На правах рукописи

Кашкаров Александр Игоревич

Математическое моделирование эффективных упруго-пластических характеристик пространственно армированных композитов на основе метода асимптотического осреднения

05.13.18 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2006

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете имени Н.Э.Баумана

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. Димитриенко Ю.И.

Официальные оппоненты: д.т.н., проф. Романов К.И.
к.т.н. Тащилов С.В.

Ведущая организация: ОАО «Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения»

Защита 06 года в __ часов
мин. На за вета Д 212.141.15
при Моско ческом универси-
тете имени 5005, Москва, 2-я
Бауманская

У1776539
Кашкаров А.И.
Математическое моделирование эффективных упруго-

У1776539

ренный
105005,
аумана,

ВОЗВРАТИТЕ КНИГУ НЕ ПОЗЖЕ
обозначенного здесь срока

НТБ МГТУ им.Н.Э.Баумана
1776539
Кашкаров А.И. Математическ

олков.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Применение пространственно – армированных композиционных материалов в ракетно-космической авиационной технике позволяет создавать элементы конструкций с характеристиками, превышающими аналогичные показатели для конструкций из традиционных материалов. Кроме того, у пространственно – армированных композитов имеется возможность варьировать в достаточно широком диапазоне их характеристики за счет подбора внутренней структуры, исходя из конкретных требований применения материала в конструкции.

Проблеме расчета эффективных характеристик композитов посвящено значительно число работ, в том числе исследования Болотина В.В., Бахвалова Н.С., Ванина Г.А., Васильева В.В., Димитриенко Ю.И., Ермоленко А.Ф., Кристенсена Р., Малмейстера А.К., Тамужа В.П., Тетерса Г.А., Победри Б.Е., Санчес-Паленсии Э., Соколкина Ю.В., Тарнопольского Ю.М., Жигуна И.Г., Полякова В.А., Алфутова Н.А., Зиновьева П.А., Попова Б.Г., Сарбаева Б.С., Сараева Л.А., Шермергора Т.Д. и многих других.

Существующие методы расчета таких эффективных характеристик, как правило, основаны на существенных предположениях о характере распределения микронапряжений в матрице и волокнах, что позволяет получить относительно простые аналитические соотношения для упругих и упруго-пластических характеристик композитов. Однако, вследствие принимаемых допущений, эти методы часто не обеспечивают необходимой точности расчетов. В этой связи весьма перспективным является метод асимптотического осреднения, предложенный Н.С.Бахваловым и Б.Е.Победрей для вычисления эффективных характеристик периодических структур. Этот метод позволяет найти точные (в математическом смысле) эффективные характеристики с помощью решения так называемых «задач на ячейке периодичности». Однако эти задачи является достаточно сложными даже для численных методов, так как имеет

МГТУ им. Н.Э. Баумана
БИБЛИОТЕКА

смешанный интегро-дифференциальный тип и неклассические граничные условия периодического типа.

Целью настоящей работы является разработка:

- математической модели пространственно-армированных упруго-пластических композитов с периодической структурой на основе метода Бахвалова-Победри;
- конечно-элементного метода решения локальных задач «на ячейке периодичности» для упруго-пластических композитов и метода расчета эффективных упруго-пластических характеристик композитов;
- программного комплекса для вычисления эффективных упруго-пластических характеристик композитов.

Научная новизна работы заключается:

- в адаптации метода асимптотического осреднения Бахвалова-Победри для конечно-элементного расчета упруго-пластических характеристик пространственно-армированных композитов, для этого предложено преобразование, позволяющее сводить интегро-дифференциальные задачи на ячейке периодичности к более простым задачам на 1/8 ячейки, имеющие дифференциальный тип, а также применен метод упругих решений А.А.Ильюшина для решения задач на 1/8 ячейки периодичности (ЯП);
- в разработке конечно-элементного метода решения задач на 1/8 ЯП для линейно-упругих и упруго-пластических (в рамках теории малых упруго-пластических деформаций А.А.Ильюшина) компонентов композита;
- в разработке программного комплекса для вычисления эффективных упруго-пластических характеристик композитов.

На защиту выносятся следующие положения:

- метод расчета эффективных упруго-пластических характеристик композитов с пространственной структурой, а также микронапряжений в компонентах композита, которые могут быть установлены математически

точно в рамках метода асимптотического осреднения Бахвалова-Победри численным конечно-элементных способом;

- разработанный программный комплекс, который позволяет проводить вычисления эффективных упругопластических характеристик композитов с различными параметрами волокон, матрицы и содержанием волокон в композите.

Достоверность результатов обусловлена корректной постановкой задачи, применением математически обоснованных методов ее решения, сравнением результатов расчетов с результатами, полученными другими методами, а также сравнением с экспериментальными данными.

Апробация работы: основные результаты докладывались на:

- Международной конференции «Математика в современном мире», посвященной 100-летию Хинчина, Калуга, 2004;
- Всероссийской научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии», Реутов, май, 2002; май 2004;
- Научно-технической конференции, посвященной 40-летию факультета ФН МГТУ им.Н.Э.Баумана, октябрь, 2004 г.;
- студенческой научно-технической конференции Аэрокосмического факультета МГТУ им.Н.Э.Баумана, Реутов, 2000, 2001;
- семинаре «Актуальные проблемы вычислительной математики и механики» под руководством проф.Ю.И.Димитриенко, 2003,2004 гг.;
- Международной конференции, посвященной 90-летию В.И.Феодосьева, май 2006 г.

Публикации. Основные результаты работы отражены в 8 работах.

Структура и объем работы: диссертация состоит из 5 глав, введения, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации 97 стр.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе кратко описан метод Бахвалова-Победри, согласно которому для композита с периодической структурой (рис.1) вводится малый параметр: $\kappa = l / L$, где L - глобальный размер области, занятой композитом, равен, а ℓ- размер ячейки периодичности (ЯП) (рис.2), а также вводятся два типа безразмерных координат: $\overline{x}_i = x_i / L$ - глобальные («медленные») координаты и $\xi_i = \overline{x}_i / \kappa$ - локальные («быстрые») координаты.

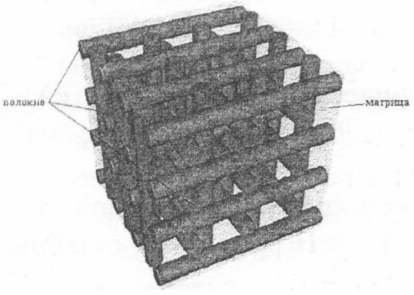


Рис. 1. 3D-ортогональный композиционный материал

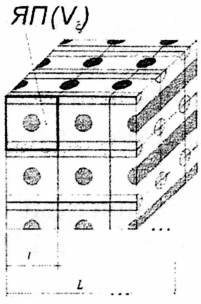


Рис.2. Ячейка периодичности в композите периодической струк-

Для всего композита рассматривается система уравнений теории малых упруго-пластических деформаций А.А.Ильюшина с разрывными характеристиками:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \\ \sigma_{ij} = \mathrm{F}_{ij}\left(\varepsilon_{kl}, \vec{\xi}\right) = \mathrm{F}_{ij}{}^{\alpha}\left(\varepsilon_{kl}^{\alpha}\right), \vec{\xi} \in V_{\xi\alpha} \\ \varepsilon_{kl} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \end{cases} \qquad (1)$$

$$F_{ij}^{\alpha}(\varepsilon_{ij}^{\alpha}) = (\lambda^{\alpha} + \frac{2}{3}\mu^{\alpha}\omega^{\alpha})\varepsilon_{kk}^{\alpha}\delta_{ij} + 2\mu^{\alpha}(1-\omega^{\alpha})\varepsilon_{ij}^{\alpha} \qquad (2)$$

где: $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ -компоненты тензоров напряжений и деформаций, u_k - компоненты вектора перемещений, $\lambda^{\alpha}, \mu^{\alpha}$ - параметры Ламе компонентов композита, $\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}(\varepsilon_u^{\alpha})$ - функция пластичности А.А.Ильюшина, а ε_u^{α} - интенсивность деформаций. Контакт волокон и матрицы предполагается идеальным, волокна и матрица изотропные.

Решение системы (1),(2) ищется в виде асимптотических разложений по малому параметру:

$$u_k(\overline{x}_i, \xi_j) = u_k^{(o)}(\overline{x}_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n u_k^{(n)}(\overline{x}_i, \xi_j) \qquad (3)$$

Для нахождения перемещения в первом приближении получена следующая локальная задача:

$$\begin{cases} \sigma_{ij/j}^{\alpha} = 0 \quad \text{в } \tilde{V}_{\xi\alpha} & \text{- уравнения равновесия} \\ \varepsilon_{ij}^{\alpha} = \overline{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\left(u_{i/j}^{\alpha} + u_{j/i}^{\alpha}\right) & \text{- кинематические соотношения} \\ \sigma_{ij}^{\alpha} = F_{ij}^{\alpha}\left(\varepsilon_{kl}^{\alpha}\right) & \text{- определяющие соотношения} \\ \left.\begin{array}{l} u_i^{\alpha} = u_i^{N} \\ \left(\sigma_{ij}^{\alpha} - \sigma_{ij}^{N}\right) n_j = 0 \end{array}\right\} \text{на } \tilde{\Sigma}_{\xi_{\alpha N}} & \text{- условия идеального контакта} \\ \left\langle u_i^{\alpha} \right\rangle = 0 & \text{- условие нормировки} \\ \left.\begin{array}{l} \left[\left[u_i^{\alpha}\right]\right] = 0 \\ [[\sigma_{ij}^{\alpha}]] n_j = 0 \end{array}\right\} & \text{- условие периодичности} \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь введена операция осреднения по ЯП:

$$\left\langle f \right\rangle = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} f\left(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{\xi}}\right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \left\langle f \right\rangle\left(\overline{\overline{x}}\right) \qquad (5)$$

Локальная задача параметрически зависит от «входных данных» - деформаций нулевого приближения

$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(u^{(0)}_{i,j} + u^{(0)}_{j,i}\right)$ и в общем случае является интегро-дифференциальной. Для решения этой задачи в работе предложен следующий метод.

Предполагается, что ЯП является симметричной при преобразованиях ортотропии относительно координатных осей ЯП (*основное допущение симметрии композита)*. Вначале рассматривается случай, когда определяющие соотношения матрицы и волокон - линейные ($\omega^{\alpha} = 0$). Тогда решение локальной задачи разыскивается в виде сумм по 6 функциям $\bar{\varepsilon}_{ij}$ - входным данным задачи:

$$u^{\alpha}_{i} = \sum_{p,q=1}^{3} u^{\alpha}_{i(pq)}, \qquad (6)$$

$$u^{\alpha}_{i(pq)} = -\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_{pq}\left(\delta_{ip}\xi_q + \delta_{iq}\xi_p\right) + U^{\alpha}_{i(pq)}\left(\xi_i\right) \qquad (7)$$

Функции $U^{\alpha}_{i(pq)}$, называемые псевдоперемещениями, представляют собой решение задач Ж*pq* на 1/8 ЯП (подобласть $\tilde{V}_{\xi}$: $\tilde{V}_{\xi} = V_{\xi} \cap (\xi_i \geq 0)$):

$$\begin{cases} \sigma^{\alpha}_{ij(pq)/j} = 0, в \tilde{V}_{\xi} \\ \sigma^{\alpha}_{ij(pq)} = C^{\alpha}_{ijkl}\varepsilon^{\alpha}_{kl(pq)} = \lambda^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}_{kk(pq)}\delta_{ij} + 2\mu^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}_{ij(pq)}, \quad в \tilde{V}_{\xi} \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s \\ \varepsilon^{\alpha}_{ij(pq)} = \frac{1}{2}\left(U^{\alpha}_{i(pq)/j} + U^{\alpha}_{j(pq)/i}\right), в \tilde{V}_{\xi} \\ U^{\alpha}_{i(pq)} = U^{N}_{i(pq)} \\ \left(\sigma^{\alpha}_{ij(pq)} - \sigma^{N}_{ij(pq)}\right) n_j = 0 \end{cases} на \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N} \text{ - условия идеального контакта} \qquad (8)$$

На торцевых поверхностях ЯП Σ'_s и на плоскостях симметрии $\Sigma_s = \{\xi_s = 0\}$, граничные условия в задаче Ж*pq* имеют следующий вид (рис.3):

При $(p=q)$: $U^{\alpha}_{i(pq)}=\frac{1}{2}\varepsilon_{pq}\delta_{ip}$, $U^{\alpha}_{j(pq)/i}=0$, $U^{\alpha}_{k(pq)/i}=0$, на Σ_i

$i\neq j\neq k\neq i$

При $(p\neq q)$: $U^{\alpha}_{i(pq)}=\frac{1}{4}\varepsilon_{pq}\delta_{ip}$, $U^{\alpha}_{j(pq)/j}=0$, $U^{\alpha}_{k(pq)/j}=0$, на Σ_j (9)

$i,j=\{p,q\}$

$U^{\alpha}_{i(pq)/k}=0$, $U^{\alpha}_{j(pq)/j}=0$, $U^{\alpha}_{k(pq)}=0$, на Σ_j

$i\neq j\neq k\neq i$

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть функции $U^{\alpha}_{i(pq)}(\xi_i)$ являются решением 6 задач $Ж_{pq}$ в 1/8 ЯП $\widetilde{V}_{\xi}$, тогда решением локальной задачи (4) во всей ЯП V_{ξ} являются функции (7), в которых $U^{\alpha}_{i(pq)}(\xi_i)$ продолжаются во всю ЯП симметричным (симм.) или антисимметричным (а-симм.) продолжением:

для $(p=q)$: $U^{\alpha}_{1(pp)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ а-симм. по ξ_1 и симм. по $\xi_2\ \xi_3$,

$U^{\alpha}_{2(pp)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ а-симм. по ξ_2 и симм. по $\xi_1\ \xi_3$,

$U^{\alpha}_{3(pp)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ а-симм. по ξ_3 и симм. по $\xi_2\ \xi_1$,

для $(p\neq q)$: $U^{\alpha}_{j(pq)}$ а-симм. по ξ_i и симм. по $\xi_j\ \xi_k$

$U^{\alpha}_{k(pq)}$ а-симм. по $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$,

$i,j=\{p,q\}\qquad i\neq j\neq k\neq i,$

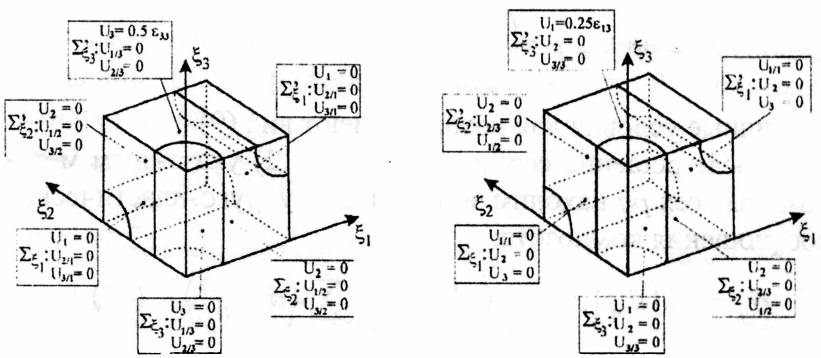


Рис.3 Граничные условия для задачи $Ж_{33}$ и $Ж_{13}$.

После решения 6 задач Жpq для всех pq и нахождения псевдонапряжений σ_{ij}^{α} в компонентах композита, рассчитываются эффективные упругие модули композита :

$$\bar{C}_{ijpq} = \frac{\bar{\sigma}_{ij(pq)}}{\bar{\varepsilon}_{pq}}, \quad \bar{\sigma}_{ij(pq)} = <\sigma_{ij(pq)}^{\alpha}> \qquad (10)$$

(по p и q суммирования нет).

Во второй главе рассматривается решение упруго-пластической задачи (4). Для ее решения применяется итерационный метод, являющийся разновидностью метода упругих решений А.А.Ильюшина, согласно которому определяющие соотношения (2) для компонентов композита линеаризуются следующим образом:

$$\sigma_{ij}^{\alpha\{m\}} = C_{ijkl}^{\alpha\ \{m\}} \varepsilon_{kl}^{\alpha\{m\}} + \mathrm{F}_{ij}^{\ \alpha}\left(\varepsilon_{kl}^{\alpha\{m-1\}}\right) - C_{ijkl}^{\alpha\ \{m\}} \varepsilon_{kl}^{\alpha\{m-1\}} \qquad (11)$$

Тогда вместо задачи (8) на m-ом шаге итерации из (3) получаем следующую линеаризованную задачу:

$$\begin{cases} \sigma_{ij(pq)/j}^{\alpha\{m\}} = 0, в \tilde{V}_{\xi} \\ \sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}} = C_{ijkl}^{\alpha\ \{m\}} \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}} - C_{ijkl}^{\alpha\ \{m\}} \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{m-1\}} + \frac{1}{6}\hat{\sigma}_{ij}^{\alpha\{m-1\}}, в \tilde{V}_{\xi} \cup \Sigma_s' \cup \Sigma_s \\ \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}} = \frac{1}{2}\left(U_{i(pq)/j}^{\alpha\{m\}} + U_{j(pq)/i}^{\alpha\{m\}}\right), в \tilde{V}_{\xi} \\ \left.\begin{array}{l} U_{i(pq)}^{\alpha\{m\}} = U_{i(pq)}^{N\{m\}} \\ \left(\sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}} - \sigma_{ij(pq)}^{N\{m\}}\right) n_j = 0 \end{array}\right\} на \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N} \end{cases} \qquad (12)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^{\alpha\{m-1\}} = \mathrm{F}_{ij}^{\ \alpha}\left(\sum_{p,q=1}^{3} \varepsilon_{kl(pq)}^{\alpha\{m-1\}}\right)$$

граничные условия для которой имеют вид (9).

После решения серии задач Жpq (12) указанным методом для всех pq находим эффективные упруго-пластические соотношения композита:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\mathrm{F}}_{ij}\left(\bar{\varepsilon}_{pq}\right), \quad \bar{\sigma}_{ij} = \left\langle \sigma_{ij}^{(\alpha)\{M\}} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{3} \left\langle \bar{\sigma}_{ij(pq)}^{(\alpha)\{M\}} \right\rangle. \quad (13)$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть для композита с периодической структурой выполнены следующие условия: 1) принято основное допущение симметрии, 2) волокна и матрица соответствуют теории малых упруго-пластических деформаций А.А.Ильюшина, тогда эффективные упруго-пластические соотношения композита (13) являются: а) индифферентными относительно группы ортотропии, б) квазилинейными: т.е. зависящими только 3-х от линейных и 3-х квадратичных инвариантов тензора осредненных деформаций $\bar{\varepsilon}_{ij}$: $I_1^{\varepsilon}, I_2^{\varepsilon}, I_3^{\varepsilon}, I_4^{\varepsilon}, I_5^{\varepsilon}, I_7^{\varepsilon}$ и не зависящими от кубического инварианта, и могут быть представлены в виде:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\mathrm{F}}_{ij}\left(\bar{\varepsilon}_{pq}\right) = \sum_{\gamma=1}^{3} \varphi_\gamma \delta_{i\gamma}\delta_{j\gamma} + \frac{1}{2}\varphi_4 \bar{\varepsilon}_{23}(\delta_{i2}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j2}) + \\ + \frac{1}{2}\varphi_5 \bar{\varepsilon}_{13}(\delta_{i1}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j1}) + \frac{1}{2}\varphi_7 \bar{\varepsilon}_{12}(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}) \qquad (14)$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma\left(I_1^{\varepsilon}, I_2^{\varepsilon}, I_3^{\varepsilon}, I_4^{\varepsilon}, I_5^{\varepsilon}, I_7^{\varepsilon}\right),$$

$$I_1^{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{11}, I_2^{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{22}, I_3^{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{33}, \sqrt{I_4^{\varepsilon}} = \left|\bar{\varepsilon}_{23}\right|, \sqrt{I_5^{\varepsilon}} = \left|\bar{\varepsilon}_{13}\right|, \sqrt{I_6^{\varepsilon}} = \left|\bar{\varepsilon}_{12}\right|.$$

Функции φ_γ - вычисляются с помощью многократного решения задач (12).

В третьей главе дана вариационная формулировка локальной задачи (12) $Ж_{pq}$ при фиксированных p и q:

$$\int_V \delta\varepsilon^{\{m\}T}\sigma^{\{m\}}dV = \int_\Sigma \delta U^{\{m\}T} S^{\{m\}} d\Sigma + \int_V \delta\varepsilon^{\{m\}T}\hat{\sigma}^{\{m-1\}}dV \quad (15)$$

Здесь обозначены координатные столбцы псевдоперемещений: U, напряжений y, деформаций ε и поверхностных усилий S:

$$U^{\{m\}} = \left[U_{1(pq)}^{\alpha\{m\}}, U_{2(pq)}^{\alpha\{m\}}, U_{3(pq)}^{\alpha\{m\}}\right]^T,$$

$$y = \left[y_{11(pq)}^{\alpha\{m\}}, y_{22(pq)}^{\alpha\{m\}}, y_{33(pq)}^{\alpha\{m\}}, y_{13(pq)}^{\alpha\{m\}}/\sqrt{2}, y_{23(pq)}^{\alpha\{m\}}/\sqrt{2}, y_{12(pq)}^{\alpha\{m\}}/\sqrt{2}\right]^T$$

$$\varepsilon = \left[\varepsilon_{11(pq)}^{\alpha\{m\}}, \varepsilon_{22(pq)}^{\alpha\{m\}}, \varepsilon_{33(pq)}^{\alpha\{m\}}, \varepsilon_{13(pq)}^{\alpha\{m\}}/\sqrt{2}, \varepsilon_{23(pq)}^{\alpha\{m\}}/\sqrt{2}, \varepsilon_{12(pq)}^{\alpha\{m\}}/\sqrt{2}^T\right]$$

$$S^{\{m\}} = \left[S_{1(pq)}^{\alpha}, S_{2(pq)}^{\alpha}, S_{3(pq)}^{\alpha}\right]^T,$$

$$\hat{\sigma}^{\{m-1\}} = \left[\hat{\sigma}_{11(pq)}^{\alpha\{m-1\}}, \hat{\sigma}_{22(pq)}^{\alpha\{m-1\}}, \hat{\sigma}_{33(pq)}^{\alpha\{m-1\}}, \hat{\sigma}_{13(pq)}^{\alpha\{m-1\}}, \hat{\sigma}_{23(pq)}^{\alpha\{m-1\}}, \hat{\sigma}_{12(pq)}^{\alpha\{m-1\}} \right]^T$$

$$\hat{\sigma}_{ij(pq)}^{\alpha\{m-1\}} = C_{ijkl}^{\alpha\ \{m\}} \varepsilon_{kl(pq)}^{\alpha\ \ \{m-1\}} - \frac{1}{6} \tilde{\sigma}_{ij}^{\alpha\{m-1\}}$$

Разработан конечно-элементный метод решения вариационного уравнения (15), согласно которому пседоперемещения в конечном элементе (КЭ) аппроксимируются линейными функциями: $U^{\{m\}} = \Phi\ q^{\{m\}}$, где $q^{\{m\}}$ - координатный столбец псевдоперемещений в узлах КЭ, а Φ - матрица функции формы. Из (15) получена разрешающая система линейных алгебраических уравнений:

$$K^{\{m\}} q^{\{m\}} = f^{\{m\}}, \qquad K^{\{m\}} = \int B^T C^{\{m\}} B dV \ , \qquad (16)$$

где B = $D\Phi$ - матрица деформаций, а D- матрица дифференциальных операторов задачи.

Конечный элемент в данной работы выбран в виде тетраэдра, рассматривались 2 варианта: 4-х узловой КЭ, в котором узлы в КЭ располагаются только в вершинах и 10-ти узловой КЭ, в котором узлы располагаются в вершинах и в серединах ребер тетраэдра.

Разработан программный комплекс, состоящий из 3 основных модулей: препроцессора, модуля решения и постпроцессора с 3-D визуализацией решения.

В четвертой главе рассмотрены результаты решения тестовых задач, а также результаты численного моделирования эффективных упругих и упруго-пластических свойств композита.

Решена тестовая задача – нахождение эффективных модулей упругости для 1D-армированного композиционного материала для которого известно точное аналитическое решение в рядах задач Ж$_{pq}$, , полученное Б.Е.Победрей и В.А.Мольковым, а также могут быть вычислены эффективные упругие характеристики методом сечений. Некоторые результаты решения приведены ниже в табл.1.

Тестирование проводилось также с помощью программного комплекса ANSYS , который использовался для

генерации КЭ-сетки и для решения задачи (8),(9). Полученные результаты расчетов позволяют говорить о достаточно высокой точности вычислений, получаемых с помощью разработанного метода - относительная погрешность не превышала 1%.

Таблица 1.

Значения эффективных модулей упругости 1-D композита, полученные различными методами

	$\frac{\bar{C}_{1111}}{\lambda_2+2\mu_2}$	$\frac{\bar{C}_{1122}}{\lambda_2}$	$\frac{\bar{C}_{1133}}{\lambda_2}$	$\frac{\bar{C}_{3333}}{\lambda_2+2\mu_2}$	$\frac{\bar{C}_{1313}}{\mu_2}$	$\frac{\bar{C}_{1212}}{\mu_2}$
Точное значение	1,42	1,11	1,03	1,75	1,804	1,58
Метод сечений.	1,50	1,02	1,03	1,75	1,87	1,501
Разработанный метод	1,419	1,098	1,026	1,748	1,806	1,59
ANSYS	1,422	1,115	1,032	1,753	1,805	1,583

Далее с помощью разработанного метода и программного комплекса были решены задачи Жpq (8) для 3-D ортогонально-армированного композита. При численной реализации армирующие в 3-х направлениях волокна считались одинаковыми, их характеристики и свойства матрицы были такими же как и для 1-D композита. Представлены сравнительные результаты расчетов технических упругих констант композита: $\bar{E}$ - модуля Юнга, $\bar{\mu}$ - модуля сдвига и $\bar{\nu}$ - коэффициента Пуассона, полученные с помощью разработанного МКЭ метода, метода сечений и комплекса ANSYS.

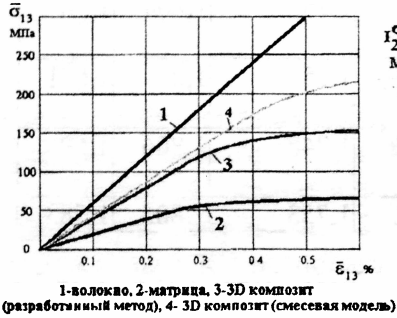
Таблица 2.

Значения упругих констант 3-D композита, полученные различными методами

	$\bar{E}$, ГПа.	$\bar{\nu}$	$\bar{\mu}$, ГПа.
Метод сечений	4.23	0.355	1.425
Разработанный метод	4.21	0.358	1.328
ANSYS	4.17	0,359	1,328

Значения, полученные с помощью разработанного методам и комплекса ANSYS численно близки (относительное отклонение не превышает 1%), в то же время, расчет модуля сдвига по методу сечений дает погрешность 7-8%.

При расчете упруго-пластических характеристик 3-D композита рассматривался пространственно-армированный углерод-углеродный композиционный материал (УУКМ), волокна которого полагались изотропными, упругими, а матрица - пластической. Некоторые результаты моделирования эффективных упруго-пластических функций (14) композита приведены на рис.4.



1-волокно, 2-матрица, 3-3D композит (разработанный метод), 4- 3D композит (смесевая модель)

Рис.4 Эффективные упруго- пластичеспластические диаграммы при сдвиге для УУКМ, углеродных нитей и матрицы.

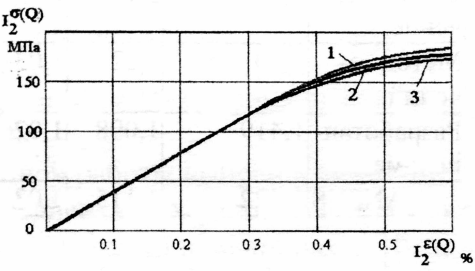


Рис.5 Зависимость квадратичного инварианта эффективных напряжений композита от инварианта $I_2^{\varepsilon(Q)}$ при различных значениях инварианта $I_1^{\varepsilon(Q)}$.

Проведено сравнение эффективных упруго-пластических диаграмм композита, полученных с помощью разработанного метода и смесевой модели, основанной на допущениях Фойгта-Рейсса о характере микронапряжений в волокне и матрице. Анализ результатов показал значительное отличие (до 25%) диаграмм в области пластичности, что свидетельствует о необходимости.

Для 3-D композитов с кубической симметрией, установлено, что эффективные упруго-пластические функции φ_γ зависят только от 2-х кубических инвариантов, $I_1^{\varepsilon(Q)} = \varepsilon_{11}^{\alpha} + \varepsilon_{22}^{\alpha} + \varepsilon_{33}^{\alpha}$, $I_2^{\varepsilon(Q)} = ((\varepsilon_{12}^{\alpha})^2 + (\varepsilon_{23}^{\alpha})^2 + (\varepsilon_{13}^{\alpha})^2)^{1/2}$, причем

имеется только 2 независимые комбинации: $\varphi_{Q1} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, $\varphi_{Q2} = \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6$. Численное моделирование показало, что для рассматриваемого УУКМ функция φ_{Q1} линейно зависит только от $I_1^{\varepsilon(Q)}$, а φ_{Q2} -только от квадратичного инварианта $I_2^{\varepsilon(Q)}$ (рис.5):

$$\varphi_{Q1} = \overline{K} I_1^{\varepsilon(Q)}, \quad \varphi_{Q2} = 2\overline{\mu}(1 - \overline{\omega}(I_2^{\varepsilon(Q)})),$$

что свидетельствует о реализации для композита так называемой простейшей модели анизотропной пластичности Б.Е.Победри, здесь $\overline{K}$ - эффективный модуль объемного сжатия композита, $\overline{\omega}(I_2^{\varepsilon(Q)})$ - эффективная функция пластичности композита, $I_2^{\sigma(Q)} = \varphi_{Q2} I_2^{\varepsilon(Q)}$ - квадратичный инвариант эффективных напряжений композита.

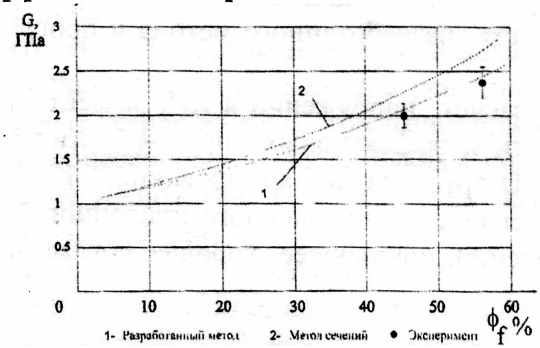


Рис.6. Зависимость модуля сдвига композита от содержания волокон, эксперимент и расчет по методу сечений и разработанному методу.

В **пятой главе** проведено сравнение эффективных упругих характеристик, полученных с помощью разработанного метода с экспериментальными данными для 3-D УУКМ. Для модуля упругости совпадение результатов расчетов по разработанному методу с экспериментом достаточно хорошее: относительная ошибка не превышала значения 8 %, в то время как расчеты по методу сечений дали результат 16 %. Для модуля сдвига относительная ошибка разработанного метода - 10% и 21% - метода сечений, что свидетельствует о существенно более высокой точности

разработанного метода расчета эффективных характеристик композитов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В работе разработан метод решения локальных задач «на ячейке периодичности» для композитов со сложными пространственными структурами армирования, основанный на переходе от задачи для полной ЯП к существенно более простой задаче на 1/8 ЯП.

Разработан конечно-элементный метод и программный комплекс для решения локальных задач «на ячейке периодичности» и расчета эффективных упруго-пластических характеристик композиционных материалов.

Для 1-D композита проведено сравнение результатов расчетов, полученных различными методами, показавшее высокую точность разработанного метода и программного комплекса.

Проведен расчет напряжений в ЯП, эффективных модулей упругости и эффективных упруго-пластических характеристик 3-D ортогонально-армированного КМ, а также осуществлено сравнение полученного численного решения с методом сечений, показавшее хорошее согласование результатов.

РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов // Вестник МГТУ. Естественные науки.- 2002.- №2.- С. 95-108.

2. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Разработка конечно-элементного метода решения локальных задач теории упругости «на ячейке периодичности» для композитов с периодической пространственной структурой // Математика в современном мире / Под ред. Ю.А.Дробышева.- Калуга.:Изд-во КГПУ.- 2004.- С.177-191.

3. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементное моделирование процесса разрушения пространственно-армированных композитов с периодической структурой // Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы: Тез. докл. конф. «40 лет факультета ФН».- М.,2004.-С.485-497.
4. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Харченко А.В. Эффективные методы расчета характеристик пространственно - армированных композитов // Вопросы оборонной техники .- 2002.-№1.-С.41-47.
5. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Харченко А.В. Численные методы расчета упругих характеристик композиционных материалов со сложными структурами армирования // Аэрокосмические технологии: Тез. докл. студ. науч.-техн. конф.-М.,2002.- С. 90-97.
6. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Кашкаров А.И. Разработка конечно-элементного метода решения задач расчета эффективных характеристик композиционных материалов на многопроцессорных вычислительных системах // Аэрокосмические технологии: Тез. докл. студ. науч.-техн. конф. - М., 2004.- С. 113-114.
7. Кашкаров А.И. Моделирование пространственно-армированных композиционных материалов методом конечных элементов // Труды студенческой научно-технической конференции СНТК-2001.-Реутов, 2001.-С.18-20.
8. Конечно-элементное моделирование эффективных физико-механических характеристик пространственно-армированных композитов / Ю.И.Димитриенко, А.А.Макашов, А.И.Кашкаров, А.П. Соколов, Е.С.Ничеговский // Труды конференции, посвященной 90-летию В.И.Феодосьева.- М., 2006.- С. 113-114.

Подписано к печати 9.11.16 Заказ №493 Объем 1 п.л. Тираж 100 экз
Типография МГТУ имени Н.Э.Баумана