

На правах рукописи

СОЛДАТЕНКО Ирина Геннадьевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ НЕКОТОРЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальности: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ.
05.11.03 – Гироскопы, навигационные приборы и
комплексы.

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2006

AS

53

001

Работа выполнена в Московском государственном техническом
университете им. Н. Э. Баумана

Научный руководитель: д. ф.-м.н., проф. Агафонов С.А.
Официальные оппоненты: д. ф.-м. н., проф. Жбанов Ю.К.
к. т. н., доц. Подчерзцев В.П.

Ведущая организация: НИИ Механики МГУ им.
М. В. Ломоносова.

Защита диссертации состоится «21» февраля 2006 года
в 11 часов 00 мин. на заседании диссертационного совета
Д212.141.15 при Московском государственном техническом университете
им. Н. Э. Баумана по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул. д. 5.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью ор-
ганизации, просим высылать по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская
ул., д. 5, МГТУ им. Н. Э. Баумана, ученому секретарю совета Д212.141.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э.
Баумана.

Автореферат разослан «18» января 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор



Волл

НТВ МГТУ им. Н. Э. Баумана



1738168

Солдатенко И. Г. Математиче

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Диссертационная работа посвящена исследованию и моделированию динамики различных гироскопических систем. Фундаментальные результаты по динамике различных гироскопических систем получены в работах А. Ю. Ишлинского, В. Ф. Журавлева, Ю. К. Жбанова, Д. Р. Меркина, В.Н. Кошлякова, Д. М. Климова и др. Решается также задача устойчивости корректируемого гироскопа, установленного на подвижном основании. Изучение устойчивости невозмущенного движения на подвижном основании позволяет ответить на вопрос о работоспособности в условиях маневрирования объекта, на котором установлен гироскоп. В настоящее время одним из наиболее перспективных направлений в рассмотрении динамики гироскопических систем является исследование нелинейных уравнений движения систем, что является актуальной проблемой. Не менее важным вопросом является математическое моделирование, целью которого служит дополнение и подтверждение теоретических результатов, полученных в работе.

Цель и задачи исследования. Целью работы являются исследование динамики и устойчивости, а также численный анализ уравнений движения гироскопических систем: гировертикаль с радиальной коррекцией, корректируемый гироскоп, динамически настраиваемый гироскоп, а также динамики неуровновешенного ротора, установленного в упругих подшипниках. Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих основных задач:

1. Исследование условий возникновения автоколебательного режима гировертикали с радиальной коррекцией и его устойчивости.
2. Нахождение в первом приближении областей динамической неустойчивости корректируемого гироскопа при наличии резонансов, когда точка подвеса совершает циркуляцию по земной сфере.
3. Нахождение двухпараметрического семейства периодических решений динамически настраиваемого гироскопа.
4. Исследование условий существования предельного цикла и его устойчивости в системе, представляющей собой неуровновешенный ротор.

Методы исследования. Для решения задач, поставленных в диссертационной работе, используются следующие методы: метод Ляпунова

анализа устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней; теорема Андронова-Хопфа о рождении предельного цикла; метод осреднения и вторая теорема Боголюбова; метод Хилла и теорема Ляпунова о голоморфном интеграле.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением некоторых теоретических положений с данными численного эксперимента, а также сравнением результатов, полученных различными методами. Результаты диссертационной работы согласуются с результатами, полученными ранее другими авторами и другими методами в частных и предельных случаях.

Научная новизна. Доказана одна теорема об устойчивости механической системы, находящейся под действием диссипативных, гироскопических и неконсервативных позиционных сил. Эта теорема используется для анализа устойчивости стационарного движения гировертикали с радиальной коррекцией. Исследован в нелинейной постановке вопрос потери устойчивости стационарного движения и построен предельный цикл, возникающий при переходе через бифуркационное значение параметра (бифуркация Андронова-Хопфа). Рассмотрены некоторые схемы корректируемого гироскопа в полной, не прецессионной постановке, и исследованы возможности возникновения неустойчивости при наличии основных и комбинационных резонансов. В рамках нелинейной постановки построены периодические решения уравнений динамически настраиваемого гироскопа.

Практическая и теоретическая ценность. Полученные теоретические положения расширяют и дополняют результаты, полученные ранее в этой области. Они могут быть использованы в научных организациях, ведущих исследования и конструирование рассмотренных в работе гироскопических систем.

На защиту выносятся следующие положения:

- Доказательство теоремы об устойчивости механической системы, являющейся частным случаем системы общего вида.
- Исследование условий возникновения предельного цикла гировертикали с радиальной коррекцией, исследование устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней.

- Неравенства, описывающие в первом приближении области динамической неустойчивости корректируемого гироскопа, в случае, когда основание совершает циркуляцию.
- Построение двухпараметрического семейства периодических решений динамически настраиваемого гироскопа, а также выражения для частот собственных колебаний.
- Условия возникновения предельного цикла неуравновешенного ротора. Исследование устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней.
- Результаты численного анализа возникающего предельного цикла гироскопа с радиальной коррекцией.
- Результаты численного моделирования уравнений движения корректируемого гироскопа в случае резонанса.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на Международной научной конференции: «Моделирование динамических систем и исследование устойчивости» (Киев, 1999), V и VI Крымских международных математических школах: «Метод функций Ляпунова и его приложения» (Алушта, 2000 и 2002), Международных научных конференциях «Моделирование динамических систем и исследование устойчивости» (Киев, 2001, 2003), конференции «Математические модели в образовании, науке и промышленности» (Санкт-Петербург, 2003), научной конференции «Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы» (Москва, 2005), 3-й Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике» (Москва, 2005).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 5-и научных статьях [3, 5, 7, 9, 10] и 6-и тезисах докладов [1, 2, 4, 6, 8, 11]. Все публикации без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, выводов, списка литературы и приложения. Диссертация изложена на 100 страницах, содержит 18 иллюстраций. Библиография включает 61 наименование.

анализа устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней; теорема Андронова-Хопфа о рождении предельного цикла; метод осреднения и вторая теорема Боголюбова; метод Хилла и теорема Ляпунова о голоморфном интеграле.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением некоторых теоретических положений с данными численного эксперимента, а также сравнением результатов, полученных различными методами. Результаты диссертационной работы согласуются с результатами, полученными ранее другими авторами и другими методами в частных и предельных случаях.

Научная новизна. Доказана одна теорема об устойчивости механической системы, находящейся под действием диссипативных, гироскопических и неконсервативных позиционных сил. Эта теорема используется для анализа устойчивости стационарного движения гировертикали с радиальной коррекцией. Исследован в нелинейной постановке вопрос потери устойчивости стационарного движения и построен предельный цикл, возникающий при переходе через бифуркационное значение параметра (бифуркация Андронова-Хопфа). Рассмотрены некоторые схемы корректируемого гироскопа в полной, не прецессионной постановке, и исследованы возможности возникновения неустойчивости при наличии основных и комбинационных резонансов. В рамках нелинейной постановки построены периодические решения уравнений динамически настраиваемого гироскопа.

Практическая и теоретическая ценность. Полученные теоретические положения расширяют и дополняют результаты, полученные ранее в этой области. Они могут быть использованы в научных организациях, ведущих исследования и конструирование рассмотренных в работе гироскопических систем.

На защиту выносятся следующие положения:

- Доказательство теоремы об устойчивости механической системы, являющейся частным случаем системы общего вида.
- Исследование условий возникновения предельного цикла гировертикали с радиальной коррекцией, исследование устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней.

- Неравенства, описывающие в первом приближении области динамической неустойчивости корректируемого гироскопа, в случае, когда основание совершает циркуляцию.
- Построение двухпараметрического семейства периодических решений динамически настраиваемого гироскопа, а также выражения для частот собственных колебаний.
- Условия возникновения предельного цикла неуравновешенного ротора. Исследование устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней.
- Результаты численного анализа возникающего предельного цикла гироскопа с радиальной коррекцией.
- Результаты численного моделирования уравнений движения корректируемого гироскопа в случае резонанса.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на Международной научной конференции: «Моделирование динамических систем и исследование устойчивости» (Киев, 1999), V и VI Крымских международных математических школах: «Метод функций Ляпунова и его приложения» (Алушта, 2000 и 2002), Международных научных конференциях «Моделирование динамических систем и исследование устойчивости» (Киев, 2001, 2003), конференции «Математические модели в образовании, науке и промышленности» (Санкт-Петербург, 2003), научной конференции «Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы» (Москва, 2005), 3-й Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике» (Москва, 2005).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 5-и научных статьях [3, 5, 7, 9, 10] и 6-и тезисах докладов [1, 2, 4, 6, 8, 11]. Все публикации без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, выводов, списка литературы и приложения. Диссертация изложена на 100 страницах, содержит 18 иллюстраций. Библиография включает 61 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** проведен обзор литературы по теме исследований, обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе доказывается теорема об устойчивости механической системы, являющейся частным случаем систем общего вида, которая формулируется следующим образом:

Рассмотрим механическую систему, на которую действуют диссипативные, гироскопические и неконсервативные позиционные силы. Уравнения возмущенного движения системы в первом приближении можно записать в виде

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Gx + Fx = 0, \quad x = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad (1)$$

$B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ - матрица диссипативных сил, $b_i > 0$ $G^T = -G$ - матрица гироскопических сил, $\det G \neq 0$, $F^T = -F$, $F = \gamma G$, $\gamma = \text{const} > 0$.

Теорема: Если выполняются неравенства $b_i > \gamma$, $i = \overline{1, n}$, то система (1) асимптотически устойчива.

Полученный результат используется в дальнейшем для анализа устойчивости гировертикали с радиальной коррекцией.

В первой главе также приводятся формулировки всех используемых в работе теорем.

Вторая глава посвящена исследованию устойчивости гировертикали с радиальной коррекцией. Назначение прибора - определение верти-

ли места, на которую направлен кинетический момент ротора гироскопа. К осям подвеса прилагаются внешние моменты, которые формируются с помощью датчиков, установленных на кольцах подвеса. Также учитывается вязкое трение в осях подвеса.

Исследуются условия возникновения предельного цикла при переходе параметров системы через границу

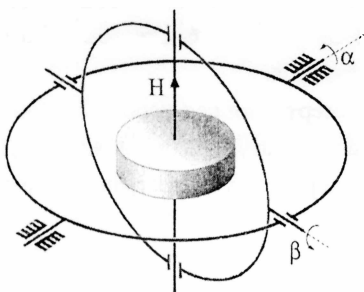


Рис. 1

области устойчивости. Задача решается с учетом масс колец подвеса. Для решения задачи используется теорема Андронова-Хопфа о бифуркации рождения цикла, что требует исследования устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней.

Уравнения движения системы, после исключения циклической координаты φ (φ - угол собственного вращения ротора) и перехода к безразмерному времени, с точностью до членов третьего порядка имеют вид:

$$\begin{cases} \alpha'' + \beta' + n\alpha' + \beta e - 2c\beta\alpha'\beta' + \left(c - \frac{1}{2}\right)\beta^2\beta' + cn\beta^2\alpha' + \left(c - \frac{1}{6}\right)\beta^3e + \dots = 0, \\ \beta'' - \frac{1}{b}\alpha' + \frac{n}{b}\beta' - \frac{e}{b}\alpha + \frac{c}{b}\beta\alpha'^2 + \frac{1}{2b}\beta^2\alpha' + \frac{e}{6b}\alpha^3 + \dots = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$c = \frac{C_0}{A_0}, \quad b = \frac{B_0}{A_0}, \quad n = \frac{k}{H}, \quad e = \frac{\mu A_0}{H^2}, \quad \tau = \frac{H}{A_0}t.$$

Эти уравнения допускают стационарное решение

$$\alpha = \beta = 0, \quad \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0. \quad (3)$$

Исследуется устойчивость решения (3) в зависимости от параметров системы. Достаточное условие асимптотической устойчивости, полученное при помощи теоремы, доказанной в главе 1, имеет вид: $e < n$. Характеристическое уравнение системы (2) имеет вид:

$$\lambda^4 + \lambda^3\left(\frac{n}{b} + n\right) + \lambda^2\frac{1+n^2}{b} + \lambda\frac{2e}{b} + \frac{e^2}{b} = 0. \quad (4)$$

При $e = e_0$, где $e_0 = \frac{2n(1+b)(n^2+1)}{4b+n^2(b+1)^2}$, уравнение (4) имеет пару чисто мнимых

корней $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$, $\omega = \sqrt{\frac{2e}{n(b+1)}}$, и два корня с отрицательными веществен-

ными частями: $\lambda_{3,4} = \frac{-n(b+1)}{2b} \pm \frac{n^2}{2b} \sqrt{\frac{1-2b^2+b^4}{n^2(1+b)^2+4b}}$. При $e < e_0$ все корни ха-

рактеристического уравнения (4) имеют отрицательные вещественные части $\text{Re } \lambda_k < 0$, $k = \overline{1,4}$, т.е. стационарное движение (3) асимптотически устойчиво. При $e > e_0$ среди корней уравнения (4) имеется корень с положительной вещественной частью, (т.е. $\exists k: \text{Re } \lambda_k > 0$), что указывает на неустойчивость стационарного движения (3).

Согласно теореме Андронова-Хопфа, для возникновения предельного цикла достаточно, чтобы 1) два корня пересекали мнимую ось

трансверсально и 2) хотя бы одна из ляпуновских величин была отлична от нуля.

1) Вычислена величина:

$$\operatorname{Re} \left[\frac{d\lambda}{de} \right]_{\substack{e=e_0 \\ \lambda=i0}} = \frac{(n^2(1+b)^2 + 4b)^2}{4n^2(1+b)^2(n^2(1+b)^2 + 4b) + (1+n^2)(n^2(1+b)^2 - 4b)^2} > 0. \quad (5)$$

Два корня пересекают мнимую ось с положительной скоростью.

2) Исследование устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней производится методом, разработанным А.М. Ляпуновым. Система уравнений четвертого порядка сводится к системе второго порядка для критических переменных, что позволяет с помощью полиномиального преобразования привести ее к нормальной форме, в которой нет членов второго порядка, а из членов третьего порядка присутствует только резонансный член. $U' = iU + BU^2V + \dots$

Аналитически вычислена первая ляпуновская величина: $L = \operatorname{Re} B$, где

$$B = (N_1M_2 + N_2M_1)Q_1 + M_2Q_2 + (N_1^2M_2 + 2N_1N_2M_1)Q_3 + 3M_1^2M_2Q_4 + M_1Q_5 + \\ + 2M_1M_2Q_6 + N_1M_1Q_7 + M_1^2Q_8 + 3N_1^2N_2Q_9 + (N_2M_1^2 + 2N_1M_1M_2)Q_{10}. \quad (6)$$

Параметры, входящие в (6), зависят от параметров системы и не приводятся в силу их громоздкости.

При $e = e_0$ решение (3) асимптотически устойчиво, если $L < 0$ и неустойчиво, если $L > 0$. При $L = 0$ вопрос об устойчивости решается рассмотрением членов уравнения порядка выше третьего.

В третьей главе рассматривается однороторный корректируемый гироскомпас, установленный на подвижном основании. Кинетический момент гироскопа совпадает с направлением на север. Точка подвеса совершает циркуляцию по земной сфере по закону

$$\begin{cases} V_N = V_0 \cos \omega_0 t, \\ V_E = V_0 \sin \omega_0 t. \end{cases} \quad (7)$$

Это соответствует движению по окружности с постоянной линейной скоростью V_0 . Такое движение часто встречается на практике при маневрировании объекта, на котором установлен этот прибор.

Целью исследования является обнаружение параметрической неустойчивости в системе при наличии резонансов, нахождение в первом приближении областей динамической неустойчивости в случае основных и комбинационных резонансов.

В прецессионной постановке задача была рассмотрена Ройтенбергом Я.Н.. Полные уравнения при наличии диссипации были исследованы в работах Агафонова С.А.. В данном случае рассматриваются полные уравнения движения в случае циркуляции объекта, на котором установлен гирокомпас, по земной сфере по закону (7) в предположении, что диссипация в осях подвеса отсутствует.

Для решения задачи используется метод осреднения, основанный на замене точных уравнений приближенными путем осреднения правой части по явно входящему времени. Согласно второй теореме Боголюбова на границе области устойчивости осредненная система имеет ненулевое стационарное решение, которое соответствует периодическому решению исходных уравнений.

После исключения циклической переменной полные уравнения движения гирокомпаса в первом приближении имеют следующий вид

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} + I_4 (\dot{u}_\eta + u_\zeta u_\zeta) \beta + [I_3 (u_\zeta^2 - u_\eta^2) + H_0 u_\eta] \alpha + I_1 \dot{u}_\zeta - I_3 u_\zeta u_\eta + \\ + H_0 u_\zeta = M_\alpha(\alpha, V, \varphi), \\ I_2 \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} + [I_2 \dot{u}_\eta + I_4 u_\zeta u_\zeta] \alpha + [H_0 u_\eta - I_4 (u_\zeta^2 - u_\eta^2)] \beta + I_2 \dot{u}_\zeta - I_4 u_\zeta u_\eta - \\ - H_0 u_\zeta = M_\beta(\alpha, V, \varphi), \\ H = H_0 + I_5 u_\eta, \end{cases} \quad (8)$$

где M_α, M_β – моменты управления, приложенные к гироскопу вокруг вертикальной и горизонтальной осей его подвеса соответственно. Целью управления является максимальная компенсация скоростных девиаций.

Вводим малый параметр и безразмерное время $\frac{V_0}{\omega_0 R} = \varepsilon, \quad \tau = \omega_0 t. \quad (9)$

После преобразований, уравнения движения представляют собой систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений 4-го порядка с периодическими коэффициентами. Неоднородность вызвана тем, что с помощью используемых моментов управления не удастся полностью избавиться от девиаций. Для этого потребовалось бы устройство, дифференцирующее сигналы датчиков внешней информации. В дальнейшем рассматриваем соответствующую однородную систему уравнений.

$$\begin{cases} \alpha'' + K_1 \beta' + K_2 \alpha + \varepsilon (K_5 \beta \cos \tau + K_6 \alpha \sin \tau + K_{11} \beta' \sin \tau) = 0, \\ \beta'' - K_3 \alpha' + K_4 \beta + \varepsilon (K_8 \alpha' \sin \tau + K_9 \alpha \cos \tau + K_{10} \beta \sin \tau) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где параметры $K_i, i = \overline{1,11}$ выражаются через параметры системы и не выписаны в силу их громоздкости.

Собственные частоты системы таковы:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{K_4 + K_1 K_3 + K_2 + \sqrt{(K_4 + K_1 K_3 + K_2)^2 - 4K_2 K_4}}, \quad (11)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{K_4 + K_1 K_3 + K_2 - \sqrt{(K_4 + K_1 K_3 + K_2)^2 - 4K_2 K_4}}.$$

В системе имеется два основных $2\omega_1 = 1, 2\omega_2 = 1$ и два комбинационных $\omega_1 + \omega_2 = 1, \omega_1 - \omega_2 = 1$ резонанса.

Путем замены переменных, смыслом которой является устранение резонанса и осреднения системы по быстрым переменным, из условия существования стационарного решения осредненной системы находим границу области неустойчивости. Первая зона динамической неустойчивости

$$\frac{1}{2} - \varepsilon M_2 \sqrt{N_1^2 + N_2^2} < \omega_1 < \frac{1}{2} + \varepsilon M_2 \sqrt{N_1^2 + N_2^2}. \quad (12)$$

Случай второго основного резонанса рассматривается аналогично. Граница области динамической неустойчивости

$$\frac{1}{2} - \varepsilon M_4 \sqrt{N_3^2 + N_4^2} < \omega_2 < \frac{1}{2} + \varepsilon M_4 \sqrt{N_3^2 + N_4^2}. \quad (13)$$

Исследование основных резонансов методом Хилла приводит к тем же результатам.

Для нахождения областей динамической неустойчивости в случае комбинационных резонансов используем метод Хилла. Найденные области динамической неустойчивости:

$$\omega_1 + \omega_2 = 1,$$

$$1 - \varepsilon \frac{\sqrt{(M_{12} - \omega_1 M_{21})(N_{32} - \omega_2 N_{41}) + (M_{11} + \omega_1 M_{22})(N_{31} + \omega_2 N_{42})}}{4\omega_1 \omega_2 K_3 K_4 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} < \omega_1 + \omega_2 < 1 + \varepsilon \frac{\sqrt{(M_{12} - \omega_1 M_{21})(N_{32} - \omega_2 N_{41}) + (M_{11} + \omega_1 M_{22})(N_{31} + \omega_2 N_{42})}}{4\omega_1 \omega_2 K_3 K_4 (\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad (14)$$

$$\omega_1 - \omega_2 = 1.$$

$$1 - \varepsilon \frac{\sqrt{(M_{12} - \omega_1 M_{21})(N_{32} + \omega_2 N_{41}) + (M_{11} + \omega_1 M_{22})(N_{31} - \omega_2 N_{42})}}{4\omega_1 \omega_2 K_3 K_4 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} < \omega_1 - \omega_2 < 1 + \varepsilon \frac{\sqrt{(M_{12} - \omega_1 M_{21})(N_{32} + \omega_2 N_{41}) + (M_{11} + \omega_1 M_{22})(N_{31} - \omega_2 N_{42})}}{4\omega_1 \omega_2 K_3 K_4 (\omega_1^2 - \omega_2^2)}. \quad (15)$$

В четвертой главе объектом исследования является динамически настраиваемый однокольцевой гироскоп (ДНГ) (рис.2). В связи с повышением требований по точности, предъявляемых к таким гироскопам, возникает необходимость уточнения линейной модели и учета нелинейных

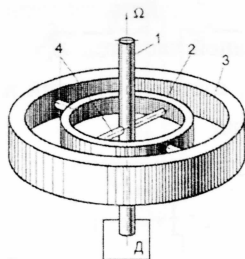


Рис. 2.

Вал (1), кольцо(2), ротор(3), торсионы(4).

членов в уравнениях, описывающих поведение прибора. Назначение системы – моделирование свободного гироскопа осуществляется при помощи динамической настройки. При выполнении условия динамической настройки ($k = \frac{\Omega^2}{2}(2A_1 - C_1)$) угловая скорость вращения вала равна одной из собственных частот системы.

Целью исследования является уточнение собственных частот и периода колебаний. Задача решается в нелинейной постановке с использованием теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле.

Уравнения движения системы в безразмерном времени с точностью до членов третьего порядка включительно имеют вид:

$$\begin{cases} (A + A_1)\alpha'' - (2A - C)\beta' + \left[\frac{k}{\Omega^2} + (C - A + C_1 - A_1) \right] \alpha = \frac{2}{3}\alpha^3 \left(C - A + C_1 - A_1 + \frac{k}{\Omega^2} \right) - \\ - \frac{2A - C}{2}\beta'\alpha^2 + (C - A) \left[\frac{C - 2A}{A + A_1}\beta'\beta^2 + \frac{C + C_1 + \frac{k}{\Omega^2}}{A + A_1}\alpha\beta^2 - 2\alpha'\beta\beta \right], \\ A\beta'' + (2A - C)\alpha' + \left(C - A + \frac{k}{\Omega^2} \right) \beta = \\ = \frac{1}{2}(2A - C)\alpha'\alpha^2 + (C - A) \left[\alpha'^2\beta - 2\alpha'\beta^2 + \alpha^2\beta \right] + \frac{2}{3}\beta^3 \left(C - A + \frac{k}{\Omega^2} \right), \end{cases} \quad (16)$$

где $\tau_1 = \Omega t$, $A_1 = B_1$, $A = B$, $\frac{A_1}{A} \ll 1$, $\frac{C_1}{C} \ll 1$, $\frac{C_1}{A} \ll 1$, $C/A = K$.

Эта система имеет аналитический первый интеграл $T + \Pi = \text{const}$ (закон сохранения энергии). Характеристическое уравнение линейной части системы имеет две пары чисто мнимых корней: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$,

$\omega_1 = 1, \omega_2 = K - 1$. При этом предполагается отсутствие внутреннего резонанса, т. е. $\omega_1 \neq p\omega_2, p \in \mathbb{Z}$.

Система (16) является системой Ляпунова и позволяет построить двухпараметрическое семейство периодических решений, которые порождаются каждой из собственных частот этой системы. Найденное периодическое решение системы, порождаемое собственной частотой $\omega_1 = 1$, с точностью до c^3 включительно, где c – параметр, соответствующий начальному отклонению, в исходном времени имеет вид

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c \cos \varphi + c^3 [-Q_1 \cos \varphi + Q_2 \sin \varphi - Q_3 \sin 3\varphi + Q_4 \cos 3\varphi] + \dots, \\ y_2(t) &= c \sin \varphi + c^3 [-Q_3 \cos \varphi - Q_1 \sin \varphi - Q_1 \sin 3\varphi - Q_3 \cos 3\varphi] + \dots, \\ y_3(t) &= c^3 [-(2K)^{-1} \cos \varphi + Q_4 \sin \varphi - Q_5 \sin 3\varphi - Q_6 \cos 3\varphi] + \dots, \\ y_4(t) &= c^3 [Q_4 \cos \varphi - (2K)^{-1} \sin \varphi - Q_6 \sin 3\varphi + Q_5 \cos 3\varphi] + \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{где } Q_1 = \frac{K-1}{6K}, \quad Q_2 = \frac{2-5K}{8K}, \quad Q_3 = \frac{2-K}{8K}, \quad Q_4 = \frac{3K-2}{4K(K-2)}, \quad Q_5 = \frac{K-2}{4K(K+2)},$$

$$\varphi = \frac{\Omega t}{1 + \frac{1}{2}c^2 + \dots}, \text{ при этом период колебаний } T = \frac{2\pi}{\Omega} \left(1 + \frac{1}{2}c^2 + \dots \right).$$

Другое периодическое решение системы (16), порождаемое частотой $\omega_2 = K - 1$, таково

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c^3 [R_1 \cos \gamma - R_2 \sin \gamma + R_3 \sin 3\gamma + R_4 \cos 3\gamma] + \dots, \\ y_2(t) &= c^3 [-R_2 \cos \gamma + R_1 \sin \gamma - R_4 \sin 3\gamma - R_3 \cos 3\gamma] + \dots, \\ y_3(t) &= c \sin \gamma + c^3 [-R_5 \cos \gamma - R_6 \sin \gamma - R_6 \sin 3\gamma + R_7 \cos 3\gamma] + \dots, \\ y_4(t) &= c \cos \gamma + c^3 [-R_6 \cos \gamma + R_8 \sin \gamma - R_5 \sin 3\gamma + R_6 \cos 3\gamma] + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{где } R_1 = \frac{(K-1)(2-3K)}{4K(2-K)}, \quad R_2 = \frac{(3K-1)(K-1)}{2K}, \quad R_3 = \frac{(3K^2-6K+4)(K-1)}{6K(4-3K)},$$

$$R_4 = \frac{(K-1)(4K^2-5K+2)}{4K(3K-2)}, \quad R_5 = \frac{4K^2-5K+2}{8K}, \quad R_6 = \frac{3K^2-6K+4}{24K},$$

$$R_7 = \frac{5K+4K^2+2}{8K}, \quad R_8 = \frac{4K^2+K-2}{8K}, \quad \gamma = \frac{\Omega(K-1)}{\left(1 + \frac{3K-1}{2}c^2 + \dots \right)}, \text{ а период колебаний}$$

$$\text{дается формулой } T = \frac{2\pi}{\Omega(K-1)} \left(1 + \frac{1}{2}(3K-1)c^2 + \dots \right).$$

В пятой главе рассматривается абсолютно твердый ротор массы m с вертикальной осью вращения O (рис.3). Ротор имеет эксцентриситет $e = OC$, вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью Ω и ус-

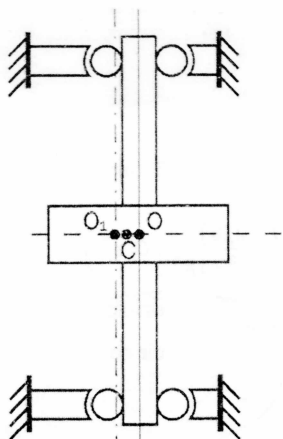


Рис. 3

тановлен в упругих подшипниках, обладающих потенциальной энергией по закону Герца

$$\Pi(r) = \frac{2}{5} k_0 r^{3/2}, \quad OO_1 = r. \quad (19)$$

Исследуются устойчивость установившегося движения, условия рождения предельного цикла при переходе параметров системы через критическое значение, а также его устойчивость. Учитываются действие на ротор внешней и внутренней сил сопротивлений, первая из которых пропорциональна абсолютной скорости центра масс, а вторая — относительной

скорости. Уравнения движения, отнесенные к подвижной системе координат, имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} + (a+b)\dot{x} - 2\Omega\dot{y} - \Omega^2 x + m^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial x} - a\Omega y = 0, \\ \ddot{y} + (a+b)\dot{y} + 2\Omega\dot{x} - \Omega^2 y + m^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + a\Omega x = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Рассматривается установившееся движение, соответствующее явлению самоцентрирования, которое реализуется на практике: $x = x_0$, $y = y_0$,

$$\text{где } x_0 = \frac{k_0 e^{3/2}}{m(a^2 + \Omega^2)} + \dots, \quad y_0 = \frac{ak_0 e^{3/2}}{m\Omega(a^2 + \Omega^2)} + \dots. \quad (21)$$

Уравнения возмущенного движения

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + (k+k_1)\dot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \left[\omega^2 - 3e^{1/2}/2 + O(e) \right] \xi - [k\omega + O(e)]\eta + 3/8 e^{-1/2} \xi^2 + \\ + 1/4 e^{-1/2} \eta^2 - 1/16 e^{-3/2} \xi^3 - 1/8 e^{-3/2} \xi \eta^2 + \dots = 0, \\ \ddot{\eta} + (k+k_1)\dot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \left[\omega^2 - e^{1/2} + O(e) \right] \eta + [k\omega + O(e)]\xi + \\ + 1/2 e^{-1/2} \xi \eta - 1/8 e^{-3/2} \xi^2 \eta + 1/4 e^{-3/2} \eta^3 + \dots = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Характеристическое уравнение системы (22) при $\omega = \omega_0$,

$\omega_0^2 = \frac{5(k+k_1)^2 e^{1/2}}{(4k_1^2)} + O(e)$ имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm ip$,

$p^2 = \frac{5}{4}e^{1/2} + \frac{(k-k_1)\omega^2}{(k+k_1)}$ и два корня с отрицательными вещественными частями.

Выполнены условия теоремы Андронова-Хопфа:

$$1) \operatorname{Re} \left[\frac{d\lambda}{d\omega} \right]_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \lambda=ip}} = \frac{2(k+k_1)^3 (k_1^2 + 5e^{1/2}) \omega_0}{4(k+k_1)^4 p^2 + [(k+k_1)^3 + 4k_1 \omega_0^2]^2} + O(e) > 0. \quad (23)$$

$$2) \text{Ляпуновская величина } \operatorname{Re} A = -\frac{5(f^2 + g^2)(f + 2\beta g)}{128\Delta^3 \mu^2 (\mu - 1)^2 (4\beta^2 + 1) k_1^2} + O(e^{1/2}) \quad (24)$$

отрицательна, следовательно, решение при $\omega = \omega_0$ асимптотически устойчиво. Предельный цикл возникает при $\omega > \omega_0$ и является асимптотически устойчивым.

В шестой главе выполняется численное моделирование результатов, полученных во второй и третьей главах.

Параметры гировертикали таковы: $b = 0.331$, $c = 0.5$, $n = 0.25$. Ляпуновская величина, вычисленная по формуле (6) ($L = -0.15$) - отрицательна. Следовательно, решение при $e = e_0$ асимптотически устойчиво (рис.4). Предельный цикл возникает при $e > e_0$ и является асимптотически устойчивым.

Пусть $e = e_0 + \varepsilon$, $\varepsilon = \text{const} > 0$. Получено приближенное выражение для предельного цикла с точностью до $\varepsilon^{3/2}$:

$$r = \varepsilon^{1/2} (2,503 + \varepsilon 0,276 \cos 2\varphi - \varepsilon 0,434 \sin 2\varphi - \varepsilon 0,028 \cos 4\varphi - \varepsilon 0,111 \sin 4\varphi) + \dots \quad (26)$$

Выражение (26) согласуется с теоретическим значением для радиуса предельного цикла, который имеет порядок $\sim \sqrt{\varepsilon / -L}$.

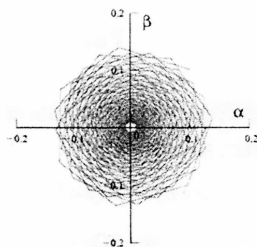


Рис. 4. $\varepsilon = 0$.

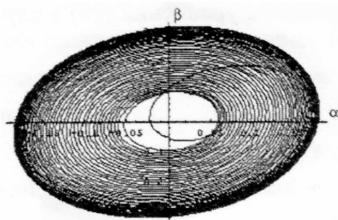


Рис. 5.

$$\varepsilon=0.01 \quad \alpha_0=0.15, \quad \beta_0=0.15.$$

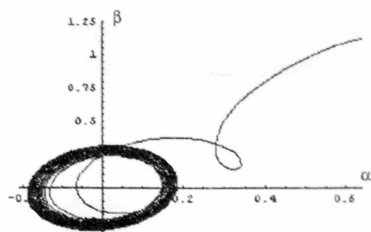


Рис. 6.

$$\varepsilon=0.01, \quad \alpha=1.1, \quad \beta=1.1.$$

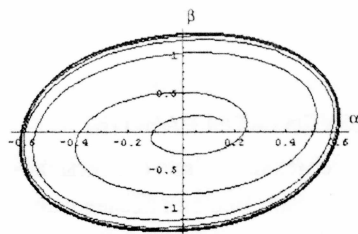


Рис. 7.

$$\varepsilon=0.5, \quad \alpha_0=0.15, \quad \beta_0=0.15.$$

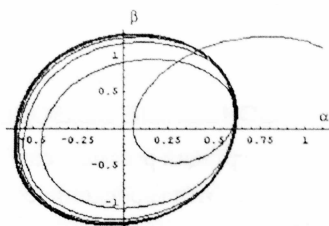


Рис. 8.

$$\varepsilon=0.5, \quad \alpha=1.1, \quad \beta=1.1.$$

На рис. 5-8 представлены результаты численного моделирования уравнений (2) при различных значениях ε и начальных условиях. На рис. 5, 7 начальные условия взяты внутри радиуса цикла, на рис. 6, 8 – вне радиуса цикла. Радиусы предельных циклов согласуются с теоретическим значением.

Параметры гирокомпаса: $A_2 = C_2 = B_1 = 9.8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $B_2 = 19.6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$,

$$A_1 = C_1 = A = 4.9 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad H_0 = 980 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{сек}}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4}, \quad k_1 = 0.01 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Частоты циркуляции, на которых возникают резонансы и границы областей динамической неустойчивости:

$$1) \quad 2\omega_1 = 1, \quad \omega_0 \approx 141.44 \text{ с}^{-1},$$

$$2) \quad 2\omega_2 = 1, \quad \omega_0 \approx 0.0014 \text{ с}^{-1},$$

$$\frac{1}{2} - 0.13\varepsilon + \dots < \omega_1 < \frac{1}{2} + 0.13\varepsilon + \dots$$

$$\frac{1}{2} - 0.19\varepsilon + \dots < \omega_2 < \frac{1}{2} + 0.19\varepsilon + \dots$$

$$3) \quad \omega_1 + \omega_2 = 1, \quad \omega_0 \approx 70.72 \text{ с}^{-1},$$

$$4) \quad \omega_1 - \omega_2 = 1, \quad \omega_0 \approx 70.71 \text{ с}^{-1},$$

$$1 - 1.56\varepsilon + \dots < \omega_1 + \omega_2 < 1 + 1.56\varepsilon + \dots \quad 1 - 1.91\varepsilon + \dots < \omega_1 - \omega_2 < 1 + 1.91\varepsilon + \dots$$

На рис. 9 представлены результаты моделирования уравнений (10) в случае основного резонанса $2\omega_1 = 1$.

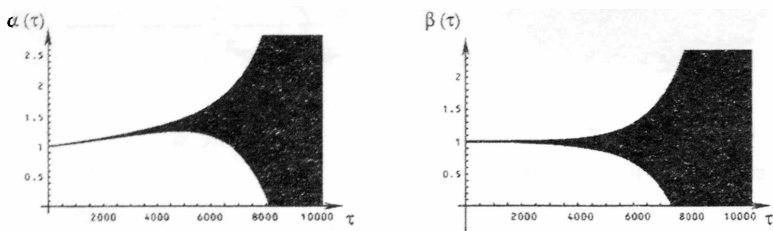


Рис. 9

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В диссертации рассмотрены различные механические объекты, которые все являются гироскопическими системами. Все они исследованы в нелинейной постановке (за исключением корректируемого гироскопа), для чего применялись методы, разработанные Ляпуновым А.М., Пуанкаре А.

1. Доказана одна теорема об устойчивости механической системы, находящейся под действием диссипативных, гироскопических, неконсервативных позиционных сил.

2. Решена задача о существовании предельного цикла в механической системе представляющей собой гировертикаль с радиальной коррекцией. Исследованы условия возникновения предельного цикла, показана его устойчивость. Проведено исследование устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней. Проведено численное моделирование системы и построен численно предельный цикл.

3. Найдены в первом приближении границы областей динамической неустойчивости при наличии основных и комбинационных резонансов в задаче о корректируемом гироскопе. Проведено численное моделирование уравнений движения.

4. В задаче о движении динамически настраиваемого гироскопа с помощью теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле получено двухпара-

метрическое семейство периодических решений, порождаемой каждой из собственных частот системы. Найдены приближенные выражения для периодических решений, а также поправки к собственным частотам колебаний.

5. Исследованы условия возникновения предельного цикла в задаче о вращающемся роторе. Найдено критическое значение угловой скорости. Решена задача об устойчивости предельного цикла. Исследована устойчивость в критическом случае, когда характеристическое уравнение системы первого приближения имеет пару чисто мнимых корней.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

1. Солдатенко И. Г. Бифуркация рождения цикла в одной гироскопической системе // Моделирование динамических систем и исследование устойчивости: Тез. докл. международной конф. – Киев, 1999. – С. 75.

2. Солдатенко И. Г. Возникновение автоколебательного режима гироскопика с радиальной коррекцией // Метод функций Ляпунова и его приложения: Тез. докл. V Крымской международной математической школы. – Алушта, 2000. – С. 131.

3. Солдатенко И. Г. Автоколебания корректируемых гироскопов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Приборостроение. – 2001. – №1. – С. 70-77.

4. Солдатенко И. Г. Параметрическая неустойчивость однороторного корректируемого гироскопа на циркуляции // Моделирование динамических систем и исследование устойчивости: Тез. докл. международной конф. – Киев, 2001. – С. 218.

5. Солдатенко И. Г. Параметрическая неустойчивость однороторного корректируемого гироскопа на циркуляции // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. – 2002. – №2. – С. 61-64.

6. Солдатенко И. Г. Анализ устойчивости однороторного корректируемого гироскопа на циркуляции // Метод функций Ляпунова и его приложения: Тез. докл. VI Крымской международной математической школы. – Алушта, 2002. – С. 141.

7. Солдатенко И. Г. О периодических решениях динамически настраиваемого гироскопа // Математические модели в образовании, науке и промышленности: Сб. науч. трудов. – СПб, 2003. – С. 206-209.

8. Солдатенко И. Г. Построение периодических решений уравнений динамически настраиваемого гироскопа // Моделирование динамических систем и исследование устойчивости: Тез. докл. международной конф. – Киев, 2003. – С. 358.

9. Солдатенко И. Г. О периодических решениях динамически настраиваемого гироскопа // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Приборостроение. – 2004. – №1. – С. 65-73.

10. Солдатенко И. Г. О существовании предельного цикла в задаче о движении вращающегося ротора в упругих подшипниках // Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы: Сб. трудов. – М. : Логос, 2005. – С. 571-579.

11. Солдатенко И. Г. Возникновение автоколебательного режима вращающегося ротора в упругих подшипниках // Необратимые процессы в природе и технике: Тез. докл. Всероссийской конф. – М., 2005. – С. 169-170.

Подписано к печати 17.06.2006 г. Зак. 3 Объем 1.0 п.л. Тир. 100.
Типография МГТУ им. Н. Э. Баумана.