

На правах рукописи

ТОМАШПОЛЬСКИЙ Виктор Яковлевич

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В ОДНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО УПРУГОГО КОМПОЗИТА

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ.

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

МОСКВА – 2006

Работа выполнена в Московском государственном
техническом университете им. Н. Э. Баумана

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Ильичев А. Т.

Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., проф. Димитриенко Ю. И.
к.ф.-м.н. Динариев О. Ю.

Ведущая организация: НИИ Механики МГУ им. М. В. Ломоносова

Защита диссертации состоится “___” _____ 2006 года
в ___ часов ___ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15
при Московском государственном техническом университете им. Н. Э.
Баумана по адресу: 105005, г. Москва, 2-ая Бауманская улица, д. 5.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью ор-
ганизации, просим высылать по адресу: 105005, г. Москва, 2-ая Бауман-
ская улица, д. 5, МГТУ им. Н. Э. Баумана, ученому секретарю совета
Д 212.141.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
Н. Э. Баумана.

Автореферат разослан “___” _____ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н., профессор



Волков И. К.



Общая характеристика работы

Актуальность проблемы

В последнее время в теории упругости и приложениях имеется устойчивый интерес к так называемым композиционным материалам. Как следует из их названия, эти материалы состоят из различных перемешивающихся на макроуровне веществ. Для изучения крупномасштабных процессов, с характерным масштабом, сильно превосходящим размер неоднородностей, используется метод осреднений основных уравнений модели. Известно, что свойства композита, описываемого осредненными уравнениями, и свойства составляющих его компонент существенно различаются. В частности, типичен случай возникновения дисперсии, несмотря на то, что в каждом из упругих материалов, составляющих композит, дисперсии нет. Таким образом, композит, состоящий из упругих материалов с нелинейным уравнением состояния, представляет собой диспергирующую среду, в которой могут распространяться волны, являющиеся результатом взаимодействия нелинейных и дисперсионных эффектов, в том числе уединенные волны.

Уединенные волны относятся к общему классу непериодических бегущих волн постоянной формы, основной характеристикой которых является убывание или выход на периодическую асимптотику на пространственной бесконечности. В диспергирующих средах уединенные волны появляются вследствие баланса эффектов нелинейности и дисперсии.

Согласно понятиям современной теории нелинейных волн, классические уединенные волны – локализованные по пространству решения нелинейных уравнений, описывают волновые процессы в средах с обратимостью и дисперсией. Их взаимодействие происходит без изменения формы, и в этом смысле подобно взаимодействию частиц. Однако, принятое в настоящее время понятие уединенной волны относится к более общему классу непериодических бегущих волн, основной харак-

теристикой которых является убывание или выход на периодическую асимптотику на пространственной бесконечности. В последнем случае такая волна называется обобщенно-удиненной.

В физически линейной теории упругости существование классических уединенных волн характерно для стержней или пластин, где нелинейные эффекты при распространении волн обусловлены геометрическими причинами, связанными с наличием существенных смещений при малых деформациях, а эффекты дисперсии – изгибными свойствами рассматриваемых объектов. В физически нелинейной теории упругости, где закон Гука модифицируется добавлением в зависимость напряжений от деформаций нелинейных членов, уравнения, описывающие распространение волн в сплошной среде, являются чисто гиперболическими, и дисперсионные члены отсутствуют. Композит является примером среды, где наряду с нелинейными свойствами, которые “остались” от нелинейности упругой матрицы, возникает дисперсия, которая обусловлена наличием неоднородности на макроуровне. В связи с изложенным представляется актуальным исследование распространения разных типов локализованных волн напряжений и деформаций в композитах и, в частности, влияние разных типов стационарных локализованных структур (классических и обобщенно-удиненных волн) на физические особенности нестационарных волновых процессов, связанных с распадом или распространением локализованных возмущений. Вопрос о эволюции последних имеет фундаментальный характер в любой физической системе.

Цель работы

Целью данной работы является изучение вопросов существования классических и обобщенных уединенных волн, а также особенностей их взаимодействия, устойчивости и распада при распространении квазипоперечных волн в композите, который представляет собой упругую матрицу, содержащую однородно распределенные упругие стержни со значительной жесткостью на изгиб, ориентированные в направлении распространения волны.

Научная новизна

В настоящей работе впервые исследовались нелинейные локализован-

ные волновые структуры в упругом композите. На примере простой модели композита показано существование уединенных волн различных типов, изучена устойчивость последних, классифицированы типы неустойчивости классических уединенных волн, приводящей, в частности, к неограниченному росту напряжений в композите, а также описан ряд особенностей нестационарных процессов эволюции локализованных возмущений в композите во взаимосвязи с существованием различных типов уединенных волн.

Практическая ценность

Полученные в диссертации результаты вносят вклад в общую теорию распространения волн в упругих средах и дают представление о возможных новых механизмах распада локализованных структур в упругих средах при наличии дисперсии.

Используемые методы исследования могут применяться для изучения нелинейных волн как для моделей бездиссипативной теории упругости, так и для других обратимых моделей механики сплошной среды.

Апробация

Результаты диссертации докладывались на семинаре по механике сплошных сред под руководством А. Г. Куликовского, А.А. Бармина и В. П. Карликова в НИИ Механики МГУ им. М. В. Ломоносова и на семинаре “Актуальные проблемы вычислительной математики и механики ” под руководством Ю. И. Димитриенко в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в четырех работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов, приложения и списка литературы. Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, изложено содержание работы, приводится обзор литературы. Глава 1 посвящена постановке задачи, формулировке модели и выводу основных уравнений, описывающих распространение волн в рассматриваемой модели композита. В главе 2 изучаются классичес-

кие уединенные волны и установлены достаточные условия их устойчивости. Глава 3 посвящена исследованию типов неустойчивости и особенностей взаимодействия уединенных волн в композите без предварительных деформаций. В главе 4 рассматриваются вопросы существования классических и обобщенно-уединенных волн в композите, находящимся в предварительно деформированном состоянии. В этой главе предпринят численный анализ распада локализованного возмущения в области параметров, где классические уединенные волны замещаются обобщенно-уединенными. В приложении излагаются используемые в диссертации результаты качественной теории динамических систем. В выводах приводится обзор полученных результатов.

Содержание работы

Во введении содержится общая характеристика и история исследуемой проблемы, обосновывается ее актуальность, сформулирована цель работы. Кратко излагается содержание работы.

В первой главе приводится формулировка задачи и вывод основных уравнений модели. В п. 1.1 излагаются основные положения теории плоских волн в слабоанизотропной нелинейной упругой среде и приводятся дифференциальные уравнения, описывающие квазипоперечные волны, распространяющиеся вдоль оси x . Этим уравнениям подчиняются градиенты перемещений u_i , $i = 1, 2$ в плоскости волны, а также компоненты v_i , $i = 1, 2$ вектора скорости лагранжевых частиц среды.

В п. 1.2 в предположении того, что среда со свойствами, рассмотренными в п. 1.1, формирует упругую матрицу композита, описывается модель композита, предложенная А. Г. Куликовским и Н. И. Гвоздской в 1999 году (ПМТФ, т. 40, с. 174-180), где общая энергия представляется в виде суммы упругой энергии матрицы и изгибной энергии упругих стержней, ориентированных вдоль направления оси x . Суммарная энергия представляет собой гамильтониан консервативной системы, которая описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) + m \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

где ρ_0 – средняя плотность композита, Φ – упругий потенциал, который

дается выражением

$$\Phi = \frac{1}{2}f(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2}g(u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{4}\kappa(u_1^2 + u_2^2)^2.$$

Постоянные $f, g > 0$, κ и m характеризуют упругие модули, анизотропию, нелинейность и жесткость стержня на изгиб, соответственно.

В главе 2 рассматриваются уединенные волны в композите, начальное состояние которого является недеформированным, т. е. солитонные решения уравнений (1), выходящие на нулевую асимптотику на пространственной бесконечности. В п. 2.1 этой главы приводятся выражения для классических уединенных волн деформаций.

После подстановки в (1) $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\xi)$, где $\xi = x - Vt$, V — постоянная скорость распространения волны, и однократного интегрирования с использованием условий убывания на бесконечности получим

$$v_i = -V u_i, \quad \frac{m}{\rho_0} \ddot{u}_i = (\mu_i - V^2) u_i - \frac{\kappa}{\rho_0} u_i (u_1^2 + u_2^2), \quad (2)$$

где $\mu_1 = (f - g)/\rho_0$, $\mu_2 = (f + g)/\rho_0$. Точки обозначают дифференцирование по ξ .

В анизотропном случае ($g \neq 0$) уравнения (2) имеют два двухпараметрических семейства солитонных решений (параметрами служат скорость и сдвиг фазы):

$$u_1^c = \pm \sqrt{2\rho_0\kappa^{-1}(\mu_1 - V^2)} \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\rho_0 m^{-1}(\mu_1 - V^2)} \xi, \quad u_2^c = 0 \quad (3)$$

при $0 < V^2 < \mu_1$, и

$$u_1^c = 0, \quad u_2^c = \pm \sqrt{2\rho_0\kappa^{-1}(\mu_2 - V^2)} \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\rho_0 m^{-1}(\mu_2 - V^2)} \xi \quad (4)$$

при $0 < V^2 < \mu_2$. В изотропном случае ($g = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$) происходит слияние семейств (3,4) в результате чего образуется единственное трехпараметрическое семейство решений: дополнительным параметром служит угол поворота φ в плоскости (u_1, u_2) . Представителем указанного семейства для $\varphi = \pi/2$ является уединенная волна

$$u_1^c = \pm \sqrt{2\rho_0\kappa^{-1}(\mu - V^2)} \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\rho_0 m^{-1}(\mu - V^2)} \xi, \quad u_2^c = 0 \quad (5)$$

при $0 < V^2 < \mu$.

В п. 2.2 установлены достаточные условия устойчивости семейств уединенных волн. Семейство (3) орбитально устойчиво при $\mu_1/2 <$

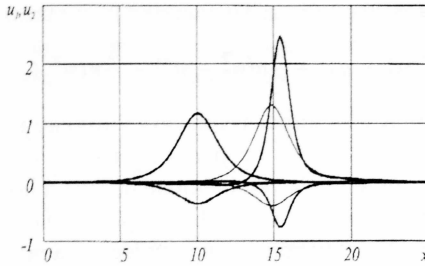


Рис.1. Компоненты u_1 (волна возвышения) и u_2 (волна понижения уровня) неустойчивой изотропной уединенной волны при $t = 0; 10; 12$, $\varphi = 1.27$, $V = 0.5$, $f = 1$, $\rho_0 = 1$, $m = 1$, $\kappa = 1$

$V^2 < \mu_1$. Семейство (4) оказывается всегда неустойчивым, а изотропное семейство (5) орбитально устойчиво для $\mu/2 < V^2 < \mu$. Под орбитальной устойчивостью подразумевается устойчивость в следующем смысле: малое возмущение какого-либо элемента орбиты приводит с течением времени к решению, близкому к другому элементу этой же орбиты.

Глава 3 посвящена исследованию типов неустойчивости и особенностей взаимодействия уединенных волн в композите без предварительных деформаций. В п. 3.1 предпринят анализ типов неустойчивости семейств (3-5). Анализ производится при помощи численного интегрирования уравнений (1), где в качестве данных Коши берутся представители соответствующих семейств (3-5). В качестве дискретного аналога уравнений может использоваться трехслойная схема типа “крест” с аппроксимацией второго порядка по времени или двухслойная схема с аппроксимацией первого порядка (контрольная схема). Двухслойная схема позволяет при желании включать в исходные уравнения диссипативные члены. Сравнение результатов по этим двум схемам не выявило существенных различий из-за мелкого шага по времени; в расчетах поддерживалось условие $\Delta t = c_0 \Delta x^3$, где c_0 – некоторая постоянная.

Показано, что для скоростей, удовлетворяющих неравенству $0 < V^2 < \mu_1/2$ ($0 < V^2 < \mu/2$) уединенные волны семейств (3), (5) под-

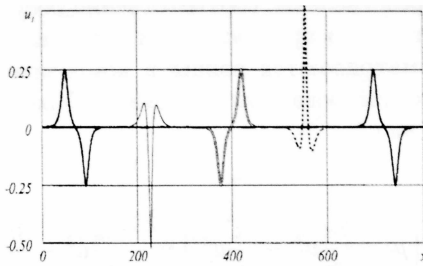


Рис.2. Несколько положений связанного состояния двух взаимодействующих устойчивых уединенных волн возвышения и понижения уровня во время одного периода взаимодействия при $\varphi = \pi/2$, $V = 0.875$, $f = 1$, $g = 0.2$, $\rho_0 = 1$, $\kappa = 1$

вержены неустойчивости, которая на нелинейной стадии приводит к коллапсу волны, т. е. происходит бесконечный рост амплитуды волны, сопровождающийся уменьшением носителя до нуля, за конечное время. Результаты численных расчетов для некоторых значений параметров представлены на рис. 1. Для семейства (4) (которое, как уже упоминалось, неустойчиво для любых значений скорости) коллапс наблюдался под действием возмущений компоненты u_2 в диапазоне $0 < V^2 < \mu_2/2$. При возмущении компоненты u_1 имеет место тип неустойчивости, который характеризуется как обменная неустойчивость, т. е. происходит обмен энергией между ненулевой солитонной компонентой u_2 и компонентой u_1 деформаций, в которую эволюционирует начальное возмущение. Развитие этой неустойчивости имеет медленный характер, в отличие от взрывной неустойчивости, результатом которой является коллапс.

В п. 3.2 исследуется взаимодействие устойчивых уединенных волн различной полярности как при помощи асимптотических методов, так и численно. Показано, в частности, что возможно образование связанных состояний – бризеров, колеблющихся вокруг общего центра и распространяющихся с постоянной скоростью. На рис. 2 приводится пример изменения формы бризера за один период колебаний для некоторых значений физических параметров.

В пп. 3.3 и 3.4 представлены, соответственно обсуждение результатов главы 3 и используемая при численных расчетах разностная схема.

В главе 4 рассматриваются волны в композите, находящемся в предварительно деформированном состоянии. Уравнения (1) в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} &= \frac{\partial v_i}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu_i - \frac{3\kappa}{\rho_0} u_{0i}^2 - \frac{\kappa}{\rho_0} u_{0j}^2 \right) u_i - \frac{\kappa}{\rho_0} u_i^3 - \frac{3\kappa}{\rho_0} u_{0i} u_i^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\kappa}{\rho_0} u_i u_j^2 - \frac{2\kappa}{\rho_0} u_{0j} u_i u_j - \frac{\kappa}{\rho_0} u_{0i} u_j^2 - \frac{2\kappa}{\rho_0} u_{0i} u_{0j} u_j \right] - \frac{m}{\rho_0} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3},\end{aligned}$$

где постоянные u_{01}, u_{02} характеризуют предварительную деформацию u_1 и u_2 , соответственно.

После подстановки в последнюю систему уравнений $u_i = u_i(\xi)$, $v_i = v_i(\xi)$ и однократного интегрирования с использованием условий убывания на бесконечности получим ($i, j = 1, 2, i \neq j$)

$$\begin{aligned}v_i &= -V u_i, \\ \frac{m}{\rho_0} \ddot{u}_i &= \left(\mu_i - \frac{3\kappa}{\rho_0} u_{0i}^2 - \frac{\kappa}{\rho_0} u_{0j}^2 - V^2 \right) u_i - \frac{\kappa}{\rho_0} u_i^3 - \frac{3\kappa}{\rho_0} u_{0i} u_i^2 - \frac{\kappa}{\rho_0} u_i u_j^2 - \\ &\quad - \frac{2\kappa}{\rho_0} u_{0j} u_i u_j - \frac{\kappa}{\rho_0} u_{0i} u_j^2 - \frac{2\kappa}{\rho_0} u_{0i} u_{0j} u_j.\end{aligned}\tag{6}$$

В п. 4.2 рассматриваются свойства дисперсионного соотношения $\omega = \omega(k)$ (ω – частота, k – волновое число), отвечающего уравнениям (6). Показано, что дисперсионное соотношение распадается на две ветви. Кривые, отвечающие этим ветвям, симметричны по отношению к осям ω и k , и поэтому достаточно рассмотреть только случай $\omega \geq 0, k \geq 0$. Семейства собственных колебаний названы медленным для нижней кривой в первом квадранте плоскости (ω, k) и быстрым для верхней кривой в этом квадранте. Обозначим через ν_+ резонансное значение квадрата скорости V_{res}^2 при $k \rightarrow 0$ на верхней (быстрой) ветви и через ν_- – это значение на нижней (медленной) ветви. Взаимное расположение кривых быстрой и медленной ветвей показано на рис. 3.

В настоящей главе диссертации рассматриваются волны, движущиеся со скоростями, близкими к $\sqrt{\nu_{\pm}}$. Положим $V^2 = \nu_{\pm}(1 - \nu)$, где $\nu > 0$

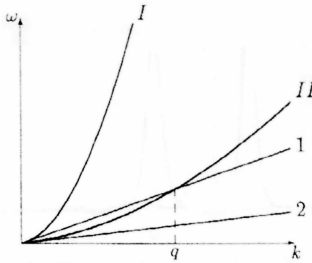


Рис.3. Взаимное расположение кривых быстрой и медленной ветвей дисперсионного соотношения; кривая I соответствует быстрой ветви, кривая II – медленной ветви. Прямые 1 и 2 касаются кривых I и II, соответственно

– малый безразмерный параметр.

При фиксированном значении фазовой скорости V прямая $\omega = kV$ на положительной полуоси k имеет не более двух точек пересечения с обеими ветвями. При $V^2 = \nu_-(1 - \nu)$, где $\nu > 0$, прямая $\omega = kV$ не пересекает ветвей при $k > 0$ и в качестве частного решения системы будет уединенная волна. При $V^2 = \nu_+(1 - \nu)$, $\nu > 0$, прямая $\omega = kV$ при $k > 0$ пересекает медленную ветвь, следовательно, имеет место резонанс длинной медленной и короткой быстрой волн, что означает, что классическая уединенная волна в данном случае должна замещаться обобщенно-уединенной.

В п. 4.3 рассматривается случай $V^2 = \nu_-(1 - \nu)$, когда скорости волн находятся в левой полуокрестности резонансной скорости на нижней ветви. Для волн достаточно малой амплитуды система (6) при помощи теоремы о центральном многообразии может быть сведена к динамической системе второго порядка, которая имеет солитонные решения. Эти решения описывают семейство классических уединенных волн в композите, находящемся в предварительно деформированном состоянии. Выражение для неизвестных компонент деформаций имеет вид

$$u_1 = C\nu ch^{-2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu\nu_- \rho_0}{m}} \xi \right) + O(\nu^2), \quad u_2 = D\nu ch^{-2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu\nu_- \rho_0}{m}} \xi \right) + O(\nu^2), \quad (7)$$

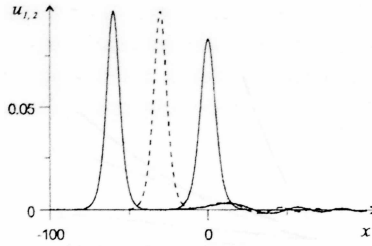


Рис.4. Эволюция формы возмущения u_1 с начальными данными (7) умеренной амплитуды ($\nu = 0.1$) при $\rho_0 = f = \kappa = m = 1$, $u_{01} = 0,3$, $u_{02} = 0,3$, $g = 0$ для медленной волны в моменты времени $t = 0$, $t = 300$, $t = 600$ (движение происходит справа налево). Окончательно формируется классическая уединенная волна, распространяющаяся без изменения формы

где C, D – некоторые постоянные.

В п. 4.4 рассматриваются обобщенно-уединенные волны, отвечающие от состояния покоя при скоростях, близких к резонансной скорости на верхней ветви дисперсионного соотношения. Для $V^2 = \nu_+$ имеем бифуркацию, соответствующую резонансу длинной медленной и короткой быстрой волн. В этом случае порядок системы уравнений (6) не понижается, и для поиска решений типа уединенных волн производится замена переменных, выделяющая из искомого решения длинноволновую и коротковолновую составляющие. Решением этой системы является обобщенная уединенная волна, главная часть которой выражается формулой, полученной из (7) заменой ν_- на ν_+ . На бесконечности, однако, эта волна не убывает до нуля, как в случае классической уединенной волны, рассмотренной в предыдущем пункте, а имеет асимптотики

$$u_{1,2} \rightarrow F_{1,2} \exp\left(-\frac{E}{\sqrt{\nu}}\right) \cos q\xi, \quad \xi \rightarrow \pm\infty, \quad (8)$$

где $F_{1,2}$, $E > 0$ – некоторые постоянные, а $q = \sqrt{\rho_0 m^{-1}(\nu_+ - \nu_-)}$ – волновое число резонансной волны. Асимптотика (8) показывает, что когда отклонение от резонансной скорости ν мало, амплитуда обобщенно-

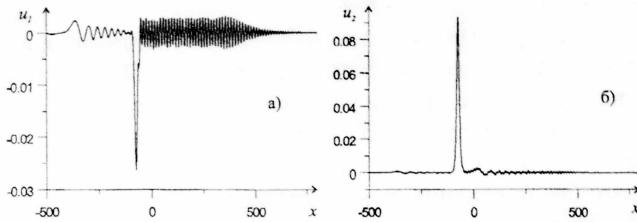


Рис.5. Распад возмущения в форме (7) для быстрой волны умеренной амплитуды ($\nu = 0.05$) при $\rho_0 = \kappa = m = 1$ $u_{01} = 0, 1$, $u_{02} = 0, 3$, $g = 0, 2$

удиненной волны на бесконечности представляет собой экспоненциально малую величину. Эта величина, однако, может оказаться значительной для умеренных значений ν .

В п. 4.5 производится численное моделирование эволюции возмущений, форма которых описывается главной частью (7) со скоростями, лежащими в окрестности V_{res} (не обязательно малой) для медленной и быстрой ветвей. В первом случае, как показано в п. 4.3, существуют классические уединенные волны, убывающие к нулю на пространственной бесконечности. Поэтому из локализованного возмущения вида (7) с течением времени должна формироваться уединенная волна, что и происходит (см. рис. 4).

Во втором случае уединенные волны замещаются обобщенно-удиненными, и возмущение в форме (7) будет излучать резонансную периодическую волну с волновым числом q (рис. 5). Причем видно, что для компоненты u_1 амплитуда излучения не является малой, как это должно было быть для малых ν , т. е. для умеренных амплитуд возмущений резонансная периодическая волна играет существенную роль в балансе энергии при эволюции.

В **выводах** перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

В **приложении** приводятся теорема о центральном многообразии и теорема о квазинормальных формах для обратимых систем.

Основные результаты работы

- Изучены типы неустойчивости классических уединенных волн в модели композита без предварительных деформаций. Показано, что в ряде случаев на нелинейной стадии развития неустойчивости уединенные волны подвержены коллапсу, что соответствует сильной концентрации напряжений в малых объемах композита;
- в композите без предварительных деформаций установлено существование периодических по времени устойчивых волновых структур – бризеров, к которым описывают локализованное распределение деформаций и напряжений;
- при наличии предварительных деформаций в композите установлено существование двух семейств уединенных волн, ответвляющихся из состояния покоя – медленного и быстрого. Медленное семейство образовано классическими уединенными волнами, а быстрое – обобщенно-уединенными волнами, которые являются продуктом нелинейного резонанса классической уединенной волны и периодической волны;
- описана эволюция локализованных возмущений для волн быстрого и медленного семейства. Для быстрого семейства эволюция характеризуется потерей энергии в результате квазистационарного излучения резонансной волны.

Основные результаты диссертации опубликованы следующих работах:

1. Bakholdin I., Il'ichev A., Tomaspol'skii V. Stability, instability and interaction of solitary pulses in a composite media//Eur. J. Mech./A Solids. – 2002. – V. 21, № 2. – P. 333-346.
2. Бахолдин И. Б., Томашпольский В. Я. Уединенные волны в модели предварительно деформированного нелинейного композита//Дифф. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 4. – С. 527-538.
3. Томашпольский В. Я. Обобщенно-уединенные волны в модели предварительно деформированного нелинейного композита//Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естеств. науки. – 2004. – Т. 3(14). – С. 57-71.
4. Томашпольский В. Я. Взаимодействие нелинейных импульсов в одной модели композита//Обзорные прикладной и промышленной мате-

матики.
ский си:
2005 г.,

У1738165

Томашпольский В.Я.
Распространение и
взаимодействие уединенных
волн в одной модели
нелинейного упругого комп...
2006 0-00

627-528 (Шестой Всероссийский
ленной математике, 3-7 мая
з).

У 1738165

ВОЗВРАТИТЕ КНИГУ НЕ ПОЗЖЕ
обозначенного здесь срока

Подписано к печати 26.12.05. Зак. 458 Объем 1.0 п.л. Тир. 100

Типография МГТУ им. Н. Э. Баумана