

фрук
[-]
На правах рукописи

Четвериков Владимир Николаевич

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА
ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ
ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ**

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление
и обработка информации

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Работа выполнена в Московском государственном техническом
университете имени Н.Э. Баумана.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
профессор Н. Л. Григоренко

доктор физико-математических наук
профессор Н. А. Кудряшов

доктор физико-математических наук
Г. Н. Яковенко

У1776569
Ведущий Четвериков В.Н. лый центр
Разработка методов анализа . Дородницына РАН
и синтеза нелинейных
динамических систем на
основе дифференциально-...
У1776569 2007 года
ного совета
ском универ-
2-я Бауман-

ВОЗВРАТИТЕ КНИГУ НЕ ПОЗЖЕ
обозначенного здесь срока

ый печатью
ква, 2-я
у секре

е МГТУ

МГТУ им. Н.Э. Баумана



1776569

1. К. Волков

Актуальность темы. Наиболее общим методом управления нелинейными системами является метод преобразования системы в эквивалентную линейную систему:

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{F^{-1}} \end{array} \quad y_i^{(n_i)} = v_i \quad i = \overline{1, m}.$$

Начиная с конца 70-х годов XX века, А.П. Крищенко, В.И. Елкин, А. Исидори, Х. Ниймеер, Б. Якубчик, В. Респондек и другие использовали преобразования, представляющие собой замены переменных состояния и замены управления:

$$\begin{aligned} F: \quad & \tilde{y} = Y(t, x), \quad v = V(t, x, u), \\ F^{-1}: \quad & x = X(t, \tilde{y}), \quad u = U(t, \tilde{y}, v), \\ & \tilde{y} = (y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \dots, y_m^{(n_m-1)}), \quad n = n_1 + \dots + n_m. \end{aligned}$$

При этом рассматривались только аффинные системы, т.е. системы линейные по управлению. Нелинейные системы, которые таким преобразованием сводятся к эквивалентным линейным системам указанного вида, называют статически линеаризуемыми. Был разработан метод решения задач теории управления, основанный на таких преобразованиях. Были найдены необходимые и достаточные условия статической линеаризуемости в случае аффинных систем, разработаны методы проверки этих условий.

Однако с развитием теории управления возникла потребность в рассмотрении все более сложных систем, которые чаще всего не являются статически линеаризуемыми. Понятие статической линеаризуемости было обобщено. В 1989 году Б. Шарле, Ж. Левин и Р. Марино ввели понятие динамической линеаризуемости, а в 1992 году М. Флисс, Ж. Левин, Ф. Мартин и П. Рушон — понятие плоскостности. Динамическую систему с управлением называют плоской, если все ее решения параметризуются набором произвольных

функций времени. Оба понятия сводятся к построению линеаризующего преобразования F , которое задается функциями, зависящими, кроме времени, состояния и управления, также от производных управления до некоторого порядка:

$$\begin{aligned} F &: (y, v)^T = h(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(k)}), \\ F^{-1} &: (x, u)^T = \varphi(t, \tilde{y}, v, \dot{v}, \dots, v^{(l)}). \end{aligned} \quad (1)$$

Оказалось, что многие системы с управлением из различных областей техники линеаризуются новым типом преобразования и задачи управления для них решаются разработанными методами. Такими системами, в частности, описываются модели: самолета вертикального взлёта, портального подъемного крана, многих мобильных роботов, автомобиля с n -прицепами, смешового химического реактора, гибкой буровой штанги, саморегулирующейся муфты и др.

Были получены отдельные факты о динамически линеаризуемых стационарных системах, в частности, было доказано, что плоская система динамически линеаризуема. Однако общей математической теории таких систем до последнего времени не было построено. Не был получен ответ на вопрос: следует ли из динамической линеаризуемости плоскостность. Не были разработаны методы проверки существования линеаризующего преобразования. Задача построения такого преобразования для конкретной системы решалась исходя из физических особенностей системы. Если таких особенностей не было видно, вопрос о линеаризуемости оставался открытым.

Теория статически линеаризуемых систем построена на геометрической основе. В частности, соответствующее преобразование F интерпретируется как отображение конечномерных пространств. В случае динамической линеаризуемости соответствующее преобразование можно интерпретировать как отображение только бесконечномерных пространств. Ограничиться рассмотрением конечного набора производных управления, как правило, не удастся. Поэтому для исследования динамически линеаризуемых систем естественно использовать методы бесконечномерной геометрии.

Отметим также, что для многих систем с запаздыванием и систем с распределенными параметрами преобразование аналогичное

указанному строится и задачи управления для таких систем решаются указанными методами. Однако до последнего времени понятия динамической линеаризуемости и плоскостности для таких систем не были определены.

Целью работы является разработка методов решения задачи динамической линеаризуемости; разработка методов анализа и синтеза систем с управлением на основе бесконечномерной геометрии; развитие геометрии систем с запаздыванием и систем с распределенными параметрами и распространение на эти системы разработанных методов.

Методы исследования. В работе применяются методы математической теории управления, бесконечномерной дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные новые результаты, которые выносятся на защиту.

1. Теория динамически линеаризуемых и плоских нестационарных систем с управлением.
2. Решение проблемы плоскостности систем, линеаризуемых динамической обратной связью.
3. Структура алгебр высших симметрий динамических систем с управлением и метод вычисления этих алгебр.
4. Обобщение теории деформаций геометрических структур на бесконечномерный случай, разработанные на его основе условия плоскостности и метод поиска плоского выхода для динамических систем и систем уравнений в частных производных.
5. Обобщение теории плоских систем на случай динамических систем с запаздыванием.
6. Теория диффеотопов систем функционально-дифференциальных уравнений, имеющих гранично-дифференциальную форму, ориентированная на решение задач теории управления.

Результаты диссертации носят теоретический характер и являются развитием математической теории управления и геометрии дифференциальных уравнений.

Практическая ценность полученных результатов. Теоретические результаты доведены до конструктивных процедур, позволяющих решать задачи анализа конкретных динамических систем и синтеза управления для них.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Всесоюзной конференции "Современные дифференциально-геометрические и компьютерно-алгебраические методы исследования нелинейных проблем физики и механики" (Тарту, Эстония, 1989), Всесоюзной конференции "Современные дифференциально-геометрические и компьютерно-алгебраические методы исследования нелинейных проблем" (Одесса, 1990), 9-ом межгосударственном коллоквиуме "Современный групповой анализ. Методы и приложения" (Ниж.-Новгород, 1992), Международной конференции "Геометрические и алгебраические структуры в дифференциальных уравнениях" (Энсхеде, Голландия, 1993), Международной конференции "Классическая и квантовая геометрия однородных пространств" (Москва, 1994), Международной конференции "Вторичное дифференциальное исчисление и нелинейные проблемы в физике" (Вьетри-суль-Маре, Италия, 1994), Международной конференции "Вторичное дифференциальное исчисление и когомологическая физика" (Москва, 1997), 5-ом международном симпозиуме "Нелинейные системы с управлением (NOLCOS'01)" (Санкт-Петербург, 2001), 15-ом всемирном конгрессе ИФАК (Барселона, Испания, 2002), 7-ом Международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Москва, 2002), 6-ой международной конференции "Современная геометрия" (Неаполь, Италия, 2005), 9-ом Международном семинаре семинара им. Е.С. Пятницкого "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Москва, 2006), а также на научных семинарах в МГТУ им. Н.Э. Баумана, на механико-математическом факультете и факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ, в Независимом университете в Москве, в Международном институте математической физики им. Шредингера в Вене, в Национальном Исследовательском Институте по Информатике и Автоматике (INRIA, отделение в София Антиполис, Франция).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 21 работа, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка цитируемой литературы, включающего 162 библиографических ссылки, содержит 3 рисунка. Общий объем работы составляет 229 страниц.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №99-01-00863, №02-01-00704, №05-01-00840, гранта Е02-1.0-211 Министерства Образования РФ, проекта УР.03.01.018 по программе «Университеты России - фундаментальные исследования» Министерства образования РФ, проекта УР.03.01.141 раздела 1.2. «Университеты России» подпрограммы «Фундаментальные исследования» и проекта 2.1.1.2381 ведомственной научной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006 – 2007)» Федерального агентства по образованию РФ.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведен обзор результатов, относящихся к теме работы, обоснована актуальность темы, сформулированы цели и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе вводятся и исследуются основные понятия теории динамически линеаризуемых и плоских систем. Используются методы бесконечномерной геометрии, теории систем и теории гладких отображений.

Рассмотрим регулярную систему с управлением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad \text{rang}(\partial f_i / \partial u_j) = m, \quad (2)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — *состояние системы*, $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ — *ее управление*, $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m+1})$, $i = \overline{1, n}$. Рассмотрим векторную функцию, зависящая от t, x, u и производных u до некоторого порядка L :

$$y = h(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(L)}), \quad y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m, \quad (3)$$

а также производные функции y в силу системы (2) до порядка K :

$$\dot{y} = Dh, \quad \ddot{y} = D^2h = D(Dh), \quad \dots, \quad y^{(K)} = D^K h = D(D^{K-1}h), \quad (4)$$

где $D = \partial/\partial t + f(t, x, u)\partial/\partial x + u\partial/\partial u + \dots + u^{(j+1)}\partial/\partial u^{(j)} + \dots$

(а) Предположим функция y такова, что из системы уравнений (3)–(4) переменная x выражается через $t, \bar{y} = (y, \dot{y}, \dots, y^{(K)})$:

$$x = F(t, \bar{y}).$$

Тогда система (2) переписывается в виде:

$$DF(t, \bar{y}, y^{(K+1)}) = f(t, F(t, \bar{y}), u). \quad (5)$$

Так как система (2) регулярная, то m из n соотношений (5) разрешимы относительно u , причем $u = G(t, \bar{y}, y^{(K+1)})$. Остальные $n - m$ соотношений в (5) при $u = G(t, \bar{y}, y^{(K+1)})$ обращаются в тождества, если функция (3) удовлетворяет условию:

(b) для любого $j > 0$ набор функций $t, h, Dh, \dots, D^j h$ функционально независим.

Обозначив $z_{(0)} = y, z_{(1)} = \dot{y}, \dots, z_{(K)} = y^{(K)}, v = y^{(K+1)}$, получим линейную систему

$$\dot{z}_{(0)} = z_{(1)}, \quad \dots, \quad \dot{z}_{(K-1)} = z_{(K)}, \quad \dot{z}_{(K)} = v. \quad (6)$$

Пусть существует такая векторная функция $\xi = Q(t, \bar{z})$, $\xi \in \mathbb{R}^{m(K+1)-n}$, $\bar{z} = (z_{(0)}, \dots, z_{(K)})$, что соотношения

$$t = t, \quad x = F(t, \bar{z}), \quad \xi = Q(t, \bar{z})$$

задают замену переменных, а

$$t = t, \quad \bar{z} = H(t, x, \xi) \quad (7)$$

— обратная замена переменных. Тогда доказывается, что система (6) в переменных t, x, ξ, v имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x, G(t, H(t, x, \xi), v)), \quad \dot{\xi} = Q_1(t, H(t, x, \xi), v), \quad (8)$$

Система (8) эквивалентна линейной тривиальной системе (6) и получается из (2) с помощью динамической обратной связи

$$u = G(t, H(t, x, \xi), v), \quad \dot{\xi} = Q_1(t, H(t, x, \xi), v).$$

На этой связи с системой (6) основан метод управления для системы (2). Например, рассмотрим задачу терминального управления для системы (2):

$$x(t_H) = x_H, \quad x(t_K) = x_K. \quad (9)$$

Добавляя к заданным условиям на x начальные и конечные условия на дополнительные переменные ξ :

$$\xi(t_H) = \xi_H, \quad \xi(t_K) = \xi_K, \quad (10)$$

получаем задачу терминального управления для системы (8). Значения ξ_H и ξ_K являются параметрами решения и могут быть выбраны достаточно произвольно с учетом особенностей конкретной задачи.

Переходя к переменным z , получаем задачу терминального управления для линейной системы (6):

$$\bar{z}(t_H) = H(t_H, x_H, \xi_H), \quad \bar{z}(t_K) = H(t_K, x_K, \xi_K). \quad (11)$$

Метод решения этой задачи хорошо известен. Подставляя полученное решение задачи (6), (11)

$$\bar{z} = \tilde{z}(t), \quad v = \tilde{v}(t), \quad t \in [t_H, t_K].$$

в функции, задающие обратное преобразование, получаем решение исходной задачи (2), (9):

$$x = F(t, \tilde{z}(t)), \quad u = G(t, \tilde{z}(t), \tilde{v}(t)), \quad t \in [t_H, t_K].$$

В диссертации показано также, как аналогичным образом решается задача стабилизации для системы (2), удовлетворяющей условиям (а) и (б). Этот метод демонстрируется на примере задачи управления движением самолета вертикального взлета.

Приведенные рассуждения мотивируют выделение следующих классов систем. Говорят, что система (2) *линеаризуема динамической обратной связью*

$$u = b(t, x, \xi, v), \quad \dot{\xi} = a(t, x, \xi, v), \quad \xi \in \mathbb{R}^l, \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad (12)$$

если получающаяся с помощью этой связи система

$$\dot{x} = f(t, x, b(t, x, \xi, v)), \quad \dot{\xi} = a(t, x, \xi, v), \quad (13)$$

обратимой заменой переменных вида (7) преобразуется в линейную систему (6).

Систему (2) называют *плоской*, а векторную функцию (3) — ее *линеаризующим выходом*, если функция (3) удовлетворяет указанным условиям (а) и (б). Важнейшей проблемой теории управления остается *задача плоскостности*: "для заданной системы выяснить является ли она плоской или нет".

Приведенные выше рассуждения представляют собой **алгоритм построения динамической обратной связи, линеаризующей плоскую систему**. Таким образом, любая плоская система динамически линеаризуема.

Основными методами, используемыми в диссертации, являются методы бесконечномерной геометрии. А именно, с системой (2) связывается бесконечномерное пространство $\mathbb{R}^\infty$ с координатами

$$t, x_1, \dots, x_n, u_1^{(0)}, \dots, u_m^{(0)}, u_1^{(1)}, \dots, u_m^{(1)}, u_1^{(2)}, \dots, \quad (14)$$

где координаты $u_j^{(0)}$ соответствуют переменным u_j , а координаты $u_j^{(l)}$ — производным $d^l u_j / dt^l, l > 0$. Обозначим через $\mathcal{E}^\infty$ подмножество пространства $\mathbb{R}^\infty$ с координатами (14), в котором определена система (2) и лежат допустимые управления. Систему (2) будем обозначать иногда через $\mathcal{E}$.

Каждое гладкое решение $s(t) = (x_*(t), u_*(t))$ системы (2) и точка t_0 , в окрестности которой это решение определено, задают точку из $\mathcal{E}^\infty$ с координатами

$$t = t_0, \quad x_i = x_{*,i}(t_0), \quad u_j^{(l)} = \frac{d^l u_{*,j}(t_0)}{dt^l}, \quad (15)$$

где $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, l \geq 0$. Эта точка называется *бесконечным джетом* решения $s(t)$ в точке t_0 , а множество бесконечных джетов решения $s(t)$ во всех точках t_0 , в окрестности которых это решение определено, — *графиком в $\mathcal{E}^\infty$ решения $s(t)$* . Любая точка множества $\mathcal{E}^\infty$ является бесконечным джетом некоторого решения.

На множестве $\mathcal{E}^\infty$ вводятся обычные дифференциально-геометрические понятия: гладкие функции, векторные поля, дифференциальные формы и т. д. В частности, *гладкой функцией на $\mathcal{E}^\infty$* называют бесконечно дифференцируемую функцию, зависящую от конечного (но произвольного) набора переменных (14). Алгебру гладких функций на $\mathcal{E}^\infty$ обозначают через $\mathcal{F}(\mathcal{E})$.

Векторное поле

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^n f_l(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} u_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}}, \quad (16)$$

определенное в точках $\mathcal{E}^\infty$, называется *полной производной по t на $\mathcal{E}^\infty$* . Производная Ли вдоль D функции $g \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ совпадает с производной функции g в силу системы (2). Фазовые кривые векторного поля D совпадают с графиками в $\mathcal{E}^\infty$ решений системы (2). Поэтому в качестве *геометрической модели системы (2)* берется пара $(\mathcal{E}^\infty, D)$, которая называется *диффеотопом* системы (2).

Множество $\mathcal{E}^\infty$ можно понимать как расширенное фазовое пространство бесконечной системы

$$\dot{x} = f(t, x, u^{(0)}), \quad \dot{u}^{(0)} = u^{(1)}, \quad \dots, \quad \dot{u}^{(k-1)} = u^{(k)}, \quad \dots,$$

а D — как соответствующее векторное поле.

Пусть $(\mathcal{E}^\infty, D_\mathcal{E})$ и (S^∞, D_S) — два диффеотопа. Отображение

$$F: \mathcal{E}^\infty \rightarrow S^\infty \quad (17)$$

называют *гладким*, если соответствующее индуцированное отображение F^* отображает любую гладкую функцию на S^∞ в гладкую функцию на $\mathcal{E}^\infty$, т.е. $F^*(\mathcal{F}(S)) \subset \mathcal{F}(\mathcal{E})$, где по определению

$$F^*(\varphi) = \varphi \circ F.$$

Отображение (17) называют *диффеоморфизмом*, если оно гладкое, взаимнооднозначное, и обратное отображение также является гладким.

Гладкое отображение (17), сохраняющее независимую переменную, т.е. $F^*(t) = t$, называют *$\mathcal{C}$ -отображением*, если

$$D_{\mathcal{E}} \circ F^* = F^* \circ D_{\mathcal{S}}, \quad (18)$$

где символы $D_{\mathcal{E}}$ и $D_{\mathcal{S}}$ обозначают производную Ли вдоль соответствующих векторных полей, а вся формула понимается как равенство отображений алгебр функций.

Диффеоморфизм, являющийся одновременно $\mathcal{C}$ -отображением, называют *$\mathcal{C}$ -диффеоморфизмом* (или *изоморфизмом Ли-Бэклунда*). Системы, чьи диффеотопы связаны $\mathcal{C}$ -диффеоморфизмом, называют *$\mathcal{C}$ -диффеоморфными*.

Теорема 1 Если две регулярные системы вида (2) $\mathcal{C}$ -диффеоморфны, то их управления имеют одинаковую размерность.

Введенные понятия позволяют дать следующие геометрические интерпретации систем, эквивалентных относительно преобразований вида (1), а также плоских систем.

Теорема 2 Системы эквивалентны тогда и только тогда, когда они $\mathcal{C}$ -диффеоморфны.

Теорема 3 Если система $\mathcal{C}$ -диффеоморфна плоской системе, то она также является плоской, причем $\mathcal{C}$ -диффеоморфизм отображает линеаризующий выход в линеаризующий выход.

Тривиальной системой называют систему вида

$$\dot{z} = w, \quad z, w \in \mathbb{R}^r. \quad (19)$$

Теорема 4 Система (2) плоская в окрестности точки $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ тогда и только тогда, когда существует $\mathcal{C}$ -диффеоморфизм F из окрестности этой точки в открытое подмножество диффеотопа тривиальной системы (19). При этом функции $F^*(z_1), \dots, F^*(z_r)$ образуют линеаризующий выход системы (2) в некоторой окрестности точки $\theta \in \mathcal{E}^\infty$.

Из приведенных теорем выводятся следующие следствия.

1. Если линейные системы регулярны и управляемы, то для того, чтобы они были C -диффеоморфны необходимо и достаточно, чтобы их управления имели одинаковую размерность.
2. Плоская система не обладает первыми интегралами.
3. Статически линеаризуемая система плоская.
4. Для того, чтобы линейная система была плоской, необходимо и достаточно, чтобы она была управляемой.

На геометрическом языке переформулируются также понятия регулярной динамической обратной связи и динамической линеаризуемости. А именно, говорят, что динамическая обратная связь (12) системы (2) удовлетворяет *условию соответствия решений*, если для любого решения $(x(t), u(t))$ системы (2) существуют векторные функции $\xi(t)$ и $v(t)$, которые вместе с функциями $x(t)$ и $u(t)$ тождественно удовлетворяют уравнениям (12).

Из условия соответствия решений следует, что набор функций $(x(t), \xi(t), v(t))$ образует решение системы (13). Отметим, что динамическая обратная связь (12) определяет отображение из множества решений системы (13) в множество решений системы (2). В случае выполнения условия соответствия решений это отображение сюръективно.

Обозначим систему (13) через $\mathcal{E}_1$, через $\mathcal{E}_1^\infty$ — ее диффеотоп, а через E_k — $\mathcal{F}(\mathcal{E}_1)$ -модуль, порожденный 1-формами

$$dt, dx_i, d\xi_s, db_j, dD_{\mathcal{E}_1}(b_j), \dots, dD_{\mathcal{E}_1}^k(b_j),$$

где $i = \overline{1, n}, s = \overline{1, l}, j = \overline{1, m}$, а $b_j(t, x, \xi, v)$ — функции из (12), понимаемые как функции на $\mathcal{E}_1^\infty$. Отметим, что модуль E_k состоит из всех линейных комбинаций указанных 1-форм, коэффициенты которых есть функции из $\mathcal{F}(\mathcal{E}_1)$. Под *размерностью* какого-либо $\mathcal{F}(\mathcal{E}_1)$ -подмодуля $E \subset \Lambda^1(\mathcal{E}_1^\infty)$ в точке $\theta \in \mathcal{E}_1^\infty$ понимают размерность пространства ковекторов $\{\omega_\theta | \omega \in E\}$. Через $\dim E$ мы обозначаем целочисленную функцию на $\mathcal{E}_1^\infty$, значение которой в точке θ есть размерность E в θ . Динамическую обратную связь (12) системы (2) называют *регулярной* в окрестности точки $\theta \in \mathcal{E}_1^\infty$, если в этой окрестности $\dim E_l - \dim E_{l-1} = m$ (здесь l — количество переменных ξ_s).

Теорема 5 Пусть в окрестности точки диффеотопа $(\mathcal{E}_1^\infty, D_{\mathcal{E}_1})$ системы (13) модуль E_{l-1} имеет постоянную размерность. Тогда в окрестности этой точки эквивалентны следующие утверждения:

(а) динамическая обратная связь (12) удовлетворяет условию соответствия решений;

(b) динамическая обратная связь (12) регулярна;

(с) любой конечный набор функций, составленный из

$$t, x_1, \dots, x_n, b_1, \dots, b_m, D_{\mathcal{E}_1}(b_1), \dots, D_{\mathcal{E}_1}(b_m), D_{\mathcal{E}_1}^2(b_1), \dots, \quad (20)$$

функционально независим на $\mathcal{E}_1^\infty$;

(d) среди переменных ξ можно выбрать такой поднабор $\zeta = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_q})$, что система (13) эквивалентна системе

$$\dot{x} = f(t, x, \eta_{(0)}), \quad \dot{\zeta} = g(t, \zeta, x, \eta_{(0)}, \dots, \eta_{(l-1)}, w), \\ \dot{\eta}_{(0)} = \eta_{(1)}, \quad \dots, \quad \dot{\eta}_{(l-1)} = w,$$

где $\zeta \in \mathbb{R}^q$, $w \in \mathbb{R}^m$, $\eta_{(s)} \in \mathbb{R}^m$ при $s = 0, \dots, l-1$, причем эквивалентность задается заменой переменных

$$t = t, \quad x = x, \quad \eta_{(0)} = b(t, \xi, x, v), \quad \eta_{(1)} = D_{\mathcal{E}_1}(b), \quad \dots, \\ \eta_{(l-1)} = D_{\mathcal{E}_1}^{l-1}(b), \quad w = D_{\mathcal{E}_1}^l(b), \quad \zeta = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_q}).$$

Гладкое отображение

$$F: S^\infty \rightarrow \mathcal{E}^\infty, \quad (21)$$

удовлетворяющее условию $F^*(t) = t$, называют *накрытием*, если

1) оно удовлетворяет условию $D_S \circ F^* = F^* \circ D_{\mathcal{E}}$;

2) в каждой точке $\theta \in S^\infty$ касательное отображение $F_{*,\theta}$ является эпиморфизмом векторных пространств;

3) размерность ядра $F_{*,\theta}$ постоянна для всех $\theta \in S^\infty$.

Размерностью накрытия называется размерность слоя отображения F или, что эквивалентно, размерность ядра $F_{*,\theta}$. Любой C -диффеоморфизм является накрытием нулевой размерности. Если (21) — накрытие, то будем говорить, что система S *накрывает* систему $\mathcal{E}$, или что F — *накрытие системы $\mathcal{E}$ системой S* .

Теорема 6 Регулярная динамическая обратная связь (12) системы (2) определяет конечномерное накрытие этой системы системой (13). Обратно, пусть $\mathcal{E}^\infty$ — диффеотоп системы (2), $F: S^\infty \rightarrow \mathcal{E}^\infty$ — конечномерное накрытие, $\theta \in S^\infty$. Тогда в некоторой окрестности точки $F(\theta) \in \mathcal{E}^\infty$ существует такая регулярная динамическая обратная связь вида (12), что конечномерное накрытие определенное ею есть ограничение F на окрестность точки θ .

Теорема 7 Регулярная система динамически линеаризуема в окрестности точки θ тогда и только тогда, когда существует накрытие из некоторого открытого подмножества диффеотопа тривиальной системы в окрестность точки θ .

Из теоремы 4 следует, что задача плоскостности является нелинейной геометрической задачей. В виду сложности нелинейных задач для их решения в геометрии используется следующая схема. Сначала решается линейная задача, представляющая собой геометрическую линеаризацию исходной. Затем интегрируя (в геометрическом смысле) полученные решения линейной задачи, получают некоторые решения нелинейной задачи.

Во второй главе эта схема применяется к задаче плоскостности. А именно, пусть $\mathcal{E}$ — система (2), $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$. Обозначим через $d_c\varphi$ 1-форму $d\varphi - D(\varphi)dt$ на $\mathcal{E}^\infty$. *Формами Картана на $\mathcal{E}^\infty$* называют 1-формы вида $d_c\varphi$, а *модулем Картана на $\mathcal{E}^\infty$* — $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ -модуль $C^1\Lambda(\mathcal{E})$, порожденный 1-формами $d_c\varphi$, $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$.

Каждый C -диффеоморфизм $F: \mathcal{E}^\infty \rightarrow S^\infty$ индуцирует изоморфизм

$$F^*: C^1\Lambda(S) \rightarrow C^1\Lambda(\mathcal{E}).$$

Таким образом, модули Картана тривиальной и плоской систем изоморфны. Этот факт дает необходимое условие плоскостности, поскольку модуль Картана тривиальной системы легко описать.

Над алгеброй функций $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ модуль $C^1\Lambda(\mathcal{E})$ бесконечномерен, но его образующие получаются из конечного набора 1-форм дифференцированием в силу системы (см. теорему 8). Этот результат используется в той или иной степени для получения почти всех результатов второй главы.

Обозначим $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ —подмодуль модуля $C^1\Lambda(\mathcal{E})$, порожденный 1-формами $d_C x_1, \dots, d_C x_n$, через $\mathcal{H}_1$. Определим $\mathcal{H}_k$ для $k > 1$ индуктивно равенством

$$\mathcal{H}_{k+1} = \{\omega \in \mathcal{H}_k \mid D\omega \in \mathcal{H}_k\}. \quad (22)$$

Точку $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ называют *Б-регулярной*, если в некоторой окрестности этой точки система $\mathcal{E}$ регулярна и для любого $k > 1$ модули $\mathcal{H}_k$ и $\mathcal{H}_k + D(\mathcal{H}_k)$ имеют постоянную размерность.

Теорема 8 Пусть $\{\chi_1, \dots, \chi_\rho\}$ — максимальный набор функционально независимых первых интегралов системы $\mathcal{E}$ в окрестности Б-регулярной точки. Тогда в окрестности этой точки существуют такие 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_m$ из $C^1\Lambda(\mathcal{E})$, что

$$\{d_C \chi_i, D^j(\omega_s) : i = \overline{1, \rho}, s = \overline{1, m}, j \geq 0\}$$

— базис модуля $C^1\Lambda(\mathcal{E})$ над $\mathcal{F}(\mathcal{E})$.

Доказательство теоремы 8 конструктивно и дает следующий алгоритм нахождения первых интегралов $\chi_1, \dots, \chi_\rho$ и 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_m$. Для любой Б-регулярной точки существует такое положительное целое число s^* , что в окрестности этой точки $\mathcal{H}_{s^*+1} = \mathcal{H}_{s^*}$. Используя определение модулей $\mathcal{H}_k$, находим их образующие последовательно, начиная с $\mathcal{H}_1$ и кончая $\mathcal{H}_{s^*}$. Образующие модуля $\mathcal{H}_{s^*}$ можно выбрать вида $d_C \chi_1, \dots, d_C \chi_\rho$, где $\chi_1, \dots, \chi_\rho$ — первые интегралы системы $\mathcal{E}$. Так как $\mathcal{H}_{s^*} \subset \mathcal{H}_{s^*-1}$, то эти формы лежат в $\mathcal{H}_{s^*-1}$. Дополним их 1-формами $\omega_1, \dots, \omega_{m_1}$ ($m_1 \leq m$) до базиса модуля $\mathcal{H}_{s^*-1}$. По построению модуля $\mathcal{H}_{s^*-1}$ 1-формы

$$d_C \chi_1, \dots, d_C \chi_\rho, \omega_1, \dots, \omega_{m_1}, D\omega_1, \dots, D\omega_{m_1}$$

$\mathcal{F}(\mathcal{E})$ —линейно независимы и лежат в $\mathcal{H}_{s^*-2}$. Дополним их 1-формами $\omega_{m_1+1}, \dots, \omega_{m_2}$ ($m_1 \leq m_2 \leq m$) до базиса модуля $\mathcal{H}_{s^*-2}$. Повторяя эту процедуру последовательно для модулей $\mathcal{H}_{s^*-3}, \dots, \mathcal{H}_1$, находим 1-формы $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$.

Теорема 9 Для плоской системы $\rho = 0$, т.е. $\mathcal{H}_{s^*} = \{0\}$.

Набор 1-форм $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ будем называть *Б-базисом* системы, если 1-формы $D^j(\omega_k)$ для $k = \overline{1, m}$ и $j \geq 0$ образуют базис модуля $C^1\Lambda(\mathcal{E}^\infty)$. Из теоремы 8 следует, что в окрестности Б-регулярной точки система обладает Б-базисом тогда и только тогда, когда $\rho = 0$. Отсюда, применяя теорему 9, получаем, что плоская система обладает Б-базисом. Алгоритм, приведенный выше, позволяет находить Б-базис.

Из теоремы 8 выводятся также: необходимые и достаточные условия плоскостности и статической линейризуемости, структура высших симметрий систем с управлением и доказательство плоскостности динамически линейризуемых систем. Эти факты имеют следующие формулировки.

Дифференциальный оператор вида

$$\Delta = g_0 + g_1 D + g_2 D^2 + \dots + g_k D^k, \quad g_0, g_1, \dots, g_k \in \mathcal{F}(\mathcal{E}), \quad (23)$$

называют *С-дифференциальным оператором порядка k*. Каждый С-дифференциальный оператор отображает модуль $C^1\Lambda(\mathcal{E})$ в себя. Матрица, элементы которой являются С-дифференциальными операторами, определяет обычным образом оператор на множестве столбцов функций или дифференциальных форм. Такой оператор называют *матричным С-дифференциальным оператором*.

Теорема 10 Пусть θ — Б-регулярная точка системы (2). Система (2) плоская в окрестности θ в том и только том случае, когда $\rho = 0$ и в окрестности θ существуют m функций $h_1, \dots, h_m$ и матричные С-дифференциальные операторы Δ и ∇ такие, что

$$\begin{pmatrix} dc h_1 \\ \vdots \\ dc h_m \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix}, \quad \Delta \circ \nabla = \text{id}, \quad \nabla \circ \Delta = \text{id}, \quad (24)$$

где $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ — Б-базис в окрестности θ , id — тождественный оператор. При этом функции $h_1, \dots, h_m$ образуют линейризующий выход системы (2).

Следующая теорема позволяет проверять: является ли заданный выход линейризующим для заданной системы или нет.

Теорема 11 1. Если векторная функция (3) такова, что переменные x состояния системы (2) выражаются через $t, y, \dot{y}, \dots, y^{(K)}$, то система (2) плоская, а (3)— ее линеаризующий выход.

2. Если для $K = mL - 1$ переменные x состояния системы (2) нельзя выразить через $t, y, \dot{y}, \dots, y^{(K)}$, то (3)— не является линеаризующим выходом системы (2).

Для каждого $k = 1, \dots, s^*$ модуль $\mathcal{H}_k$ вместе с 1-формой dt порождает распределение $\mathcal{P}_k$. Следующая теорема представляет собой необходимые и достаточные условия статической линеаризуемости.

Теорема 12 1. В окрестности Б-регулярной точки система (2) статически линеаризуема тогда и только тогда, когда в этой окрестности $\mathcal{H}_{s^*} = \{0\}$, а распределения $\mathcal{P}_k$, $k = 2, \dots, s^* - 1$, интегрируемы.

2. Б-базис статически линеаризуемой системы может быть выбран из 1-форм $d_c h_1, \dots, d_c h_m$, где $h_1, \dots, h_m$ — функции, зависящие от $t, x_1, \dots, x_n$.

3. Пусть числа n_i определяются условием $d_c h_i \in \mathcal{H}_{n_i} \setminus \mathcal{H}_{n_i+1}$, где $i = \overline{1, m}$. Тогда замена переменных

$$t = t, \quad y_i = h_i(t, x), \quad v_i = D_{\mathcal{E}}^{n_i}(h_i(t, x)), \quad i = \overline{1, m},$$

преобразует систему (2) в линейную систему

$$y_i^{(n_i)} = v_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (25)$$

Теорема 13 В случае одномерного управления система (2) плоская в окрестности Б-регулярной точки тогда и только тогда, когда она статически линеаризуема.

Векторные поля на $\mathcal{E}^\infty$, у которых отсутствует слагаемое $\partial/\partial t$, называют *вертикальными*. *Высшей (инфинитезимальной) симметрией системы (2)* называют вертикальное поле X на $\mathcal{E}^\infty$, удовлетворяющее условию

$$[X, D] = 0. \quad (26)$$

Мотивировка этого определения следующая. Если векторное поле Y на $\mathcal{E}^\infty$ обладает фазовым потоком, и преобразования этого потока

отображают графики решений системы (2) в графики решений этой системы, то

$$[Y, D] = aD, \quad a \in \mathcal{F}(\mathcal{E}). \quad (27)$$

Ввиду бесконечномерности $\mathcal{E}^\infty$ векторные поля на $\mathcal{E}^\infty$, как правило, не обладают фазовым потоком. Будем искать произвольные поля на $\mathcal{E}^\infty$, удовлетворяющие условию (27). Всякое векторное поле Y на $\mathcal{E}^\infty$ можно однозначно представить в виде суммы вертикального поля X и поля hD , $h \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$, т.е. $Y = X + hD$. При этом условие (27) означает, что вертикальная составляющая X удовлетворяет условию (26), т.е. является высшей симметрией, а горизонтальная составляющая (hD) произвольна, т.е. h — произвольная функция. Таким образом, найдя все высшие симметрии $\mathcal{E}^\infty$, мы найдем все поля, удовлетворяющие условию (27).

Высшие симметрии, которым соответствуют поднятия векторных полей с конечномерного пространства, а значит, обладающие фазовым потоком, называют *классическими*. Первые результаты по классическим симметриям были получены еще Софусом Ли. Его последователи построили известную теорию групп и алгебр Ли. Тот факт, что результаты Софуса Ли касались симметрии дифференциальных уравнений, был забыт более чем на полвека. Только в 70-х годах XX века теория симметрий дифференциальных уравнений получила свое развитие в работах Л. В. Овсянникова, Н. Х. Ибрагимова, А. М. Виноградова, В. Ф. Журавлева и других. Особенностью этой теории является то, что она применима к нелинейным дифференциальным уравнениям и позволяет находить автомодельные решения, размножать решения, доказывать, что две системы не эквивалентны, и т.д. Симметрии использовались в теории управления Ю. Н. Павловским, Г. Н. Яковенко, В. И. Елкиным, А. П. Крищенко, А. Н. Канатниковым и другими.

Алгебры Ли высших симметрий плоской и тривиальной систем изоморфны. Это дает еще один путь решения задачи плоскостности, так как алгебра высших симметрий тривиальной системы хорошо известна.

Из теоремы 8 следует, что существует натуральное число r и такие матрицы $A, B, G_l, H_l, l = 0, \dots, r$, функций на $\mathcal{E}^\infty$, что

$$d_C x = A d_C \chi + \sum_{j=0}^r G_j D^j \omega, \quad d_C u = B d_C \chi + \sum_{j=0}^r H_j D^j \omega,$$

где $dcx = (dcx_1, \dots, dcx_n)^T$, $dcu = (dcu_1, \dots, dcu_m)^T$,
 $dc\chi = (dc\chi_1, \dots, dc\chi_\rho)^T$, $D^j\omega = (D^j\omega_1, \dots, D^j\omega_m)^T$.

Теорема 14 В окрестности B -регулярной точки любая высшая симметрия системы (2) имеет вид

$$X = \sum_{i=1}^n \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^m D^j \psi_i \frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}}, \quad (28)$$

где

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T = A\beta + \sum_{j=0}^r G_j D^j \gamma, \quad (\psi_1, \dots, \psi_m)^T = B\beta + \sum_{j=0}^r H_j D^j \gamma,$$

β — ρ -столбец произвольных функций переменных $\chi_1, \dots, \chi_\rho$, γ — m -столбец произвольных функций на $\mathcal{E}^\infty$.

Данная теорема дает полное описание структуры алгебр высших симметрий систем с управлением и метод вычисления этих алгебр. При этом в отличие от известного ранее метода здесь нет необходимости в интегрировании дифференциальных уравнений и находятся сразу все симметрии.

Пусть $(\mathcal{E}^\infty, D_\mathcal{E})$ и $(\mathcal{S}^\infty, D_\mathcal{S})$ — диффеотопы системы (2) и некоторой плоской системы соответственно, $(y_1, \dots, y_r)$ — линеаризующий выход системы $\mathcal{S}^\infty$, а $\nu: \mathcal{S}^\infty \rightarrow \mathcal{E}^\infty$ — накрытие. Для $k \geq 0$ через $\Lambda_k^1(\mathcal{S})$ обозначим модуль над $\mathcal{F}(\mathcal{S})$, порожденный 1-формами

$$dt, dy_1, \dots, dy_r, dy_1^{(1)}, \dots, dy_r^{(1)}, dy_1^{(2)}, \dots, dy_r^{(k)}.$$

Положим также

$$\mathcal{L}_k = \{\omega \in \Lambda^1(\mathcal{E}^\infty) | \nu^*(\omega) \in \Lambda_k^1(\mathcal{S})\}.$$

Множества $\mathcal{L}_k$ являются $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ -модулями.

Пусть k_d — такое целое, что формы

$$\nu^*(dx_1), \dots, \nu^*(dx_n), \nu^*(du_1), \dots, \nu^*(du_m)$$

лежат в $\Lambda_{k_d}^1(\mathcal{S})$. Точку $\theta \in \mathcal{E}^\infty$, в окрестности которой система (2) регулярна, а модули $\mathcal{L}_k$ для $k = 0, 1, \dots, k_d$ имеют постоянную размерность, будем называть ν -регулярной.

Теорема 15 Если существует накрытие ν из диффеотопа какой-либо плоской системы в диффеотоп системы (2), то в окрестности ν -регулярной точки система (2) плоская.

В диссертации приведен пример применения теоремы 15 для доказательства неплоскостности системы. А именно, система неплоская, если существует накрытие из ее диффеотопа в диффеотоп какой-либо известной неплоской системы $\mathcal{S}$. В качестве системы $\mathcal{S}$ предлагается брать систему с одномерным управлением, потому что для таких систем существует простой метод проверки плоскостности (см. теоремы 12 и 13). Следствием теорем 7 и 15 является следующий важный теоретический результат.

Теорема 16 В окрестности ν -регулярной точки система динамически линеаризуема тогда и только тогда, когда она плоская.

Доказательства приведенных теорем дают следующий алгоритм построения линеаризующего выхода динамически линеаризуемой системы. Пусть построена динамическая обратная связь (12), линеаризующая систему (2). Из существования такой связи следует плоскостность системы (13). Пусть $(y_1, \dots, y_r)$ — линеаризующий выход системы (13). Так как системы (2) и (13) регулярны, то $r = m$. Для каждого $k \geq 0$ обозначим через $Y^{(k)}$ набор дифференциалов:

$$Y^{(k)} = \{dt, dy_1, \dots, dy_m, dy_1^{(k)}, \dots, dy_m^{(k)}\}.$$

Часть переменных ξ_i системы (13) выражаются через (20). Другая часть переменных ξ_i вместе с функциями (20) образуют систему координат на диффеотопе системы (13). Если систему координат на этом диффеотопе образуют только функции (20), то накрытие из теоремы 7 есть $\mathcal{C}$ -диффеоморфизм, а функции $y_1, \dots, y_m$ образуют линеаризующий выход и системы (13), и системы (2).

Рассмотрим случай, когда функции (20) образуют систему координат на диффеотопе системы (13) вместе с некоторыми переменными ξ_i . Представим элементы наборов $Y^{(k)}$, $k \geq 0$, в этой системе координат. Доказывается, что для любого k модуль $\mathcal{L}_k$, введенный

выше, состоит из тех линейных комбинаций элементов набора $Y^{(k)}$ с коэффициентами из $\mathcal{F}(\mathcal{E})$, которые не содержат $d\xi_i$, а содержат только дифференциалы функций (20). Будем искать 1-формы, порождающие $\mathcal{L}_k$. Любое $\mathcal{L}_k$ содержит dt . Минимальное k , для которого модуль $\mathcal{L}_k$ отличен от линейной оболочки dt , обозначим через k_0 . Из доказательства теоремы 15 следует, что модуль $\mathcal{L}_{k_0}$ имеет базис, состоящий из форм вида $dt, dh_1, \dots, dh_{m_1}$. При этом 1-формы $dt, dh_1, \dots, dh_{m_1}, d\dot{h}_1, \dots, d\dot{h}_{m_1}$ линейно независимы и лежат в $\mathcal{L}_{k_0+1}$. Этот набор форм дополняется до базиса в $\mathcal{L}_{k_0+1}$ точными формами $dh_{m_1+1}, \dots, dh_{m_2}$, где $m_1 \leq m_2 \leq m$. Продолжаем увеличивать k пока не получим набор m функций $h_1, \dots, h_m$, который и представляет собой линеаризующий выход системы (2).

В третьей главе понятие плоскостности обобщается на системы с запаздыванием вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & f(t, x(t), u(t), x(t-a_1), u(t-a_1), \dots \\ & \dots, x(t-a_\rho), u(t-a_\rho)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (29)$$

где f — гладкая векторная функция, $a_1, \dots, a_\rho$ — действительные положительные постоянные.

Для произвольной функции g от t и любого действительного числа a обозначим через g_a функцию $g_a(t) = g(t-a)$ (например, $x_{i,a}(t) = x_i(t-a)$), а через $\mathcal{A}$ — множество чисел вида $i_1 a_1 + \dots + i_\rho a_\rho$, где $i_1, \dots, i_\rho$ — произвольные целые.

Систему (29) мы называем *плоской*, если существуют функции $h_1, \dots, h_r$, зависящие от конечного набора функций вида

$$t, x_{i,a}, u_{j,a}^{(l)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad l \geq 0, \quad a \in \mathcal{A},$$

и удовлетворяющие следующим двум условиям. Во-первых, функции x и u выражаются через конечный набор функций вида $t, h_{s,a}^{(l)}$, где $a \in \mathcal{A}$ и производная по t берется с учетом (29). Во-вторых, любой конечный набор функций вида $t, h_{s,a}^{(l)}$, $a \in \mathcal{A}$, с учетом (29) функционально независим. Набор $(h_1, \dots, h_r)$, удовлетворяющий указанным условиям, называется *линеаризующим выходом* системы (29).

Рассмотрим систему уравнений, получающуюся из системы (29) заменой $x(t-a_i)$ и $u(t-a_i)$ для $i = \overline{1, \rho}$ на $x(t)$ и $u(t)$ соответственно, т.е. динамическую систему с управлением

$$\dot{x} = f(t, x, u, \dots, x, u). \quad (30)$$

Для функции h , зависящей от t и конечного набора переменных $x_{i,a}$, $u_{j,a}^{(l)}$, $a \in \mathcal{A}$, обозначим через $\check{h}$ функцию, получающуюся из h заменой $x_{i,a}$, $u_{j,a}^{(l)}$ для любого $a \in \mathcal{A}$ на x_i , $u_j^{(l)}$ соответственно. Для систем с запаздыванием получено следующее необходимое условие плоскостности.

Теорема 17 Пусть система (29) автономная или ее правая часть периодическая по t и любое число $a_1, \dots, a_\rho$ является ее периодом. Если, кроме того, система (29) плоская с линеаризующим выходом $(h_1, \dots, h_r)$, то система (30) также плоская, и $(\check{h}_1, \dots, \check{h}_r)$ — ее линеаризующий выход.

Эта теорема позволяет доказывать не только неплоскостность системы вида (29), если система (30) не является плоской, но и дает дополнительную информацию о линеаризующем выходе системы (29), если она плоская. Использование этой информации позволило найти линеаризующий выход системы с запаздыванием, описывающей модель дизельного двигателя.

Особенностью плоских систем с запаздыванием является то, что как переход от переменных состояния и управления к переменным линеаризующего выхода, так и обратный переход может зависеть не только от значений переменных "в настоящем и прошлом", но и от значений переменных "в будущем" (при $a < 0$). Однако при решении задач теории управления можно использовать только функции переменных "в настоящем и прошлом". Эта особенность создает дополнительную трудность при распространении методов решения упомянутых задач в случае плоских систем без запаздывания на случай плоских систем с запаздыванием. В главе 3 предлагаются методы решения задач терминального управления и стабилизации с преодолением этой трудности. Метод решения задачи стабилизации демонстрируется на примере системы, описывающей модель дизельного двигателя.

В четвертой главе предложен еще один путь решения задачи плоскостности. Он основан на применении теории деформаций геометрических структур, построенной Д. К. Спенсером, В. Гийемином, С. Стернбергом и другими. В диссертации теория деформаций обобщена на бесконечномерный случай. Суть этого обобщения заключается в замене условия (24) из теоремы 10 на равенство

$$(d_C + R)(\omega) = 0, \quad \text{где } R = \Delta^{-1} \circ d_C \circ \Delta - d_C.$$

Задача поиска обратимого C -дифференциального оператора Δ заменяется на задачу поиска оператор R указанного вида.

Показано, что матричный оператор R имеет компоненты вида

$$R_{ij} = \sum_s \alpha_{ij}^s \wedge D^s, \quad \alpha_{ij}^s \in C^1 \Lambda(\mathcal{E}), \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Множество матричных операторов размера $m \times m$ такого вида обозначается через $C^1 \Lambda \text{Diff}(\mathcal{E})$. Вводятся *подстановка* векторного поля Z в $R \in C^1 \Lambda \text{Diff}(\mathcal{E})$:

$$(Z \rfloor R)_{ij} = \sum_s (Z \rfloor \alpha_{ij}^s) D^s,$$

и *правая подстановка* Z в R :

$$(R \rfloor Z)_{ij} = \sum_s D^s \circ (Z \rfloor \tilde{\alpha}_{ij}^s), \quad R_{ij} = \sum_s D^s \circ (\tilde{\alpha}_{ij}^s \wedge 1).$$

Для фиксированного R из $C^1 \Lambda \text{Diff}(\mathcal{E})$ и произвольных C -дифференциального оператора A и векторного поля Z вводятся операторы

$$Z \langle A \rangle = Z \rfloor ([d_C, A] - A \circ R), \quad Z \{ A \} = ([d_C, A] + R \circ A) \rfloor Z.$$

Теорема 18 Пусть ω — m -столбец 1-форм, образующих Б-базис системы. В окрестности точки общего положения система плоская тогда и только тогда, когда существует оператор $R \in C^1 \Lambda \text{Diff}(\mathcal{E})$, удовлетворяющий условиям:

$$(A) \quad (d_C + R)(\omega) = 0;$$

$$(B) \quad d_C(R) + R \circ R = 0;$$

(C) для любого положительного k и любого набора векторных полей $Z_1, \dots, Z_k$ порядок операторов

$$Z_k \langle \dots Z_1 \{id\} \dots \rangle \quad \text{и} \quad Z_k \{ \dots Z_1 \{id\} \dots \}$$

ограничен фиксированным числом.

Данная теорема дает необходимое и достаточное условие плоскостности и следующий алгоритм поиска линеаризующего выхода в случае, когда порядок оператора R ограничен сверху.

Шаг 1. Для исследуемой системы с управлением находим Б-базис ω .

Шаг 2. Находим оператор $R \in C^1 \wedge \text{Diff}(\mathcal{E})$, удовлетворяющий условиям (A), (B) и (C).

Шаг 3. В окрестности заданного решения s системы находим C -дифференциальный оператор Δ из уравнений

$$d_C(\Delta) = \Delta \circ R, \quad \Delta|_s = id.$$

Шаг 4. Находим линеаризующий выход h из уравнения $\Delta(\omega) = d_C h$.

Представленный результат обобщен на случай плоских систем уравнений в частных производных. А именно, пусть задана какая-либо система уравнений в частных производных на функции $u = (u^1, \dots, u^m)$ переменных $t = (t_1, \dots, t_n)$:

$$G_\alpha(t, u, \dots, u_\sigma, \dots) = 0, \quad \alpha = \overline{1, l}. \quad (31)$$

Здесь и далее σ — мультииндекс, а для $\sigma = i_1 \dots i_k$ полагаем $|\sigma| = k$,

$$u_\sigma = \left(\frac{\partial^{|\sigma|} u^1}{\partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_k}}, \dots, \frac{\partial^{|\sigma|} u^m}{\partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_k}} \right).$$

Выражение, стоящее в левой части равенства (31), означает, что функция G_α зависит от t, u и некоторого конечного набора производных вида u_σ . Система (31) называется *плоской*, если существуют такие функции

$$y^1 = h^1(t, u, \dots, u_\sigma, \dots), \dots, y^r = h^r(t, u, \dots, u_\sigma, \dots), \quad (32)$$

что переменные u выражаются с учетом (31) через $t_1, \dots, t_n$, функции (32) и производные до какого-то конечного порядка функций (32) по $t_1, \dots, t_n$, а любой конечный набор функций (32), их производных с учетом (31) и функций $t_1, \dots, t_n$ функционально независим. При этом функции (32) называются *линеаризующими зависимыми переменными* системы (31).

Теорема 18 дает метод решения и других классических задач теории дифференциальных уравнений, которые, как и задача плоскостности, сводятся к решению уравнения (24). Показано, что задача поиска условий совместности систем именно такая задача, и предложен новый метод ее решения.

Пятая глава посвящена обобщению теории диффеотопов на системы функционально-дифференциальных уравнений, имеющих гранично-дифференциальную форму вида

$$G(t, u(t), u_\sigma(t), u(g(t)), u_\sigma(g(t))) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, g \in \mathcal{G}, \quad (33)$$

где $\mathcal{G}$ — конечный набор отображений пространства независимых переменных $\mathbb{R}^n$. Показано, что системы с запаздыванием, системы с распределенными параметрами и системы интегро-дифференциальных уравнений имеют такой вид.

Известное понятие пространства джетов обобщается так, чтобы системы гранично-дифференциальных уравнений можно было интерпретировать как подмногообразия этого пространства. А именно, для каждой точки $t_0 \in \mathbb{R}^n$ вводится следующее отношение эквивалентности на множестве бесконечно дифференцируемых векторных функций. Векторные функции $u(t)$ и $v(t)$ эквивалентны, если они имеют одинаковые производные всех порядков во всех точках $g(t_0)$, $g \in \mathcal{G}$. Класс эквивалентности функции $u(t)$ мы называем $(\infty, \mathcal{G})$ -джетом функции $u(t)$ в точке t_0 . Пространство $(\infty, \mathcal{G})$ -джетов m -векторных функций от n переменных обозначается через $J^\infty(n, m; \mathcal{G})$. На этом пространстве вводится следующая каноническая система координат:

$$\{t_i, u_{\sigma g}^j : i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, |\sigma| \geq 0, g \in \mathcal{G}\}.$$

Распределение на $J^\infty(n, m; \mathcal{G})$, заданное векторными полями

$$D_i = \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{\sigma, j, g, l} \frac{\partial g^*(t_l)}{\partial t_i} u_{\sigma l, g}^j \frac{\partial}{\partial u_{\sigma g}^j}, \quad i = \overline{1, n},$$

называют *распределением Картана на $J^\infty(n, m; \mathcal{G})$* .

Уравнения (33) и все их следствия определяют подмногообразие $\mathcal{E}^\infty$ пространства $J^\infty(n, m; \mathcal{G})$. Векторные поля D_i , $i = \overline{1, n}$, касаются подмногообразия $\mathcal{E}^\infty$. Их ограничение на $\mathcal{E}^\infty$ задают распределение, которое называют *распределением Картана на $\mathcal{E}^\infty$* . Подмногообразие $\mathcal{E}^\infty$, снабженное распределением Картана называют *диффеотопом системы (33)*.

Теорема 19 Подмногообразие $N \subset \mathcal{E}^\infty$ есть график решения системы (33), в том и только том случае, когда N является максимальным интегральным многообразием распределения Картана на $\mathcal{E}^\infty$, инвариантным относительно любого отображения $g \in \mathcal{G}$.

Данная теорема мотивирует следующее определение высшей симметрии. Определим модуль картановских форм на $\mathcal{E}^\infty$ как множество $C^1\Lambda(\mathcal{E})$ таких 1-форм, которые в каждой точке $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ аннулируются векторами распределения Картана на $\mathcal{E}^\infty$. *Высшей (инфинитезимальной) симметрией системы (33) мы называем такое вертикальное поле X на $\mathcal{E}^\infty$, которое удовлетворяет условиям*

$$X(C^1\Lambda(\mathcal{E})) \subset C^1\Lambda(\mathcal{E}) \quad \text{и} \quad \hat{g}^* \circ X = X \circ \hat{g}^*$$

для любого $g \in \mathcal{G}$. Известный метод вычисления высших симметрий обобщен на рассматриваемый случай системы функционально-дифференциальных уравнений, имеющих гранично-дифференциальную форму.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ РАБОТЫ

1. Бесконечномерная геометрия является основой для решения задачи плоскостности и других задач приведения систем к каноническим видам.
2. Динамическая линеаризуемость эквивалентна плоскостности.

3. Динамические системы с управлением имеют богатые алгебры высших симметрий. Этот факт является базой эффективного применения теории высших симметрий для анализа и синтеза нелинейных динамических систем.
4. Бесконечномерная теория деформаций геометрических структур является основой применения метода линеаризации в теории дифференциальных уравнений.
5. Установлена связь задачи плоскостности с другими классическими нелинейными задачами теории дифференциальных уравнений. Их решение не получено известными методами и поэтому требует разработки новых методов, в том числе на основе бесконечномерной геометрии.
6. Теория диффеотопов является основой для дальнейшего расширения развитых в диссертации методов анализа и синтеза нелинейных динамических систем на системы с запаздыванием и системы с распределенными параметрами.
7. Совокупность основных результатов диссертации можно рассматривать как основание для формирования нового научного направления, состоящего в разработке методов анализа и синтеза нелинейных динамических систем на основе дифференциально-геометрической теории бесконечномерных многообразий.

ТРУДЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Четвериков В. Н. О структуре интегрируемых C -полей на бесконечно продолженных уравнениях // Доклады АН СССР. — 1986. — Т. 286, № 1. — С. 54–57.
2. Chetverikov V. N. On the structure of integrable C -fields // Differential Geom. Appl. — 1991. — V. 1. — P. 309–325.
3. Chetverikov V. N. Invertible linear differential operators on two-dimensional manifolds // Preprint of the Erwin Schrodinger International Institute for Mathematical Physics (Vienna). — 1993. — № 55. — 16 p.

4. Chetverikov V. N., Kudryavtsev A. G. A method for computing symmetries and conservation laws of integro-differential equations // *Acta Appl. Math.* — 1995. — V. 41, № 1-3. — P. 45-56.
5. Chetverikov V. N., Kudryavtsev A. G. Modelling integro-differential equations and a method for computing their symmetries and conservation laws // *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.* — 1995. — V.167. — P. 1-22.
6. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А. В. Бочаров, А. М. Вербовецкий, А. М. Виноградов и др. — М.: Факториал, 1997. — 464 с.
7. Четвериков В. Н. Геометрическая интерпретация систем с управлением // *Научный вестник МГТУ ГА. Математика.* — 1999. — № 16. — С. 69-75.
8. Четвериков В. Н. Высшие симметрии и инфинитезимальная форма Бруновского систем с управлением // *Научный вестник МГТУ ГА. Математика.* — 1999. — № 16. — С. 77-83.
9. Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics / A. V. Bocharov, V. N. Chetverikov, S. V. Duzhin et al. — Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1999. — 333 p.
10. Chetverikov V. N. New flatness conditions for control systems // *Proc. of NOLCOS'01.* — St.Petersburg, 2001. — P. 168-173.
11. Дорошенко Т. Г., Четвериков В. Н. Управление плоскими системами // *Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов VII Международного семинара.* — М., 2002. — С. 154-155.
12. Chetverikov V. N. New flatness conditions for control systems // *Nonlinear Control Systems 2001 / A. B. Kurzhanski, A. L. Fradkov, Eds.* — St.Petersburg, 2002. — P. 191-196.

13. Четвериков В. Н. Высшие симметрии и инфинитезимальная форма Бруновского систем с управлением // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38, № 11. — С. 1525–1532.
14. Chetverikov V. N., Kanatnikov A. N., Krishchenko A. P. Classical and higher symmetries of control systems // Proc. of the 15th World Congress IFAC b'02. — Barcelona (Spain), 2002. — P. 221–226.
15. Дорошенко Т. Г., Четвериков В. Н. Терминальное управление плоской системой // Нелинейная динамика и управление: Сборник статей / Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина (М.). — 2003. — Вып. 3 — С. 191–200.
16. Chetverikov V. N. Flat control systems and deformations of structures on diffeities // Forum Math. — 2004. — V. 16. — P. 903–923.
17. Четвериков В. Н. Плоскостность динамически линеаризуемых систем // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40, № 12. — С. 1665–1674.
18. Chetverikov V. N. A nonlinear Spencer complex for the group of invertible differential operators and its applications // Acta Appl. Math. — 2004. — V. 83, № 1–2. — P. 1–23.
19. Четвериков В. Н. Плоские управляемые системы с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 12. — С. 1655–1662.
20. Горбунов А. В., Четвериков В. Н. Управление плоской системой с запаздыванием на примере дизельного двигателя // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов IX Международного семинара им. Е. С. Пятницкого. — М., 2006. — С. 64–65.
21. Четвериков В. Н. Динамически линеаризуемые и плоские системы с управлением // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, № 8. — С. 1143–1144.

Подписано к печати 1.12.2006 г. Заказ № 546 Объем 1.75 п.л. Тираж 100 экз.

Типография МГТУ имени Н.Э.Баумана