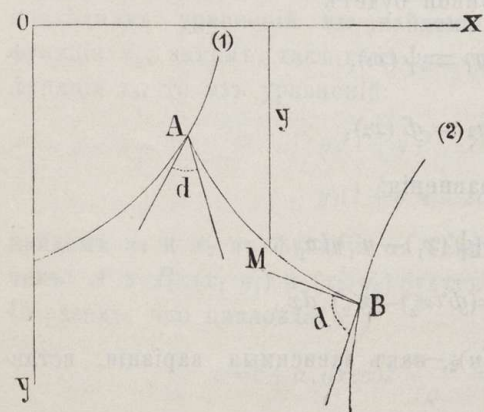
Очевидно, что $B'C'$ получается равнымъ BC только потому, что мы отбросили бесконечно-малыя высшихъ порядковъ.



которую тяжелая точка пріобрѣтала-бы, свободно падаѣ съ нѣкоторой данной горизонтальной линіи.

Рѣшимъ теперь задачу о брахистохронѣ въ нѣсколько иномъ видѣ.

Положимъ, требуется найти кривую кратчайшаго ска- та, идущую отъ одной дан- ной кривой къ другой, при чемъ скорость движущейся точки въ каждомъ ея по- ложеніи равна той скорости,



Примемъ эту горизон- тальную линію за ось x . Тогда скорость точки M въ ея произвольномъ положе- ніи будетъ

$$v = \sqrt{2gy},$$

а потому время T прохож- денія отъ A до B выра- зится также, какъ и въ рѣшенной выше задачѣ о брахистохронѣ, именно:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} \cdot dx.$$

Очевидно T будетъ minimum, если

$$U = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} \cdot dx$$

minimum, а потому будемъ имѣть

$$\delta U = V_2 \cdot dx_2 - V_1 \cdot dx_1 + \int_{x_1}^{x_2} P_1 \cdot \delta y + \int_{x_1}^{x_2} (P - \frac{dP}{dx} x) \delta y \cdot dx = 0.$$

Видъ неизвѣстной кривой найдется изъ дифференціального уравненія:

$$P - \frac{dP_1}{dx} = 0.$$

Это уравненіе мы уже интегрировали и въ результатѣ послѣ 1-го интегрированія получили:

$$y(1+y'^2) = 2a.$$

Замѣчая, что

$$V = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$$

и что

$$P_1 = \frac{dV}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{1+y'^2}} = \frac{y'}{\sqrt{2a}},$$

найдемъ

$$\delta U = \frac{\sqrt{1+y_2'^2}}{\sqrt{y_2}} \cdot dx_2 - \frac{\sqrt{1+y_1'^2}}{\sqrt{y_1}} \cdot dx_1 + \frac{y_2'(\delta y)_2}{\sqrt{2a}} - \frac{y_1'}{\sqrt{2a}} (\delta y)_1 = 0.$$

Если уравненіе верхней кривой будетъ

$$y_1 = \psi(x_1),$$

а нижней

$$y_2 = \phi(x_2),$$

то будемъ имѣть еще 2 уравненія:

$$(\delta y)_1 = (\psi'(x_1) - y_1') dx_1$$

$$(\delta y)_2 = (\phi'(x_2) - y_2') \cdot dx_2.$$

Разсматривая $(\delta y)_1$ и $(\delta y)_2$, какъ зависимыя варіаціи, вставляя ихъ выраженія въ

$$\delta U = 0$$

и затѣмъ соединяя члены съ dx_1 и dx_2 , получимъ уравненіе вида

$$\lambda_2 \cdot dx_2 - \lambda_1 \cdot dx_1 = 0,$$

гдѣ dx_2 и dx_1 суть совершенно произвольныя безконечно-малыя величины, а потому

$$\lambda_2 = 0 \text{ и } \lambda_1 = 0.$$

Разсмотримъ, что даютъ эти условія.

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{1+y_1'^2}}{\sqrt{y_1}} + \frac{y_1' \psi'(x_1)}{\sqrt{2a}} - \frac{y_1'^2}{\sqrt{2a}} = 0;$$

замѣчая, что

$$\frac{\sqrt{1+y_1'^2}}{\sqrt{y_1}} = \frac{1+y_1'^2}{\sqrt{y_1} \cdot \sqrt{1+y_1'^2}} = \frac{1+y_1'^2}{\sqrt{2a}},$$

получимъ

$$\frac{1+y_1'^2+y_1'\psi(x_1)-y_1'^2}{\sqrt{2a}}=0,$$

или

$$1+y_1'\psi(x_1)=0;$$

дѣлавъ тоже самое съ $\lambda_2=0$, найдемъ 0

$$1+y_2'\beta(x_2)=0.$$

Эти два послѣднія уравненія показываютъ намъ, что циклоиду нужно провести такъ, чтобы она пересѣкала какъ бривую (1), такъ и кривую (2), подъ прямымъ угломъ.

Нетрудно убѣдиться, что найденныхъ уравненій вполне достаточно для опредѣленія предѣловъ x_1 и x_2 и произвольныхъ постоянныхъ a и c , введенныхъ интегрированіемъ уравненія $(P)=0$ въ уравненіе искомой циклоиды. Въ самомъ дѣлѣ, изъ двухъ послѣднихъ уравненій мы найдемъ y_1' въ функціи x_1 , а y_2' въ функціи x_2 ; затѣмъ, такъ-какъ y_1 есть функція x_1 , а y_2 есть функція x_2 , то изъ уравненій:

$$y_1(1+y_1'^2)=2a,$$

$$y_2(1+y_2'^2)=2a$$

найдемъ x_1 и x_2 въ функціи a . Такимъ образомъ координаты точекъ A и B ($x_1 y_1$) и ($x_2 y_2$) будутъ извѣстными функціями a . Выразивъ, что циклоида:

$$x=c+a \cdot \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}$$

проходитъ черезъ эти двѣ данныя точки, получимъ 2 уравненія, содержащія только a и c .

Для другаго примѣра возьмемъ задачу о кривой, которая при вращеніи около данной оси даетъ наименьшую поверхность вращенія, и предположимъ, что крайнія точки, между которыми должна быть проведена искомая кривая, должны находиться на данныхъ кривыхъ:

$$y_1=\psi(x_1) \text{ и } y_2=\phi(x_2).$$

Такъ какъ въ этой задачѣ

$$V=y\sqrt{1+y'^2},$$

то предѣльное условіе будетъ:

$$V_2 dx_2 - V_1 dx_1 + \int_{x_1}^{x_2} P_1 dy = 0.$$

Вставивъ вмѣсто $(\delta f)_1$ и $(\delta y)_2$ ихъ выраженія въ зависимости отъ dx_1 и dx_2 и приравнявъ нулю коэффиціенты при послѣднихъ безконечно-малыхъ, получимъ два уравненія:

$$V_2 + \left(\frac{dV}{dy} \right)_2 [\phi'(x_2) - y'_2] = 0$$

и

$$V_1 + \left(\frac{dV}{dy} \right)_1 [\psi'(x_1) - y'_1] = 0;$$

послѣднее уравненіе будетъ

$$y_1 \sqrt{1+y_1'^2} + \frac{y_1 y_1'}{\sqrt{1+y_1'^2}} \cdot \psi'(x_1) - \frac{y_1 y_1'^2}{\sqrt{1+y_1'^2}} = 0$$

и, по упрощеніи, даетъ:

$$1 + y_1' \psi'(x_1) = 0.$$

Точно также первое уравненіе приведетъ къ

$$1 + y_2' \phi'(x_2) = 0.$$

Эти два условія показываютъ, что искомая кривая должна быть проведена такъ, чтобы она пересѣкала двѣ данныя кривыя подъ прямыми углами.

Случай, когда подынтегральная функція содержитъ предѣльныя значенія переменныхъ.

Разсмотримъ по прежнему

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V. dx$$

и предположимъ, что подынтегральная функція V кромѣ x , y , y' , y'' содержитъ еще значенія этихъ переменныхъ при предѣлахъ, т. е. величины x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , y'_1 , y'_2 и т. д.

При вычисленіи варіаціи δS мы различимъ два случая: 1) когда предѣлы x_1 и x_2 постоянны и 2) когда они переменны.

Разсмотримъ сначала первый случай. Измѣненіе въ S произойдетъ отъ измѣненія y на $y + \delta y$, при чемъ и предѣльныя значенія y_1 , y_2 , y'_1 , y'_2 , ... входящія въ V , получаютъ также соотвѣтствующія безконечно-малыя измѣненія, которыя будутъ

представлены значеніями, получаемыми варіаціями δy , $\delta y'$, при $x=x_1$, и при $x=x_2$, такъ что въ выраженіи δV получатся дополнительные члены, происходящіе отъ измѣненія y_1, y_2, y'_1, y'_2 Эти члены составятъ сумму

$$\frac{dV}{dy_1} (\delta y)_1 + \frac{dV}{dy_2} (\delta y)_2 + \frac{dV}{dy'_1} (\delta y')_1 + \frac{dV}{dy'_2} (\delta y')_2 + \dots$$

Въ выраженіи же δS , кромѣ членовъ вычисленныхъ прежде, войдетъ дополнительный членъ вида:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dV}{dy_1} (\delta y) + \frac{dV}{dy_2} (\delta y_2) + \frac{dV}{dy'_1} (\delta y')_1 + \frac{dV}{dy'_2} (\delta y')_2 + \dots \right] dx.$$

Здѣсь количества $(\delta y)_1, (\delta y)_2$ не зависятъ отъ x , а только отъ предѣльныхъ значеній x_1 и x_2 , поэтому они могутъ быть вынесены за знакъ интеграла и дополнительные члены въ выраженіи δS будутъ

$$(\delta y)_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy} dx + (\delta y)_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy_2} dx + (\delta y')_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy'_1} dx + \dots$$

Члены эти присоединятся къ тѣмъ членамъ варіаціи δS , стоящимъ внѣ знака интеграла, которые содержатъ множителями тѣ же бесконечно-малыя $(\delta y)_1, (\delta y)_2, \dots$, и очевидно, что присоединеніе это ни въ чемъ не измѣнитъ тѣхъ разсужденій, которыя привели насъ къ равенству

$$\delta S = 0,$$

выражающему условіе minimum'a или minimum'a S . Для опредѣленія функціи y намъ придется, какъ и прежде, интегрировать уравненіе:

$$(P) = 0,$$

откуда мы получимъ y въ функціи x и $2n$ произвольныхъ постоянныхъ. Если мы это выраженіе y вставимъ въ V , то и V сдѣлается опредѣленною функціей x и тѣхъ-же $2n$ произвольныхъ постоянныхъ; тогда всѣ интегрированія, указанная въ дополнительномъ членѣ, могутъ быть исполнены, и мы найдемъ предѣльныя условія, поступая подобно тому, какъ и въ прежде разсмотрѣнныхъ нами случаяхъ.

Положимъ теперь, что предѣлы x_1 и x_2 суть величины переменныя, причемъ они могутъ входить или не входить въ выраженіе V . Въ этомъ случаѣ V , а слѣдовательно и S , при варьированіи

получать измѣненія, въ выраженіи которыхъ, кромѣ всей совокупности членовъ, приведенныхъ выше, войдутъ безконечно-малыя приращенія, происходящія отъ измѣненія x_1 и x_2 на x_1+dx_1 и x_2+dx_2 . Такимъ образомъ къ выраженію δV присоединятся еще члены:

$$\left[\frac{dV}{dx_1} \right] \cdot dx_1 + \left[\frac{dV}{dx_2} \right] \cdot dx_2,$$

гдѣ $\left[\frac{dV}{dx_1} \right]$ и $\left[\frac{dV}{dx_2} \right]$ обозначаютъ полныя производныя V , взятыя не только по x_1 и x_2 , на сколько эти переменныя входятъ явнымъ образомъ въ составъ V , но и по $y_1, y_2, y'_1, y'_2 \dots$ которыя суть функции x_1 и x_2 . Эти члены въ выраженіи δS дадутъ дополнительное приращеніе:

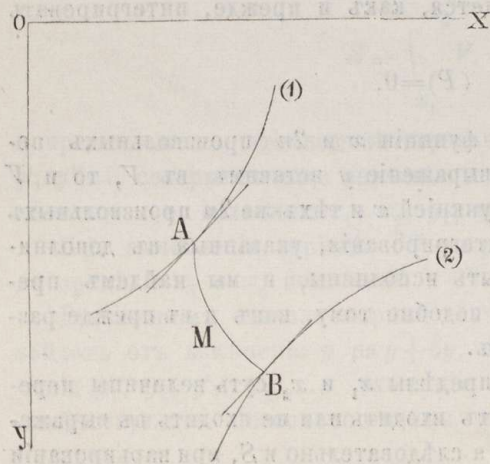
$$dx_1 \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dV}{dx_1} \right] \cdot dx + dx_2 \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dV}{dx_2} \right] \cdot dx,$$

которое присоединится къ членамъ, содержащимъ dx_1 и dx_2 и стоящимъ внѣ знака интеграла, именно къ

$$V_2 \cdot dx_2 - V_1 \cdot dx_1.$$

Къ новому выраженію δS , такимъ образомъ составленному, будутъ приложимы всѣ заключенія, сдѣланныя нами раньше. Какъ примѣръ на приложеніе только что выведенныхъ нами новыхъ правилъ разсмотримъ слѣдующее видоизмѣненіе задачи о брахистохронѣ.

Требуется найти кривую кратчайшаго ската между двумя кривыми, расположенными въ вертикальной плоскости, причемъ предполагается, что движеніе точки начинается съ первой кривой безъ начальной скорости.



Положимъ, что уравненіе 1-й верхней кривой есть $y_1 = \psi_1(x_1)$, а уравненіе 2-й нижней кривой есть $y_2 = \varphi(x_2)$. Пусть кривая AB будетъ искомою брахистохроной; обозначимъ чрезъ x_1, y_1 координаты точки A , чрезъ x_2, y_2 координаты точки B , чрезъ y ординату движущейся точки M ; тогда скорость ея v будетъ:

$$\sqrt{2g(y - y_1)}.$$

Время прохожденія дуги AB выразится какъ прежде, именно:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_1}} \cdot dx.$$

Положимъ, что:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_1}} \cdot dx = U.$$

Мы должны опредѣлить функцію y такъ, чтобы U было minimum. Въ нашемъ случаѣ подынтегральная функція

$$V = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_1}}$$

содержитъ предѣльное значеніе y_1 ; предѣлы x_1 и x_2 здѣсь перемѣнны, а потому, согласно вышесказанному, въ варіацію δU войдутъ слѣдующіе дополнительные члены:

$$(\delta y)_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy_1} \cdot dx + dx_1 \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dV}{dx_1} \right] \cdot dx.$$

Но здѣсь

$$\left[\frac{dV}{dx} \right] = \frac{dV}{dy_1} \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dV}{dy_1} \cdot y'_1, \quad *)$$

*) Здѣсь при дифференцированіи V по x_1 рассматривается измѣненіе въ V , происходящее только отъ измѣненія предѣльной абсциссы кривой AB , при чемъ форма этой кривой полагается вполнѣ опредѣленной ея уравненіемъ; поэтому-то производная $\frac{dy_1}{dx_1}$ относится къ кривой AB въ точкѣ A и выражаетъ тангенсъ угла наклоненія касательной къ кривой AB и слѣдовательно равна y_1 , а не $\psi(x_1)$, которая соотвѣтствуетъ измѣненію y_1 —ординаты кривой AB , происходящему не только отъ измѣненія x_1 на x_1+dx_1 , но и отъ измѣненія формы функціи y , выражающей кривую AB . Измѣненіе въ S , простицающее отъ измѣненія формы функціи y , на сколько это измѣненіе вліяетъ на y_1 , было вычислено отдѣльно; оно выразилось въ δS членомъ:

$$(\delta y)_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy_1} \cdot dx.$$

Только совокупность двухъ указанныхъ измѣненій опредѣляетъ полное измѣненіе въ S , происходящее отъ измѣненія y_1 , и, какъ видно дальше, оно выразится членомъ:

$$\psi(x_1) \cdot dx_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy_1} \cdot dx.$$

а потому прибавочные члены составить выражение

$$\left[(\delta y)_1 + y'_1 \cdot dx_1 \right] \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy_1} \cdot dx,$$

или замѣтивъ, что:

$$(\delta y)_1 = [\psi(x_1) - y'_1] \cdot dx_1,$$

какъ то было найдено прежде, и слѣдовательно,

$$(\delta y)_1 + y'_1 \cdot dx_1 = \psi(x_1) \cdot dx_1,$$

находимъ, что дополнительный членъ въ выраженіи δS будетъ:

$$\psi(x_1) \cdot dx_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy_1} \cdot dx.$$

Изъ выраженія V видно, что:

$$\frac{dV}{dy_1} = - \frac{dV}{dy} = -P.$$

Уравненіе, черезъ интегрированіе котораго мы получаемъ y , есть

$$(P) = 0,$$

или болѣе подробно

$$P - \frac{dP_1}{dx} = 0;$$

откуда

$$P = \frac{dP_1}{dx}.$$

Слѣдовательно

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy_1} \cdot dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dP_1}{dx} \cdot dx = - \int_{x_1}^{x_2} P_1 = \left| P_1 \right|_{x_1}^{x_2}.$$

Но

$$P_1 = \frac{dV}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{y - y_1} \cdot \sqrt{1 + y'^2}},$$

а первый интегралъ уравненія

$$(P) = 0,$$

какъ это видѣли прежде, есть

$$\sqrt{y - y_1} \cdot \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{2a}.$$

слѣдовательно

$$P_1 = \frac{y'}{\sqrt{2a}},$$

а потому

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy_1} \cdot dx = \frac{y'_1 - y'_2}{\sqrt{2a}}.$$

Въ предыдущемъ рѣшеніи задачи о брахистохронѣ при перемѣнныхъ предѣлахъ x_1 и x_2 , но съ предположеніемъ, что движеніе начинается безъ начальной скорости отъ горизонтальной линіи, взятой за ось x , было уже найдено выраженіе δU и приведено къ виду

$$\delta U = \lambda_2 \cdot dx_2 - \lambda_1 \cdot dx_1,$$

гдѣ λ_2 и λ_1 суть нѣкоторые коэффициенты, составъ которыхъ намъ извѣстенъ. Новое выраженіе δU , соотвѣтствующее настоящей задачѣ, будетъ слѣдовательно:

$$\delta U = \lambda_2 dx_2 - \lambda_1 dx_1 + \frac{y'_1 - y'_2}{\sqrt{2a}} \psi(x_1) \cdot dx_1.$$

Для опредѣленія minimum'a это выраженіе должно быть приравнено нулю; здѣсь dx_1 и dx_2 совершенно произвольныя безконечно малыя, а потому уравненіе

$$\delta U = 0$$

распадется на два слѣдующихъ:

$$\lambda_2 = 0$$

и

$$\lambda_1 + \frac{y'_2 - y'_1}{\sqrt{2a}} = 0.$$

Уравненіе $\lambda_2 = 0$, какъ это уже видѣли выше, приводится къ виду:

$$1 + y'_2 g'(x_2) = 0.$$

Оно показываетъ, что брахистохрона нормальна ко второй кривой. Второе-же уравненіе, если вмѣсто λ_1 вставимъ его выраженіе, будетъ:

$$\frac{1}{\sqrt{2a}} + \frac{y'_1}{\sqrt{2a}} \psi(x_1) + \frac{y'_2 - y'_1}{\sqrt{2a}} \psi(x_1) = 0,$$

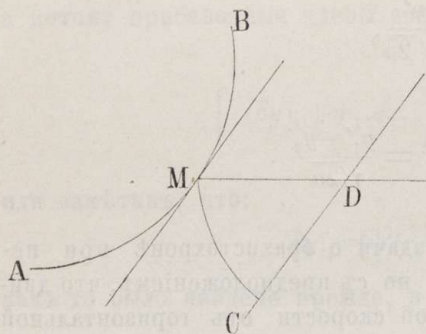
или по упрощеніи

$$1 + y'_2 \psi(x_1) = 0.$$

Изъ двухъ только что выведенныхъ равенствъ слѣдуетъ, что:

$$\psi(x_1) = g'(x_2).$$

Это показываетъ, что касательная въ точкѣ A къ первой



кривой должна быть параллельна касательной въ точкѣ B ко второй кривой. Замѣчаніе это указываетъ построение, которое нужно

сдѣлать для рѣшенія задачи. Положимъ для примѣра, что требуется, при выговоренныхъ выше условіяхъ, найти брахистохрону между кривой AB и

прямой CD . Проведемъ къ кривой AB касательную параллельную прямой CD . Тогда точка прикосновенія M будетъ точкою выхода и слѣдовательно точкой возврата циклоиды. Горизонтальная прямая MN будетъ ея основаніемъ, а радіусъ образующаго круга надо выбрать такимъ образомъ, чтобы циклоида пересѣкала прямую CD подъ прямымъ угломъ.

Интегралы, содержащіе двѣ неизвѣстныя функціи.

Пусть:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

гдѣ

$$V = f(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}, z, z', z'', \dots z^{(m)}),$$

при чемъ y и z суть двѣ неизвѣстныя функціи x , которыя должны быть опредѣлены подѣ условіемъ, чтобы S было maximum'омъ или minimum'омъ. Предѣлы x_1 и x_2 будемъ для простоты полагать постоянными. Случай переменныхъ предѣловъ можетъ быть включенъ въ послѣдующее разсмотрѣніе разсужденіями, подобными предѣидущимъ.

Положимъ, что y переменяется на $y + \delta y$, а z на $z + \delta z$; тогда будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \delta V = & P \delta y + P_1 \delta y' + P_2 \delta y'' + \dots + P_n \delta y^{(n)} \\ & + Q \delta z + Q_1 \delta z' + Q_2 \delta z'' + \dots + Q_m \delta z^{(m)}, \end{aligned}$$

гдѣ $P, P_1, P_2, \dots, P_n$ имѣютъ прежнія значенія, а

$$Q = \frac{dV}{dz}; \quad Q_1 = \frac{dV}{dz'}; \quad \dots \quad Q_m = \frac{dV}{dz^{(m)}}.$$

Выраженіе это можетъ быть написано иначе, а именно:

$$\delta V = P \delta y + P_1 \frac{d\delta y}{dx} + P_2 \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \dots + P_n \frac{d^n\delta y}{dx^n} \\ + Q \delta z + Q_1 \frac{d\delta z}{dx} + Q_2 \frac{d^2\delta z}{dx^2} + \dots + Q_m \frac{d^m\delta z}{dx^m}.$$

Вариация δS будетъ по прежнему

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \delta V dx.$$

Подставимъ сюда найденное выраженіе δV и произведемъ также, какъ и въ случаѣ одной функціи, интегрированіе по частямъ съ цѣлью вывести за знакъ интеграла всѣ производныя вариаций δy и δz ; тогда найдемъ подобно предъидущему:

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left[(P_1)\delta y + (P_2)\frac{d\delta y}{dx} + \dots + (P_n)\frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} \right] + \\ + \int_{x_1}^{x_2} \left[(Q_1)\delta z + (Q_2)\frac{d\delta z}{dx} + \dots + (Q_m)\frac{d^{m-1}\delta z}{dx^{m-1}} \right] + \\ + \int_{x_1}^{x_2} \left[(P)\delta y + (Q)\delta z \right] dx,$$

гдѣ (Q) , (Q_1) имѣютъ тѣ-же значенія, какъ и (P) , (P_1) и отличаются отъ этихъ послѣднихъ выраженій только переменн y на z и P на Q .

Для опредѣленія вида функцій y и z , дѣлающихъ S максимум'омъ или минимум'омъ, придется повторить прежнія разсужденія. Такъ, y и z мы будемъ разсматривать, какъ функціи x и произвольнаго параметра t , при чемъ эти функціи при $t=t_0$ обращаются въ функціи одного x , дѣлающія S maximum'омъ или minimum'омъ.

Прежнее условіе

$$\delta S = 0$$

будетъ, очевидно, имѣть мѣсто и въ настоящемъ случаѣ. Это условіе, подобно предъидущему, приведетъ насъ къ нѣсколькимъ уравненіямъ, при чемъ необходимо различать два случая, а именно: будутъ ли функціи y и z независимы одна отъ другой, или связаны какимъ-нибудь условіемъ.

Положимъ сначала, что y и z независимы; тогда очевидно, что помощію разсужденій, подобныхъ тѣмъ, которыя были приведены выше, мы придемъ къ заключенію о необходимости существованія слѣдующихъ двухъ уравненій

$$(P)=0,$$

$$(Q)=0.$$

Эти два дифференціальныя уравненія, изъ которыхъ 1-е порядка $2n$, а 2-е порядка $2m$, послужатъ намъ для опредѣленія неизвѣстныхъ функцій y и z .

Затѣмъ намъ придется приравнять нулю члены δS , стоящіе вѣдъ знака интеграла. Исключивъ изъ полученнаго т. о. уравненія всѣ зависимыя варіаціи при помощи тѣхъ условныхъ уравненій, которыя намъ даны и которымъ должны удовлетворять предѣльныя значенія $y, y', \dots, z, z', \dots$ и приравнявъ затѣмъ нулю коэффиціенты при остальныхъ независимыхъ и слѣдовательно произвольныхъ варіаціяхъ, получимъ достаточное число уравненій для опредѣленія всѣхъ произвольныхъ постоянныхъ.

Положимъ теперь, что функціи y и z связаны между собою уравненіемъ:

$$\varphi(x, y, z)=0.$$

Этому уравненію функціи должны удовлетворять и послѣ варьирования, слѣдовательно

$$\varphi(x, y+\delta y, z+\delta z)=0$$

Разлагая это выраженіе по стокъ Тейлора и ограничиваясь бесконечно малыми перваго порядка, найдемъ:

$$\frac{d\varphi}{dy} \cdot \delta y + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \delta z = 0.$$

Это равенство позволяетъ намъ исключить варіацію δz : изъ него мы имѣемъ

$$\delta z = - \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dz}},$$

а потому, приравнявая нулю коэффиціентъ при δy подъ знакомъ интеграла въ выраженіи δS , мы будемъ имѣть уравненіе:

$$(P) - \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dz}} \cdot (Q) = 0,$$

или въ нѣсколько болѣе симметричномъ видѣ

$$\frac{(P)}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{(Q)}{\frac{d\varphi}{dz}}.$$

Это уравненіе вмѣстѣ съ уравненіемъ

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

послужитъ намъ для опредѣленія y и z . Предѣльныя условія получатся также какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

О геодезической линіи.

Задача. Между двумя данными точками по данной поверхности провести кривую кратчайшей длины.

Пусть уравненіе данной поверхности есть:

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Длина кривой выразится, какъ извѣстно, интеграломъ:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \, dx,$$

гдѣ x_1 и x_2 суть абсциссы крайнихъ точекъ.

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ подъ интеграломъ двѣ неизвѣстныя функціи z и y , связанныя между собой даннымъ уравненіемъ; подынтегральная функція будетъ:

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}.$$

Поэтому функціи y и z найдутся чрезъ интегрированіе слѣдующаго дифференціального уравненія:

$$\frac{(P)}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{(Q)}{\frac{d\varphi}{dz}}.$$

Здѣсь:

$$(P) = -\frac{dP_1}{dx}, \text{ потому что } P = \frac{dV}{dy} = 0;$$

точно также

$$(Q) = -\frac{dQ_1}{dx}, \text{ потому что } Q = \frac{dV}{dz} = 0;$$

дѣлѣ:

$$P_1 = \frac{dV}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

и

$$Q_1 = \frac{dV}{dz'} = \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}.$$

Слѣдовательно уравненіе, подлежащее интегрированію, можетъ быть написано такъ:

$$\frac{\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\frac{d}{dz} \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{\frac{d\varphi}{dz}}.$$

Замѣчая, что:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \frac{dy}{ds}$$

и что точно также

$$\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \frac{dz}{ds},$$

получимъ найденное уравненіе въ такомъ болѣе простомъ видѣ:

$$\frac{\frac{d}{ds} \frac{dy}{ds}}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\frac{d}{ds} \frac{dz}{ds}}{\frac{d\varphi}{dz}}.$$

Нетрудно убѣдиться, что это уравненіе обусловливаетъ собой существованіе такого-же уравненія, въ которомъ вмѣсто одной изъ координатъ y или z будетъ входить x , т. е. что:

$$\frac{\frac{d}{ds} \frac{dy}{ds}}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\frac{d}{ds} \frac{dz}{ds}}{\frac{d\varphi}{dz}} = \frac{\frac{d}{ds} \frac{dx}{ds}}{\frac{d\varphi}{dx}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, обозначивъ отношеніе $\frac{\frac{d}{ds} \frac{dz}{ds}}{\frac{d\varphi}{dz}}$ черезъ k ,

получимъ:

$$\frac{\frac{d}{ds} \frac{dy}{ds}}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\frac{d}{ds} \frac{dz}{ds}}{\frac{d\varphi}{dz}} = k.$$

Умноживъ теперь числителя и знаменателя первой дроби на $\frac{dy}{ds}$, а числителя и знаменателя второй дроби на $\frac{dz}{ds}$, и взявъ отношеніе суммы членовъ предъидущихъ къ суммѣ членовъ послѣдующихъ, найдемъ, что:

$$k = \frac{\frac{dy}{ds} \cdot d \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} \cdot d \frac{dz}{ds}}{\frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{dz}{ds}}.$$

Если затѣмъ данное уравненіе поверхности

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

одифференцируемъ и раздѣлимъ на ds , то получимъ:

$$\frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{dz}{ds} = 0.$$

Съ другой стороны, если возьмемъ уравненіе, выражающее дифференціалъ дуги

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

раздѣлимъ его на ds^2 , одифференцируемъ и сократимъ на 2, то получимъ:

$$\frac{dx}{ds} \cdot d \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} \cdot d \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} \cdot d \frac{dz}{ds} = 0.$$

Пользуясь этими двумя уравненіями, найдемъ, что:

$$k = \frac{-\frac{dx}{ds} \cdot d \frac{dx}{ds}}{-\frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}} = \frac{d \frac{dx}{ds}}{\frac{d\varphi}{dx}}.$$

Такимъ образомъ дифференціальное уравненіе геодезической линіи окончательно будетъ выражено равенствомъ:

$$\frac{d \frac{dx}{ds}}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{d \frac{dy}{ds}}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{d \frac{dz}{ds}}{\frac{d\varphi}{dz}}.$$

Чтобы получить уравненіе геодезической линіи въ конечной формѣ, нужно найденное дифференціальное уравненіе обинтегрировать, присоединивъ къ нему уравненіе данной поверхности

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Въ общемъ случаѣ произвести это интегрированіе невозможно. Необходимо однако замѣтить главное свойство геодезической линіи, которое выражено ея дифференціальнымъ уравненіемъ. Входящіе въ немъ знаменатели $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ прямо пропорціональны косинусамъ угловъ, которые дѣлаетъ нормаль N къ поверхности $\varphi=0$ съ осями координатъ, а числители $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$ прямо пропорціональны косинусамъ угловъ, которые дѣлаетъ главная нормаль искомой кривой или, что одно и то же, радіусъ кривизны ρ съ осями координатъ. Слѣдовательно косинусы угловъ двухъ этихъ линій N и ρ соотвѣтственно пропорціональны, то есть главная нормаль геодезической линіи совпадаетъ съ нормалью къ поверхности. Иначе говоря, въ каждой точкѣ геодезической линіи соприкасающаяся плоскость перпендикулярна къ поверхности. Это есть главное свойство геодезической линіи *). Всякая кривая, обладающая этимъ свойствомъ, называется геодезическою, хотя она можетъ и не быть кратчайшею, если двѣ точки, которыя она соединяетъ, достаточно удалены одна отъ другой. Такъ напр. на сферѣ дуга большаго круга, большая полуокружности, есть также геодезическая линія, хотя она и не есть кратчайшее разстояніе между ея концами. Очевидно также, что между двумя точками на поверхности всегда можно провести по крайней мѣрѣ одну геодезическую линію, хотя иногда ихъ можетъ существовать нѣсколько; такъ напримѣръ, какъ увидимъ ниже, геодезическая линія на ци-

*) Примѣчаніе. Слѣдую Монжу, это основное свойство геодезической линіи можетъ быть обнаружено помощію механическихъ соображеній. Геодезическая линія имѣетъ форму, которую принимаетъ гибкая и нерастяжимая нить, натягиваемая между двумя точками на данной поверхности при условіи, что эта нить лежитъ на поверхности всѣми своими точками и при перемѣщеніи ни одна изъ точекъ нити не можетъ оставить поверхности. (Можно вообразить двѣ безконечно-близкія параллельныя поверхности, между которыми нить перемѣщается). Очевидно, что линія, форму которой принимаетъ натянутая нить, будетъ обыкновенно кратчайшимъ разстояніемъ между двумя точками, потому что, натягивая концы нити, мы имѣемъ возможность укоротить ея длину, насколько позволитъ это форма поверхности. Натянутая нить будетъ въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ ея натяженія и сопротивленія поверхности; но, рассматривая натяженіе двухъ смежныхъ элементовъ кривой, образуемой нитью, мы замѣчаемъ, что равнодѣйствующая этихъ двухъ натяженій лежитъ въ плоскости ихъ дѣйствія, которая есть, очевидно, соприкасающаяся плоскость кривой; эта равнодѣйствующая должна уравновѣшиваться сопротивленіемъ поверхности, которое дѣйствуетъ по нормали къ поверхности, и слѣдовательно: „соприкасающаяся плоскость геодезической кривой проходить черезъ нормаль къ поверхности въ рассматриваемой точкѣ“.

лиандръ есть винтовая линия и по поверхности цилиндра между двумя данными точками можно провести безчисленное множество винтовыхъ линий, дѣлающихъ различное число оборотовъ около цилиндра.

Составимъ теперь дифференціальное уравненіе геодезической линіи въ другомъ видѣ, болѣе удобномъ для интегрированія. Для этого выразимъ инымъ образомъ условіе перпендикулярности между соприкасающейся плоскостью кривой и касательной плоскостью къ данной поверхности.

Уравненіе соприкасающейся плоскости будетъ:

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0,$$

гдѣ:

$$A = dy d^2 z - dz d^2 y$$

$$B = dz d^2 x - dx d^2 z$$

$$C = dx d^2 y - dy d^2 x.$$

Уравненіе касательной плоскости къ поверхности есть:

$$p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0,$$

гдѣ p и q суть частныя производныя z взятые по x и y изъ уравненія поверхности:

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Условіе перпендикулярности двухъ этихъ плоскостей выразится, какъ извѣстно, такъ:

$$Ap + Bq - C = 0,$$

или подробнѣе:

$$p(dy d^2 z - dz d^2 y) + q(dz d^2 x - dx d^2 z) - (dx d^2 y - dy d^2 x) = 0.$$

Принимая x за независимое переменное, будемъ имѣть $d^2 x = 0$ и кромѣ того изъ уравненія поверхности найдемъ, что

$$dz = p dx + q dy$$

и

$$d^2 z = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 + q d^2 y, \text{ гдѣ:}$$

$$r = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2 z}{dx dy}, \quad t = \frac{d^2 z}{dy^2};$$

стало быть наше уравненіе приметъ такой видъ:

$$(p dy - q dx)(r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 + q d^2 y) - p(p dx + q dy) d^2 y - dx d^2 y = 0;$$

раздѣливъ все уравненіе на dx и перемѣнивъ знаки, получимъ:

$$(1 + p^2 + q^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(q - p \cdot \frac{dy}{dx} \right) \left(r + 2s \frac{dy}{dx} + t \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) = 0.$$

Это и есть та форма дифференціального уравненія геодезической линіи, которую можно признать во многихъ частныхъ случаяхъ болѣе удобною для интегрированія. Здѣсь p , q , r , s и t суть функціи x , y , z , но изъ уравненія поверхности

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

z можно выразить чрезъ y и x , такъ что найденное уравненіе будетъ обыкновенное дифференціальное уравненіе 2-го порядка съ двумя переменными и высшей степени.

Чтобы показать примѣръ интегрированія этого уравненія, мы рассмотримъ геодезическую линію на круговомъ цилиндрѣ, ось котораго совпадаетъ съ осью x .

Уравненіе такого цилиндра будетъ

$$y^2 + z^2 = a^2.$$

Положимъ, что геодезическая линія должна идти отъ точки A , для которой

$$x = 0, y = 0, z = a,$$

до точки B , для которой

$$x = b, y = a \sin \varphi; z = a \cos \varphi.$$

Въ этомъ примѣрѣ

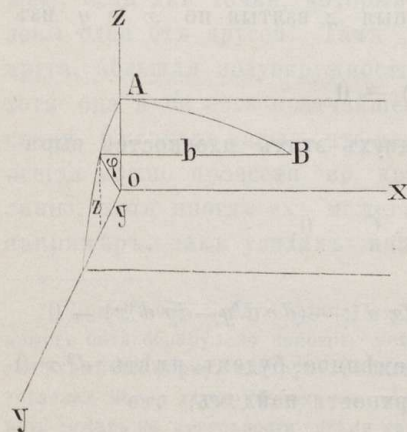
$$\varphi(x, y, z) = y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$

$$\text{а потому } p = \frac{dz}{dx} = 0,$$

$$r = \frac{dp}{dx} = 0, \quad s = \frac{dp}{dy} = 0$$

и далѣе

$$y + z \frac{dz}{dy} = 0,$$



откуда

$$q = \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}$$

и

$$t = \frac{dq}{dy} = -\frac{z-y \frac{dz}{dy}}{z^2} = -\frac{z + \frac{y^2}{z}}{z^2} = -\frac{a^2}{z^3}.$$

Вставивъ найденныя выраженія въ дифференціальное уравненіе геодезической линіи, получимъ:

$$\left(1 + \frac{y^2}{z^2}\right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{y}{z} \frac{a^2}{z^3} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

или по сокращеніи

$$z^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0.$$

Здѣсь

$$z^2 = a^2 - y^2,$$

слѣдовательно уравненіе наше будетъ:

$$(a^2 - y^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0.$$

Чтобы обьинтегрировать это уравненіе, положимъ

$$\frac{dy}{dx} = u;$$

тогда

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dy}}{u} = \frac{u \cdot du}{dy}$$

и

$$(a^2 - y^2) \frac{u \cdot du}{dy} + y u^2 = 0,$$

или

$$\frac{du}{u} + \frac{y \cdot dy}{a^2 - y^2} = 0;$$

интегрируя, найдемъ:

$$lu = lc + \frac{1}{2} l(a^2 - y^2),$$

или

$$u = \frac{dy}{dx} = c \sqrt{a^2 - y^2},$$

откуда

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = c \cdot dx;$$

интегрируя это уравненіе, получимъ

$$cx + c' = \arcsin \left(\frac{y}{a} \right),$$

откуда

$$\frac{y}{a} = \sin(cx + c').$$

Чтобы опредѣлить произвольныя постоянныя c и c' , выразимъ, что кривая проходитъ черезъ двѣ данныя точки A и B . Для точки A $y = 0$ и $x = 0$, слѣдовательно $\sin c' = 0$, откуда $c' = k\pi$, гдѣ k есть произвольное цѣлое число. Для точки B $y = a \sin \varphi$, а $x = b$; вставляя эти величины въ уравненіе кривой, получимъ

$$\sin \varphi = \sin(bc + k\pi).$$

Отсюда видно, что k должно быть четнымъ числомъ, иначе для $\sin\varphi$ имѣли-бы два различныя значенія. Такъ какъ k четное, то

$$bc + k\pi = \nu\pi + (-1)^\nu\varphi,$$

(гдѣ ν число цѣлое произвольное) или

$$bc = (\nu - k)\pi + (-1)^\nu\varphi.$$

Здѣсь $\nu - k$ будетъ четное число, если ν четное, и будетъ нечетное, если ν нечетное. Поэтому, не уменьшая общности, можно положить

$$bc = \nu\pi + (-1)^\nu\varphi;$$

отсюда

$$c = \frac{\nu\pi + (-1)^\nu\varphi}{b},$$

и уравненіе кривой будетъ

$$y = a.\sin \left[\frac{x}{b} (\nu\pi + (-1)^\nu\varphi) + k\pi \right],$$

или

$$y = a.\sin \frac{x}{b} (\nu\pi + (-1)^\nu\varphi).$$

Здѣсь ν совершенно произвольное цѣлое число. Положимъ

$$\frac{x}{b} (\nu\pi + (-1)^\nu\varphi) = \omega,$$

тогда

$$y = a.\sin\omega.$$

Вставивъ эту величину въ уравненіе поверхности, получимъ,

$$a^2 \sin^2\omega + z^2 = a^2;$$

отсюда

$$z^2 = a^2 \cos^2\omega, \text{ или } z = a.\cos\omega;$$

наконецъ

$$x = \frac{b}{\nu\pi + (-1)^\nu\varphi} \cdot \omega = m\omega,$$

гдѣ

$$m = \frac{b}{\nu\pi + (-1)^\nu\varphi}.$$

Такимъ образомъ мы получили слѣдующія три уравненія:

$$x = m\omega, \quad y = a.\sin\omega, \quad z = a.\cos\omega.$$

Эти три уравненія и выражаютъ геодезическую линію на круговомъ цилиндрѣ. Они показываютъ, что кривая, удовлетворяющая вопросу, есть винтовая линія, а многозначность ω обнаруживаетъ, что геодезическихъ линій на цилиндрѣ между точ-

ками A и B можно провести безчисленное множество. Весьма нетрудно было бы убедиться въ томъ, что если положимъ $\varphi < \pi$, то величина $\nu = 2m$ даетъ геодезическую линію, пересекающую одну часть образующихъ цилиндра m разъ, а другую $m+1$ разъ; тогда какъ, если возьмемъ $\nu = 2m+1$, то получимъ геодезическую линію, пересекающую первую часть образующихъ $m+1$ разъ, а вторую часть m разъ. Двѣ точки, описывающія геодезическія линіи двухъ разныхъ системъ, будутъ направляться изъ точки A по противоположнымъ направленіямъ.

Интегрированіе дифференціального уравненія геодезическихъ линій въ конечномъ видѣ возможно только для немногихъ поверхностей, поэтому вмѣсто того, что бы приводить другіе примѣры на интегрированіе, мы остановимся на разсмотрѣніи нѣкоторыхъ свойствъ геодезическихъ линій, какъ общихъ, такъ и частныхъ, принадлежащихъ геодезическимъ линіямъ на нѣкоторыхъ видахъ поверхностей и въ особенности на эллипсоидѣ.

Положимъ, что требуется провести геодезическую линію между двумя данными кривыми линіями, расположенными на поверхности $\varphi = 0$. Въ этомъ случаѣ координаты x_1 и x_2 для предѣльныхъ точекъ кривой будутъ переменными и произвольными, а другія координаты y_1, z_1, y_2, z_2 тѣхъ-же точекъ будутъ определенными функціями первыхъ; пусть:

$$y_1 = \psi(x_1), \quad z_1 = \phi(x_1), \quad y_2 = \psi_1(x_2), \quad z_2 = \phi_1(x_2).$$

Въ выраженіи варіаціи интеграла δS будутъ находиться внѣ знака интеграла члены, коихъ совокупность будетъ:

$$V_2 dx_2 - V_1 dx_1 + \int_{x_1}^{x_2} P_1 \delta y + \int_{x_1}^{x_2} Q_1 \delta z.$$

Эта сумма должна быть приравнена нулю; но здѣсь

$$P = \frac{dV}{dy'} = \frac{y'}{V} \quad \text{и} \quad Q_1 = \frac{dV}{dz'} = \frac{z'}{V},$$

и потому будемъ имѣть:

$$V_2 dx_2 - V_1 dx_1 + \frac{y_2'}{V_2} (\delta y)_2 - \frac{y_1'}{V_1} (\delta y)_1 + \frac{z_2'}{V_2} (\delta z)_2 - \frac{z_1'}{V_1} (\delta z)_1 = 0.$$

Замѣнивъ здѣсь предѣльныя значенія варіацій δy и δz ихъ извѣстными выраженіями, а именно:

$$(\delta y)_1 = [\psi'(x_1) - y_1'] dx_1; \quad (\delta y)_2 = [\psi_1'(x_2) - y_2'] dx_2,$$

$$(\delta z)_1 = [\phi'(x_1) - z_1'] dx_1; \quad (\delta z)_2 = [\phi_1'(x_2) - z_2'] dx_2,$$

и приравнивая затѣмъ нулю отдѣльно коэффициенты при произвольныхъ бесконечно-малыхъ dx_1 и dx_2 , мы получимъ два предѣльныхъ условія, изъ которыхъ первое будетъ:

$$V_1 + \frac{y_1' \psi'(x_1)}{V_1} + \frac{z_1' \phi'(x_1)}{V_1} - \frac{y_1'^2}{V_1} - \frac{z_1'^2}{V_1} = 0,$$

или, по упрощеніи:

$$1 + y_1' \psi'(x_1) + z_1' \phi'(x_1) = 0.$$

Подобно этому второе предѣльное условіе получится въ видѣ:

$$1 + y_2' \psi'(x_2) + z_2' \phi'(x_2) = 0.$$

Эти два равенства выражаютъ, каждое отдѣльно, условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ линій: касательной къ геодезической кривой въ предѣльной точкѣ и касательной къ предѣльной кривой. И такъ, искомая геодезическая линія будетъ нормальна къ обѣимъ предѣльнымъ кривымъ. Отсюда слѣдствіе:

„Если изъ всѣхъ точекъ произвольной кривой линіи, данной на поверхности, по нормальнымъ къ ней направленіямъ будутъ проведены геодезическія линіи одинаковой длины, то кривая линія, соединяющая ихъ оконечности, будетъ пересѣкать всѣ геодезическія линіи подъ прямыми углами.“ *)

Для уясненія справедливости этой теоремы достаточно замѣтить, что еслибы въ предшествовавшемъ разсмотрѣніи вмѣсто второй предѣльной кривой мы взяли геометрическое мѣсто оконечностей геодезическихъ линій одинаковой длины, проведенныхъ изъ всѣхъ точекъ первой предѣльной кривой по нормальнымъ къ ней направленіямъ, то геодезическія линіи, проводимыя отъ первой кривой до второй, должны были бы, по доказанному, пересѣкать вторую кривую подъ прямыми углами, слѣдовательно и проч.

Еслибы мы искали провести геодезическую линію отъ данной точки (x_1, y_1, z_1) до данной кривой, расположенной на поверхности $\varphi=0$, то, положивъ по прежнему, что уравненія этой кривой представлены въ видѣ:

$$y_2 = \psi_1(x_2) \text{ и } z_2 = \phi_1(x_2)$$

и замѣчая, что для настоящаго случая $dx_1=0$, $(\delta y)_1=0$ и $(\delta z)_1=0$, мы получили бы одно предѣльное условіе:

$$1 + y_2' \psi_1'(x_2) + z_2' \phi_1'(x_2) = 0,$$

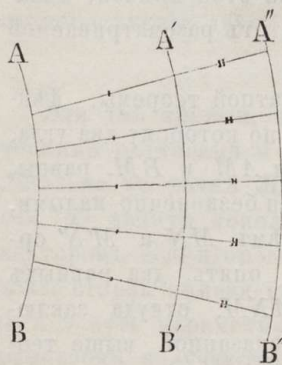
изъ котораго усмотрѣли бы, что искомая геодезическая линія должна пересѣкать данную предѣльную кривую подъ прямымъ угломъ. Отсюда теорема (Gauss, Disquisitiones etc.):

*) Gauss-Disquisitiones generales circa superficies curvas.

„Если изъ точки, данной на поверхности, во всѣ стороны будетъ проведено безчисленное множество геодезическихъ линий одинаковой длины, то кривая линия, соединяющая ихъ оконечности, будетъ пересѣкать ихъ подъ прямыми углами. Эта кривая линия называется геодезическимъ кругомъ.“

Справедливость этого предложенія уясняется подобно предъидущему замѣчаніемъ, что еслибы въ послѣднемъ разсмотрѣніи вмѣсто данной кривой было взято геометрическое мѣсто оконечностей геодезическихъ линий одинаковой длины, проведенныхъ на поверхности изъ данной точки по всевозможнымъ направленіямъ, то всѣ кратчайшія линии, проводимыя отъ данной точки до разсматриваемаго геометрическаго мѣста, должны были бы персѣчь его ортогонально, слѣдовательно и пр.

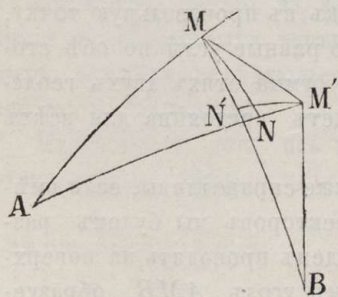
Теоремы обратныя двумъ послѣднимъ, очевидно, также будутъ справедливы; такъ:



„Кривая, пересѣкающая ортогонально „геодезическія кривыя, проведенныя изъ „всѣхъ точекъ другой данной кривой по „нормальнымъ направленіямъ къ этой „послѣдней, отсѣкаетъ на всѣхъ геодезическихъ линияхъ одинаковыя длины.“

Подобно этому выразится теорема обратная второй изъ двухъ предъидущихъ.

Послѣднія теоремы обнаруживаютъ такія свойства геодезическихъ линий на произвольной поверхности, которыя имѣютъ полную аналогію съ извѣстными свойствами прямыхъ линий, проводимыхъ на плоскости. Вслѣдствіе этого и тѣмъ теоремамъ, которыя вытекаютъ изъ этихъ свойствъ прямыхъ линий для плоскихъ кривыхъ, будутъ соответствовать аналогичныя предложенія для кривыхъ, лежащихъ на произвольной поверхности, вытекающія изъ приведенныхъ выше свойствъ геодезическихъ линий. Для примѣра мы приведемъ здѣсь нижеслѣдующія предложенія.



Пусть A и B двѣ неподвижныя точки на данной поверхности; MM' есть элементъ кривой, расположенной на той же поверхности и имѣющей свойство, по которому сумма геодезическихъ линий, соединяющихъ произвольную ея точку съ двумя неподвижными точками A и B , постоянна, такъ что

$$AM + BM = AM' + BM' = 2\mu.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$AM - AM = BM - BM.$$

Отложимъ на AM длину $AN = AM$, на BM длину $BN = BM$ и проведемъ MN и $M'N'$. Такъ какъ очевидно, что $M'N = MN'$, то два безконечно-малые треугольника $MN'M$ и MNM' , которые на основаніи вышедоказанной теоремы Гаусса прямоугольны въ N и N' , будутъ равны и слѣдовательно уг. $MM'A =$ углу $M'MB$. Воображая, что точка M' , приближаясь неопредѣленно къ M , совпадаетъ съ нею въ предѣлѣ, получимъ слѣдующую теорему:

„Если кривая линія, проведенная на поверхности, имѣетъ такое свойство, что сумма геодезическихъ разстояній произвольной ея точки отъ двухъ данныхъ неподвижныхъ точекъ постоянна, то два геодезическіе радіуса вектора, проведенные изъ неподвижныхъ точекъ къ точкѣ, взятой на этой кривой, дѣлаютъ съ нею равные углы по обѣ стороны отъ разсматриваемой точки“.

Легко убѣдиться въ существованіи обратной теоремы. Дѣйствительно, если кривая имѣетъ свойство, по которому два угла, образуемые съ нею геодезическими линіями AM и BM , равны, то будемъ имѣть, пренебрегая количествами безконечно-малыми, что уголъ $MM'A =$ углу $M'MB$; проведемъ затѣмъ MN и $M'N'$ ортогонально къ AM и BM , будемъ имѣть опять два равныхъ прямоугольныхъ треугольника $MN'M$ и MNM' , откуда заключимъ, что $M'N = MN'$. Но на основаніи доказанной выше теоремы Гаусса (обратной) геодезическія разстоянія AM и AN равны, также какъ BM и BN , и слѣдовательно

$$AM - AM = BM - BM, \text{ или } AM + BM = AM + BM.$$

Отсюда теорема, обратная предъидущей, а именно:

„Если кривая линія, расположенная на поверхности, имѣетъ такое свойство, что два геодезическіе радіуса вектора, проведенные изъ двухъ неподвижныхъ точекъ въ произвольную точку, на кривой взятую, образуютъ съ нею равные углы по обѣ стороны отъ разсматриваемой точки, то сумма этихъ двухъ геодезическихъ радіусовъ векторовъ будетъ постоянна для всѣхъ точекъ кривой.“

Двѣ послѣднія теоремы будутъ также справедливы, если вмѣсто суммы геодезическихъ радіусовъ векторовъ мы будемъ разсматривать ихъ разность, а кривую будемъ проводить на поверхности такъ, чтобы она дѣлила пополамъ уголъ AMB , образуемый двумя геодезическими линіями AM и BM . Доказательство теоремъ будетъ совершенно сходно съ вышеизложеннымъ и нѣтъ

надобности приводить его въ подробности. Такимъ образомъ мы получимъ слѣдующія два предложенія.

„На поверхности даны двѣ неподвижныя точки и нѣкоторая кривая линія.

„Если уголъ, образуемый двумя геодезическими радіусами векторами, проведенными изъ двухъ неподвижныхъ точекъ въ произвольную точку кривой, дѣлится этой кривой пополамъ, то разность двухъ геодезическихъ радіусовъ векторовъ постоянна для всѣхъ точекъ кривой, и *обратно*“.

Выберемъ на данной поверхности двѣ неподвижныя точки A и B . Произвольную точку M на поверхности соединимъ съ A и B геодезическими линіями AM и BM и пусть

$$AM + BM = 2\mu \text{ и } AM - BM = 2\nu.$$

Тогда точка M можетъ быть разсматриваема, какъ лежащая на пересѣченіи двухъ кривыхъ линій, выражаемыхъ уравненіями

$$\mu = \text{const. и } \nu = \text{const.}$$

Эти двѣ кривыя, которыя могли-бы быть названы „геодезическими эллипсами и гиперболами“, будутъ пересѣкаться ортогонально въ точкѣ M ; это слѣдуетъ изъ того, что первая кривая (μ) дѣлитъ пополамъ уголъ между геодезическимъ радіусомъ векторомъ BM и продолженіемъ геодезического радіуса AM , тогда какъ вторая кривая (ν) дѣлитъ пополамъ уголъ AMB . Величины μ и ν суть параметры этихъ линій. Черезъ измѣненіе этихъ параметровъ получаютъ на поверхности двѣ системы ортогональныхъ кривыхъ, которыя дѣлятъ поверхность на бесконечно малые прямоугольники. Положеніе точки M на поверхности будетъ опредѣлено, когда даны величины двухъ параметровъ μ и ν , ей соответствующихъ, или, все равно, даны двѣ кривыя (μ) и (ν), черезъ эту точку проходящія. Такимъ образомъ величины μ и ν могутъ быть разсматриваемы, какъ „криволинейныя координаты“ точки M на данной поверхности.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію свойствъ геодезической линіи на нѣкоторыхъ частныхъ видахъ поверхностей и, во первыхъ, замѣтимъ слѣдующее свойство геодезической линіи на поверхности вращенія.

Пусть ось z есть ось вращенія; уравненіе поверхности при этомъ будетъ имѣть видъ:

$$z = f(x^2 + y^2).$$

Слѣдовательно, здѣсь

$$\varphi = f(x^2 + y^2) - z$$

и потому

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2x.f'; \quad \frac{d\varphi}{dy} = 2y.f'; \quad \frac{d\varphi}{dz} = -1.$$

Уравнение геодезической линии будетъ:

$$\frac{d \frac{dx}{ds}}{2xf'} = \frac{d \frac{dy}{ds}}{2yf'} = \frac{d \frac{dz}{ds}}{-1},$$

откуда имѣемъ,

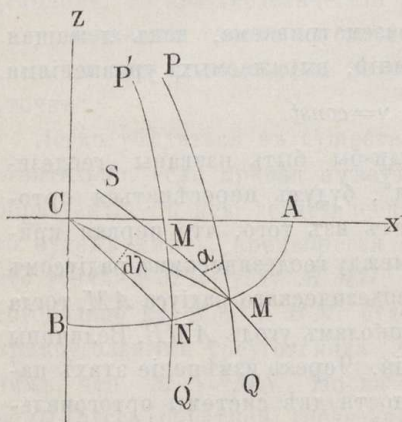
$$y \cdot d \frac{dx}{ds} - x \cdot d \frac{dy}{ds} = 0,$$

или

$$d \left\{ y \cdot \frac{dx}{ds} - x \cdot \frac{dy}{ds} \right\} = 0,$$

что даетъ

$$x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = h = \text{const.}$$



Пусть теперь PQ есть меридианъ поверхности, проходящій черезъ точку $M(x, y, z)$ геодезической линіи MS , которая въ точкѣ M дѣлаетъ съ меридианомъ уголъ $PMS = \alpha$. Этотъ уголъ называется азимутомъ кривой MS . Пусть AB есть кругъ параллели, на которой находится точка M ; C есть центръ этого круга и Cx' прямая, проведенная параллельно оси x ; радиусъ круга $CM = r$; уголъ, образуемый плоскостью меридиана PQ съ плоскостью (xz) , равенъ углу $ACM = \lambda$. Тогда,

очевидно, будемъ имѣть,

$$x = r \cdot \cos \lambda \text{ и } y = r \sin \lambda,$$

откуда

$$dx = \cos \lambda dr - r \sin \lambda \cdot d\lambda,$$

$$dy = \sin \lambda dr + r \cos \lambda \cdot d\lambda.$$

Вставивъ эти выраженія въ найденное выше уравненіе

$$x \cdot dy - y \cdot dx = h \cdot ds,$$

получимъ по сокращеніи

$$x \cdot dy - y \cdot dx = r^2 \cdot d\lambda = h \cdot ds,$$

или

$$r^2 \frac{d\lambda}{ds} = h = \text{const.}$$

Пусть M' есть точка геодезической линіи, безконечно близкая къ M , такъ что $MM' = ds$. Черезъ M' проведемъ меридианъ

$P'Q'$, который пересѣкаетъ кругъ параллели въ N ; тогда дуга $MN=r.d\lambda$ и изъ прямоугольнаго безконечно малаго треугольника $MM'N$, находимъ,

$$r.d\lambda = ds.\sin\alpha, \text{ или } r\frac{d\lambda}{ds} = \sin\alpha,$$

и слѣдовательно предыдущее равенство можетъ быть написано въ видѣ:

$$r.\sin\alpha = h = \text{const.}$$

Это уравненіе и выражаетъ главное свойство геодезической линіи на всякой поверхности вращенія; представляя весьма простое соотношеніе между радіусомъ параллели, на которой находится разсматриваемая точка геодезической линіи, и азимутомъ, оно можетъ быть разсматриваемо, какъ уравненіе геодезической кривой. Этимъ уравненіемъ пользуются въ высшей геодезіи при изслѣдованіи геодезической линіи на земной поверхности, которая принимается за сжатый эллипсоидъ вращенія.

Окончательная форма уравненія геодезической линіи на данной поверхности вращенія должна быть представлена въ видѣ соотношенія между r и λ , такъ какъ эти переменныя могутъ весьма удобно служить координатами точки M на поверхности.

Нетрудно показать, что такое соотношеніе всегда можетъ быть найдено помощію квадратуръ. Дѣйствительно, полагая

$$z = f(x^2 + y^2) = f(r^2) = \phi(r),$$

гдѣ $\phi(r)$ есть извѣстная функція, мы найдемъ весьма легко, что:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\lambda^2 + \phi'(r)^2 dr^2}$$

и слѣдовательно

$$r^2 d\lambda = h \sqrt{r^2 d\lambda^2 + [r^2 + \phi'(r)^2] dr^2};$$

откуда, возведя въ квадратъ и раздѣляя переменныя, находимъ

$$d\lambda = \frac{h.dr}{r} \cdot \sqrt{\frac{1+\phi'(r)^2}{r^2-h^2}}.$$

Положимъ, что дана начальная точка, чрезъ коотрую проводится геодезическая линія; пусть координаты этой точки суть r_0 и λ_0 ; тогда, интегрируя послѣднее уравненіе, будемъ имѣть

$$\lambda - \lambda_0 = h \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1+\phi'(r)^2}{r^2-h^2}}.$$

Это и есть искомое уравненіе геодезической кривой. Что касается до постояннаго h , то оно опредѣлится, если будетъ

данъ начальный азимуть геодезической линіи, т. е. если будетъ дано направленіе, по которому она должна быть пролагаема. Пусть этотъ начальный азимуть есть α_0 , тогда

$$h = r_0 \cdot \sin \alpha_0.$$

Для вопроса высшей геодезіи, когда поверхность есть эллипсоидъ вращенія, послѣдній интеграль будетъ эллиптическимъ интеграломъ 3-го рода.

Вопросъ о геодезической линіи на эллипсоидѣ (трехъосномъ) былъ предметомъ особаго вниманія геометровъ. Было открыто много любопытныхъ свойствъ этой кривой. Якоби нашелъ и окончательное уравненіе ея помощію Абелевыхъ интеграловъ. Остановимся на доказательствахъ нѣкоторыхъ теоремъ, сюда относящихся.

Возьмемъ поверхность эллипсоида, выражаемую уравненіемъ

$$\varphi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Здѣсь

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{2z}{c^2}$$

и уравненія геодезической линіи напишутся въ видѣ:

$$\frac{d \frac{dx}{ds}}{\frac{x}{a^2}} = \frac{d \frac{dy}{ds}}{\frac{y}{b^2}} = \frac{d \frac{dz}{ds}}{\frac{z}{c^2}} = k, \quad (A)$$

гдѣ k означаетъ общую величину трехъ отношеній. Умноживъ числителя и знаменателя первой дроби на $\frac{1}{a^2} \frac{dx}{ds}$, второй на $\frac{1}{b^2} \frac{dy}{ds}$ и третьей на $\frac{1}{c^2} \frac{dz}{ds}$ и затѣмъ взявъ отношеніе суммы предъидущихъ къ суммѣ послѣдующихъ, получимъ:

$$k = \frac{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot d \frac{dx}{ds} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot d \frac{dy}{ds} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dz}{ds} \cdot d \frac{dz}{ds}}{\frac{x}{a^4} \frac{dx}{ds} + \frac{y}{b^4} \frac{dy}{ds} + \frac{z}{c^4} \frac{dz}{ds}}$$

Съ другой стороны, если въ равенствахъ (A) умножимъ числителя и знаменателя первой дроби на $\frac{x}{a^2}$, второй на $\frac{y}{b^2}$ и третьей на $\frac{z}{c^2}$ и затѣмъ точно также возьмемъ отношеніе суммы предъ-

дущихъ къ суммѣ послѣдующихъ, то найдемъ

$$k = \frac{\frac{x}{a^2} \cdot d \frac{dx}{ds} + \frac{y}{b^2} \cdot d \frac{dy}{ds} + \frac{z}{c^2} \cdot d \frac{dz}{ds}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}. \quad (B)$$

Сравнивая два послѣднія выраженія k , получимъ пропорцію, въ которой перемѣнимъ мѣста среднихъ членовъ; такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot d \frac{dx}{ds} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot d \frac{dy}{ds} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dz}{ds} \cdot d \frac{dz}{ds}}{\frac{x}{a^2} \cdot d \frac{dx}{ds} + \frac{y}{b^2} \cdot d \frac{dy}{ds} + \frac{z}{c^2} \cdot d \frac{dz}{ds}} = \\ & = \frac{\frac{x}{a^4} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{y}{b^4} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{z}{c^4} \cdot \frac{dz}{ds}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = k_1, \end{aligned}$$

означивъ чрезъ k_1 общую величину этихъ двухъ отношеній. Если положимъ для краткости

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = u,$$

то, одифференцировавъ это равенство и раздѣливъ затѣмъ обѣ части на $2 \cdot ds$, получимъ:

$$\frac{x}{a^4} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{y}{b^4} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{z}{c^4} \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \frac{du}{ds}.$$

Слѣдовательно, имѣемъ:

$$k_1 = \frac{1}{2} \frac{\frac{du}{ds}}{u}.$$

Съ другой стороны, черезъ дифференцированіе уравненія эллипсоида, получаемъ:

$$\frac{x}{a^2} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{y}{b^2} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{z}{c^2} \cdot \frac{dz}{ds} = 0,$$

откуда, дифференцируя еще разъ, выводимъ:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{a^2} \cdot d \frac{dx}{ds} + \frac{y}{b^2} \cdot d \frac{dy}{ds} + \frac{z}{c^2} \cdot d \frac{dz}{ds} = \\ & - \left\{ \frac{1}{a^2} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right\} ds; \quad (C) \end{aligned}$$

поэтому можемъ написать еще:

$$k_1 = - \frac{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot d \frac{dx}{ds} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot d \frac{dy}{ds} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dz}{ds} \cdot d \frac{dz}{ds}}{\left[\frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \cdot \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \cdot \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] \cdot ds}.$$

Положимъ еще для краткости:

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = v;$$

тогда будемъ имѣть:

$$k_1 = - \frac{1}{2} \frac{\frac{dv}{ds}}{v}.$$

Сравнивая два выраженія k_1 , одно въ функціи u и другое въ функціи v , находимъ уравненіе:

$$\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} = 0,$$

которое интегрируется непосредственно и даетъ:

$$u(v) = lc \text{ или } uv = c = const.$$

Это равенство есть, собственно говоря, первый интегралъ уравненія геодезической линіи. Дѣйствительно, первоначальное дифференціальное уравненіе этой кривой всегда 2-го порядка; послѣднее же уравненіе, если въ него вставимъ данныя выше выраженія u и v , будетъ, очевидно, дифференціальнымъ уравненіемъ 1-го порядка, при томъ-же оно будетъ содержать одно произвольное постоянное c ; слѣдовательно оно представляетъ первый интегралъ. Разсмотримъ, какое геометрическое значеніе имѣетъ этотъ интегралъ.

Пусть p означаетъ длину перпендикуляра, опущеннаго изъ центра эллипсоида на касательную плоскость къ этой поверхности въ точкѣ (x, y, z) . Уравненіе этой плоскости, какъ извѣстно, будетъ:

$$\frac{d\varphi}{dx}(X-x) + \frac{d\varphi}{dy}(Y-y) + \frac{d\varphi}{dz}(Z-z) = 0,$$

или, по упрощеніи,

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1,$$

и слѣдовательно, по извѣстной формулѣ аналитической геометріи, опредѣляющей разстояніе отъ начала координатъ до

данной плоскости, будемъ имѣть:

$$p = \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

Отсюда:

$$u = \frac{1}{p^2}.$$

Далѣе, проведемъ чрезъ центръ эллипсоида плоскость параллельную касательной плоскости; эта плоскость пересѣкаетъ эллипсоидъ по эллипсу, котораго центръ совпадаетъ съ центромъ эллипсоида.

Пусть r есть длина радіуса вектора, проведеннаго изъ центра этого эллипса параллельно касательной къ геодезической кривой въ точкѣ (x, y, z) ; этотъ радіусъ векторъ дѣлаетъ съ осями координатъ углы α, β, γ , которыхъ косинусы будутъ:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Означая чрезъ x', y', z' координаты точки, въ которой разсматриваемый радіусъ векторъ встрѣчаетъ поверхность эллипсоида, мы будемъ имѣть очевидно

$$x' = r \cos\alpha, \quad y' = r \cos\beta, \quad z' = r \cos\gamma,$$

а вставивъ эти величины координатъ въ уравненіе эллипсоида, получимъ:

$$\frac{r^2 \cos^2\alpha}{a^2} + \frac{r^2 \cos^2\beta}{b^2} + \frac{r^2 \cos^2\gamma}{c^2} = 1,$$

откуда:

$$r^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = \frac{1}{v},$$

или

$$v = \frac{1}{r^2}.$$

Такимъ образомъ найденный выше первый интегралъ уравненія геодезической линіи:

$$u.v = \text{const.}$$

дастъ:

$$\frac{1}{p^2 r^2} = \text{const.}, \text{ или } p.r = \text{const.}$$

Послѣднее равенство выражаетъ теорему Іохимсталя; оно показываетъ, что:

„Для всякой точки геодезической линіи на эллипсоидѣ про-
 „изведеніе $p \cdot r$ перпендикуляра p , опущеннаго изъ центра на
 „касательную плоскость къ эллипсоиду, и радіуса вектора r , про-
 „веденнаго изъ центра параллельно касательной къ геодезической
 „кривой,—постоянно по всей длинѣ кривой“.

Если теперь возьмемъ опять равенства (A) и, возведя каждое
 изъ отношеній въ квадратъ, составимъ отношеніе суммы предъ-
 идущихъ къ суммѣ послѣдующихъ, а затѣмъ извлечемъ квадрат-
 ный корень, то получимъ:

$$k = \pm \frac{\sqrt{\left(d \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dz}{ds}\right)^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

или, такъ какъ числитель этой дроби, по извѣстной формулѣ
 теоріи кривизны кривыхъ въ пространствѣ, равенъ $\frac{ds}{\rho}$, гдѣ ρ
 есть радіусъ кривизны, а знаменатель есть $\frac{1}{p}$, то будемъ имѣть:

$$k = \pm \frac{ds}{\rho} : \frac{1}{p} = \pm \frac{p \cdot ds}{\rho}.$$

Съ другой стороны, если въ выраженіи (B) замѣнимъ числителя
 вторую частію равенства (C), то получимъ:

$$k = - \frac{\frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \cdot ds = - \frac{v ds}{u} = - \frac{p^2}{r^2} \cdot ds.$$

Сравнивая два послѣднія выраженія k и принимая одинако-
 вые знаки, находимъ:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p^2}{r^2}, \text{ откуда } \rho = \frac{r^2}{p}$$

и мы получаемъ слѣдующую теорему, также указанную Іохимста-
 лемъ:

„Геодезическія линіи, проходящія чрезъ одну и ту же точку
 „эллипсоида, имѣютъ въ этой точкѣ радіусы кривизны прямо
 „пропорціональные квадратамъ полудіаметровъ, проводимыхъ па-
 „раллельно касательнымъ къ разсматриваемымъ кривымъ.“

Если въ послѣднемъ равенствѣ замѣнимъ r на основаніи
 предыдущей теоремы, по которой:

$$r = \frac{\text{const.}}{p},$$

то получимъ, что:

$$\varrho = \frac{const.}{p^3}.$$

Это новое равенство выражаетъ слѣдующее свойство геодезической линіи:

„По длинѣ одной и той же геодезической линіи на эллипсоидѣ радиусъ кривизны кривой измѣняется обратно пропорціо-
нально кубу перпендикуляра, опущеннаго изъ центра на касательную плоскость къ эллипсоиду въ разсматриваемой точкѣ.“

Въ заключеніе этого разсмотрѣнія свойствъ геодезической линіи на эллипсоидѣ, мы докажемъ еще одну весьма замѣчательную теорему Михаила Робертса, обнаруживающую связь между геодезическими кривыми и линіями кривизны на эллипсоидѣ, при чемъ точки округленія (ombilics) эллипсоида получаютъ особую роль. Для доказательства этой теоремы я принужденъ привести здѣсь нѣкоторыя предложенія изъ геометріи эллипсоида. Такъ какъ эти предложенія не были даны въ курсѣ аналитической геометріи, то я помѣщаю ихъ доказательство въ особомъ прибавленіи въ концѣ настоящаго курса.

„Всѣ сѣченія эллипсоида плоскостями параллельными суть эллипсы подобные и подобнымъ образомъ расположенные, ко-
торыхъ центры находятся на одной прямой линіи, проходящей
черезъ центр.“

Это значитъ, что у всѣхъ эллипсовъ, получаемыхъ въ сѣченіяхъ плоскостями параллельными, оси будутъ соотвѣтственно параллельны и отношеніе полуосей будетъ постоянно во всѣхъ эллипсахъ. Прямая, проходящая чрезъ центры всѣхъ параллельныхъ сѣченій, есть „діаметръ“, сопряженный съ діаметральной плоскостью, проведенною чрезъ центръ параллельно сѣкущимъ плоскостямъ; то есть, эта діаметральная плоскость дѣлитъ пополамъ всѣ хорды, параллельныя полученному діаметру.

„Касательная плоскость къ эллипсоиду параллельна діаметральной плоскости, сопряженной съ діаметромъ, проведеннымъ въ точку прикосновенія.“

Въ эллипсоидѣ можно провести два ряда параллельныхъ плоскостей, дающихъ въ сѣченіи съ поверхностью круги; эти сѣченія называются круговыми. Чтобы построить эти сѣченія, положимъ, что въ эллипсоидѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a есть наибольшая, а c наименьшая изъ полуосей; такъ что $a > b > c$.

Въ плоскости (xz) главнаго сѣченія съ наибольшею и наименьшею полуосями проведемъ чрезъ начало координатъ радіусъ векторъ, равный b , т. е. средней полуоси; такихъ радіусовекторовъ, находящихся выше оси x , будетъ два: одинъ образуетъ съ осью x уголъ ϑ , опредѣляемый по формулѣ:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}},$$

а другой дѣлаетъ съ тою же осью уголъ, равный $180 - \vartheta$. Плоскости, проходящія чрезъ среднюю ось b и чрезъ каждый изъ этихъ радіусовъ векторовъ, будутъ имѣть уравненія:

$$z = \pm \operatorname{tg} \vartheta \cdot x.$$

Каждая изъ этихъ плоскостей будетъ пересѣкать эллипсоидъ по кругу радіуса b , что очевидно уже изъ того, что въ сѣченіи получится такой эллипсъ, въ которомъ два взаимно-перпендикулярные діаметра будутъ равны между собою, а это возможно только въ кругѣ. Всѣ сѣченія эллипсоида плоскостями, параллельными двумъ послѣднимъ діаметральнымъ плоскостямъ, будутъ очевидно круги; такимъ образомъ и получается два ряда круговыхъ сѣченій эллипсоида.

Касательныя плоскости къ эллипсоиду, проведенныя параллельно круговымъ сѣченіямъ, будутъ касаться поверхности въ четырехъ точкахъ, которыхъ координаты будутъ:

$$y = 0; \quad x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}; \quad z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Эти четыре точки будутъ, очевидно, точками округленія (ombilics), потому что плоскость, безконечно близкая къ касательной и ей параллельная, будетъ пересѣкать поверхность также по кругу, слѣдовательно „указательница“ для каждой изъ этихъ четырехъ точекъ будетъ кругъ и радіусы кривизны всѣхъ нормальныхъ сѣченій поверхности будутъ равны.

Другихъ точекъ округленія, кромѣ четырехъ указанныхъ, на эллипсоидѣ не существуетъ, какъ это не трудно показать.

Замѣтимъ наконецъ, что „указательница“ для всякой точки эллипсоида всегда подобна діаметральному сѣченію плоскостью, параллельною касательной плоскости въ разсматриваемой точкѣ, поэтому само это діаметральное сѣченіе и можетъ служить указательницей. Вслѣдствіе этого, прямыя, проведенныя въ касательной плоскости параллельно осямъ параллельнаго діаметральнаго сѣченія, будутъ касательны къ главнымъ нормальнымъ сѣченіямъ и слѣдовательно также къ линіямъ кривизны поверх-

ности. Радиус кривизны произвольного нормального сѣченія поверхности будетъ прямо пропорціоналенъ квадрату радиуса вектора (діаметрального сѣченія), проведеннаго параллельно касательной линіи къ разсматриваемому нормальному сѣченію. (См. теорію кривизны поверхности въ данной точкѣ въ курсѣ дифференціального исчисления).

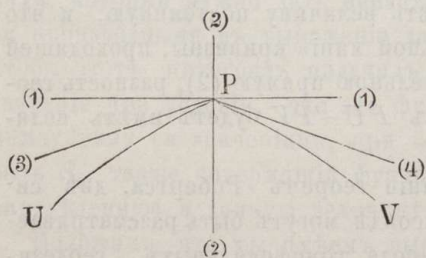
На основаніи всего приведеннаго выше мы заключаемъ во первыхъ, что:

„Постоянное pr имѣетъ одну и ту же величину въ точкѣ „округленія для всѣхъ геодезическихъ кривыхъ чрезъ эту точку „проводимыхъ“.

Дѣйствительно, такъ какъ p имѣетъ для данной точки одну опредѣленную величину, а радиусъ векторъ r , проведенный параллельно касательной линіи къ кривой, проходящей чрезъ точку округленія, есть радиусъ діаметрального круговаго сѣченія, то онъ равенъ средней полуоси b для всѣхъ направлений касательныхъ, слѣд. и проч.

Докажемъ теперь слѣдующую теорему Робертса.

„Геометрическое мѣсто точекъ поверхности эллипсоида, для „которыхъ сумма геодезическихъ разстояній отъ двухъ не про- „тивуположныхъ точекъ округленія постоянна, есть линія кри- „визны поверхности, а геометрическое мѣсто точекъ, для кото- „рыхъ разность геодезическихъ разстояній отъ тѣхъ-же точекъ „округленія постоянна, есть другая линія кривизны, ортогональная „съ первою“.



Пусть U и V двѣ точки округленія, не находящіяся на одномъ и томъ-же діаметрѣ, и пусть P есть произвольная точка нѣкоторой линіи кривизны; проведемъ два геодезическихъ радиуса вектора PU и PV . Постоянное pr имѣетъ

одну и ту же величину во всѣхъ точкахъ геодезической кривой PU и слѣдовательно въ точкѣ P оно имѣетъ ту же величину, какъ и въ точкѣ округленія U ; подобно этому, произведение pr имѣетъ для всѣхъ точекъ геодезической кривой PV , а слѣдовательно и въ точкѣ P этой линіи, ту же величину, какую оно имѣетъ въ точкѣ округленія V . Но въ двухъ точкахъ округленія U и V произведение pr имѣетъ одно значеніе, потому что, вслѣдствіе симметріи расположенія, касательныя плоскости въ этихъ точкахъ будутъ находиться на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ центра и для обѣихъ точекъ радиусъ векторъ r будетъ равенъ b , т. е. радиусу круговаго діаметрального сѣченія,

параллельнаго касательной плоскости. Такимъ образомъ мы видимъ, что постоянное pr будетъ имѣть одну и ту же величину во всѣхъ точкахъ ломаной геодезической линіи UPV , что, слѣдовательно, оно имѣетъ въ точкѣ P одно значеніе для двухъ геодезическихъ линій PU и PV , и, такъ какъ длина перпендикуляра p въ точкѣ P имѣетъ одну опредѣленную величину, то два радіуса вектора, проведенные изъ центра эллипсоида параллельно касательнымъ (3) и (4) къ геодезическимъ кривымъ PU и PV , должны быть равны. Эти два радіуса вектора принадлежатъ діаметральному сѣченію, параллельному касательной плоскости въ точкѣ P ; изъ равенства ихъ заключаемъ, что оба они дѣлаютъ равные углы съ каждой изъ осей этого діаметрального сѣченія.

Съ другой стороны, какъ это извѣстно изъ теоріи линій кривизны, оси діаметрального сѣченія, замѣняющаго указательницу, будутъ соответственно параллельны касательнымъ линіямъ (1) и (2) къ двумъ линіямъ кривизны, проходящимъ чрезъ точку P и пересѣкающимся ортогонально въ этой точкѣ; слѣдовательно, двѣ касательныя (3) и (4) къ геодезическимъ кривымъ PU и PV дѣлаютъ въ точкѣ P равные углы съ касательными (1) и (2) къ линіямъ кривизны. Изъ всего этого заключаемъ, на основаніи общихъ теоремъ о геодезическихъ кривыхъ, доказанныхъ выше, что 1) для всѣхъ точекъ линіи кривизны, проходящей чрезъ точку P и имѣющей въ этой точкѣ касательную прямую, означенную на чертежѣ цифрою (1), сумма геодезическихъ радіусовъ векторовъ $PU + PV$ будетъ имѣть величину постоянную, и что 2) для всѣхъ точекъ ортогональной линіи кривизны, проходящей чрезъ точку P , имѣющей касательную прямую (2), разность геодезическихъ радіусовъ векторовъ $PU - PV$ будетъ имѣть величину также постоянную.

Такимъ образомъ, на основаніи теоремъ Робертса, двѣ системы линій кривизны на эллипсоидѣ могутъ быть разсматриваемы, какъ двѣ системы особаго рода гомофокальныхъ „геодезическихъ эллипсовъ и гиперболъ“, при чемъ роль фокусовъ выполняютъ точки округленія этой поверхности.

Въ приведенномъ выше доказательствѣ теоремы Робертса мы брали двѣ точки округленія U и V не противоположныя. Пусть теперь U' есть точка округленія діаметрально противоположная U . Если проведемъ отъ P къ U' геодезическій радіусъ векторъ PU' , то вмѣстѣ съ геодезическимъ радіусомъ векторомъ PV онъ долженъ образовать равные углы съ двумя линіями кривизны, проходящими чрезъ точку P (на основаніи той-же теоремы). Отсюда заключаемъ, что геодезическая линія PU' расположится, какъ показано на чертежѣ, такъ, что

линія (1) раздѣлитъ пополамъ уголъ $VP\bar{U}$, а лінія (2) будетъ дѣлать равные углы съ PV и $P\bar{U}$ по обѣ стороны отъ точки P . Такъ какъ лінія $UP\bar{U}$ съ лініею (1) образуетъ равные вертикальные углы, то заключаемъ, что $P\bar{U}$ есть продолженіе лініи UP , и слѣдовательно, лінія $UP\bar{U}$ есть одна геодезическая кривая, идущая отъ U къ $\bar{U}$. Притомъ мы имѣемъ:

$$UP + VP = const \text{ и } U'\bar{P} - VP = const.$$

Сложеніе этихъ двухъ равенствъ даетъ:

$$UP + U'\bar{P} = const.$$

Слѣдовательно:

„Всѣ геодезическія лініи, соединяющія двѣ противоположныя „точки округленія, равны по длинѣ“.

Задачи объ относительныхъ наибольшихъ и наименьшихъ.

Такъ называются вопросы, въ которыхъ требуется опредѣлить видъ, который нужно дать неизвѣстной функціи y , входящей съ ея производными въ выраженіе даннаго интеграла S , для того, чтобы этотъ интегралъ получилъ наибольшее или наименьшее значеніе при условіи, что эта функція должна быть выбираема между тѣми ея значеніями, при которыхъ другой данный интегралъ S_1 , также содержащій функцію y , сохранялъ-бы нѣкоторую опредѣленную и данную величину a .

Положимъ, что мы имѣемъ выраженіе:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

гдѣ

$$V = f(x, y, y', y'', \dots);$$

требуется найти видъ функціи y , дѣлающей S maximum или minimum, подъ условіемъ, что также функція y , вставленная въ выраженіе:

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} U dx,$$

даетъ этому интегралу опредѣленную величину a . Здѣсь U есть также нѣкоторая функція

$$\varphi(x, y, y', y'', \dots).$$

Понятно отличіе этого вопроса отъ разсмотрѣннаго прежде: здѣсь δy не будетъ вполне произвольною безконечно малою функціею x , ибо значеніе y , которое получится послѣ варьированія, то есть $y + \delta y$, также какъ и первоначальное, должны удовлетворять данному уравненію:

$$S_1 = a.$$

Примѣромъ такого рода задачъ могутъ служить всѣ задачи объ изопериметрахъ и въ частности слѣдующая, простѣйшая изъ нихъ: найти кривую, которая при данной длинѣ ограничивала-бы наибольшую площадь. Задача эта состоитъ въ отысканіи такой функціи y , которая дѣлала-бы maximum'омъ выраженіе площади кривой, т. е:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx,$$

подъ условіемъ, чтобы длина кривой, т. е.

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$$

сохраняла-бы постоянную величину.

Вернемся къ общему вопросу. Онъ состоитъ, какъ мы уже сказали, въ слѣдующемъ: требуется найти функцію y , дѣлающую интегралъ

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V \cdot dx$$

maximum'омъ или minimum'омъ и удовлетворяющую уравненію

$$S_1 = a.$$

гдѣ

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} U dx$$

Обозначимъ черезъ λ неопредѣленное постоянное и составимъ выраженіе:

$$S + \lambda (S_1 - a),$$

которое мы сначала будемъ разсматривать независимо отъ поставленнаго вопроса. Будемъ искать видъ функціи y , дѣлающей это выраженіе наибольшимъ или наименьшимъ. Такъ какъ — λa имѣетъ величину постоянную, то очевидно, что та функція y ,

которая сдѣлаетъ maximum'омъ или minimum'омъ выраженіе

$$\Sigma = S + \lambda S_1,$$

будетъ давать наибольшее или наименьшее значеніе и разсма-
триваемому нами выраженію.

Видъ этой неизвѣстной функціи опредѣлится, какъ мы уже
знаемъ, изъ уравненія

$$\delta \Sigma = 0$$

и будетъ очевидно зависѣть отъ параметра λ (т. е. въ составъ
найденной функціи будетъ входить параметръ λ), и при данномъ
значеніи λ это будетъ единственный изъ всѣхъ возможныхъ ви-
довъ неизвѣстной функціи y , который сдѣлаетъ Σ наибольшимъ
или наименьшимъ. Внесемъ эту функцію въ выраженіе S_1 ; тог-
да и этотъ интегралъ будетъ очевидно функціей λ ; если мы те-
перь опредѣлимъ постоянное λ такимъ образомъ, чтобы инте-
гралъ S_1 получилъ величину, равную a , то легко усмотрѣть, что
найденная функція y при томъ значеніи параметра, которое
удовлетворяетъ уравненію $S_1 = a$, и будетъ искомою функціею,
дѣлающею интегралъ S наибольшимъ или наименьшимъ. Дѣй-
ствительно, эта функція обращаетъ въ maximum или minimum
выраженіе

$$S + \lambda(S_1 - a)$$

и удовлетворяютъ уравненію:

$$S_1 = a;$$

но въ этомъ случаѣ предыдущее выраженіе обращается въ S ,
а слѣдовательно, найденная функція y обращаетъ въ maximum
или minimum выраженіе S и удовлетворяетъ уравненію

$$S_1 = a,$$

то есть, удовлетворяетъ поставленному вопросу.

Изъ этихъ разсужденій выводимъ слѣдующее правило Эйлера
для рѣшенія задачъ объ относительныхъ наибольшихъ и наимень-
шихъ: для того, чтобы найти относительный maximum или mi-
nimum выраженія

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V \cdot dx$$

при условіи, что

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} U \cdot dx = a,$$

надо искать абсолютный maximum или minimum выраженія:

$$S + \lambda S_1$$

и затѣмъ опредѣлить постоянное λ такъ, чтобы удовлетворялось уравненіе

$$S_1 = a.$$

Это правило можно оправдать еще слѣдующими простыми разсужденіями. Если выраженіе

$$S + \lambda S_1 = \int_{x_1}^{x_2} (V + \lambda U) dx \quad (1)$$

есть тахімумъ, то это значить, что оно больше смежнаго съ нимъ значенія, а смежное значеніе этого выраженія получится при безконечно маломъ измѣненіи функціи y . Обозначимъ чрезъ U' и V' смежныя значенія функціи U и V , получившіяся послѣ варіированія y ; тогда смежное значеніе разсматриваемаго нами выраженія будетъ:

$$\int_{x_1}^{x_2} (V' + \lambda U') dx;$$

а потому въ случаѣ тахімум'а

$$\int_{x_1}^{x_2} (V + \lambda U) dx > \int_{x_1}^{x_2} (V' + \lambda U') dx; \quad (a)$$

но по условію разсматриваемой нами задачи должно быть

$$\int_{x_1}^{x_2} U dx = \int_{x_1}^{x_2} U' dx$$

и слѣдовательно наше неравенство обращается въ слѣдующее:

$$\int_{x_1}^{x_2} V dx > \int_{x_1}^{x_2} V' dx, \quad (b)$$

а это показываетъ, что интеграль

$$\int_{x_1}^{x_2} V dx \quad (2)$$

есть тахімумъ, т. е. если интеграль (1) есть тахімумъ, то и интеграль (2) будетъ тахімумъ.

Очевидно, что обратное заключеніе будетъ справедливо:

изъ того, что $\int_{x_1}^{x_2} V dx$ есть тахімумъ, слѣдуетъ, что $\int_{x_1}^{x_2} (V + \lambda U) dx$ будетъ тоже тахімумъ. Дѣйствительно, если удовлетворяется неравенство (b), которое выражаетъ условіе тахімум'а для ин-

теграла $\int_{x_1}^{x_2} V dx$, и если мы къ обѣимъ частямъ этого неравенства прибавимъ равныя величины

$$\lambda \int_{x_1}^{x_2} U dx \text{ и } \lambda \int_{x_1}^{x_2} U' dx,$$

то получимъ неравенство (а), которое выражаетъ, что интеграль

$$\int_{x_1}^{x_2} (V + \lambda U) dx$$

есть maximum.

Къ этому разсмотрѣнію прибавимъ еще слѣдующее замѣчаніе. Еслибы требовалось найти видъ функции y , которая дѣлаетъ maximum'омъ или minimum'омъ интеграль S_1 подѣ условіемъ, чтобы интеграль S сохранялъ нѣкоторую постоянную величину b , то по тѣмъ что выведенному правилу намъ надо было бы найти абсолютный maximum или minimum выраженія:

$$S_1 + \mu S,$$

гдѣ μ есть нѣкоторое постоянное. Но

$$S_1 + \mu S = \mu (S + \frac{1}{\mu} S_1) = \mu (S + \lambda S_1),$$

если мы $\frac{1}{\mu}$ положимъ равнымъ λ . А отсюда очевидно, что видъ функции y , дѣлающей maximum'омъ или minimum'омъ интеграль S_1 подѣ условіемъ, чтобы удовлетворилось уравненіе

$$S = b,$$

будетъ одинаковъ съ тѣмъ, который дѣлаетъ maximum'омъ или minimum'омъ интеграль S подѣ условіемъ, чтобы было

$$S_1 = a.$$

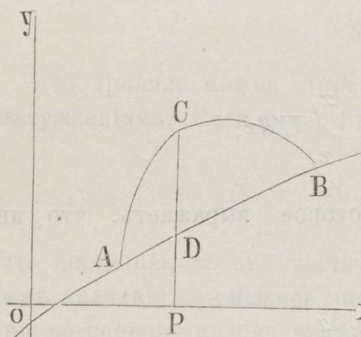
Разсмотримъ теперь нѣкоторыя задачи, относящіяся до относительныхъ наибольшихъ и наименьшихъ.

Задача 1. Дана плоская кривая линія; найти другую кривую определенной длины и при томъ такую, которая вмѣстѣ съ данною ограничивала-бы наибольшую площадь.

Пусть ADB есть данная кривая, имѣющая уравненіемъ

$$y = f(x).$$

Пусть искомая кривая будетъ ACB . Длина ея



$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2} \cdot dx = a,$$

гдѣ a есть данная величина.

Функция y должна быть опредѣлена подъ условіемъ, чтобы площадь $ACBDA$ была тахімумъ. Эта площадь будетъ:

$$Пл.(ABCD A) = S = \int_{x_1}^{x_2} (y - f(x)) dx.$$

Составимъ согласно вышенайденному правилу выраженіе

$$\Sigma = S + \lambda S_1 = \int_{x_1}^{x_2} (y - f(x) + \lambda \sqrt{1+y'^2}) dx.$$

Это выраженіе должно быть тахімум'омъ. Тутъ подынтегральная функция, по прежнему обозначенію, будетъ:

$$V = y - f(x) + \lambda \sqrt{1+y'^2}.$$

Для опредѣленія y необходимо интегрировать уравненіе

$$(P) = 0,$$

которое въ нашемъ случаѣ будетъ

$$P - \frac{dP_1}{dx} = 0.$$

Но здѣсь $P = \frac{dV}{dy} = 1$, слѣдовательно

$$\frac{dP_1}{dx} = 1, \text{ откуда } P_1 = x - c.$$

Съ другой стороны

$$P_1 = \frac{dV}{dy'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

и слѣдовательно

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x - c.$$

Возвышая въ квадратъ, находимъ:

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = \frac{(x-c)^2}{\lambda^2},$$

отсюда

$$y'^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\frac{(x-c)^2}{\lambda^2}}{1 - \frac{(x-c)^2}{\lambda^2}} = \frac{(x-c)^2}{\lambda^2 - (x-c)^2}$$

и потомъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-c}{\sqrt{\lambda^2 - (x-c)^2}},$$

$$y-c' = -\sqrt{\lambda^2 - (x-c)^2},$$

или

$$(x-c)^2 + (y-c')^2 = \lambda^2;$$

слѣдовательно искомая кривая есть окружность.

Если точки A и B даны неподвижными, то предѣльные условія удовлетворятся сами собой, а постоянныя c , c' и λ опредѣлятся изъ условія, что окружность должна проходить чрезъ данныя точки A и B и что длина ея должна быть равна a . Если же точки A и B не даны, а должны находиться гдѣ нибудь на кривой ADB , то предѣлы интеграла x_1 и x_2 будутъ переменныя и въ выраженіе варіаціи $\delta\Sigma$ взойдутъ члены, стоящіе вѣдѣ знака интеграла, коихъ совокупность должна быть приравнена нулю.

Такимъ образомъ предѣльные условія выразятся уравненіемъ:

$$V_2 dx_2 - V_1 dx_1 + \int_{x_1}^{x_2} P_1 \delta y = 0.$$

Въ нашемъ случаѣ предѣльные значенія y будутъ $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$, такъ какъ точки A и B лежатъ на кривой ADB , и слѣдовательно по формуламъ прежде выведеннымъ будемъ имѣть

$$(\delta y)_1 = \left[f'(x_1) - y'_1 \right] dx,$$

$$(\delta y)_2 = \left[f'(x_2) - y'_2 \right] dx_2.$$

Вставивъ эти выраженія въ предъидущее уравненіе, мы должны будемъ приравнять нулю коэффиціенты при dx_1 и dx_2 ; коэффиціенты эти, отличаясь указателями 1 и 2, будутъ одинаковаго состава и потому напомнимъ только коэффиціентъ при dx_1 ; онъ будетъ, очевидно

$$y_1 - f(x_1) + \lambda \sqrt{1+y'^2} + \frac{\lambda y'_1}{\sqrt{1+y'^2}} \left[f'(x_1) - y'_1 \right] = 0$$

но $y_1 = f(x_1)$, и послѣднее уравненіе, по сокращеніи, приметъ видъ:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\lambda y'_1 f'(x_1)}{\sqrt{1+y'^2}} = 0.$$

или

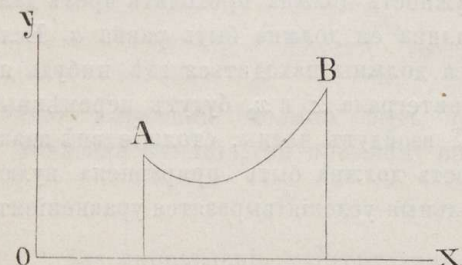
$$1 + y'_1 f'(x_1) = 0.$$

Другое предѣльное условіе будетъ

$$1 + y'_2 f'(x_2) = 0.$$

Эти оба уравненія выражаютъ, что искомая кривая съ кривой ADB пересѣкаются въ точкахъ A и B подъ прямымъ угломъ. Если вмѣсто кривой ADB возьмемъ прямую линію, совпадающую съ осью x , то, такъ какъ искомая кривая должна быть нормальна къ этой прямой въ точкахъ A и B , то она очевидно будетъ полуокружностью круга.

Задача 2. Изъ всѣхъ кривыхъ данной длины найти такую, которая при обращеніи около данной оси дала-бы наибольшую или наименьшую поверхность вращенія.



Пусть AB будетъ искомая кривая; тогда выраженіе поверхности вращенія будетъ

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx.$$

Функция y должна быть опредѣлена такъ, чтобы интеграль

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$$

былъ minimum'омъ или maximum'омъ при условіи, что длина кривой должна быть постоянна и равна a , т. е. чтобы было:

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = a.$$

Для нашего случая имѣемъ

$$\Sigma = \int_{x_1}^{x_2} (y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx.$$

Отысканіе maximum'a или minimum'a Σ можетъ быть приведено къ прежде рѣшенному нами вопросу. Въ самомъ дѣлѣ, выше мы рѣшили вопросъ о кривой линіи, которая при обращеніи около данной оси даетъ наименьшую поверхность вращенія; вопросъ этотъ, какъ мы видѣли, былъ приведенъ къ отысканію абсолютнаго minimum'a интеграла

$$\int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx.$$

Интеграль этотъ отличается отъ выраженія Σ только переменнѣй y на $y + \lambda$.

Мы нашли, что функція y , обращающая этотъ интеграль въ minimum, есть слѣдующая:

$$y = -\frac{c}{2} \left(e^{\frac{x-c_1}{c_1}} + e^{-\frac{x-c}{c_1}} \right)$$

и потому для того, чтобы получить функцію, обращающую въ minimum выраженіе Σ , слѣдуетъ перемѣнить y въ послѣднемъ уравненіи на $y + \lambda$; слѣдовательно уравненіе искомой кривой будетъ:

$$y + \lambda = -\frac{c}{2} \left(e^{\frac{x-c_1}{c_1}} + e^{-\frac{x-c}{c_1}} \right)$$

Это есть, очевидно, цѣпная линія, направляющая которой параллельна оси x и находится отъ нея на разстояніи $-\lambda$.

Если точки A и B даны неподвижными, то предѣльныя условія удовлетворятся сами собой и постоянныя λ , c , и c_1 опредѣлятся изъ условій, что цѣпная линія должна проходить чрезъ данныя точки и при томъ имѣть данную длину a . Этимъ условіямъ вообще можно удовлетворить двумя способами или двумя цѣпными линіями, изъ которыхъ одна будетъ обращена своей выпуклостью, а другая своей вогнутостью къ оси x . Признаки, отличающіе maximum отъ minimum'a, обнаруживаютъ, что первое расположеніе кривой даетъ наименьшую, а второе наибольшую поверхность (см. ниже).

Если же точки A и B должны лежать на двухъ данныхъ линіяхъ, то, какъ не трудно убѣдиться изъ вычисленія совершенно сходнаго съ даннымъ выше, цѣпная линія должна пересѣкать эти кривыя подъ прямымъ угломъ. Замѣтимъ, что только что приведенное вычисленіе рѣшаетъ также слѣдующую задачу: найти однородную кривую линію, центръ тяжести которой, при данной длинѣ кривой, занималъ-бы самое низшее положеніе. Если длина кривой есть a , ордината центра тяжести $\bar{y}$, то, какъ извѣстно,

$$a \cdot \bar{y} = \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1+y'^2} \cdot dx$$

и y долженъ быть опредѣленъ такъ, чтобы этотъ интеграль былъ minimum; но этотъ интеграль одинаковъ съ только что разсмотрѣннымъ, а потому заключаемъ, что цѣпная линія обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что ея центръ тяжести лежитъ ниже центровъ тяжестей всѣхъ кривыхъ, имѣющихъ одинаковую съ

ней длину. Это совершенно согласно съ тѣмъ, что мы знаемъ изъ механики. При равновѣсіи тяжелой нити, укрѣпленной концами въ двухъ неподвижныхъ точкахъ, ея центръ тяжести занимаетъ самое низкое положеніе; съ другой стороны, тяжелая однородная нить подѣйствіемъ силы тяжести располагается по цѣпной линіи; а изъ этого и слѣдуетъ, что именно для цѣпной линіи изъ всѣхъ кривыхъ одинаковой длины ордината центра тяжести $\bar{y}$ будетъ наименьшею.

Пользуясь извѣстнымъ изъ механики свойствомъ, можно было бы доказать, что цѣпная линія изъ всѣхъ кривыхъ данной длины даетъ наименьшую поверхность вращенія. Въ самомъ дѣлѣ, поверхность вращенія по теоремѣ Гульдена выражается такъ

$$S=2\pi a\bar{y},$$

а это выраженіе будетъ minimum при $\bar{y}$ minimum.

Задача 3. Найти такую кривую линію, которая, обращаясь около данной оси, ограничивала бы тѣло вращенія наибольшаго или наименьшаго объема, при условіи, чтобы поверхность этого тѣла имѣла данную величину.

Удерживая прежнія обозначенія, имѣемъ здѣсь выраженіе объема

$$S=\pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 . dx$$

и условіе для поверхности

$$S_1=2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2} \, dx=a,$$

гдѣ a данная величина. Такимъ образомъ намъ нужно опредѣлить функцію y такъ, чтобы интеграль

$$\int_{x_1}^{x_2} y^2 . dx$$

былъ maximum или minimum при условіи, чтобы

$$\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2} \, dx=const.$$

Составляемъ выраженіе

$$\Sigma=\int_{x_1}^{x_2} [y^2+\lambda y \sqrt{1+y'^2}] \, dx,$$

гдѣ λ есть неопредѣленное постоянное, и будемъ искать абсолютный maximum или minimum Σ . Здѣсь подынтегральная функція

$$V=y^2+\lambda y\sqrt{1+y'^2}$$

содержитъ только y и y' , а потому для отысканія y должно интегрировать уравненіе

$$V = P_1 y' + c.$$

Вставивъ вмѣсто V и $P_1 = \frac{dV}{dy'}$ ихъ выраженія, находимъ:

$$y^2 + \lambda y \sqrt{1+y'^2} = \frac{\lambda y y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} + c,$$

или, по упрощеніи,

$$y^2 + \frac{\lambda y}{\sqrt{1+y'^2}} = c.$$

Если выведемъ отсюда y' , то увидимъ, что послѣ интегрированія въ уравненіе кривой войдетъ эллиптическій интеграль.

Если точки A и B , между которыми должна быть проведена искомая кривая, даны неподвижными, то предѣльныхъ уравненій не будетъ и постоянныя опредѣлятся изъ данныхъ условій задачи. Если одна изъ неподвижныхъ точекъ, напр. A , дана на оси вращенія и слѣдовательно $y_1=0$, то уравненіе кривой должно удовлетвориться, когда положимъ $y=0$, и потому въ этомъ случаѣ будетъ $c=0$; уравненіе кривой упростится и приметъ видъ:

$$y + \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = 0,$$

откуда найдемъ

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - y^2}}{y} \quad \text{и} \quad dx = \frac{y dy}{\sqrt{\lambda^2 - y^2}}$$

и, чрезъ интегрированіе,

$$x - c' = -\sqrt{\lambda^2 - y'^2}, \quad \text{или} \quad (x - c')^2 + y^2 = \lambda^2.$$

Отсюда видимъ, что искомая кривая есть кругъ, котораго центръ находится на оси вращенія.

Положимъ теперь, что искомая кривая должна обоими своими концами примыкать къ прямой линіи параллельной оси x . Въ этомъ случаѣ предѣлы x_1 и x_2 будутъ переменны и будутъ имѣть мѣсто слѣдующее предѣльное условіе:

$$V_2 dx_2 - V_1 dx_1 + \int_{x_1}^{x_2} P_1 \delta y = 0.$$

При этомъ, въ настоящемъ случаѣ, будемъ имѣть, при прежнемъ обозначеніи:

$$y_1 = f(x_1) = \text{const.} \quad \text{и} \quad y_2 = f(x_2) = \text{const.},$$

а потому $f'(x_1) = 0$ и $f'(x_2) = 0$; такъ что предѣльные значенія

варіацій y будуть:

$$(\delta y)_1 = -y'_1 \cdot dx_1 \text{ и } (\delta y)_2 = -y'_2 \cdot dx.$$

Приравнивая нулю коэффициентъ при dx_1 въ предѣльномъ уравненіи, найдемъ:

$$y_1^2 + \lambda y_1 \sqrt{1+y_1'^2} - \frac{\lambda y_1 y_1'^2}{\sqrt{1+y_1'^2}} = 0,$$

или

$$y_1^2 + \frac{\lambda y_1}{\sqrt{1+y_1'^2}} = 0$$

и по данному выше выраженію постояннаго c заключаемъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ опять $c=0$ и слѣдовательно иско-
мая кривая будетъ опять кругъ, котораго центръ находится на
оси x . Если данная прямая линія совпадаетъ съ осью x , то
кривая рѣшающая вопросъ будетъ, очевидно, полуокружностью
и слѣдовательно:

„изъ всѣхъ поверхностей вращенія сфера есть та, которая при
данной величинѣ вмѣщаетъ въ себѣ наибольшій объемъ.“

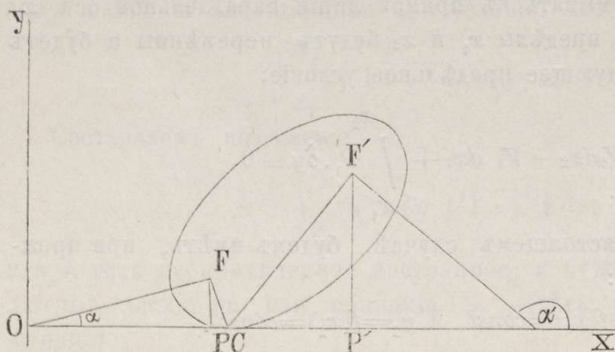
Для общаго случая разсматриваемой задачи уравненіе иско-
мой кривой, какъ видѣли выше, есть:

$$y^2 + \frac{\lambda y}{\sqrt{1+y'^2}} = c.$$

Французскій ученый Делоне далъ весьма изящное геометри-
ческое представленіе для интеграла этого уравненія. Означая
чрезъ S дугу разсматриваемой кривой и замѣчая, что $\sqrt{1+y'^2} =$
 $= \frac{ds}{dx}$, напомнимъ наше уравненіе въ видѣ:

$$y^2 + \lambda y \cdot \frac{dx}{ds} = c.$$

Можно показать, что уравненіе это принадлежитъ кривой, опи-
сываемой однимъ изъ фокусовъ эллипса или гиперболы, если



одна изъ этихъ
кривыхъ будетъ
катиться безъ
скольженія по о-
си x . Въ самомъ
дѣлѣ, вообра-
зимъ, что эл-
липсъ, котораго
полуоси a и b ,
катится по оси
 x ; его фокусъ F

описывает рулетку и нормальная линия къ этой кривой въ точкѣ F есть прямая, соединяющая точку F съ соотвѣтствующей точкой прикосновенія C (это слѣдуетъ изъ того, что скорость движенія точки F въ разсматриваемый моментъ, а слѣдовательно и касательная къ описываемой траекторіи, будетъ очевидно направлена по перпендикуляру къ FC). Пусть $FC=r$ и пусть α есть уголъ, образуемый касательною съ осью x ; тогда будемъ имѣть изъ треугольника $FP C$.

$$y = r \cos \alpha = r \cdot \frac{dx}{ds},$$

ибо $tg \alpha = \frac{dy}{dx}$. Еслибы разсматривалось такое положеніе эллипса, при которомъ точка P была-бы съ правой стороны отъ C , то получили бы $y = -r \cdot \frac{dx}{ds}$, такъ что:

$$y = \pm r \frac{dx}{ds}.$$

Положимъ далѣе, что для другаго фокуса ордината $F'P' = y_1$, $FC = r_1$ и уголъ, образуемый касательною къ кривой, описываемой этимъ фокусомъ, съ осью x есть α' , тогда

$$y_1 = r_1 \sin(\alpha' - 90^\circ) = -r_1 \cos \alpha'.$$

Но уголъ $F'Cx = \text{уг. } FCO$ или $\alpha' - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$ и $\alpha' = 180^\circ - \alpha$; слѣдовательно

$$y_1 = r_1 \cos \alpha = r_1 \frac{dx}{ds}$$

и $y_1 = -r_1 \frac{dx}{ds}$ для того случая, когда точка P будетъ на правой сторонѣ отъ C , такъ что

$$y_1 = \pm r_1 \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Складывая y и y_1 и замѣчая, что $r + r_1 = 2a$, находимъ

$$y + y_1 = \pm 2a \frac{dx}{ds}.$$

При томъ, по извѣстному свойству касательной въ эллипсѣ,

$$yy_1 = b^2.$$

Исключивъ y_1 изъ двухъ послѣднихъ уравненій, получимъ:

$$y^2 \mp 2a \cdot \frac{dx}{ds} + b^2 = 0.$$

Еслибы разсматривали кривую, описываемую фокусомъ гиперболы, то для полученія соотвѣтствующаго уравненія было-бы до-

статочно перемѣнить b^2 на $-b^2$, и слѣдовательно имѣли-бы

$$y^2 + 2a \frac{dx}{ds} - b^2 = 0.$$

Возвратимся теперь къ дифференціальному уравненію кривой, рѣшающей разсмотрѣнную выше задачу; оно было:

$$y^2 + \lambda y \frac{dx}{ds} - c = 0.$$

Сравнивая его съ двумя послѣдними уравненіями, мы видимъ, что всегда возможно для a и b выбрать такія значенія, чтобы уравненіе кривой сдѣлалось тождественнымъ съ однимъ изъ двухъ предъидущихъ уравненій и слѣдовательно искомая кривая всегда можетъ быть описана фокусомъ нѣкоторой кривой линіи 2-го порядка, которая будетъ катиться безъ скольженія по оси x .

Наибольшія и наименьшія двойныхъ интеграловъ.

Вопросъ объ отысканіи неизвѣстной функціи двухъ переменныхъ, дѣлающей данный двойной интегралъ наибольшимъ или наименьшимъ, есть вопросъ величайшей трудности, который даже въ самыхъ простыхъ случаяхъ приводитъ къ интегрированію уравненія съ частными производными не ниже 2-го порядка, а для интегрированія такого уравненія, какъ извѣстно, почти нѣтъ никакихъ средствъ въ наукѣ. Кромѣ того рѣшеніе вопроса значительно усложняется разсмотрѣніемъ предѣльныхъ условій, которымъ должна удовлетворять неизвѣстная функція. Мы разсмотримъ только простѣйшій случай этого вопроса для составленія себѣ общаго понятія о предметѣ и о тѣхъ трудностяхъ, которыя встрѣчаются при приложеніи варіаціоннаго исчисленія къ задачамъ съ двойными интегралами. Именно мы будемъ предполагать, что въ двойномъ интегралѣ входятъ кромѣ переменныхъ x, y, z , только частныя производныя 1-го порядка. Пусть имѣемъ выраженіе

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} V dx dy,$$

гдѣ

$$V = f(x, y, z, p, q),$$

при чемъ, какъ обыкновенно:

$$p = \frac{dz}{dx}; \quad q = \frac{dz}{dy}.$$

Пределы y_1 и y_2 суть функции переменнаго x , а x_1 и x_2 суть постоянныя. Мы начнемъ съ вычисленія вариации этого двойнаго интеграла.

Положимъ сперва, что пределы не подлежатъ варьированію, а измѣняется только z . Функция z получаетъ безконечно малое приращеніе δz , которое есть безконечно малая функция 2-хъ переменныхъ независимыхъ x и y . Эту вариацию δz мы будемъ представлять себѣ также, какъ и прежде. Именно будемъ разсматривать функцию z какъ частный случай болѣе общей функции

$$Z = \phi_1(x, y, t),$$

гдѣ t переменный параметръ. Положимъ, что при $t=t_0$ функция $Z=z$, тогда

$$\delta z = \left(\frac{d\phi_1}{dt} \right)_0 dt,$$

то-есть вариация δz происходитъ отъ того, что параметръ t_0 получаетъ безконечно-малое приращеніе и обращается въ $t_0 + dt$.

Вслѣдствіе измѣненія z , p и q измѣнятся и получатъ приращенія

$$\delta p = \delta \frac{dz}{dx} = \frac{d\delta z}{dx}$$

$$\delta q = \delta \frac{dz}{dy} = \frac{d\delta z}{dy}.$$

Теперь мы можемъ написать вариацию δV . Для сокращенія мы здѣсь примемъ такія обозначенія

$$\frac{dV}{dz} = N, \quad \frac{dV}{dp} = P, \quad \frac{dV}{dq} = Q.$$

Ограничиваясь безконечно малыми перваго порядка, получимъ

$$\delta V = N\delta z + P\delta p + Q\delta q = N\delta z + P \frac{d\delta z}{dx} + Q \frac{d\delta z}{dy}.$$

Слѣдовательно вариация нашего интеграла будетъ:

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left(N\delta z + P \frac{d\delta z}{dx} + Q \frac{d\delta z}{dy} \right) dx \cdot dy.$$

Преобразуемъ, какъ и прежде, подынтегральное выраженіе такъ, чтобы въ него не входили производныя отъ вариации δz . Для этого замѣтимъ, что имѣемъ тождественно:

$$\begin{aligned} & N\delta z + P \frac{d\delta z}{dx} + Q \frac{d\delta z}{dy} \\ &= \left(N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} \right) \delta z + \frac{d}{dx} (P\delta z) + \frac{d}{dy} (Q\delta z), \end{aligned}$$

гдѣ символы $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dy}$ означаютъ „полныя“ производныя по x , т. е., что при дифференцированіи P и Q входящія въ нихъ z , p и q должны быть разсматриваемы какъ функціи x или y , слѣдовательно:

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \delta z \left(N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} \right) dx \cdot dy + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{d}{dx} (P \delta z) dx \cdot dy + \\ + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{d}{dy} (Q \delta z) dx \cdot dy. \end{aligned}$$

Послѣдній двойной интегралъ таковъ, что первое интегрированіе по y можно выполнить, именно:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{d}{dy} (Q \delta z) dx \cdot dy = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} (Q \delta z) \cdot dy \right] dx.$$

Чтобы преобразовать средній интегралъ, замѣтимъ, что по правилу дифференцированія опредѣленнаго интеграла по параметру имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{y_1}^{y_2} (P \delta z) dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{d}{dx} (P \delta z) dy + \frac{dy_2}{dx} \int_{y_1}^{y_2} P \delta z - \frac{dy_1}{dx} \int_{y_1}^{y_1} P \delta z = \\ = \int_{y_1}^{y_2} \frac{d}{dx} (P \delta z) dy + \int_{y_1}^{y_2} P \delta z \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

Въ послѣднемъ членѣ символъ $\frac{dy}{dx}$, собственно говоря, не имѣетъ смысла, такъ какъ y и x переменныя независимыя; но мы условимся подразумѣвать, что вмѣсто y передъ производствомъ дѣйствій должно быть вставлено y_2 или y_1 , какъ это указывается знакомъ подстановки, стоящимъ впереди. Теперь, очевидно будетъ:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{d}{dx} (P \delta z) dx \cdot dy = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} P \delta z dy - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} P \delta z \frac{dx}{dy}.$$

Замѣнивъ въ вышеприведенномъ выраженіи δS второй и третій двойные интегралы найденными для нихъ выраженіями, получимъ:

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \delta z \left(N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} \right) dx \cdot dy + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} P \delta z dy + \\ + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left(Q - P \frac{dy}{dx} \right) \delta z dx. \end{aligned}$$

Еслибы въ данномъ двойномъ интегралѣ предѣлы y_1 и y_2 были не функціями x , но постоянными количествами, то, само собою разумѣется, $\frac{dy_1}{dx}$ и $\frac{dy_2}{dx}$ были бы нулями и послѣднее выраженіе δS упростилось бы тѣмъ, что не содержало бы члена съ $P \frac{dy}{dx}$.

Мы предполагали, что предѣлы не подлежатъ варіированію. Если же предѣлы переменны, то къ найденному выраженію δS прибавляются еще новые члены, происходящіе отъ того, что x_1 и x_2 переменятся на $x_1 + dx_1$ и $x_2 + dx_2$, а y_1 и y_2 переменятся на $y_1 + \delta y_1$ и $y_2 + \delta y_2$ (δy_1 и δy_2 пишемъ потому, что y_1 и y_2 суть функція x ; x_1 и x_2 суть переменныя независимыя и потому для ихъ приращеній удерживаетъ обозначенія dx_1 и dx_2). Вслѣдствіе этого въ выраженіи δS прибавляется разность:

$$\int_{x_1+dx_1}^{x_2+dx_2} \int_{y_1+\delta y_1}^{y_2+\delta y_2} V dx dy - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} V dx dy,$$

которую мы и вычислимъ, отбрасывая безконечно малыя выше перваго порядка. Впервыхъ замѣтимъ, какъ и прежде дѣлали, что

$$\begin{aligned} \int_{y_1+\delta y_1}^{y_2+\delta y_2} V dy &= \int_{y_1}^{y_2} V dy + \int_{y_2}^{y_2+\delta y_2} V dy - \int_{y_1}^{y_1+\delta y_1} V dy = \\ &= \int_{y_1}^{y_2} V dy + \delta y_2 \int_{y_1}^{y_2} V - \delta y_1 \int_{y_1}^{y_1} V = \int_{y_1}^{y_2} V dy + \int_{y_1}^{y_2} V \delta y. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, также отбрасывая безконечно малыя высшихъ порядковъ, будемъ имѣть:

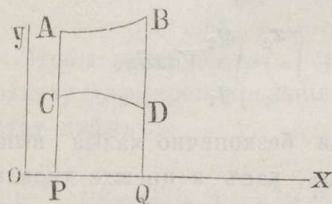
$$\begin{aligned} &\int_{x_1+dx_1}^{x_2+dx_2} \int_{y_1+\delta y_1}^{y_2+\delta y_2} V dx dy = \\ &\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} V dx dy + dx_2 \int_{y_1}^{y_2} V dy - dx_1 \int_{y_1}^{y_1} V dy + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} V \delta y dx. \end{aligned}$$

Теперь мы можемъ написать выраженіе варіаціи двойнаго интеграла съ переменными предѣлами, именно:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \delta z \left(N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} \right) dx dy + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left(Q - P \frac{dy}{dx} \right) \delta z dx + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} P \delta z dy + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} V dy + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} V \delta y dx. \end{aligned}$$

Въ этомъ выраженіи, замѣтимъ, встрѣчаются члены трехъ родовъ. Первый членъ—двойной интегралъ, содержащій варіацію δz и, слѣдовательно, зависящій отъ формы, приписываемой этой функціи. Слѣдующіе два члена не зависятъ отъ формы δz , а только отъ предѣльныхъ значеній, получаемыхъ этою безконечно малою функціею при x равномъ x_1 и x_2 , или при y равномъ y_1 и y_2 .

Послѣдніе два члена вовсе не зависятъ отъ δz , а только отъ допускаемой условіями задачи деформаціи контура той площади, на которую распространяется интегрированіе. Эта площадь ($ABCD$), называемая полемъ двойного интеграла, ограничивается, какъ извѣстно, двумя прямыми линіями, параллельными оси ординатъ и проведенными отъ нея на разстояніи $OP=x_1$ и $OQ=x_2$, и двумя кривыми линіями AB и CD , изъ коихъ первая имѣетъ уравненіе $y=y_2$, а вторая— $y=y_1$.



Въ первомъ членѣ суммованіе распространяется на всю площадь ($ABCD$). Во второмъ суммованіе производится по x на протяженіи двухъ кривыхъ AB и CD отдѣльно, при чемъ изъ первой суммы вычитается вторая. Въ третьемъ членѣ суммованіе производится по y на протяженіи двухъ прямыхъ CA и DB и тоже берется разность между двумя результатами и т. д.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію maximum'a и minimum'a двойного интеграла. Условія maximum'a и minimum'a получатся здѣсь буквально тѣми же разсужденіями, какъ и при разсмотрѣніи простыхъ интеграловъ. Именно, будемъ полагать, что

$$z = \phi_2(x, y, t),$$

$$y_1 = \phi_1(x, t), \quad y_2 = \phi_2(x, t),$$

$$x_1 = \psi_1(t), \quad x_2 = \psi_2(t),$$

при чемъ всѣ эти функціи совершенно произвольны, но предполагается, что при $t=t_0$ всѣ эти функціи получаютъ такія именно значенія, при которыхъ нашъ интегралъ дѣлается maximum'омъ или minimum'омъ.

Тогда, рассматривая S , какъ функцію $\phi(t)$ параметра t , мы можемъ сказать, что эта функція при $t=t_0$ получаетъ значеніе наибольшее или наименьшее и потому необходимое условіе будетъ:

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_0 = 0;$$

слѣдовательно

$$\delta S = \left(\frac{d\phi}{dt} \right)_0 dt = 0,$$

то есть, необходимое условіе maximum'a или minimum'a здѣсь, какъ и прежде, будетъ

$$\delta S = 0.$$

Чтобы отличить maximum отъ minimum'a нужно будетъ опредѣлить знакъ второй варіаціи

$$\delta^2 S = \left(\frac{d^2 \phi}{dt^2} \right)_0 dt^2.$$

Разсмотримъ, къ чему приведетъ насъ первое необходимое условіе. Равенство

$$\delta S = 0$$

должно имѣть мѣсто при совершенно произвольномъ видѣ безконечно малыхъ функцій δz , δy (которыя, впрочемъ, могутъ быть подчинены извѣстнымъ условіямъ), и при совершенно произвольныхъ значеніяхъ безконечно малыхъ dx_1 и dx_2 . Предполагая первоначально, что не дано никакихъ условій, стѣсняющихъ измѣненія z или предѣловъ интеграла, мы можемъ для δz , δy и dx_1 и dx_2 взять такія значенія, которыя бы обращались въ нули при предѣлахъ. Тогда въ выраженіи варіаціи δS уничтожатся всѣ члены, кромѣ перваго. Слѣдовательно первый членъ долженъ равняться нулю при совершенно произвольной формѣ функціи δz . Но такъ какъ мы можемъ всегда выбрать δz такъ, чтобы этотъ двойной интегралъ не равнялся нулю, если другой множитель не равенъ нулю, то мы приходимъ къ заключенію, что этотъ множитель долженъ равняться нулю, т. е.

$$N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} = 0. \quad (1)$$

Разсмотримъ, каково это уравненіе. Въ немъ, какъ мы знаемъ, $\frac{dP}{dx}$ и $\frac{dQ}{dy}$ означаютъ полныя производныя; слѣдовательно, при вычисленіи $\frac{dP}{dx}$ нужно дифференцировать P не только по x , явнымъ образомъ входящему, но и по z , p и q , рассматривая эти послѣднія, какъ функціи x .

Далѣе, такъ какъ въ P и Q уже входятъ p и q , то послѣ дифференцированія въ $\frac{dP}{dx}$ и въ $\frac{dQ}{dy}$ мы получимъ частныя производныя 2-го порядка, т. е.

$$r = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2 z}{dy dx} \quad \text{и} \quad t = \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

Слѣдовательно наше уравненіе есть уравненіе съ частными производными 2-го порядка и изъ него то мы должны опредѣлить неизвѣстную функцію z .

Въ интеграль этого уравненія взойдутъ, вообще говоря, двѣ произвольныя функціи и эти произвольныя функціи нужно будетъ также опредѣлить. Опредѣлятся онѣ при помощи предѣльных условій. Предѣльныя условія получатся, приравнивая нулю сумму остальныхъ восьми членовъ (каждый членъ со знакомъ подстановки раздѣляется на два члена) въ выраженіи δS . Легко видѣть, что для того, чтобы такое равенство имѣло мѣсто при предположеніи, что δz , δy , δx_1 и δx_2 ничѣмъ между собою не связаны, необходимо приравнять нулю отдѣльно каждую функцію, которая имѣетъ при себѣ множителемъ варіацію. Въ этомъ мы убѣдимся, замѣтивъ, что мы можемъ, при выговоренномъ предположеніи, совершенно произвольно располагать варіаціями. Выберемъ для нихъ такія значенія, чтобы семь членовъ обратились въ нули и уничтожились сами собою, тогда только одинъ членъ выйдетъ равнымъ нулю. А чтобы такой одинъ членъ равнялся нулю, при совершенно произвольномъ значеніи входящаго въ него варіаціоннаго множителя, необходимо, чтобы коэффициентъ при этомъ множителѣ былъ равенъ нулю. Такимъ образомъ заключаемъ, что всѣ коэффициенты при варіаціонныхъ множителяхъ должны равняться нулю.

Мы предполагали, что между предѣльными варіаціями нѣтъ никакой зависимости.

Это было сдѣлано только для упрощенія разсужденій, тогда какъ въ задачахъ на *maxima* и *minima* предѣльныя значенія варіацій δz , δy_1 , δy_2 , δx_1 , δx_2 обыкновенно бываютъ связаны между собою различными условіями, вслѣдствіе которыхъ только нѣкоторыя изъ этихъ варіацій останутся независимыми, а другія выразятся въ функціяхъ независимыхъ. Но очевидно, что въ подобномъ случаѣ въ выраженіи δS можно оставить только независимыя варіаціи, исключивъ изъ него зависимыя помощію данныхъ условій, и тогда, повторивъ вышеприведенныя разсужденія, мы придемъ къ заключенію, что всѣ коэффициенты при независимыхъ варіаціонныхъ множителяхъ въ выраженіи δS нужно будетъ приравнять нулю.

Мы принуждены ограничиться этими общими указаніями и оставить безъ разсмотрѣнія различные виды предѣльныхъ условій, которыя должны служить для опредѣленія произвольныхъ функцій, вошедшихъ въ общій интеграль уравненія (I), какъ потому, что по недостатку времени мы не имѣемъ въ виду примѣнять этихъ соображеній, такъ и по общей трудности вопроса, главная часть котораго, состоящая въ интегрированіи уравненія

(I), большею частію остается безъ разрѣшенія.

Въ заключеніе настоящей статьи представимъ примѣры на приложение изложенной теоріи.

Задача 1-я. Опредѣлить форму поверхности, которая, будучи ограничена даннымъ контуромъ, была бы наименьшею по величинѣ.

Здѣсь, очевидно, нужно найти форму функции z , дѣлающей наименьшимъ интегралъ

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx \, dy,$$

выражающій величину поверхности.

Для разсматриваемаго случая имѣемъ:

$$V = \sqrt{1+p^2+q^2}, \quad N = \frac{dV}{d\delta} = 0,$$

$$P = \frac{dV}{dp} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Q = \frac{dV}{dq} = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

и уравненіе (I), изъ котораго долженъ быть найденъ z , будетъ

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dx} \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{d}{dy} \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0.$$

Производи указанныя дифференцированія, находимъ

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2} \cdot r - p \frac{pr+qs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{1+p^2+q^2} + \frac{\sqrt{1+p^2+q^2} \cdot t - q \frac{ps+qt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{1+p^2+q^2} = 0,$$

или, по упрощеніи,

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0.$$

Это есть уравненіе съ частными производными второго порядка. Его общій интегралъ долженъ дать выраженіе неизвѣстной функции z . Въ составъ этого интеграла войдутъ двѣ произвольныя функціи, которыя будутъ опредѣлены изъ предѣльныхъ условій. Но если, какъ мы и предполагаемъ, данъ опредѣленный контуръ поверхностей, то предѣлы интеграла постоянны и варіація δz при предѣлахъ равна нулю; вслѣдствіе чего въ выраженіи δS останется одинъ первый членъ, а предѣльныхъ уравненій не будетъ. Произвольныя функціи опредѣлятся изъ условія, что поверхность должна проходить чрезъ линіи, изъ которыхъ составленъ данный контуръ.

Интегрирование послѣдняго уравненія возможно, хотя и затруднительно. Въ первый разъ его интеграль былъ данъ Монжемъ въ довольно сложной формѣ. Впослѣдствіи были указаны болѣе простыя формы того же интеграла Björlingомъ и Оссианомъ Бонне. Во всякомъ случаѣ процессъ интегрированія слишкомъ сложенъ и мы не будемъ на немъ останавливаться. Ограничимся только объясненіемъ геометрическаго значенія полученнаго дифференціального уравненія, которое, очевидно, должно выражать нѣкоторое свойство общее для всѣхъ поверхностей *minima*. Легко обнаружить, въ чемъ заключается это свойство. Припомнимъ изъ курса дифференціального исчисленія уравненіе, которое служитъ для опредѣленія двухъ радіусовъ кривизны главныхъ нормальныхъ сѣченій въ произвольной точкѣ поверхности; это уравненіе было слѣдующее:

$$(rt-s^2)\rho^2 - [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+q^2} \cdot \rho + (1+p^2+q^2)^2 = 0.$$

Обозначимъ его корни черезъ ρ_1 и ρ_2 ; это суть главные радіусы кривизны поверхности въ рассматриваемой точкѣ.

Для поверхностей *minima* это квадратное уравненіе не будетъ имѣть втораго члена и слѣдовательно „въ каждой точкѣ такой поверхности

$$\rho_1 + \rho_2 = 0, \text{ или } \rho_1 = -\rho_2,$$

т. е. два главные радіуса кривизны равны и съ обратными знаками.“

Иногда это свойство выражаютъ иначе. Величины $\frac{1}{\rho_1}$ и $\frac{1}{\rho_2}$ представляютъ мѣру кривизны въ двухъ главныхъ нормальныхъ сѣченіяхъ. Величину среднюю арифметическую между этими двумя „главными“ кривизнами называютъ „среднею кривизною“ поверхности въ данной точкѣ. Эта средняя кривизна будетъ

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_1\rho_2}$$

и слѣдовательно можно также сказать, что „въ каждой точкѣ поверхности *minima* средняя кривизна равна нулю.“

Выраженіе радіусовъ кривизны главныхъ нормальныхъ сѣченій для поверхности *minimum* будетъ:

$$\rho = \pm \frac{1+p^2+q^2}{\sqrt{s^2-rt}}.$$

и слѣдовательно въ каждой точкѣ такой поверхности

$$s^2 - rt > 0;$$

а потому „указательницею“ будетъ вообще гипербола и форма

поверхности въ смежности съ разсматриваемою точкою будетъ близко подходить къ формѣ гиперболическаго параболоида.

Существуетъ множество видовъ поверхностей *minima*. Между ними наиболѣе замѣчательны: косою геликоидъ (неразгибающаяся винтовая поверхность) и поверхность вращения, образуемая цѣпною линіею, обращающеюся около своей направляющей. Последняя форма, впрочемъ, была уже нами найдена, когда мы рѣшали задачу о кривой линіи, которая, обращаясь около данной оси, даетъ наименьшую поверхность вращения.

Легко было бы повѣрить, что для этихъ двухъ поверхностей средняя кривизна въ каждой точкѣ дѣйствительно равна нулю.

Поверхности *minima* могутъ быть воспроизведены въ дѣйствительности весьма простымъ способомъ. Извѣстный физикъ Плато показалъ, что свойство имѣть среднюю кривизну равною нулю принадлежитъ поверхности, представляемой всякою чрезвычайно тонкою жидкою оболочкою, вродѣ стѣнки мыльнаго пузыря, масса которой почти равна нулю и которая потому можетъ быть разсматриваема, какъ свободная отъ дѣйствія силы тяжести и подчиненная только дѣйствію силъ молекулярныхъ, если эта оболочка своими обѣими сторонами находится въ соприкосновеніи съ свободнымъ воздухомъ.

Употребляя для образованія подобныхъ оболочекъ растворъ мыла, смѣшаннаго съ глицериномъ, г. Плато сообщалъ имъ довольно значительную устойчивость. Такимъ образомъ онъ получилъ возможность изучать ихъ разнообразныя и оригинальныя формы, ограничивая ихъ различными контурами, приготовленными изъ дерева и проволоки. Напр., если взять два кольца равныхъ діаметровъ и, помѣстивъ ихъ почти въ соприкосновеніи, ввести помощію кисти въ промежутокъ между ними нѣкоторое количество приготовленнаго раствора и затѣмъ приподнимать осторожно верхнее кольцо, то образуется поверхность *minimum*, которую г. Плато называетъ „катеноидомъ“ и которая въ частномъ случаѣ, когда линія, соединяющая центры колецъ, остается перпендикулярною къ ихъ плоскостямъ, будетъ поверхностью, образуемая вращеніемъ цѣпной линіи около ея направляющей. (Муаньо.)

Задача 2-я. Изъ всѣхъ поверхностей, покрывающихъ одинъ и тотъ-же объемъ, который съ другихъ сторонъ ограниченъ данными поверхностями, найти наименьшую.

Требуется опредѣлить видъ функціи z , дающей наименьшее значеніе интегралу

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx \, dy,$$

при условіи, чтобы таже функція удовлетворяла уравненію:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} z \, dx \, dy = S_1 = \text{const.},$$

выражающему постоянство объема.

Прилагая правило Эйлера для относительных наибольшихъ и наименьшихъ, мы будемъ искать абсолютный minimumъ выраженія

$$W = S + \lambda S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \{ \sqrt{1+p^2+q^2} + \lambda z \} \, dx \, dy.$$

Здѣсь имѣемъ

$$V = \sqrt{1+p^2+q^2} + \lambda z, \quad N = \lambda, \quad P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Q = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

и уравненіе (I) даетъ

$$\frac{d}{dx} \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{d}{dy} \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \lambda.$$

Произведя указанныя дифференцированія, получимъ

$$\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \lambda.$$

Интегралъ этого уравненія въ общемъ видѣ неизвѣстенъ, но легко усмотрѣть, какое свойство поверхностей оно выражаетъ. Приведенное въ предъидущей задачѣ уравненіе, опредѣляющее главные радіусы кривизны въ произвольной точкѣ поверхности, даетъ очевидно

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{rt - s^2} \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}$$

и

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{rt - s^2},$$

откуда

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Слѣдовательно уравненіе нашей задачи можетъ быть написано въ видѣ:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \lambda$$

и выражаетъ поэтому, что „средняя кривизна поверхности minimum, ограничивающей данный объемъ, должна быть постоянна во всѣхъ ея точкахъ.“ Такому условію, въ частности, удовлетворяютъ сфера, плоскость и еще множество другихъ поверх-

ностей, которыхъ форма находится, очевидно, въ зависимости отъ контура, ихъ ограничивающаго.

Поверхности этого рода съ постоянною среднею кривизною, какъ показаль г. Плато, образуются мыльною оболочкою, замыкающею со всѣхъ сторонъ опредѣленное количество воздуха, при чемъ величина постоянной средней кривизны, а слѣдовательно и форма поверхности, зависятъ отъ разности внутренняго и внѣшняго давленія.

Признаки, отличающіе maximum отъ minimum'a.

Положимъ, имѣемъ интеграль

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

гдѣ

$$V = f(x, y, y', y'' \dots).$$

Мы видѣли, что видъ функціи y , дѣлающей интеграль S наибольшимъ или наименьшимъ, опредѣляется изъ условія

$$\delta S = 0$$

и это уравненіе достаточно для нахожденія всѣхъ неизвѣстныхъ вопроса. Но неизвѣстныя, такъ опредѣленныя, могутъ вообще сдѣлать S или maximum'омъ или minimum'омъ, или не дать ни maximum'a, ни minimum'a, такъ какъ это условіе есть только необходимое, но не достаточное.

Чтобы увѣриться въ дѣйствительномъ существованіи maximum'a или minimum'a, нужно разсмотрѣть вторую вариацию $\delta^2 S$; если $\delta^2 S$ сохраняетъ одинъ и тотъ-же знакъ и $\delta^2 S < 0$, то S —maximum, а если при этомъ $\delta^2 S > 0$, то S —minimum.

Припомнимъ, что для полученія вариации δS , а потомъ и $\delta^2 S$, нужно вообразить, что всѣ величины $y, y', y'' \dots$, входящія въ S и подлежащія измѣненію, суть функціи нѣкотораго параметра t и что при $t = t_0$ онѣ принимаютъ значенія, дѣлающія S maximum'омъ или minimum'омъ.

При этомъ первая и вторая вариации будутъ

$$\delta S = \left(\frac{dS}{dt} \right)_0 dt, \quad \delta^2 S = \left(\frac{d^2 S}{dt^2} \right)_0 dt^2.$$

Условіе $\delta S=0$ опредѣляетъ видъ неизвѣстной функціи y , но не даетъ вполне опредѣленнаго значенія для $\delta^2 S$, потому что въ выраженіе S , а слѣдовательно и въ $\frac{d^2 S}{dt^2}$, входятъ функціи произвольнаго вида отъ x и t , которыя съ измѣненіемъ t могутъ измѣняться чрезвычайно разнообразно, почему и $\left(\frac{d^2 S}{dt^2}\right)_0$ будетъ измѣняться вмѣстѣ съ dt , оставаясь при этомъ, до извѣстной степени, неопредѣленнымъ по виду и составу. Понятно поэтому, что изслѣдованіе знака $\left(\frac{d^2 S}{dt^2}\right)_0$ представитъ особаго рода трудности, которыхъ вовсе не существовало въ такомъ-же вопросѣ дифференціального исчисленія, гдѣ S было вполне опредѣленною функціею t , а $\left(\frac{d^2 S}{dt^2}\right)_0$ — вполне опредѣленнымъ количествомъ, имѣющимъ знакъ $(+)$ или $(-)$.

Вообще должно замѣтить, что вопросъ объ отличіи maximum'a отъ minimum'a въ вариационномъ исчисленіи есть вопросъ весьма трудный, который только для простыхъ интеграловъ вполне разрѣшенъ знаменитымъ Якоби.

Для двойныхъ-же и вообще кратныхъ интеграловъ существуютъ только нѣкоторыя теоретическія изысканія, не имѣющія почти никакого практическаго значенія въ виду непреодолимыхъ затрудненій, встрѣчающихся при интегрированіи уравненія, служащаго для опредѣленія неизвѣстной функціи. Да и для простыхъ интеграловъ изслѣдованіе второй вариации оказывается слишкомъ сложнымъ, если разсматривается общій случай, когда въ выраженіе S входятъ производныя y до произвольнаго n -го порядка. Поэтому мы ограничимся разборомъ только частнаго случая, именно будемъ предполагать, что подынтегральная функція содержитъ только x , y и y' , или что

$$V = f(x, y, y').$$

Этотъ частный случай имѣетъ особенно важное значеніе, такъ какъ онъ обнимаетъ большую часть рѣшенныхъ нами вопросовъ.

Замѣтимъ прежде всего, что вопросъ объ отысканіи maximum'a или minimum'a интеграла S можетъ быть разсматриваемъ, какъ мы уже упоминали объ этомъ прежде, состоящимъ изъ двухъ частей. Сначала предѣлы интегрированія x_1 и x_2 , а также предѣльныя значенія функціи y_1 и y_2 , можно предполагать постоянными, но произвольными, и искать видъ функціи, дѣлающей S maximum'омъ или minimum'омъ. Мы получимъ въ рѣшеніи

$$y = \phi(x, c_1, c_2),$$

гдѣ c_1 и c_2 произвольныя постоянныя.

Затѣмъ мы можемъ опредѣлить величины этихъ постоянныхъ изъ условій, что при $x = x_1, y = y_1$ и при $x = x_2, y = y_2$. Такимъ образомъ найдемъ

$$S = F(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

и этимъ рѣшимъ первую часть вопроса. Послѣ этого намъ нужно будетъ найти тѣ значенія $x_1, x_2, \dots$, при которыхъ S будетъ maximum или minimum, и это будетъ вторая половина вопроса, которая можетъ быть рѣшена помощью обыкновенныхъ приемовъ дифференціального исчисления. Изъ этого замѣчанія слѣдуетъ, что мы можемъ въ настоящемъ изслѣдованіи ограничиться разсмотрѣніемъ того случая, когда предѣлы интегрированія x_1 и x_2 и предѣльныя величины функціи y_1 и y_2 постоянны. Въ этомъ предположеніи и разсмотримъ вопросъ.

Вариация перваго порядка есть

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} (P) \delta y dx.$$

Вторая вариация получится изъ выраженія δS чрезъ дифференцированіе по параметру и будетъ

$$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \delta(P)(\delta y + (P)\delta^2 y) \right\} dx.$$

Но y , сюда входящій, долженъ быть найденъ изъ условія

$$\delta S = 0, \text{ или } (P) = 0,$$

слѣдовательно

$$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} \delta(P) \delta y dx.$$

Теперь намъ предстоитъ разсмотрѣть, можетъ ли это выраженіе сохранять свой знакъ при совершенно произвольныхъ видахъ безконечно малой функціи δy . Для этого мы его преобразуемъ впервыхъ слѣдующимъ образомъ. Здѣсь

$$(P) = P - \frac{dP_1}{dx}, \quad \delta(P) = \delta P - \delta \frac{dP_1}{dx},$$

или, взмѣнивъ порядокъ дифференцированій по x и по t и взявъ вариации, находимъ

$$\begin{aligned} \delta(P) = & \frac{dP}{dy} \delta y + \frac{dP}{dy'} \delta y' - \frac{d}{dx} \left(\frac{dP_1}{dy} \delta y + \frac{dP}{dy'} \delta y' \right) = \frac{dP}{dy} \delta y + \frac{dP}{dy'} \delta y' - \\ & - \frac{d^2 P_1}{dx dy} \delta y - \frac{d^2 P_1}{dy^2} y' \delta y - \frac{d^2 P_1}{dy dy'} y'' \delta y - \frac{dP_1}{dy} \delta y' - \frac{d}{dx} \left(\frac{dP_1}{dy'} \delta y' \right); \\ & \frac{dP}{dy'} = \frac{d^2 V}{dy dy'} = \frac{dP_1}{dy}, \end{aligned}$$

слѣдовательно, по сокращеніи, будемъ имѣть

$$\delta(P) = \left(\frac{dP}{dy} - \frac{d^2P}{dx dy} - \frac{d^2P}{dy^2} y' - \frac{d^2P}{dy dy'} y'' \right) \delta y - \frac{d}{dx} \left(\frac{dP}{dy} \delta y' \right).$$

Обозначимъ коэффициентъ при δy чрезъ M и пусть

$$\frac{dP}{dy'} = \frac{dV}{dy'^2} = N;$$

тогда

$$\delta(P) = M \delta y - \frac{d}{dx} (N \delta y').$$

Далѣе положимъ, что

$$Mu - \frac{d(Nu')}{dx} = f(u),$$

гдѣ и есть какая-нибудь функція x ; тогда будетъ

$$\delta(P) = f(\delta y)$$

и

$$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} \delta y f(\delta y) dx.$$

По способу Якоби подынтегральное выраженіе нужно преобразовать въ другое, состоящее изъ произведенія двухъ множителей; одинъ изъ нихъ будетъ квадратъ и слѣдовательно не можемъ перемѣнять своего знака; другой-же даетъ знакъ 2-й вариации.

Чтобы достигнуть этого преобразованія, напомнимъ, на основаніи принятаго обозначенія, такіа тождества:

$$Mu - \frac{dNu'}{dx} = f(u),$$

$$Mv - \frac{dNv'}{dx} = f(v),$$

гдѣ u и v какія-нибудь функціи x . Помножимъ первое тождество на v , второе на u , и вычтемъ изъ втораго первое; тогда получимъ

$$uf(v) - vf(u) = v \frac{d(Nu')}{dx} - u \frac{d(Nv')}{dx} =$$

$$\frac{d}{dx} (vNu' - uNv') = \frac{d}{dx} \left\{ N(vu' - uv') \right\} = \frac{d}{dx} (Nv^2 z'),$$

такъ какъ, положивъ $\frac{u}{v} = z$, имѣемъ

$$\frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{d \frac{u}{v}}{dx} = \frac{dz}{dx} = z',$$

и отсюда

$$vu' - uv' = v^2 z'.$$

Предположимъ, что функція v выбрана такъ, что

$$f(v) = 0,$$

и пусть v будетъ какое-нибудь частное рѣшеніе этого уравненія. Тогда полученное выше тождество обратится въ слѣдующее:

$$vf(u) = - \frac{d' \{ Nv^2 z' \}}{dx}.$$

Помножая обѣ части на $\frac{u}{v} = z$, получимъ

$$uf(u) = - z \frac{d \{ Nv^2 z' \}}{dx}.$$

Пусть $u = \delta y$; тогда будемъ имѣть:

$$\delta^2 S = - \int_{x_1}^{x_2} z \frac{d(Nv^2 z')}{dx} dx.$$

гдѣ $z = \frac{\delta y}{v}$. Этотъ интеграль можно взять по частямъ и тогда:

$$\delta^2 S = - \int_{x_1}^{x_2} Nv^2 z z' + \int_{x_1}^{x_2} Nv^2 z'^2 dx.$$

Далѣе

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} Nv^2 z z' &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 V}{dy'^2} v^2 \frac{\delta y}{v} \frac{v \delta y' - v' \delta y}{v^2} = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 V}{dy'^2} \delta y \frac{v \delta y' - v' \delta y}{v}. \end{aligned}$$

Но такъ какъ y_1 и y_2 постоянны, то

$$(\delta y)_1 = 0 \text{ и } (\delta y)_2 = 0.$$

Поэтому, если только v не $= 0$ при измѣненіи x отъ $x = x_1$ до $x = x_2$

и если $\frac{d^2 V}{dy'^2}$ не $= \infty$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} Nv^2 z z' = 0$$

и

$$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 V}{dy'^2} \left(\frac{v \delta y' - v' \delta y}{v} \right)^2 dx.$$

Вотъ мы и преобразовали подынтегральное выраженіе въ желаемый видъ. Но это мы получили при условіи, что $v \neq 0$ ни при одномъ значеніи x между x_1 и x_2 .

Если $\frac{d^2 V}{dy'^2} > 0$ при всѣхъ значеніяхъ x между предѣлами интеграла, то $\delta^2 S > 0$ и S будетъ minimum.

Если $\frac{d^2 V}{dy'^2} < 0$, то $\delta^2 S < 0$ и S будетъ maximum.

Если-же $\frac{d^2 V}{dy'^2}$ мѣняетъ свой знакъ между предѣлами интегрированія, то очевидно, что, располагая величиною δy , мы можемъ сдѣлать или такъ, чтобы положительная часть суммы въ интегралѣ была больше отрицательной, или наоборотъ, — чтобы отрицательная была больше положительной; стало быть въ этомъ случаѣ $\delta^2 S$ будетъ мѣнять свой знакъ и нѣтъ ни maximum'a, ни minimum'a.

Нѣкоторое затрудненіе при этомъ разсмотрѣніи представляетъ условіе, что v должно быть $\neq 0$ между предѣлами интегрированія. Разсмотримъ, къ чему приводитъ это условіе.

Опредѣлимъ v ; для этого имѣемъ уравненіе $\phi(v)=0$, или такъ какъ:

$$\phi(v) = Mv - \frac{d N v'}{dx} = \int \frac{\delta y = v}{\delta(P)} = \int \left\{ \frac{d(P)}{dy} \delta y + \frac{d(P)}{dy'} \delta y' + \frac{d(P)}{dy''} \delta y'' \right\} = \frac{d(P)}{dy} v + \frac{d(P)}{dy'} v' + \frac{d(P)}{dy''} v'',$$

—уравненіе

$$\frac{d(P)}{dy} v + \frac{d(P)}{dy'} v' + \frac{d(P)}{dy''} v'' = 0.$$

Замѣтивъ, что

$$y = \phi(x, c_1, c_2),$$

заключаемъ, что коэффиціенты при v, v', v'' будутъ функціями x, c_1 и c_2 . Слѣдовательно, это есть линейное уравненіе съ переменными коэффиціентами, а интегрировать такіа уравненія мы не можемъ. Но здѣсь интегрированіе совершится весьма просто. Возьмемъ уравненіе $(P)=0$ и вообразимъ, что въ не то вмѣсто y вставлено его выраженіе $y = \phi(x, c_1, c_2)$. По вставкѣ мы получимъ тождество между x, c_1 и c_2 . Одифференцируемъ это тождество сперва по c_1 и потомъ по c_2 . Тогда получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d(P)}{dy} \frac{dy}{dc_1} + \frac{d(P)}{dy'} \frac{dy'}{dc_1} + \frac{d(P)}{dy''} \frac{dy''}{dc_1} &= 0, \\ \frac{d(P)}{dy} \frac{dy}{dc_2} + \frac{d(P)}{dy'} \frac{dy'}{dc_2} + \frac{d(P)}{dy''} \frac{dy''}{dc_2} &= 0. \end{aligned}$$

Сравнивая эти тождества съ нашимъ уравненіемъ и замѣчая, что

$$\frac{dy'}{dc_1} = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dc_1}, \quad \frac{dy''}{dc_1} = \frac{d^2}{dx^2} \frac{dy}{dc_1} \quad \text{и т. д.},$$

мы видимъ, что оно удовлетворяется, когда $v=v_1 = \frac{dy}{dc_1}$ и когда

$$v=v_2 = \frac{dy}{dc_2}.$$

Два частныхъ рѣшенія найдены, слѣдовательно, общій интеграль будетъ

$$v = C_1 \frac{dy}{dc_1} + C_2 \frac{dy}{dc_2}.$$

Это выраженіе не должно обращаться въ 0 при измѣненіи x отъ $x=x_1$ до $x=x_2$. Представивъ v въ видѣ

$$v = C_1 \left(\frac{dy}{dc_1} + m \frac{dy}{dc_2} \right),$$

гдѣ $m = \frac{C_2}{C_1}$ есть тоже произвольное постоянное, мы приходимъ къ условію, что выраженіе

$$\frac{dy}{dc_1} + m \frac{dy}{dc_2}$$

не должно дѣлаться равнымъ нулю ни при одномъ изъ значеній x отъ $x=x_1$ до $x=x_2$. При томъ нѣтъ надобности, чтобы это условіе удовлетворялось при всевозможныхъ значеніяхъ m (что впрочемъ вообще невозможно); нужно только, чтобы оно выполнялось при одномъ какомъ-нибудь частномъ значеніи m . Чтобы опредѣлить, существуетъ-ли такое значеніе m , при которомъ это выраженіе ни разу не обращается въ нуль, поступаютъ такъ. Приравниваютъ это выраженіе нулю:

$$\frac{dy}{dc_1} + m \frac{dy}{dc_2} = 0$$

и опредѣляютъ отсюда m :

$$m = - \frac{\frac{dy}{dc_1}}{\frac{dy}{dc_2}}.$$

Если это выраженіе, при измѣненіи x между x_1 и x_2 , получаетъ всѣ величины между $-\infty$ и $+\infty$, то нѣтъ такого значенія m , при которомъ v не обращалось-бы въ нуль. Если же есть величины, которымъ это выраженіе не можетъ равняться, то, взявъ для m одну изъ такихъ величинъ, мы будемъ имѣть такое m , при которомъ v не равно нулю.

Замѣтимъ еще въ заключеніе нѣкоторые частные случаи. Положимъ, что

$$\frac{d^2 V}{dy'^2} = 0.$$

Легко видѣть, какую форму должно имѣть V , чтобы это было возможно. Интегрируя послѣднее уравненіе, находимъ:

$$\frac{dV}{dy'} = \psi(x, y),$$

гдѣ ψ есть нѣкоторая функція, содержащая только x и y . Интегрируя еще разъ, получимъ

$$V = \varphi(x, y) + y' \cdot \psi(x, y).$$

Поэтому, въ разсматриваемомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$P = \frac{dV}{dy} = \frac{d\varphi}{dy} + y' \frac{d\psi}{dy}, \quad P_1 = \frac{dV}{dy'} = \psi(x, y) + \frac{dP_1}{dx} = \frac{d\psi}{dx} + y' \frac{d\psi}{dy}$$

и уравненіе $(P) = 0$, гдѣ

$$(P) = P - \frac{dP_1}{dx}.$$

будетъ:

$$\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Это уравненіе даетъ y , какъ функцію x безъ произвольныхъ постоянныхъ: $y = \phi(x)$. Это значитъ, что предѣльныя точки, между которыми должна быть проведена искомая кривая, не могутъ быть взяты совершенно произвольно: онѣ должны находиться на кривой, опредѣляемой постояннымъ уравненіемъ, иначе задача невозможна. Въ этомъ случаѣ не будетъ однако $\delta^2 S = 0$, потому что сдѣланное выше преобразованіе $\delta^2 S$ не будетъ существовать, и такъ какъ при этомъ

$$\delta(P) = \left(\frac{dP}{dy} - \frac{d^2 P_1}{dx dy} - \frac{d^2 P_1}{dy^2} y \right) \delta y = R \delta y,$$

то будемъ имѣть

$$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} R (\delta y)^2 \cdot dx.$$

Для того, чтобы $\delta^2 S$ сохраняла свой знакъ, здѣсь необходимо и достаточно, чтобы выраженіе R сохраняло одинъ и тотъ же знакъ при измѣненіи x отъ $x=x_1$ до $x=x_2$.

Можетъ случиться, что уравненіе $\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dx} = 0$ удовлетворяется тождественно; это будетъ значитъ, что выраженіе $V = \varphi + y' \cdot \psi$ есть полная производная по x отъ нѣкоторой функ-

ціи $F(x, y)$, такъ что $V = \frac{d}{dx} F(x, y)$; тогда будемъ имѣть

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V dx = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)$$

и слѣдовательно вопросъ о наибольшемъ или наименьшемъ значеніи S , очевидно, не будетъ относиться въ варіаціонному исчисленію.

Сдѣлаемъ еще замѣчаніе о случаѣ, когда V не содержитъ y' , а только x и y . Уравненіе $(P) = 0$ приводится при этомъ къ $P = 0$ или къ $\frac{dN}{dy} = 0$ и даетъ поэтому $y = \phi(x)$ безъ произвольныхъ постоянныхъ. При этомъ будемъ имѣть

$$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dP}{dy} (\delta y)^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 V}{dy^2} (\delta y)^2 dx$$

и, если при $y = \phi(x)$ выраженіе $\frac{d^2 V}{dy^2}$ сохраняетъ свой знакъ между предѣлами интеграла, не обращаясь въ безконечность, то будемъ имѣть maximum или minimum, если только рѣшеніе $y = \phi(x)$ окажется возможнымъ для данныхъ условій задачи.

Для примѣра на приложеніе этой теоріи возьмемъ въ первыхъ задачу о брахистохронѣ.

Здѣсь

$$V = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}, \quad \frac{d^2 V}{dy'^2} = \frac{1}{\sqrt{y} \cdot (1+y'^2)^{3/2}} > 0;$$

стало бытъ minimum можетъ быть. Далѣе уравненіе между x, y, c_1 и c_2 есть

$$x = c_2 + c_1 \arccos \frac{c_1 - y}{c_1} - \sqrt{2c_1 y - y^2}$$

и отсюда чрезъ дифференцированіе находимъ частныя производныя:

$$\frac{dy}{dc_2} = \frac{\sqrt{2c_1 y - y^2}}{y}, \quad \frac{dy}{dc_1} = 2 - \frac{\sqrt{2c_1 y - y^2}}{y} \arccos \frac{c_1 - y}{c_1}.$$

Составимъ теперь выраженіе

$$\frac{dy}{dc_1} + m \frac{dy}{dc_2}.$$

Для краткости положимъ, какъ обыкновенно дѣлается для циклоиды,

$$\frac{c_1 - y}{c_1} = \cos \varphi;$$

тогда

$$y = c_1(1 - \cos \varphi), \quad \sqrt{2c_1 y - y^2} = c_1 \sin \varphi,$$

$$\frac{\sqrt{2c_1 y - y^2}}{y} = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \cot \frac{\varphi}{2}$$

и пусть

$$\frac{dy}{dc_1} + m \frac{dy}{dc_2} = 2 - \cot \frac{\varphi}{2} \cdot \varphi - m \cot \frac{\varphi}{2} = 0;$$

отсюда

$$m = 2tg \frac{\varphi}{2} - \varphi = 2\left(tg \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Чтобы видѣть, какъ измѣняется m , возьмемъ производную выраженія, стоящаго въ скобкахъ. Она будетъ:

$$\frac{1}{2\cos^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} > 0.$$

Слѣдовательно функція въ скобкахъ возрастающая. Посмотримъ теперь, какъ она возрастаетъ. Если $\varphi=0$, то и функція равна нулю; если $\varphi=\pi$, то она равна $+\infty$. При дальнѣйшемъ измѣненіи φ функція возрастаетъ отъ $-\infty$ до -2π ; послѣднее значеніе она получаетъ при $\varphi=2\pi$. Слѣдовательно при значеніяхъ m , взятыхъ между -2π и 0, $v \neq 0$ и minimum дѣйствительно есть.

Въ заключеніе этой статьи я укажу на примѣръ, какъ иногда возможно отличить maximum отъ minimum'a и въ двойномъ интегралѣ, не прибѣгая къ общимъ теоретическимъ изысканіямъ, а рассматривая непосредственно совокупность членовъ втораго порядка въ выраженіи вариации даннаго интеграла. Возьмемъ задачу о наименьшей поверхности, ограниченной даннымъ контуромъ (стр. 113). Мы имѣли

$$V = \sqrt{1+p^2+q^2} \quad \text{и} \quad S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx \, dy.$$

Измѣнимъ z на $z + \delta z$, вслѣдствіе чего p и q перемѣнятся на $p + \delta p$ и $q + \delta q$; функція V при этомъ обратится въ

$$\sqrt{1+(p+\delta p)^2+(q+\delta q)^2}.$$

Разложимъ это выраженіе въ рядъ по Тейлоровой теоремѣ и вычислимъ члены перваго и втораго порядковъ; будемъ имѣть

$$\sqrt{1+p^2+q^2} + \frac{p\delta p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{q\delta q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{(1+q^2)(\delta p)^2}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}} +$$

$$\frac{(1+p^2)(\delta q)^2}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}} + \dots$$

Взявъ вариацию δS и полагая, что членъ перваго порядка

приравненъ нулю. согласно необходимому условію maximum'a или minimum'a, и затѣмъ отбрасывая члены третьяго и высшихъ порядковъ, мы получимъ для второй варіаціи выраженіе

$$\delta^2 S = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{(1+q^2)(\delta p)^2 - 2pq\delta p\delta q + (1+p^2)(\delta q)^2}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} dx dy,$$

или

$$\delta^2 S = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{(\delta p)^2 + (\delta q)^2 + (q\delta p - p\delta q)^2}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

Здѣсь подынтегральная функція необходимо положительна, слѣдовательно найденное рѣшеніе даетъ для S minimum.

О другомъ способѣ изложенія варіаціоннаго исчисленія.

Въ нашихъ лекціяхъ мы держались той точки зрѣнія на начала варіаціоннаго исчисленія, которая въ послѣднее время уже прочно установилась въ наукѣ, благодаря трудамъ многихъ авторитетныхъ ученыхъ. Въ этомъ видѣ начала этой части анализа были разработаны во всѣхъ наиболѣе обширныхъ и богатыхъ по содержанію курсахъ этого предмета, вышедшихъ въ текущемъ столѣтіи, между которыми слѣдуетъ указать на сочиненія Штрауха, Джеллета, Штегмана и Муаньо (Линделёвъ). Этотъ же способъ изложенія рекомендуется, какъ наилучшій, и г. Тодгентеромъ, обнаружившимъ такую громадную эрудицію въ своей исторіи развитія варіаціоннаго исчисленія въ XIX столѣтіи. При томъ понятіи о варіаціи, которое нами было принято, мы не приписывали никакого измѣненія (варіаціи) перемѣнному независимому, измѣненіе же или варіацію получало только зависимое перемѣнное или функція. При другой точкѣ зрѣнія на начала варіаціоннаго исчисленія безконечно малое измѣненіе функціи проистекаетъ отъ одновременнаго измѣненія, какъ формы функціи, такъ и величины перемѣннаго независимаго. Такое болѣе обширное понятіе о варіаціи функціи и до сего времени еще нерѣдко принимается многими учеными и того-же понятія о варіаціи придерживалось большинство тѣхъ геометровъ, которымъ варіаціонное исчисленіе обязано наиболѣе своими успѣхами. Поэтому-то въ заключеніе настоящаго курса я считаю необходимымъ познакомить моихъ слушателей и съ другимъ, прежде общепринятымъ, способомъ изложенія началъ варіаціоннаго исчисленія, тѣмъ болѣе, что примѣненіе этого способа можно встрѣтить во многихъ

весьма важныхъ сочиненіяхъ по анализу и механикѣ. Въ руководители мы примемъ Остроградскаго, который своими изслѣдованіями много способствовалъ уясненію началъ этой отрасли анализа.

Въ дифференціальномъ исчисленіи перемѣнному независимому x приписывается безконечно малое приращеніе dx , такъ что значеніе этого перемѣннаго смежное съ x есть $x+dx$, причемъ dx есть безконечно малое произвольное и не зависящее отъ x ; при дифференцированіи по x оно принимается постояннымъ. Въ варіаціонномъ исчисленіи перемѣнному независимому x приписывается безконечно малое измѣненіе δx , которое разсматривается, какъ нѣкоторая функція; при чемъ однако видъ этой функціи оставляется произвольнымъ, а величина ея считается безконечно малою, порядка вообще одинаковаго съ dx . Это безконечно малое измѣненіе x называется его варіаціею; оно можетъ быть дифференцируемо по x , такъ какъ δx есть нѣкоторая функція x . Каждому значенію, принимаемому перемѣннымъ независимымъ, соотвѣтствуетъ нѣкоторая варіація δ , чтобы получить варіацію отъ $x+dx$ т. е. $\delta(x+dx)$, должно, разсматривая знакъ δ какъ характеристику нѣкоторой функціи, разложить эту функцію по Тейлоровой теоремѣ и ограничиться въ этомъ разложеніи только первымъ порядкомъ по отношенію къ δx ; такимъ образомъ:

$$\delta(x+dx) = \delta x + d\delta x.$$

Положимъ теперь, что разсматриваются вмѣстѣ нѣсколько независимыхъ перемѣнныхъ: $x, y, z, \dots$; ихъ безконечно малыя измѣненія или варіаціи означаются чрезъ $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$; и каждая изъ этихъ варіацій представляется, какъ нѣкоторая безконечно малая функція всѣхъ перемѣнныхъ независимыхъ $x, y, z, \dots$. Если одно изъ перемѣнныхъ, напр. x , измѣнится на $x+dx$, то варіація его новаго значенія будетъ по прежнему $\delta x + \frac{d\delta x}{dx} dx$.

Если же всѣ перемѣнныя $x, y, z, \dots$ одновременно увеличатся на свои дифференціалы, то новымъ ихъ значеніямъ $x+dx, y+dy, z+dz, \dots$ будутъ соотвѣтствовать варіаціонныя измѣненія

$$\delta x + d\delta x, \delta y + d\delta y, \delta z + d\delta z, \dots$$

гдѣ, согласно Тейлоровой теоремѣ, первые дифференціалы $d\delta x, d\delta y, d\delta z, \dots$ суть полные, а дифференціалы втораго и высшихъ порядковъ отброшены.

Составимъ теперь себѣ понятіе о варіаціи функціи и возьмемъ сначала функцію одного перемѣннаго независимаго

$$y = f(x).$$

Вариациею функции δy мы будем называть бесконечно малое изменение, происходящее въ ней отъ одновременнаго измененія ея вида и величины переменнаго независимаго x на $x + \delta x$.

Бесконечно малое и совершенно произвольное изменение вида (формы) функции мы можемъ по прежнему представить себѣ помощью введенія переменнаго параметра t . Для этого воображаемъ, что данная функция $f(x)$ есть частный случай другой функции болѣе общаго вида $\varphi(x, t)$, которая при частномъ значеніи параметра $t = t_0$ обращается въ данную функцию, такъ что $\varphi(x, t_0) = f(x)$; тогда изменение формы функции получится чрезъ изменение величины параметра t_0 на $t_0 + dt$, и слѣдовательно, согласно данному выше опредѣленію, будемъ имѣть:

$$\delta y = \varphi(x + \delta x, t_0 + dt) - \varphi(x, t_0) = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 \delta x + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 dt,$$

ограничиваясь всегда первымъ порядкомъ бесконечно малыхъ.

Здѣсь $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0$ означаетъ производную по x отъ $\varphi(x, t)$, взятую при $t = t_0$; такъ какъ t не зависитъ отъ x , то можно положить $t = t_0$ и до дифференцированія по x , поэтому:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = \frac{d\varphi(x, t_0)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = y'$$

и

$$\delta y = y' \delta x + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 dt.$$

Еслибы переменное независимое x не получало измененія, то есть если бы δx было $= 0$, то изменение функции y приводилось-бы къ $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 dt = \omega$; слѣдовательно этотъ членъ въ выраженіи δy представляетъ изменение функции, происходящее исключительно отъ измененія ея формы. Такимъ образомъ

$$\delta y = y' \delta x + \omega.$$

При этомъ очевидно также, что первый членъ въ этомъ выраженіи, т. е. $y' \delta x$, представляетъ исключительно дифференціальное изменение y , проистекающее отъ измененія x на $x + \delta x$, такъ что полная вариация δy слгаается изъ двухъ бесконечно малыхъ изменений y , происходящихъ отъ двухъ причинъ: отъ измененія переменнаго независимаго x и отъ бесконечно малаго измененія формы функции. Последнее изменение, означенное нами чрезъ ω , есть очевидно, функция x бесконечно малая по величинѣ; ее называютъ иногда „успокоенною вариациею“ (trouquée) или также „истинною вариациею“. Это изменение функции представляетъ то,

что мы называли вариациею функции, когда полагали, что при варіированіи переменное независимое x не измѣняется.

Разсмотримъ теперь функцию нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ

$$u = f(x, y, z, \dots).$$

Чтобы представить себѣ измѣненіе формы этой функции, вообразимъ функцию $\varphi(x, y, z, \dots, t)$ болѣе общаго вида, которая кромѣ переменныхъ $x, y, z, \dots$, содержитъ еще параметръ t и при $t = t_0$ дѣлается равною данной функции u , такъ что

$$\varphi(x, y, z, \dots, t_0) = f(x, y, z, \dots)$$

Вариациею δu мы будемъ называть измѣненіе, происходящее въ u вслѣдствіе бесконечно малаго измѣненія въ ея формѣ и вслѣдствіе измѣненія $x, y, z, \dots$ на $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, \dots$. Измѣненіе формы функции получается чрезъ измѣненіе t_0 на $t_0 + dt$ и потому

$$\begin{aligned} \delta u &= \varphi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, \dots, t_0 + dt) - \varphi(x, y, z, \dots, t_0) = \\ &= \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 \delta x + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0 \delta y + \dots + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 dt, \end{aligned}$$

или

$$\delta u = \frac{du}{dx} \delta x + \frac{du}{dy} \delta y + \frac{du}{dz} \delta z + \dots + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 dt,$$

гдѣ мы опять ограничиваемся членами перваго порядка. Если бы переменныя независимыя не получали измѣненія, то было-бы $\delta x = 0, \delta y = 0, \delta z = 0, \dots$ и измѣненіе функции u приводилось бы къ $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 dt = \omega$; это ω представляетъ измѣненіе, происходящее исключительно отъ измѣненія формы функции u . Очевидно, что ω есть нѣкоторая бесконечно малая функция переменныхъ независимыхъ $x, y, z, \dots$, при чемъ видъ этой функции можетъ быть полагаемъ совершенно произвольнымъ. Итакъ имѣемъ:

$$\delta u = \frac{du}{dx} \delta x + \frac{du}{dy} \delta y + \frac{du}{dz} \delta z + \dots + \omega.$$

Переходимъ далѣе къ нахожденію вариаций производныхъ функций отъ данныхъ функций и рассмотримъ сначала производныя функции одного независимаго переменнаго. Пусть $y = f(x)$ и $f'(x) = y'$; найдемъ вариацию y' , т. е. $\delta y'$. По вышенайденному общему выраженію вариации функции одного независимаго переменнаго x , будемъ имѣть

$$\delta y' = y'' \delta x + \omega_1.$$

гдѣ $y''\delta x$ представляетъ дифференціальное измѣненіе y' , а ω_1 есть измѣненіе, происходящее исключительно отъ измѣненія формы функціи y' . Но форма этой послѣдней функціи измѣняется не сама по себѣ, но вслѣдствіе измѣненія y на $y + \omega$, гдѣ ω есть безконечно малое измѣненіе, происходящее отъ измѣненія формы функціи y ; при такомъ измѣненіи y его производная y' переменится на $y' + \frac{dy'}{dx}$, и слѣдовательно $\omega_1 = \frac{dy'}{dx}$ и

$$\delta y' = y''\delta x + \frac{dy'}{dx},$$

гдѣ $\frac{dy'}{dx}$ есть измѣненіе y' , происходящее только отъ измѣненія формы этой функціи. Совершенно также найдемъ, что

$$\delta y'' = y''' \delta x + \frac{d^2 y'}{dx^2}$$

и т. д. и, очевидно, что вообще будемъ имѣть

$$\delta y^{(n)} = y^{(n+1)} \delta x + \frac{d^n y'}{dx^n}.$$

Разсмотримъ теперь варіацію частныхъ производныхъ функціи съ многими независимыми переменными. Пусть

$$u = f(x, y, z, \dots),$$

гдѣ $x, y, z, \dots$ суть переменныя независимыя. Выше было найдено, что

$$\delta u = \frac{du}{dx} \delta x + \frac{du}{dy} \delta y + \frac{du}{dz} \delta z + \dots + \omega.$$

Возьмемъ частную производную $\frac{du}{dx}$. Чтобы получить ея варіацію, замѣтимъ, что такъ какъ это есть также функція нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ, то согласно формулѣ, выражающей δu , выраженіе варіаціи $\delta \frac{du}{dx}$ должно состоять изъ суммы членовъ, проистекающихъ отъ измѣненій переменныхъ $x, y, z, \dots$ на $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, \dots$, т. е. изъ членовъ, составляющихъ дифференціальное измѣненіе $\frac{du}{dx}$, и изъ безконечно малаго ω_1 , происходящаго исключительно отъ измѣненія функціи $\frac{du}{dx}$; такимъ образомъ

$$\delta \frac{du}{dx} = \frac{d^2 u}{dx^2} \delta x + \frac{d^2 u}{dx dy} \delta y + \frac{d^2 u}{dx dz} \delta z + \dots + \omega_1.$$

Чтобы опредѣлять ω_1 , замѣтимъ, что измѣненіе формы функ-

ціи $\frac{du}{dx}$ происходитъ отъ измѣненія формы функціи u , вслѣдствіе котораго u перемѣняется на $u + \omega$; таже причина измѣнить $\frac{du}{dx}$ на $\frac{d\omega}{dx}$ и слѣдовательно $\omega_1 = \frac{d\omega}{dx}$. Поэтому

$$\delta \frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} \delta x + \frac{d^2u}{dx dy} \delta y + \frac{d^2u}{dx dz} \delta z + \dots + \frac{d\omega}{dx}.$$

Точно также получимъ

$$\delta \frac{du}{dy} = \frac{d^2u}{dx dy} \delta x + \frac{d^2u}{dy^2} \delta y + \frac{d^2u}{dy dz} \delta z \dots + \frac{d\omega}{dy}$$

и т. д. Было-бы излишне писать формулы, выражающія варіаціи частныхъ производныхъ высшихъ порядковъ.

Сдѣлаемъ замѣчаніе о перестановкѣ символовъ d и δ , выражающихъ дѣйствія дифференцірованія и варіированія. Если мы имѣемъ дифференціалъ du , гдѣ u означаетъ какое угодно перемѣнное, зависимое или независимое, то при варіированіи выраженія, содержащаго du , измѣняя функцію u на $u + \delta u$, мы измѣнимъ и du ; это измѣненіе или варіація du будетъ поэтому

$$\delta (du) = d(u + \delta u) - du = d\delta u,$$

откуда видно, что символы δ и d , относящіеся къ одному и тому-же выраженію, могутъ быть переставляемы.

Разсмотримъ теперь варіацію функціи даннаго вида, содержащей $x, y, y', y'', \dots$, при чемъ y есть функція перемѣннаго независимаго x , а $y', y'', \dots$ ея производныя различныхъ порядковъ. Пусть

$$V = f(x, y, y', y'', y''', \dots)$$

и положимъ, что x и y подлежатъ варіированію. Будемъ имѣть:

$$\delta V = f(x + \delta x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'', \dots) - f(x, y, y', y'', \dots),$$

гдѣ во второй части должны быть удержаны только члены перваго порядка; слѣдовательно:

$$\delta V = \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dy'} \delta y' + \frac{dV}{dy''} \delta y'' + \dots$$

Вставивъ сюда вмѣсто $\delta y, \delta y', \delta y'', \dots$ ихъ выраженія, выведенныя выше, а именно

$$\delta y = y' \delta x + \omega,$$

$$\delta y' = y'' \delta x + \omega',$$

$$\delta y'' = y''' \delta x + \omega'',$$

$$\dots \dots \dots$$

гдѣ ω' , ω'' , означаютъ производныя ω , и замѣчая, что сумма

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy} y' + \frac{dV}{dy'} y'' + \frac{dV}{dy''} y''' + \dots = \left[\frac{dV}{dx} \right]$$

представляетъ полную производную отъ V по x , мы будемъ имѣть окончательно:

$$\delta V = \left[\frac{dV}{dx} \right] \delta x + \frac{dV}{dy} \omega + \frac{dV}{dy'} \omega' + \frac{dV}{dy''} \omega'' + \dots$$

Еслибы нужно было найти вариацию отъ выраженія Vdx , то имѣли бы

$$\delta(Vdx) = (V + \delta V)d(x + \delta x) - Vdx = \delta Vdx + Vd\delta x,$$

отбросивъ безконечно малыя высшаго порядка. Вставивъ сюда вмѣсто δV ея выраженіе и замѣтивъ, что

$$\left[\frac{dV}{dx} \right] dx \delta x + Vd\delta x = d(V\delta x),$$

получимъ

$$\delta(Vdx) = d(V\delta x) + \frac{dV}{dy} \omega dx + \frac{dV}{dy'} \omega' dx + \frac{dV}{dy''} \omega'' dx + \dots$$

Нетрудно получить вариацию даннаго вида функціи V , когда она содержитъ двѣ независимыхъ переменныхъ x , y и нѣкоторую функцію z этихъ переменныхъ вмѣстѣ съ ея частными производными различныхъ порядковъ: p , q , r , s , t , ..., по обозначенію обыкновенно принимаемому. Дѣйствительно пусть

$$V = f(x, y, z, p, q, r, s, t, \dots).$$

Будемъ имѣть

$$\delta V = f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, p + \delta p, \dots) - f(x, y, z, p, \dots),$$

или, ограничиваясь безконечно малыми перваго порядка:

$$\delta V = \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dz} \delta z + \frac{dV}{dp} \delta p + \frac{dV}{dq} \delta q + \frac{dV}{dr} \delta r + \dots$$

Вставивъ сюда вмѣсто δz , δp , δq , ... ихъ выраженія, а именно

$$\delta z = p\delta x + q\delta y + \omega,$$

$$\delta p = r\delta x + s\delta y + \frac{d\omega}{dx},$$

$$\delta q = s\delta x + t\delta y + \frac{d\omega}{dy},$$

$$\delta r = \frac{dr}{dx} \delta x + \frac{dr}{dy} \delta y + \frac{d^2\omega}{dx^2},$$

и замѣчая, что суммы

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dz} p + \frac{dV}{dp} r + \frac{dV}{dq} s + \dots = \left[\frac{dV}{dx} \right],$$

$$\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dz} q + \frac{dV}{dp} s + \frac{dV}{dq} t + \dots = \left[\frac{dV}{dy} \right]$$

представляютъ полныя частныя производныя функціи V по x и по y , найдемъ окончательно

$$\delta V = \left[\frac{dV}{dx} \right] \delta x + \left[\frac{dV}{dy} \right] \delta y + \frac{dV}{dz} \omega + \frac{dV}{dp} \frac{d\omega}{dx} + \dots$$

Когда подъ знакомъ двойнаго интеграла входитъ выраженіе $V dx dy$, то варіація этого выраженія, если ограничимся безконечно малыми низшаго порядка, будетъ очевидно

$$\delta(V dx dy) = (V + \delta V) d(x + \delta x) d(y + \delta y) - V dx dy = \delta V dx dy + V \delta(dx dy)$$

Чтобы получить варіацію $\delta(dx dy)$, должно замѣтить, что она равна

$$d(x + \delta x) d(y + \delta y) - dx dy;$$

но при вычисленіи произведенія

$$d(x + \delta x) d(y + \delta y);$$

должно обратить особое вниманіе на слѣдующее. Въ двойномъ интегралѣ

$$\iint V dx dy.$$

производятся два интегрированія: первое по y , при чемъ x разсматривается какъ постоянное, а второе по x .

Если мы измѣнимъ x на $x + \delta x = X$ и y на $y + \delta y = Y$, то въ новомъ двойномъ интегралѣ, который получится, будутъ производиться два интегрированія по двумъ новымъ переменнымъ X и Y и, если первое будетъ производиться по Y то X надо оставлять постояннымъ или наоборотъ. Слѣдовательно замѣна x и y чрезъ $x + \delta x$ и $y + \delta y$ соотвѣтствуетъ введенію новыхъ переменныхъ X и Y въ данный двойной интегралъ. Эти новыя переменныя суть функціи прежнихъ, ибо δx и δy суть функціи x и y каждая. Такимъ образомъ, чтобы получить $d(y + \delta y)$, мы находимъ во первыхъ

$$d(y + \delta y) = dY = dy + \frac{d\delta y}{dx} dx + \frac{d\delta y}{dy} dy,$$

но вмѣстѣ съ тѣмъ, такъ какъ x должно быть при вычисленіи dY полагаемо постояннымъ, то

$$d(x + \delta x) = dX = dx + \frac{d\delta x}{dx} dx + \frac{d\delta x}{dy} dy = 0.$$

Изъ этихъ двухъ уравненій мы найдемъ для dy то выраженіе его чрезъ dY , которымъ должно замѣнить dy въ данномъ двойномъ интегралѣ. Такъ какъ въ нашемъ вычисленіи мы должны ограничиваться бесконечно малыми низшаго порядка, то замѣчая, что второе уравненіе даетъ

$$dx = - \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial y} dy}{1 + Y \frac{\partial^2 x}{\partial x}},$$

откуда видно, что dx есть бесконечно малое 2-го порядка сравнительно съ dy , мы видимъ, что въ первомъ уравненіи мы можемъ отбросить членъ $\frac{\partial^2 y}{\partial x} dx$, который представляетъ бесконечно малое 3-го порядка. Такимъ образомъ первое уравненіе будетъ:

$$d(y + \partial y) = dY = (1 + \frac{\partial^2 y}{\partial y}) dy.$$

Еслибы взяли изъ этого уравненія dy , то, подставивъ его въ данный двойной интегралъ, мы ввели-бы вмѣсто y новое переменное Y , оставивъ еще прежнее переменное x . Чтобы замѣнить и это послѣднее переменное новымъ, т. е. X , вообразимъ, что въ нашемъ интегралѣ измѣненъ порядокъ интегрированія, такъ, чтобы первое интегрированіе производилось по x , а второе по Y , и потомъ вмѣсто x предложимъ себѣ ввести X , связанное съ x посредствомъ уравненія

$$X = x + \partial x.$$

Тогда опять, такъ какъ при интегрированіи по X , другое переменное Y должно быть оставлено постояннымъ, то для полученія выраженія dx чрезъ dX , мы должны дифференцировать X при условіи, что $Y = \text{const.}$, или что $dY = 0$; такимъ образомъ получимъ два уравненія:

$$d(x + \partial x) = dX = dx + \frac{\partial^2 x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 x}{\partial y} dy,$$

$$d(y + \partial y) = dY = dy + \frac{\partial^2 y}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 y}{\partial y} dy = 0,$$

изъ которыхъ должно исключить dy и выразить dx чрезъ dX .

Такъ какъ второе уравненіе даетъ

$$dy = - \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x} dx}{1 + \frac{\partial^2 y}{\partial y}}.$$

откуда видно, что dy есть бесконечно малое второго порядка сравнительно съ dx , то, отбрасывая въ первомъ уравненіи членъ третьяго порядка (сравнительно съ dx) $\frac{d\delta x}{dy}dy$, находимъ

$$d(x+\delta x)=dX=(1+\frac{d\delta x}{dx})dx.$$

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что произведе-
ніе $d(x+\delta x)d(y+\delta y)$ въ нашемъ двойномъ интегралѣ должно быть
замѣнено выраженіемъ:

$$dXdY=(1+\frac{d\delta x}{dx})(1+\frac{d\delta y}{dy})dxdy$$

и слѣдовательно искомая вариация будетъ

$$\delta(dxdy)=(1+\frac{d\delta x}{dx})(1+\frac{d\delta y}{dy})dxdy-dxdy,$$

или опять ограничиваясь бесконечно малыми низшаго порядка

$\delta(dxdy)=(\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta y}{dy})dxdy$. Возвращаясь къ данному выше выраже-
нію вариации отъ $Vdxdy$, замѣтимъ что если въ равенство: $\delta(Vdxdy)$
 $=\delta Vdxdy+V\delta(dxdy)$ вмѣсто δV и $\delta(dxdy)$ подставимъ ихъ вы-
раженія, то можно также написать:

$$\delta(Vdxdy)=$$

$$\left\{ \left[\frac{d(V\delta x)}{dx} \right] + \left[\frac{d(V\delta y)}{dy} \right] \right\} dxdy + \left(\frac{dV}{dz} \omega + \frac{dV}{dp} \frac{d\omega}{dx} + \dots \right) dxdy.$$

Скажемъ теперь, какъ брать вариацию отъ интеграла. Пусть,
во первыхъ, имѣемъ неопредѣленный интегралъ

$$S = \int f(x)dx.$$

Тогда по опредѣленію вариации будемъ имѣть

$$\delta S = \int \left[f(x) + \delta f(x) \right] d(x+\delta x) - \int f(x)dx = \int \delta(f(x)dx),$$

т. е. два символа δ и $\int$ могутъ быть переставлены.

Это послѣднее заключеніе, какъ видимъ, есть прямое слѣд-
ствие сдѣланнаго опредѣленія вариации. Положимъ теперь, что
мы имѣемъ опредѣленный интегралъ:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx,$$

въ которомъ $f(x)$, переменное независимое x и предѣлы подле-
жать варьированію. Пусть по прежнему $\varphi(x,t)$ есть функція бо-

лѣе общаго вида, которая при частномъ значеніи параметра $t=t_0$, обращается въ $f(x)$, тогда опять по опредѣленію имѣемъ:

$$\delta S = \int_{x_1 + \delta x_1}^{x_2 + \delta x_2} \varphi(x + \delta x, t_0 + dt) d(x + \delta x) - \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x, t_0) dx.$$

Въ первомъ изъ этихъ двухъ интеграловъ интегрирование производится по $(x + \delta x) = \xi$ и это переменное получаетъ всѣ значенія отъ $\xi = x_1 + \delta x_1$ до $\xi = x_2 + \delta x_2$, поэтому первый интегралъ можно написать также въ видѣ:

$$\int_{x_1 + \delta x_1}^{x_2 + \delta x_2} \varphi \xi, t_0 + dt d\xi.$$

Введемъ теперь въ этотъ интегралъ опять переменное x , полагая $\xi = x + \delta x$, тогда будемъ имѣть:

$$d\xi = \frac{d\xi}{dx} dx = \frac{d(x + \delta x)}{dx} dx$$

и, такъ какъ при $\xi = x_1 + \delta x_1$, $x = x_1$, а при $\xi = x_2 + \delta x_2$, $x = x_2$, то нашъ интегралъ будетъ

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x + \delta x, t_0 + dt) \frac{d(x + \delta x)}{dx} dx$$

и слѣдовательно

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left[\varphi(x + \delta x, t_0 + dt) \frac{d(x + \delta x)}{dx} dx - \varphi(x, t_0) dx \right],$$

или короче

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \delta \{ f(x) dx \},$$

т. е. для полученія варіаціи отъ опредѣленнаго интеграла должно взять варіацію отъ подынтегральнаго выраженія.

Это правило распространяется на двойные и вообще многократные интегралы. Положимъ, что мы разсматриваемъ:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dx dy.$$

Означимъ на время

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy = \psi(x);$$

будемъ имѣть

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x) dx \text{ и } \delta S = \int_{x_1}^{x_2} \delta \{ \psi(x) dx \} = \int_{x_1}^{x_2} \delta \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dx dy.$$

Но при интегрированіи по y переменное x и dx полагаются постоянными, потому можемъ положить $f(x,y)dx = \phi(y)$ и слѣдовательно

$$\begin{aligned} \delta \int_{y_1}^{y_2} f(x,y) dx dy &= \delta \int_{y_1}^{y_2} \phi(y) dy = \int_{y_1}^{y_2} \delta \{ \phi(y) dy \} = \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \delta \{ f(x,y) dx dy \}, \end{aligned}$$

а потому

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \delta \{ f(x,y) dx dy \}.$$

Подобнымъ образомъ можно получить вариацию многократнаго интеграла вообще.

Составимъ, наконецъ, выраженіе вариации опредѣленнаго интеграла

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

гдѣ $V = f(x, y, y', y'' \dots)$ и f означаетъ функцію данного вида. По найденному правилу будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{x_1}^{x_2} \delta(V dx) = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[d(V \delta x) + \left\{ \frac{dV}{dy} \omega + \frac{dV}{dy'} \omega' + \frac{dV}{dy''} \omega'' + \dots \right\} dx \right], \end{aligned}$$

или

$$\delta S = V_2 \delta x_2 - V_1 \delta x_1 + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{dV}{dy} \omega + \frac{dV}{dy'} \omega' + \frac{dV}{dy''} \omega'' + \dots \right\} dx,$$

гдѣ $\omega = \delta y - y' \delta x$ представляетъ измѣненіе функціи y . протекающее исключительно отъ измѣненія ея формы.

Послѣдняя форма имѣетъ полную аналогію съ тѣмъ выраженіемъ вариации δS , которое мы имѣли при прежнемъ способѣ изложенія началъ вариационнаго исчисленія, когда предполагали, что не только функція y , но и предѣлы x_1 и x_2 подлежатъ варіированію (сравн. формулу δS на стр. 20 и дополнительное выраженіе на стр. 62), только подъ знакомъ интеграла вмѣсто прежней δy у насъ стоитъ безконечно малое ω . Понятно само собою, что новая формула подлежитъ такому же преобразованію интегрированія по частямъ, какое было сдѣлано надъ прежнею; вслѣдствіе этого будемъ имѣть также

$$\begin{aligned} \delta S &= V_2 \delta x_2 - V_1 \delta x_1 + \int_{x_1}^{x_2} \left[(P_1) \omega + (P_2) \frac{d\omega}{dx} + (P_3) \frac{d^2 \omega}{dx^2} + \dots \right] dx + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} (P) \omega dx, \end{aligned}$$

гдѣ $P, P_1, P_2, \dots$ и $(P), (P_1), (P_2), \dots$ имѣютъ прежнія значенія. Въмѣсто $\omega, \frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2\omega}{dx^2}, \dots$ вмѣ знака интеграла должно подставить ихъ выраженія $\delta y - y' \delta x, \delta y' - y'' \delta x, \delta y'' - y''' \delta x, \dots$ и потомъ соединить члены, относящіеся къ верхнему и нижнему предѣлу; тогда, если примемъ слѣдующее обозначеніе

$G = [V - (P_1)y' - (P_2)y'' - \dots] \delta x + (P_1)\delta y + (P_2)\delta y' + (P_3)\delta y'' + \dots,$
то можемъ написать

$$\delta S = G_2 - G_1 + \int_{x_1}^{x_2} (P) \omega \, dx,$$

гдѣ G_2 и G_1 суть значенія выраженія G при $x=x_2$ и при $x=x_1$.

Вопросы о наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ интеграловъ при новой вышеизложенной точкѣ зрѣнія на начала варіаціоннаго исчисленія рѣшаются помощью соображеній совершенно сходныхъ съ тѣми, которыя были нами развиты въ предшествующихъ лекціяхъ, а потому мы здѣсь и закончимъ нашъ курсъ.

Лучшіе и наиболѣе полные курсы по варіаціонному исчисленію суть слѣдующіе:

Moigno.—Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. Tome IV. Calcul des variations. 1861.—(Есть русскій переводъ профессора Хандрикова).

Strauch.—Theorie und Anwendung des sogenannten Variationscalculs. Zürich. 1849.

Jellet.—An elementary treatise on the Calculus of variations, Dublin. 1850. (Есть нѣмецкій переводъ Schnuse).

Stegmann.—Lehrbuch der Variationsrechnung. Kassel. 1854.

П Р И Б А В Л Е Н І Я.

I.

П р и м ѣ р ы

на приложеніе теоріи о maxima и minima.

Разсмотримъ рѣшенную нами въ курсѣ задачу Ньютона о формѣ тѣла вращенія наименьшаго сопротивленія. Мы имѣли въ этой задачѣ:

$$V = \frac{yy'^2}{1+y'^3}$$

и кривая, отвѣчающая вопросу, была представлена двумя уравненіями:

$$\begin{aligned} x &= c_2 + c_1 \left[\frac{3}{4u^4} + \frac{1}{u^2} + l(u) \right] \\ y &= c_1 \frac{(1+u^2)^2}{u^3}, \end{aligned}$$

гдѣ при томъ $u = y'$ и > 0 . Во первыхъ непосредственное дифференцированіе даетъ:

$$\frac{d^2V}{dy'^2} = \frac{2yy'(3-y'^2)}{(1+y'^2)^3}$$

и такъ какъ здѣсь $y > 0$, то для существованія minimum'a прежде всего необходимо, чтобы было $y' < \sqrt{3}$ или $u < \sqrt{3}$. Припомнимъ что такое требованіе удовлетворяется только второю (2) вогнутою вѣтвью кривой и слѣдовательно только эта вѣтвь можетъ дать minimum. Чтобы увѣриться въ дѣйствительномъ существованіи minimum'a, нужно еще рассмотретьъ выраженіе:

$$\frac{dy}{dc_1} + m \frac{dy}{dc_2}$$

и слѣдовательно вычислить производныя $\frac{dy}{dc_1}$ и $\frac{dy}{dc_2}$. Замѣчая, что x при дифференцированіи по c_1 и по c_2 долженъ быть оставленъ, постояннымъ, мы будемъ дифференцировать данное выше выраженіе y , рассматривая въ немъ u какъ функцію c_1 и c_2 , опредѣляемую первымъ уравненіемъ. Дифференцируя по c_1 , находимъ

$$\frac{dy}{dc_1} = \frac{(1+u^2)^2}{u^2} + c_1 \frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^4} \frac{du}{dc_1}$$

и изъ другаго уравненія

$$0 = \frac{3}{4u^4} + \frac{1}{u^2} + l(u) + c_1 \frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^5} \frac{du}{dc_1}.$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій $\frac{du}{dc_1}$, получимъ

$$\frac{dy}{dc_1} = \frac{(1+u^2)^2}{u^3} - u \left[\frac{3}{4u^4} + \frac{1}{u^2} + l(u) \right],$$

или, иначе,

$$\frac{dy}{dc_1} = \frac{y}{c_1} - \frac{(x-c_2)u}{c_1}.$$

Далѣе, дифференцируя уравненіе кривой по c_2 и оставляя при этомъ x и c_1 постоянными, находимъ:

$$\frac{du}{dc_2} = c_1 \frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^4} \frac{du}{dc_2},$$

$$0 = 1 + c_1 \frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^5} \frac{du}{dc_2}$$

и, исключивъ $\frac{du}{dc_2}$, получимъ

$$\frac{dy}{dc_2} = -u.$$

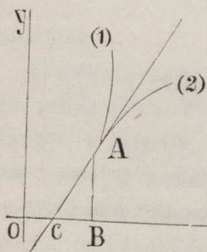
Слѣдовательно

$$\frac{dy}{dc_1} + m \frac{dy}{dc_2} = \frac{y}{c_1} - \frac{(x-c_2)y'}{c_1} - my',$$

гдѣ вмѣсто u поставлено y' . Приравнивая это выраженіе нулю, выводимъ

$$m = \frac{1}{c_1} \left[\frac{y}{y'} - x + c_2 \right].$$

Чтобы узнать, можетъ ли это выраженіе получать всевозможныя значенія, возьмемъ на вѣтви (2) произвольную точку A и проведемъ въ ней касательную; пусть x' есть абсцисса точки пересѣченія C касательной съ осью x . Уравненіе касательной $Y - y = y'(X - x)$, будучи примѣнено къ точкѣ C , даетъ



$$y = y'(x' - x), \text{ откуда } x' = x - \frac{y}{y'}.$$

Слѣдовательно предъидущее выраженіе m можетъ быть написано въ видѣ

$$m = \frac{c_2 - x'}{c_1}.$$

Но, такъ какъ кривая (2) вогнута, то очевидно, что x' будетъ

всегда меньше OB абсциссы точки A , въ которой $u = \sqrt{3}$; по-
этому будемъ имѣть всегда ($c_1 > 0$, ибо $y > 0$),

$$\frac{c_2 - x'}{c_1} > \frac{c_2 - OB}{c_1}$$

и, если возьмемъ для m значеніе меньшее

$$\frac{c_2 - OB}{c_1},$$

то выраженіе

$$\frac{dy}{dc_1} + m \frac{dy}{dc_2}$$

не будетъ равно нулю ни въ какой точкѣ кривой (2) и слѣдо-
вательно найденный нами minimum будетъ дѣйствительно су-
ществовать.

Разсмотримъ еще задачу о наименьшей поверхности вращения,
рѣшенную нами на стр. 47—51. Въ этой задачѣ мы имѣли

$$V = y \sqrt{1 + y'^2} \text{ и } y = \frac{c}{2} (e^{\frac{x-c_2}{c_1}} + e^{-\frac{x-c_2}{c_1}}).$$

Слѣдовательно

$$\frac{dy}{dc_1} = \frac{1}{2} (e^{\frac{x-c_2}{c_1}} + e^{-\frac{x-c_2}{c_1}}) - \frac{c_1}{2} (e^{\frac{x-c_2}{c_1}} - e^{-\frac{x-c_2}{c_1}}) \frac{x-c_2}{c_1^2}$$

или, такъ какъ $y' = \frac{1}{2} (e^{\frac{x-c_2}{c_1}} - e^{-\frac{x-c_2}{c_1}})$, то можно написать

$$\frac{dy}{dc_1} = \frac{y}{c_1} - \frac{(x-c_2)y'}{c_1};$$

далѣе имѣемъ

$$\frac{dy}{dc_2} = \frac{1}{2} (e^{\frac{x-c_2}{c_1}} - e^{-\frac{x-c_2}{c_1}}) = y'.$$

Такимъ образомъ

$$\frac{dy}{dc_1} + m \frac{dy}{dc_2} = \frac{y}{c_1} - \frac{(x-c_2)y'}{c_1} - my'.$$

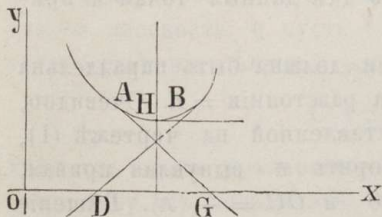
Приравнявъ это выраженіе нулю, находимъ

$$m = \frac{1}{c_1} \left[\frac{y}{y'} - x + c_2 \right].$$

или, такъ какъ это выраженіе одинаково съ полученнымъ
въ предыдущей задачѣ, то будемъ имѣть, также какъ и тамъ,

$$m = \frac{c_2 - x'}{c_1},$$

гдѣ x' есть абсцисса точки пересѣченія касательной къ цѣпной линіи съ осью x . Пусть A и B двѣ данныя точки; построимъ цѣпную линію AHB и пусть H будетъ ея вершина. Проведемъ въ A и B касательныя линіи AC и BD и положимъ, что онѣ пересѣкаются выше оси x . При пе-



ремѣщеніи точки прикосновенія отъ A до H абсцисса x' получаетъ всѣ величины отъ $x' = OC$ до $x' = +\infty$ и слѣдовательно x' всегда $\geq OC$. Если же точка прикосновенія перемѣщается отъ B до H , то x' принимаетъ всѣ значенія отъ $x' = OD$ до $x' = -\infty$. Слѣдовательно, если только касательныя въ A и B пересѣкаются въ точкѣ, находящейся выше оси x , то x' не можетъ принимать всѣхъ возможныхъ значеній между $-\infty$ и $+\infty$, а именно онъ не можетъ получать значеній, содержащихся между OD и OC . Поэтому, если мы возьмемъ какое нибудь $x_0 < OC$ и сдѣлаемъ

$$m = \frac{c_2 - x_0}{c_1},$$

то выраженіе

$$\frac{dy}{dc_1} + m \frac{dy}{dc_2}$$

не будетъ обращаться въ нуль между предѣлами интеграла, или на протяженіи дуги кривой AHB , и тогда minimum будетъ возможенъ. Вычисливъ

$$\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{y}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

мы видимъ, что $\frac{d^2V}{dy^2} > 0$ и что, слѣдовательно, minimum существуетъ.

Укажемъ еще на одну задачу, въ которой для отличія maximum'a отъ minimum'a не потребуется дѣлать особаго разсмотрѣнія. Я говорю о задачѣ, въ которой опредѣляется видъ кривой, имѣющей данную длину и образующей наименьшую или наибольшую поверхность вращенія (стр. 100). Рѣшеніе этой задачи отличается отъ только что разсмотрѣннаго тѣмъ, что вмѣсто y стоитъ $y + \lambda$, гдѣ λ нѣкоторое постоянное. Уравненіе искомой кривой будетъ:

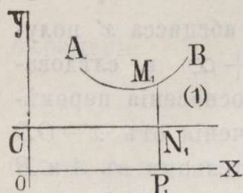
$$y + \lambda = \frac{c_1}{2} \left(e^{\frac{x-c_2}{c_1}} + e^{-\frac{x-c_2}{c_1}} \right).$$

Если даны двѣ неподвижныя точки, между которыми долж-

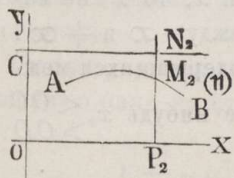
на проходить кривая, то постоянныя λ , c_1 , c_2 опредѣляются изъ условий, что кривая проходить чрезъ двѣ данныя точки и притомъ имѣетъ данную длину.

Направляющая этой цѣпной линіи должна быть параллельна оси вращения и отстоять отъ нея на разстояніи $= \lambda$. Очевидно, что кромѣ кривой вогнутой, представленной на чертежѣ (I), тому же вопросу можетъ удовлетворить и выпуклая кривая, (черт. II; здѣсь мы взяли $\lambda < 0$ и $OC = -\lambda$).

Рѣшеніе первое даетъ minimum, а рѣшеніе второе maximum; дѣйствительно, въ этомъ вопросѣ мы будемъ имѣть, подобно предыдущей задачѣ:



$$\frac{d^2 V}{dy'^2} = y \frac{y + \lambda}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$



При черт. (I)

$$y + \lambda = M_1 P_1 - N_1 P_1 > 0,$$

а при черт. (II)

$$y + \lambda = M_2 P_2 - N_1 P_1 < 0,$$

и слѣдовательно въ первомъ случаѣ имѣемъ minimum, а во второмъ—maximum. Само собою разумѣется, что въ первомъ случаѣ для существованія рѣшенія необходимо, чтобы кривая AM_1B не пересѣкала ось вращения Ox .

II.

Прибавленіе къ статьѣ о геодезической линіи.

Помѣщаемъ здѣсь доказательство нѣкоторыхъ теоремъ объ эллипсоидѣ, упомянутыхъ въ статьѣ о геодезической линіи.

„Всѣ сѣченія эллипсоида плоскостями параллельными суть эллипсы подобные и подобнымъ образомъ расположенные“.

Пусть уравненіе эллипсоида будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Означимъ чрезъ α , β , γ косинусы угловъ, дѣлаемыхъ съ осями перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ начала координатъ на сѣкущую плоскость, и пусть l есть длина этого перпендикуляра; тогда уравненіе сѣкущей плоскости будетъ:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - l = 0.$$

Если изъ этого уравненія и изъ уравненія эллипсоида исключимъ одну изъ координатъ, напримѣръ z , то получимъ проекцію сѣченія на плоскость xy . Уравненіе этой проекціи есть слѣдующее:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(l - \alpha x - \beta y)^2}{\gamma^2 c^2} = 1.$$

или

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\alpha^2}{\gamma^2 c^2}\right)x^2 - \frac{2\alpha\beta}{\gamma^2 c^2}xy + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\beta^2}{\gamma^2 c^2}\right)y^2 - \frac{2l\alpha}{\gamma^2 c^2}x - \frac{2l\beta}{\gamma^2 c^2}y + \frac{l^2}{\gamma^2 c^2} - 1 = 0.$$

Такъ какъ кривая сѣченія есть эллипсъ, то и проекція ея будетъ также эллипсъ.

Напишемъ послѣднее уравненіе въ видѣ:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Въ этомъ уравненіи коэффиціенты A , B и C не зависятъ отъ l ; слѣдовательно они не измѣняются съ измѣненіемъ разстоянія сѣкущей плоскости отъ начала координатъ и для всѣхъ параллельныхъ сѣченій имѣютъ однѣ и тѣ-же величины. Отсюда слѣдуетъ, во первыхъ, что направленіе осей въ проекціяхъ сѣченій остаются параллельными, такъ какъ изъ теоріи кривыхъ второго порядка извѣстно, что это направленіе опредѣляется угломъ Θ , который образуетъ одна изъ осей съ осью x , а этотъ уголъ вычисляется по формулѣ

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{B}{A - C}.$$

Но такъ какъ оси проекціи сѣченія суть, очевидно, проекціи осей самаго сѣченія, то заключаемъ, что оси сѣченій, расположенныхъ въ плоскостяхъ параллельныхъ, будутъ сами другъ другу параллельны. Далѣе, если для того, чтобы опредѣлить величины полуосей эллипса, полученнаго въ проекціи, мы перенесемъ сперва начало координатъ въ центръ, отчего уравненіе приметъ видъ:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = H,$$

а потомъ повернемъ оси координатъ на уголъ Θ , то будемъ имѣть уравненіе проекціи въ видѣ:

$$Mx^2 + Ny^2 = H.$$

гдѣ коэффиціенты M и N зависятъ только отъ A , B и C и вычисляются по извѣстнымъ формуламъ. Полуоси эллипса будутъ, какъ извѣстно, равны:

$$\sqrt{\frac{H}{M}} \text{ и } \sqrt{\frac{H}{N}};$$

отношеніе этихъ полуосей будетъ

$$\sqrt{\frac{N}{M}}.$$

Это отношеніе зависитъ только отъ коэффиціентовъ A , B и C и слѣдовательно оно постоянно для всѣхъ проэкцій параллельныхъ сѣченій. Отсюда заключаемъ, что отношеніе полуосей эллипсовъ, получаемыхъ въ сѣченіяхъ, будетъ также постоянно. Дѣйствительно, отношеніе двухъ полуосей представляетъ тангенсъ угла, образуемаго съ одною изъ осей линіею, соединяющею концы двухъ полуосей; слѣдовательно этотъ уголъ сохраняетъ величину постоянную во всѣхъ проэкціяхъ; но онъ есть проэкція того-же угла, взятаго въ самомъ сѣченіи, а такъ какъ всѣ сѣченія параллельны, то въ нихъ всѣ эти углы равны, а слѣдовательно отношеніе полуосей постоянно.

Теорема.—„Мѣсто центровъ всѣхъ параллельныхъ сѣченій „есть прямая линія“.

Для доказательства этого предложенія возьмемъ опять уравненіе проэкціи сѣченія на плоскость xy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(l - \alpha x - \beta y)^2}{\gamma^2 c^2} - 1 = 0.$$

Такъ какъ центръ проэкціи есть, очевидно, проэкція центра самаго сѣченія, то координаты этой послѣдней точки должны удовлетворять уравненіямъ, изъ которыхъ опредѣляются координаты центра проэкціи и которыя, какъ извѣстно, получаются, приравнивая нулю частныя производныя по x и по y отъ первой части послѣдняго уравненія; сверхъ того координаты центра сѣченія должны удовлетворять уравненію сѣкущей плоскости и, такимъ образомъ, онѣ опредѣлятся изъ слѣдующихъ трехъ уравненій

$$\frac{x}{a^2} - \frac{\alpha(l - \alpha x - \beta y)}{\gamma^2 c^2} = 0,$$

$$\frac{y}{b^2} - \frac{\beta(l - \alpha x - \beta y)}{\gamma^2 c^2} = 0.$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - l = 0.$$

Исключивъ l , мы получимъ уравненія геометрическаго мѣста центровъ параллельныхъ сѣченій:

$$\frac{x}{a^2 \alpha} = \frac{y}{b^2 \beta} = \frac{z}{c^2 \gamma}.$$

Это есть прямая линия, проходящая чрезъ центръ эллипсоида. Если ея уравненія напишемъ въ видѣ:

$$x = mz,$$

$$y = nz,$$

гдѣ $m = \frac{a^2\alpha}{c^2\gamma}$ и $n = \frac{b^2\beta}{c^2\gamma}$, то уравненіе діаметральной плоскости, сопряженной хордамъ параллельнымъ этой прямой, будетъ, какъ извѣстно,

$$m \frac{df}{dx} + n \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} = 0,$$

гдѣ $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, или, по упрощеніи,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

т. е. прямая проходящая чрезъ центры всѣхъ параллельныхъ сѣченій, будетъ „діаметръ“, сопряженный съ сѣкущею діаметральной плоскостью, принадлежащею разсматриваемому ряду параллельныхъ сѣченій.

Слѣдствіе.— „Касательная плоскость къ эллипсоиду параллельна діаметральной плоскости, сопряженной съ діаметромъ, проведеннымъ въ точку прикосновенія.“

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія діаметра, проведеннаго въ точку прикосновенія (x', y', z'), будутъ очевидно

$$x = \frac{x'}{z'} \cdot z,$$

$$y = \frac{y'}{z'} \cdot z$$

и слѣдовательно уравненіе діаметральной плоскости, съ нимъ сопряженной, будетъ:

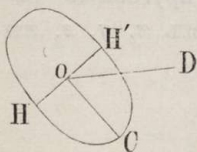
$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} + \frac{z'z}{c^2} = 0;$$

плоскость-же касательная выражается уравненіемъ:

$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} + \frac{z'z}{c^2} = 1,$$

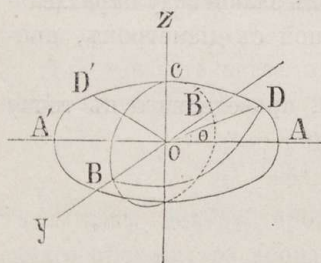
слѣдовательно эти двѣ плоскости параллельны.

Разсмотримъ теперь *круговыя сѣченія* эллипсоида. Вообразимъ, что нѣкоторыя діаметральная плоскость пересѣкаетъ эллипсоидъ по кругу; пусть OD будетъ діаметръ, сопряженный съ разсматриваемымъ сѣченіемъ. Чрезъ OD проведемъ плоскость перпендикулярную къ плоскости сѣченія и пусть OC есть линия пересѣченія двухъ плоскостей. Проведемъ въ



плоскости сѣченія $ОН$ перпендикулярно къ $ОС$; прямая $ОН$ будетъ очевидно перпендикулярна къ плоскости DOC , которая дѣлитъ діаметръ $НН'$ пополамъ, и будетъ съ нимъ сопряженна. Отсюда заключаемъ, что плоскость DOC есть главная діаметральная, такъ какъ она перпендикулярна къ сопряженнымъ съ нею хордамъ, а діаметръ $НН'$ есть, поэтому, одна изъ осей эллипсоида. Слѣдовательно плоскость діаметральнаго круговаго сѣченія проходитъ чрезъ одну изъ осей эллипсоида. Этою осью можетъ быть только средняя ось $2b$, потому что очевидно, что всѣ эллипсы, получаемые въ сѣченіяхъ эллипсоида плоскостями, проходящими чрезъ большую или малую ось, будутъ имѣть полуоси необходимо различныя и слѣдовательно не будутъ кругами ни при какомъ положеніи сѣкущей плоскости.

Когда сѣкущая плоскость проходитъ чрезъ ось BB' или чрезъ ось y , то въ сѣченіи получается эллипсъ, котораго полуоси будутъ $OB=b$ и OD , и такъ какъ OD при различныхъ положеніяхъ сѣкущей плоскости можетъ измѣняться отъ c до a , при чемъ $c < b < a$, то, при нѣкоторомъ углѣ $DOA = \Theta$, OD сдѣлается равнымъ b , и въ сѣченіи получится кругъ. Изъ точки O въ



плоскости xz опишемъ полукружность радіусомъ равнымъ b ; она пересѣчетъ главный эллипсъ ACA' въ двухъ точкахъ D и D' . Проведемъ двѣ сѣкущія плоскости DOB и $D'OB$; онѣ пересѣкутъ эллипсоидъ по кругамъ и всѣ сѣченія, параллельныя этимъ двумъ плоскостямъ, будутъ круги. Отсюда за-

ключаемъ, что

„эллипсоидъ съ тремя неравными осями имѣетъ два ряда круговыхъ сѣченій“.

Уголъ Θ легко вычислить. Такъ какъ для точки D имѣемъ:

$$x = b \cos \Theta, \quad z = b \sin \Theta \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

то находимъ, исключая x и z , послѣ весьма простаго вычисленія,

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

Опредѣлимъ теперь точки поверхности эллипсоида, въ которыхъ касательная плоскость будетъ параллельна круговымъ сѣченіямъ. Означивъ координаты такой точки чрезъ x, y, z , мы будемъ имѣть уравненіе касательной плоскости

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1.$$

Эта плоскость должна быть параллельна одной изъ плоскостей, представляемыхъ уравненіемъ

$$Z = \pm tg\Theta \cdot X.$$

Сравнивая коэффициенты при X , Y , Z , которые должны быть соотвѣтственно пропорціональны, находимъ $y=0$ и

$$\frac{z}{c^2} = \pm \frac{x}{a^2 tg\Theta};$$

кромѣ того имѣемъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рѣшивъ два послѣднія уравненія относительно x и z , находимъ координаты искомымъ точекъ

$$y=0; \quad x = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}; \quad z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Эти четыре точки будутъ, очевидно, точками округленія (см. стр. 89 и слѣд.).

Покажемъ, наконецъ, что и непосредственное изысканіе точекъ округленія эллипсоида приводитъ къ этимъ же четыремъ точкамъ и что, слѣдовательно, другихъ точекъ округленія не существуетъ.

Въ теоріи кривизны поверхности точки округленія были определены какъ такія, въ которыхъ радіусы кривизны всѣхъ нормальныхъ сѣченій поверхности равны. Было найдено, что координаты этихъ точекъ должны удовлетворять двумъ уравненіямъ:

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}$$

и сверхъ того уравненію данной поверхности.

Напишемъ эти уравненія въ видѣ

$$(1+p^2)s = pqr,$$

$$(1+p^2)t = (1+q^2)r$$

и составимъ ихъ для эллипсоида. Въ этомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

и чрезъ дифференцированіе этого уравненія легко вычислимъ:

$$p = \frac{dz}{dx} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad q = \frac{dz}{dy} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}, \quad r = \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{c^4 (b^2 - y^2)}{a^2 b^2 z^3},$$

$$s = \frac{d^2 z}{dx dy} = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}, \quad t = \frac{d^2 z}{dy^2} = -\frac{c^4 (a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3}.$$

Уравненія, которыя должны служить для опредѣленія точекъ округленія, будутъ:

$$\frac{xy(a^4z^2+c^4x^2)}{a^2z^2} = \frac{c^4xy(b^2-y^2)}{b^2z^2},$$

$$\frac{(a^2-x^2)(a^4z^2+c^4x^2)}{a^4z^3} = \frac{(b^2-y^2)(b^4z^2+c^4y^2)}{b^4z^3},$$

или, полагая z не равнымъ нулю, ибо въ этомъ случаѣ разсматриваемыя уравненія не имѣютъ мѣста, будемъ имѣть:

$$xy\{b^2(a^4z^2+c^4x^2)-a^2c^4(b^2-y^2)\} = 0,$$

$$b^4(a^2-x^2)(a^4z^2+c^4x^2)=a^4(b^2-y^2)(b^4z^2+c^4y^2).$$

Первому изъ этихъ уравненій можно удовлетворить, полагая во первыхъ:

$$xy = 0$$

и, слѣдовательно, или x или y равнымъ нулю. Если примемъ $y=0$, то второе уравненіе даетъ:

$$b^4(a^2-x^2)(a^4z^2+c^4x^2)=a^4b^6z^2,$$

а изъ уравненія поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рѣшивъ два послѣднія уравненія найдемъ

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Эти координаты вмѣстѣ съ $y=0$ даютъ четыре точки округленія, которыя были указаны выше.

Еслиже примемъ $x=0$, то будемъ имѣть два уравненія:

$$a^6b^4z^2=a^4(b^2-y^2)(b^4z^2+c^4y^2),$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

которыя по рѣшеніи ихъ дадутъ

$$y = \pm b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}},$$

но такъ какъ $b > c$, то это рѣшеніе будетъ мнимымъ, и слѣдовательно точекъ округленія при такомъ предположеніи не получится.

Наконецъ, еслибы въ первоначальныхъ двухъ уравненіяхъ для того, чтобы удовлетворить первому изъ нихъ, положили бы

$$b^2(a^4z^2 + c^4x^2) - a^2c^4(b^2-y^2) = 0,$$

то, присоединивъ это уравненіе ко второму и исключивъ изъ нихъ x при помощи уравненія поверхности, получили бы $z = 0$, а x и y остались бы неопредѣленными, удовлетворяя одному уравненію:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1:$$

но такъ какъ при $Z = 0$ всѣ производныя p, q, r, s, t обращаются въ безконечности, то и самыя уравненія, опредѣляющія точки округленія, при этомъ перестаютъ существовать. Легко было бы убѣдиться, что на главномъ сѣченіи плоскостью xy точекъ округленія быть не можетъ.



СОДЕРЖАНІЕ.

	Стр.
Введеніе	3.
Объ измѣненіяхъ формы функціи. Понятіе о варіаціи. .	14.
Варіація опредѣленнаго интеграла съ постоянными предѣ- лами	20.
Наибольшія и наименьшія значенія интеграла съ постоян- ными предѣлами	23.
Замѣчанія объ интегрированіи уравненія (II).	30.
Примѣры рѣшенія задачъ	32.
Интегралы съ переменными предѣлами	51.
Случай, когда подынтегральная функція содержитъ пре- дѣльныя значенія переменныхъ	60.
Интегралы, содержащіе двѣ неизвѣстныя функціи. . . .	66.
О геодезической линіи.	69.
Задачи объ относительныхъ наибольшихъ и наименьшихъ.	93.
Наибольшія и наименьшія двойныхъ интеграловъ. . . .	106.
Признаки, отличающіе maximum отъ minimum'a	117.
О другомъ способѣ изложенія варіаціоннаго исчисленія	127
Прибавленіе 1. Примѣры на приложеніе теоріи о maxi- ма и minima	140.
Прибавленіе 2. Прибавленіе къ статьѣ о геодезической линіи	144.

