НА РУКАХ НЕ ВЫДАЕТСЯ

На правах рукописи

Красновский Евгений Ефимович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА С УЧЁТОМ АНИЗОТРОПИИ И РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Москва – 2005

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор Зарубин Владимир Степанович.

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор Данилов Владимир Львович.

кандидат технических наук, старший научный сотрудник Головин Николай Николаевич.

Ведущая организация: ФГУП «Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова», Государственный научный центр Российской Федерации

Защита состоится «7» июня 2005 года в 11[00] часов на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу: 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью организации, просим высылать по адресу: 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н.Э. Баумана, учёному секретарю совета Д 212.141.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан «25» апреля 2005 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
д. ф.-м. н., профессор Волков И.К.

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Многие современные конструкционные материалы имеют анизотропные пластические свойства. Отдельным из них свойственны и различные пределы текучести при растяжении и сжатии. К подобным материалам относятся металлокомпозиты и некоторые из таких традиционных конструкционных материалов, как металлы и сплавы.

Поскольку конструкции из указанных материалов работают в условиях интенсивных тепловых и силовых воздействий, то в расчётах необходимо учитывать неравномерный нагрев и зависимость механических характеристик материала от его температуры. Следовательно, разработка эффективных численных алгоритмов метода конечных элементов (МКЭ) для математического моделирования пластического течения материалов с учётом указанных эффектов является актуальной проблемой. Её решение, в частности, позволит оценить несущую способность элементов конструкций и подобрать рациональную схему армирования композиционных материалов.

В настоящее время помимо теории течения в расчётах используется и деформационная теория пластичности. В работе рассмотрен вопрос оценки погрешности приближённого решения задачи деформационной теории термопластичности анизотропных сред, который также является актуальным. Одним из методов получения апостериорных оценок погрешности является решение такой задачи в двойственной вариационной постановке, суть которой заключается в построении двух функционалов (прямого в перемещениях и встречного в напряжениях), которые достигают альтернативных, но равных по значению экстремумов на точном решении задачи. В работе построена двойственная вариационная формулировка для задачи деформационной теории термопластичности анизотропных сред.

Разработка методики нахождения значения встречного функционала представляет практический интерес. Указанный подход требует решения нетривиальной задачи по построению допустимого поля напряжений, удовлетворяющего как уравнениям равновесия, так и силовым граничным условиям.

Цель работы состоит в разработке численных алгоритмов МКЭ для математического моделирования пластического деформирования ортотропного материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию, и определении оценки погрешности полученного приближённого решения.

Поставленная цель достигается на основе решения следующих задач:

- построение алгоритма «упругий предиктор / пластический корректор» и касательной матрицы, обеспечивающей квадратичную скорость сходимости метода Ньютона решения системы уравнений МКЭ, в случае неравномерного нагрева материала с критерием текучести Хоффмана;
- исследование особенностей работы алгоритма «упругий предиктор / пластический корректор», используемого для коррекции параметров напряженного состояния в точке интегрирования Гаусса в процессе нагружения, в случае упругой анизотропии материала с критерием текучести Хоффмана;

1715956
Красновский Е.Е. Математич
МГТУ
им. Н.Э. Баумана
Библиотека

- построение двойственной вариационной формулировки задачи деформационной теории термопластичности анизотропных сред;
- разработка методики нахождения значения функционала в напряжениях, входящего в двойственную вариационную формулировку задачи деформационной теории термопластичности анизотропных сред.

Научная новизна. Методами математического моделирования изучено влияние упругой анизотропии на численные алгоритмы МКЭ по расчёту пластического течения материала с критерием текучести Хоффмана. Разработан алгоритм поиска начального приближения с целью получения физически достоверных результатов при решении нелинейного уравнения методом Ньютона на стадии «пластический корректор» алгоритма «упругий предиктор / пластический корректор». Проанализировано влияние упругой анизотропии материала на точность этого алгоритма.

Разработан алгоритм «упругий предиктор / пластический корректор» и получена касательная матрица в случае неравномерного нагрева.

Получена двойственная вариационная формулировка задачи деформационной теории термопластичности анизотропных сред. Предложена методика нахождения значения функционала в напряжениях.

Достоверность результатов основана на использовании современных методов математического моделирования и классических подходов механики сплошных сред, строгости применяемых математических методов, а также на совпадении полученных результатов с известными решениями для предельных случаев.

Практическая значимость. Материалы диссертации могут быть использованы в разработках НИИ и КБ, ведущих исследования в области создания, расчётов, анализа работоспособности и применения конструкций, материал которых проявляет свойства анизотропии и разносопротивляемости при пластическом деформировании.

На защиту выносятся следующие положения:

- алгоритм поиска начального приближения для метода Ньютона решения нелинейного уравнения, решаемого на стадии «пластический корректор» алгоритма «упругий предиктор / пластический корректор»;
- анализ влияния упругой анизотропии материала с критерием текучести Хоффмана на точность алгоритма «упругий предиктор / пластический корректор»;
- алгоритм «упругий предиктор / пластический корректор» и касательная матрица для случая неравномерного нагрева материала, описываемого моделью Хоффмана;
- двойственная вариационная формулировка задачи деформационной теории термопластичности анизотропных сред;
- методика нахождения значения встречного функционала, составляющего двойственную вариационную формулировку задачи деформационной теории термопластичности анизотропных сред.

Апробация. Основные положения и результаты диссертационной работы были представлены и обсуждены на Всероссийской конференции молодых

учёных «Проблемы исследований и разработок по созданию силовых и энергетических установок XXI века» в 2000 г.; XI Международной конференции по вычислительной математике и современным прикладным программным системам в 2001 г.; втором Международном конгрессе студентов, молодых учёных и специалистов «Молодёжь и наука – третье тысячелетие»/YSTM'02 в 2002 г.; Международном симпозиуме по двойственным вариационным принципам в нелинейной механике в 2002 г.; Первой международной научно-технической конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея в 2004 г.; Научно-методической конференции, посвящённой 40-летию НУК ФН МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2004 г.; научных конференциях студентов и аспирантов МГТУ им. Н.Э. Баумана и научных семинарах кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2000–2005 г.г.

Публикации. Основное содержание работы изложено в 3 статьях и 3 тезисах выступлений на конференциях.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав и выводов. Работа изложена на 190 страницах, содержит 58 иллюстраций и 53 таблицы. Библиография включает 167 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов, указаны основные положения, выносимые на защиту, структура и объём диссертационной работы.

В первой главе дан обзор литературы по теме диссертации. Описаны предельные поверхности для материалов, обладающих свойствами анизотропии и разносопротивляемости. Представлена двойственная вариационная постановка задачи деформационной теории термопластичности изотропных сред. Приведён обзор методов приближённого решения краевых задач теории пластичности. Проанализированы методы построения допустимого поля напряжений для встречного функционала. Показана необходимость учёта пластического деформирования и разносопротивляемости анизотропных и композиционных материалов.

Во второй главе описана модель Хоффмана ортотропных материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Поверхность текучести проверена на соответствие постулату Друккера. Приведены основные матричные соотношения МКЭ. Получена двойственная вариационная формулировка задачи деформационной теории термопластичности анизотропных сред и предложена методика нахождения значения встречного функционала.

Модель материала с критерием текучести Хоффмана

При математическом моделировании пластического течения ортотропных материалов с различными пределами текучести при растяжении и сжатии целесообразно использовать критерий Хоффмана, являющийся модификацией критерия Хилла путём включения в функцию текучести слагаемых, линейных относительно напряжений.

В работе рассмотрены случаи плоского деформированного и осесимметричного состояний при малых деформациях. Нагружение принято квазистатическим и предполагалось, что трещинообразования или расслоения не происходит. Учтены как неравномерный нагрев (температура рассматривается как параметр), так и зависимость механических характеристик материала от его температуры. Упрочнение материала предполагается изотропным, то есть пределы текучести в различных направлениях увеличиваются в равной степени. Разносопротивляемость материала учитывается параметрами и формой поверхности текучести, представляющей собой эллиптический параболоид.

С учётом указанных предположений математическая модель Хоффмана пластического течения принимает вид (в декартовой прямоугольной системе координат $0x_1x_2x_3$; координата x_1 соответствует X, $x_2 - Y$, а $x_3 - Z$):

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^T, \tag{1}$$

$$\varepsilon^T = \Delta T \boldsymbol{h}(T), \tag{2}$$

$$\sigma = \boldsymbol{C}(T) \cdot\cdot \varepsilon^e, \tag{3}$$

$$F(\sigma, \bar{\varepsilon}^p, T) = \left(c_1(T) - \frac{c_3(T)}{2}\right)(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + \left(c_2(T) - \frac{c_3(T)}{2}\right)(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \frac{c_3(T)}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \tag{4}$$
$$+ c_4(T)\sigma_{12}^2 + c_5(T)\sigma_{11} + c_6(T)\sigma_{22} + c_7(T)\sigma_{33} - \sigma_Y^2(\bar{\varepsilon}^p, T),$$

$$\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{2/3}\int_0^t \left\|\dot{\varepsilon}^p\right\| dt, \tag{5}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial F(\sigma, \bar{\varepsilon}^p, T)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{6}$$

$$\dot{\lambda}\, F(\sigma, \bar{\varepsilon}^p, T) = 0, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор полной деформации; $\boldsymbol{\varepsilon^e}$ – тензор упругой деформации; $\boldsymbol{\varepsilon^p}$ – тензор пластической деформации; $\boldsymbol{\varepsilon^T}$ – тензор температурной деформации; T – температура материала; $\boldsymbol{h}$ – тензор коэффициентов линейного расширения материала; $\Delta T = T - T_0$ – заданное изменение температуры; $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши; $\boldsymbol{C}$ – тензор упругих постоянных; $\bar{\varepsilon}^p$ – накопленная пластическая деформация; t – параметр нагружения; $F(\sigma, \bar{\varepsilon}^p, T)$ – функция текучести; σ_Y – базовый предел текучести; $\dot{\varepsilon}^p$ – тензор скоростей пластической деформации; $c_1, \ldots c_7$ – независимые параметры текучести материала; $\dot{\lambda}$ – пластический множитель.

Выражение (1) является разложением тензора деформации на упругую и пластическую составляющие, равенство (2) задаёт температурную деформацию, а (3) – закон Гука. Соотношение (4) определяет функцию текучести; выражение (5) задаёт параметр упрочнения – накопленную пластическую деформацию, а соотношение (6) – ассоциированный закон пластического течения. Равенство (7) выражает условие разгрузки / нагрузки: при $F(\sigma, \bar{\varepsilon}^p, T) < 0$ и $\dot{\lambda} = 0$ происходит упругая разгрузка; при $F(\sigma, \bar{\varepsilon}^p, T) = 0$ и $\dot{\lambda} = 0$ – нейтральное

нагружение; а при $F\left(\boldsymbol{\sigma},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p},T\right)=0$ и $\dot{\lambda}>0$ – активное нагружение.

При заданной температуре T параметры $c_1,\ldots c_7$ учитывают разносопротивляемость материала и определяются следующим образом:

$$c_1(T)=\frac{\sigma_{Y_0}^2(T)}{\sigma_{11T_0}(T)\sigma_{11C_0}(T)},\quad c_2(T)=\frac{\sigma_{Y_0}^2(T)}{\sigma_{22T_0}(T)\sigma_{22C_0}(T)},\quad c_3(T)=c_1(T)+c_2(T)-\frac{\sigma_{Y_0}^2(T)}{\sigma_{33T_0}(T)\sigma_{33C_0}(T)}$$

$$c_4(T)=\frac{\sigma_{Y_0}^2(T)}{\sigma_{12S_0}^2(T)},\quad c_5(T)=\sigma_{Y_0}^2(T)\frac{\sigma_{11C_0}(T)-\sigma_{11T_0}(T)}{\sigma_{11T_0}(T)\sigma_{11C_0}(T)},$$

$$c_6(T)=\sigma_{Y_0}^2(T)\frac{\sigma_{22C_0}(T)-\sigma_{22T_0}(T)}{\sigma_{22T_0}(T)\sigma_{22C_0}(T)},\quad c_7(T)=\sigma_{Y_0}^2(T)\frac{\sigma_{33C_0}(T)-\sigma_{33T_0}(T)}{\sigma_{33T_0}(T)\sigma_{33C_0}(T)},$$

где индексы «T», «C» и «S» обозначают пределы текучести при растяжении, сжатии и сдвиге соответственно, а индекс «0» – обозначает пределы текучести в недеформированном состоянии. Модель анизотропного материала Хилла может быть получена из модели Хоффмана при $c_5=c_6=c_7=0$, а модель изотропного материала Мизеса при $c_1=c_2=c_3=1$, $c_4=3$ и $c_5=c_6=c_7=0$.

Поверхность (4) соответствует постулату Друккера при выполнении условия $4c_1(T)c_2(T)-c_3(T)^2\geq 0$.

Матричные соотношения метода конечных элементов

Для проведения численных расчетов в рамках теории течения в работе использован МКЭ в сочетании с методом последовательных нагружений. Для решения системы уравнений МКЭ применён метод Ньютона.

Рассмотрена следующая задача механики деформируемого твёрдого тела в объёме Ω с границей $S=\partial\Omega$. Пусть в каждой точке $M\in\Omega$ известны $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}(M,t_0)$ в начальный момент t_0 и история нагружения тела в промежутке $t\in[t_0,\bar{t}]$. Необходимо найти функции $\boldsymbol{\sigma}(M,t)$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}(M,t)$, $\boldsymbol{u}(M,t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(M,t)$, которые помимо соотношений (1)–(7) удовлетворяют следующим уравнениям в каждой точке $M\in\Omega$:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}(M,t)}{\partial x_j}+b_i(M,t)=0,\quad i,j=1,2,3, \tag{8}$$

$$\varepsilon_{ij}(M,t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i(M,t)}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j(M,t)}{\partial x_i}\right) \tag{9}$$

и граничным условиям

$$\sigma_{ij}(P,t)n_j(P)=w_i(P,t)\ \text{на}\ P\in S_1\subset S, \tag{10}$$

$$u_i(P,t)=\bar{u}_i(P,t)\ \text{на}\ P\in S_2=S\setminus S_1, \tag{11}$$

где u_i – компоненты вектора перемещений; b_i – заданные компоненты вектора объёмной нагрузки $\vec{\mathbf{b}}$; w_i – заданные компоненты поверхностной нагрузки $\vec{\mathbf{w}}$; $\bar{u}_i$ – заданные компоненты вектора перемещений; n_i – компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности тела $S=\partial\Omega$.

Процесс конечно-элементной дискретизации при решении задачи (1)–(11) состоит из двух этапов:

1) дискретизация по параметру нагружения t;
2) стандартная конечно-элементная дискретизация выражения для принципа виртуальной работы.

После применения таких дискретизаций задача (1)–(11) трансформируется в набор систем нелинейных уравнений, каждая из которых соответствует концу некоторого промежутка $[t_n, t_{n+1}]$. Предположим, что в момент t_n известны внутренние параметры состояния α_n, а в момент t_{n+1} – тензор деформации ε_{n+1}. Тогда напряжения в момент t_{n+1} могут быть записаны в виде

$$\vec{\sigma}_{n+1} = \vec{\sigma}\left(\alpha_n, \vec{\varepsilon}_{n+1}\right), \tag{12}$$

где $\vec{\sigma}_{n+1} = \left(\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{33}\right)^T_{n+1}$, $\vec{\varepsilon}_{n+1} = \left(\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{33}\right)^T_{n+1}$. Внутренние параметры состояния определяются из соотношения $\alpha_{n+1} = \alpha\left(\alpha_n, \vec{\varepsilon}_{n+1}\right)$ совместно с (12).

Таким способом соотношение для принципа виртуальной работы превращается в уравнение относительно вектора узловых перемещений $\vec{u}_{f\,n+1}$

$$\vec{f}^{\,int}\left(\vec{u}_{f\,n+1}\right) - \vec{f}^{\,ext}_{n+1} = 0, \tag{13}$$

где $\vec{f}^{\,int}\left(\vec{u}_{f\,n+1}\right) = \int\limits_{\Omega} \left(\mathbf{B}^{\varepsilon}\right)^T \vec{\sigma}\left(\alpha_n, \vec{u}_{f\,n+1}\right) dV$ – вектор внутренних сил;

$\vec{f}^{\,ext}_{n+1} = \int\limits_{\Omega} \left(\mathbf{N}^{\varepsilon}\right)^T \vec{b}_{n+1} dV + \int\limits_{S_1} \left(\mathbf{N}^{\varepsilon}\right)^T \vec{w}_{n+1} dS$ – вектор внешних сил;

$\mathbf{N}^{\varepsilon}$ – матрица глобальных (определённых во всей области) функций формы;

$\mathbf{B}^{\varepsilon}$ – матрица дифференциального оператора перехода от перемещений, определённых с помощью глобальных функций формы, к деформациям.

Алгоритм решения (13) методом Ньютона описан в 3 главе работы.

Двойственная вариационная формулировка задачи деформационной теории термопластичности анизотропных сред

При практическом использовании деформационной теории пластичности возникает необходимость решения нелинейных задач, точные решения которых получить, как правило, невозможно. При этом возникают проблемы как по созданию методов их численного решения, так и по оценке погрешности полученных приближённых результатов. Существенный вклад в решение указанных проблем внесло развитие вариационных методов, суть которых заключается в том, что вместо исходной краевой задачи решается задача о нахождении стационарной точки некоторого функционала. Преимуществом вариационного подхода является не только возможность поиска решения с помощью прямых методов (например, МКЭ), но и возможность оценки его погрешности. Для получения такой оценки необходимо построить два функционала – прямой и встречный, достигающих на точном решении задачи альтернативных, но равных по значению экстремумов.

Значение прямого функционала в перемещениях, достигающего минимума на точном решении задачи, можно трактовать как качественную оценку погрешности – из двух приближенных решений следует отдать предпочтение тому из них, на котором значение функционала меньше. Построенный в напряжениях встречный функционал используется для количественной оценки

погрешности полученного приближенного решения задачи. Он двойственный к исходному прямому и достигает на точном решении задачи максимума. В построении двух таких функционалов и заключается двойственная вариационная формулировка задачи механики сплошной среды. По разности их значений на приближённых решениях можно найти оценку погрешности приближённого решения в энергетической норме.

В работе использованы следующие гипотезы деформационной теории термопластичности анизотропных сред.

1. Аналог объёмной деформации $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\beta_{ij}$ и аналог объёмного напряжения $\bar{\sigma} = \sigma_{ij}\alpha_{ij}$ связаны соотношением

$$\bar{\sigma} = 3K^{*}\left(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^{T}\right), \tag{14}$$

где $K^{*} = C_{ijkl}\alpha_{kl}\alpha_{ij}/3$ – аналог модуля всестороннего сжатия; $\beta_{ij} = C_{ijkl}\alpha_{kl}/\left(3K^{*}\right)$; α_{ij} – компоненты такого симметричного тензора, что $\alpha_{ij}\alpha_{ij} = 1$; $\bar{\varepsilon}^{T} = \varepsilon_{ij}^{T}\beta_{ij}$.

2. При введении аналогов девиаторов и шаровых тензоров напряжений и деформации s_{ij}^{*}, σ_{ij}^{*}, e_{ij}^{*}, ε_{ij}^{*} с помощью равенств $s_{ij}^{*} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{*}$, $\sigma_{ij}^{*} = \bar{\sigma}\beta_{ij}$, $e_{ij}^{*} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{*}$, $\varepsilon_{ij}^{*} = \bar{\varepsilon}\alpha_{ij}$ обобщённые интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_{И} = \sqrt{\left(3K^{*}C_{ijkl}^{-1} - \alpha_{ij}\alpha_{kl}\right)\sigma_{ij}\sigma_{kl}}$ и деформации $\bar{\varepsilon}_{И} = \sqrt{C_{ijkl}e_{ij}^{*}e_{kl}^{*}/3K^{*}}$ связаны зависимостью

$$s_{ij}^{*} = \frac{\bar{\sigma}_{И}}{3K^{*}\bar{\varepsilon}_{И}}C_{ijkl}e_{kl}^{*}. \tag{15}$$

3. Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, постулируется существование экспериментально определяемой зависимости, которая инвариантна к виду напряжённого состояния

$$\bar{\sigma}_{И} = \bar{\sigma}_{И}\left(\bar{\varepsilon}_{И}, T\right). \tag{16}$$

При заданной температуре переход материала из упругого состояния в пластическое происходит при $\bar{\sigma}_{И} = \bar{\sigma}_{И_0}$.

При построении принципа минимума полной энергии для задачи (8)–(11), (14)–(16) использован принцип виртуальной работы и найдена такая функция Π, что $\delta\Pi = \int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV$. Принцип минимума полной энергии принимает вид

$$\Im\left(u_i\right) = \int_{\Omega}\left(\frac{3}{2}K^{*}\left(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^{T}\right)^{2} + \int_{0}^{\bar{\varepsilon}_{И}}\bar{\sigma}_{И}\left(\bar{\varepsilon}_{И}\right)d\bar{\varepsilon}_{И}\right)dV - \int_{\Omega}b_i u_i dV - \int_{S_1}w_i u_i dS. \tag{17}$$

Функционал (17) может рассматриваться только на непрерывных полях перемещений, удовлетворяющих граничным условиям на перемещения на участках S_2. Первый член в подынтегральном выражении объёмного интеграла в (17) связан с работой деформации при изменении объёма элементарного прямоугольного параллелепипеда, а второй – с изменением его формы.

Для определения характера стационарной точки функционала (17) найдёна разность его значений, соответствующих допустимым $u_i\left(M\right) = u_i^{r}\left(M\right) + \delta u_i\left(M\right)$ и действительным $u_i^{r}\left(M\right)$ перемещениям. Она равна

$\Delta\Im = \int\limits_{\Omega}\left(\frac{3}{2}K^{*}\left(\delta\bar{\varepsilon}\right)^{2} + \frac{\partial\bar{\sigma}_{и}^{r}}{\partial\bar{\varepsilon}_{и}^{r}}\left(\delta\bar{\varepsilon}_{и}\right)^{2}\right)dV$. Так как для устойчиво деформируемых материалов при монотонной зависимости $\bar{\sigma}_{и}$ от $\bar{\varepsilon}_{и}$ справедливо неравенство $\frac{\partial\bar{\sigma}_{и}^{r}}{\partial\bar{\varepsilon}_{и}^{r}} > 0$, то $\Delta\Im \geq 0$ и (17) на действительном распределении перемещений достигает минимума.

При построении принципа минимума дополнительной работы для задачи (8)–(11), (15)–(17) использован принцип дополнительной виртуальной работы, получена такая функция R, что $\delta R = \int\limits_{\Omega}\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}dV$. Принцип минимума дополнительной работы принимает вид:

$$O\left(\sigma_{ij}\right) = \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\left(\bar{\sigma}\right)^{2}}{6K^{*}} + \bar{\varepsilon}^{T}\bar{\sigma} + \int\limits_{0}^{\bar{\sigma}_{и}}\bar{\varepsilon}_{и}\left(\bar{\sigma}_{и}\right)d\bar{\sigma}_{и}\right)dV - \int\limits_{S_2}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS. \qquad (18)$$

Определим характер стационарной точки функционала (18), оценивая разность его значений, соответствующих статически возможным $\sigma_{ij}\left(M\right) = \sigma_{ij}^{r}\left(M\right) + \delta\sigma_{ij}\left(M\right)$ и действительным $\sigma_{ij}^{r}\left(M\right)$ напряжениям. Поскольку $\Delta O = \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\left(\delta\bar{\sigma}\right)^{2}}{6K^{*}} + \frac{\partial\bar{\varepsilon}_{и}^{r}}{\partial\bar{\sigma}_{и}^{r}}\left(\delta\bar{\sigma}_{и}\right)^{2}\right)dV \geq 0$, то (18) на действительном распределении напряжений достигает минимума, а функционал

$$Q\left(\sigma_{ij}\right) = -O\left(\sigma_{ij}\right) = -\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\left(\bar{\sigma}\right)^{2}}{6K^{*}} + \bar{\varepsilon}^{T}\bar{\sigma} + \int\limits_{0}^{\bar{\sigma}_{и}}\bar{\varepsilon}_{и}\left(\bar{\sigma}_{и}\right)d\bar{\sigma}_{и}\right)dV + \int\limits_{S_2}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS \qquad (19)$$

на таком распределении достигает максимума.

Функционал (19) может рассматриваться только на полях напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия и силовым граничным условиям на участках S_1.

Поскольку справедлива цепочка неравенств $\Im\left(u_i\right) \geq \Im\left(u_i^{r}\right) = Q\left(\sigma_{ij}^{r}\right) \geq Q\left(\sigma_{ij}\right)$, то построенные функционалы (17) и (19) образуют двойственную вариационную формулировку задачи (8)–(11), (14)–(16) деформационной теории термопластичности анизотропных сред.

Методика нахождения значения встречного функционала для задачи деформационной теории пластичности

Методика излагается на примере цилиндрической трубы. Необходимо отметить, что рассмотрение задачи в полярных координатах не снижает ценности методики, так как предложенный подход может быть легко распространён на задачи, поставленные в декартовой прямоугольной системе координат.

Построены распределения напряжений, обеспечивающие выполнение уравнений равновесия внутри прямоугольного конечного элемента (КЭ):

$$\sigma_{r\varphi} = \sum_{\substack{0\le b\le s\\ 0\le a\le f}} c_{ab} r^a \varphi^b, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\sum_{\substack{0\le b\le s\\ 0\le a\le f}} \frac{(a+2)c_{ab} r^a \varphi^{b+1}}{b+1} + \sum_{p=0}^{n} d_p r^p,$$

$$\sigma_{rr} = -\sum_{\substack{0\le b\le s\\ 0\le a\le f}} \frac{(a+2)c_{ab} r^a \varphi^{b+1}}{(b+1)(a+1)} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{d_p r^p}{p+1} - \sum_{\substack{1\le b\le s\\ 0\le a\le f}} \frac{b c_{ab} r^a \varphi^{b-1}}{b+1} + \sum_{q=0}^{m} e_q \varphi^q \Big/ r, \qquad (20)$$

где c_{ab}, d_p , e_q – коэффициенты полиномов.

Распределения (20) обеспечивают выполнение уравнений равновесия внутри КЭ. Кроме того, необходимо обеспечить и непрерывность нормальных и касательных напряжений при переходе через границу элемента, а также выполнение силовых граничных условий. Условия непрерывности нормальных и касательных напряжений и граничные условия записываются в точках стороны КЭ, а не в его углах, что существенно облегчает учет силовых граничных условий. Число таких точек на одну больше порядка аппроксимирующего полинома.

Необходимо подчеркнуть, что нашей целью является не получение решения в напряжениях, а лишь нахождение его некоторой интегральной характеристики – значения встречного функционала. Из вышеприведённого способа построения поля напряжений следует, что можно построить и такое допустимое поле напряжений, которое в заданных точках совпадает с полем напряжений, полученным из решения задачи в перемещениях. Для этого необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов полиномов. Она состоит из трех типов уравнений:

1) условия непрерывности нормальных и касательных напряжений при переходе через границу элемента;
2) граничные условия на напряжения;
3) соотношения, в заданных точках обеспечивающие совпадение значений допустимого поля напряжений и поля напряжений, полученного из решения задачи в перемещениях.

Так как при подсчёте значения встречного функционала методом численного интегрирования используются напряжения лишь в конечном числе точек, то строить всё поле напряжений нет необходимости. Предположим, что допустимое поле напряжений уже построено и при этом напряжения в точках интегрирования равны значениям напряжений, полученным из решения в перемещениях. Тогда для нахождения значения встречного функционала можно провести численное интегрирование решения задачи в перемещениях на той же самой сетке КЭ. Таким образом, решать описанную СЛАУ нет необходимости.

Необходимо также отметить, что соотношения (20) определяют только радиальные, окружные и касательные напряжения. Соответственно, осевые напряжения из них найти нельзя. Особенностью нелинейной задачи является то, что в отличие от линейного случая осевые напряжения нельзя получить из радиальных и окружных. Таким образом, встаёт проблема построения поля осевого напряжения. Предлагаемая методика позволяет избежать её решения.

В третьей главе описан алгоритм численной реализации основных матричных соотношений МКЭ. Приведены алгоритм «упругий предиктор / пластический корректор» и касательная матрица для случаев равномерного и неравномерного нагрева материала, описываемого моделью Хоффмана.

Ниже приведён алгоритм решения уравнения (13) методом Ньютона. Для получения решения $\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}\,n+1}^{(k)} = \vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}\,n+1}^{(k-1)} + \Delta\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}}^{(k)}$ на k-ой итерации, соответствующей промежутку $[t_n, t_{n+1}]$, необходимо найти поправку $\Delta\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}}^{(k)}$ из системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{K}_{\mathrm{T}}\Delta\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}}^{(k)} = -\left(\vec{\mathbf{f}}^{\,\mathrm{int}}\left(\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}\,n+1}^{(k-1)}\right) - \vec{\mathbf{f}}_{n+1}^{\,\mathrm{ext}}\right)$, где $\mathbf{K}_{\mathrm{T}}$ – глобальная матрица жёсткости. Она получена ансамблированием матриц жёсткости $\mathbf{K}_{\mathrm{T}}^{(e)} = \int\limits_{\Omega^{(e)}} \left(\mathbf{B}^{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{D}}\mathbf{B}^{\mathrm{e}}\mathrm{dV}$ каждого КЭ, где $\mathbf{B}^{\mathrm{e}}$ – дифференциальный оператор перехода от перемещений, определённых с помощью функций формы КЭ, к деформациям, а $\hat{\mathbf{D}}$ – касательная матрица.

Итак, алгоритм метода Ньютона решения уравнения (13) имеет вид.

1. $k = 0$. Задать начальное приближение $\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}\,n+1}^{(0)} = \vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}\,n}$, невязку $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{f}}^{\,\mathrm{int}}\left(\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}\,n}\right) - \vec{\mathbf{f}}_{n+1}^{\,\mathrm{ext}}$, допустимую погрешность tol.
2. $k = k+1$. Найти касательную матрицу $\hat{\mathbf{D}}$ в каждой точке интегрирования Гаусса и вычислить матрицу жёсткости $\mathbf{K}_{\mathrm{T}}^{(e)}$ каждого КЭ.
3. Ансамблировать глобальную матрицу жёсткости и решить систему $\mathbf{K}_{\mathrm{T}}\Delta\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}}^{(k)} = -\left(\vec{\mathbf{f}}^{\,\mathrm{int}}\left(\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}\,n+1}^{(k-1)}\right) - \vec{\mathbf{f}}_{n+1}^{\,\mathrm{ext}}\right)$.
4. Добавить поправку $\Delta\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}}^{(k)}$: $\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}\,n+1}^{(k)} = \vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}\,n+1}^{(k-1)} + \Delta\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}}^{(k)}$.
5. Скорректировать деформации $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{B}^{\mathrm{e}}\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}\,n+1}^{(k)}$.
6. Скорректировать напряжения и внутренние параметры состояния $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k)} = \vec{\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\alpha}_n, \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{(k)}\right)$, $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\alpha}_n, \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{(k)}\right)$.
7. Вычислив вектор внутренних сил каждого КЭ, найти глобальный вектор внутренних сил $\vec{\mathbf{f}}^{\,\mathrm{int}}\left(\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}\,n+1}^{(k)}\right)$ и невязку $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{f}}^{\,\mathrm{int}}\left(\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{f}\,n+1}^{(k)}\right) - \vec{\mathbf{f}}_{n+1}^{\,\mathrm{ext}}$.
8. Проверить сходимость. Если $\|\vec{\mathbf{r}}\| / \|\vec{\mathbf{f}}_{n+1}^{\,\mathrm{ext}}\| \le tol$, то – к п. 9, иначе – к п. 2.
9. Скорректировать решение $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{(k)}$.

Далее рассмотрим пункты 2 (расчёт касательной матрицы) и 6 (процедура коррекции параметров напряженного состояния) алгоритма более подробно, так как только в них проявляется специфика модели материала. Остальные пункты алгоритма являются стандартными.

Входными данными для процедуры коррекции параметров напряженного состояния являются деформации, найденные в п. 5 алгоритма решения (13), и внутренние параметры состояния материала в точке интегрирования Гаусса. Результат – скорректированные напряжения и внутренние параметры состояния в конце шага нагружения – используются в п. 7 алгоритма.

Для коррекции параметров напряженного состояния в точке интегрирования Гаусса применён метод разделения операторов и основанный на нём

алгоритм «упругий предиктор / пластический корректор», который также позволяет оценить погрешность на шаге нагружения. Сутью алгоритма является то, что исходная упруго-пластическая задача делится на две – «упругий предиктор» и «пластический корректор».

На стадии «упругий предиктор» предполагается, что величина приращения тензора деформации $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$, соответствующая итерации с номером k на промежутке $[t_n, t_{n+1}]$, является упругой. Тогда упругая деформация равна $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial\ (k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{e\ (k)} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ и соответствующее скорректированное состояние можно получить непосредственно (оно обозначено с применением надстрочных индексов «(k)» и «*trial*», а также подстрочного индекса «$n+1$»):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial\ (k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{e\ (k)} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial\ (k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{p}, \tag{22}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial\ (k)} = \bar{\varepsilon}_n^{p}, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial\ (k)} = \boldsymbol{C}(T)\cdot\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial\ (k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^T\right). \tag{24}$$

Если справедливо $F\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial\ (k)}, \bar{\varepsilon}_n^{p}, T\right) \le 0$, то скорректированное состояние описывается соотношениями (21)–(24). Если же $F\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial\ (k)}, \bar{\varepsilon}_n^{p}, T\right) > 0$, то необходимо применить стадию «пластический корректор», на которой происходит возврат на поверхность нагружения (ту же самую, если упрочнение отсутствует, или скорректированную при его наличии). Если применяется ассоциированный закон пластического течения, то возврат на поверхность нагружения происходит по нормали к ней. В связи с тем, что метод разделения оператора требует, чтобы каждая подзадача решалась бы с помощью алгоритма не менее чем первого порядка точности, то для дискретизации уравнений модели материала выбран неявный метод Эйлера первого порядка. В результате получена нелинейная система с неизвестными $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ (k)}$, $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ (k)}$, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ (k)}$ и $\Delta\lambda_{n+1}^{(k)}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ (k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial\ (k)} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ (k)}, \\ \Delta\varepsilon_{ij\ n+1}^{p\ (k)} = \Delta\lambda_{n+1}^{(k)} \left.\dfrac{\partial F\left(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^{p}, T\right)}{\partial \sigma_{ij}}\right|_{n+1}^{(k)}, \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ (k)} = \bar{\varepsilon}_n^{p} + \sqrt{2\Delta\varepsilon_{ij\ n+1}^{p\ (k)}\Delta\varepsilon_{ij\ n+1}^{p\ (k)}/3}, \\ F\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ (k)}, T\right) = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{C}(T)\cdot\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ (k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^T\right). \end{cases} \tag{25}$$

Система (25) преобразована в нелинейное уравнение относительно $\Delta\lambda_{n+1}^{(k)}$ путём перехода к матричным обозначениям, выражения $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$ и $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ (k)}$ через $\Delta\lambda_{n+1}^{(k)}$ и их подстановки в функцию текучести

$$\Psi\left(\Delta\lambda_{n+1}^{(k)}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{\sigma}_{n+1}^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(T)\vec{\sigma}_{n+1}^{(k)}+\vec{\mathbf{q}}(T)^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_{n+1}^{(k)}- \tag{26}$$

$$-\sigma_{\gamma}^{2}\left(\bar{\varepsilon}_{n}^{p}+\sqrt{2/3}\cdot\Delta\lambda_{n+1}^{(k)}\sqrt{\left(\mathbf{S}(T)\vec{\sigma}_{n+1}^{(k)}+\vec{\mathbf{q}}(T)\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}\left(\mathbf{S}(T)\vec{\sigma}_{n+1}^{(k)}+\vec{\mathbf{q}}(T)\right)},T\right)=0,$$

где $\vec{\sigma}_{n+1}^{(k)}\left(\Delta\lambda_{n+1}^{(k)},T\right)=\left(\mathbf{I}+\Delta\lambda_{n+1}^{(k)}\mathbf{D}(T)\mathbf{S}(T)\right)^{-1}\left(\vec{\sigma}_{n+1}^{trial\,(k)}(T)-\Delta\lambda_{n+1}^{(k)}\mathbf{D}(T)\vec{\mathbf{q}}(T)\right)$;

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}2c_1 & -c_3 & 0 & -2c_1+c_3\\ -c_3 & 2c_2 & 0 & -2c_2+c_3\\ 0 & 0 & c_4 & 0\\ -2c_1+c_3 & -2c_2+c_3 & 0 & 2c_1+2c_2-2c_3\end{pmatrix};\quad \vec{\sigma}_{n+1}^{trial\,(k)}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}^{trial\,(k)}\\ \sigma_{22}^{trial\,(k)}\\ \sigma_{12}^{trial\,(k)}\\ \sigma_{33}^{trial\,(k)}\end{pmatrix}_{n+1};\quad \mathbf{Z}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}2c_1 & -c_3 & 0 & -2c_1+c_3\\ -c_3 & 2c_2 & 0 & -2c_2+c_3\\ 0 & 0 & 2c_4 & 0\\ -2c_1+c_3 & -2c_2+c_3 & 0 & 2c_1+2c_2-2c_3\end{pmatrix};\quad \vec{\mathbf{q}}=\begin{pmatrix}c_5\\c_6\\0\\c_7\end{pmatrix}.$$

I – единичная матрица четвёртого порядка;

D – матрица упругих констант, такая, что $\vec{\sigma}=\mathbf{D}\vec{\varepsilon}$.

Для решения (26) применён метод Ньютона. Особенностью работы алгоритма «упругий предиктор / пластический корректор» является то, что радиус сходимости метода Ньютона решения (26) зависит от отношения модулей Юнга материала по различным направлениям ортотропии. При больших значениях указанного отношения может возникнуть такая ситуация, когда начальное приближение $\Delta\lambda_{n+1}^{(k)}=0$ находится за пределами радиуса сходимости, что может привести к не имеющим физического смысла решениям вида $\Delta\lambda_{n+1}^{(k)}<0$. С целью получения физически достоверного состояния разработан алгоритм поиска начального приближения.

На первом этапе алгоритма поиска начального приближения происходит локализация корня уравнения (26) – определяется значение $\Delta\lambda^{*}$, при котором $\Psi\left(\Delta\lambda^{*}\right)\le 0$. Выберем шаговое значение *step*, а затем найдём значение функции (26) в точках $\Delta\lambda^{*}=step$, $\Delta\lambda^{*}=2*step$, $\Delta\lambda^{*}=3*step$ и так далее до тех пор, пока не будет найдено такое значение $\Delta\lambda^{*}$, для которого $\Psi\left(\Delta\lambda^{*}\right)\le 0$. Так как $\Delta\lambda^{*}$ имеет порядок $\frac{деформации}{напряжения}$, то шаговое значение было выбрано равным

$$step=\left(\left|\varepsilon_{11}^{trial}\right|+\left|\varepsilon_{22}^{trial}\right|+\left|\varepsilon_{33}^{trial}\right|+\left|\varepsilon_{12}^{trial}\right|\right)\Big/\left(\left|\sigma_{11}^{trial}\right|+\left|\sigma_{22}^{trial}\right|+\left|\sigma_{33}^{trial}\right|+\left|\sigma_{12}^{trial}\right|\right)\Big|_{n+1}.$$

На втором этапе алгоритма улучшенное начальное приближение находится методом деления найденного отрезка $[0,\Delta\lambda^{*}]$ пополам.

Второй особенностью работы алгоритма «упругий предиктор / пластический корректор» является влияние упругой анизотропии материала на его точность. Из анализа карт изо-ошибок найдено, что чем больше отношение модулей Юнга материала по направлениям его упругой ортотропии, тем больше погрешность алгоритма коррекции параметров напряженного состояния и тем меньше должны быть шаги нагружения при расчёте напряжённо-

деформированного состояния (НДС) конструкции. В таком случае рекомендуется проверять сходимость при уменьшении шагов нагружения.

Полученные карты изо-ошибок для анизотропных разносопротивляющихся материалов совпали с результатами других авторов, что подтверждает правильность алгоритма коррекции параметров напряженного состояния.

Касательная матрица $\hat{\mathbf{D}}$ строится в п. 2. алгоритма решения (13). Она необходима для получения матрицы жёсткости КЭ и последующего ансамблирования системы линейных уравнений МКЭ. Если матрица $\hat{\mathbf{D}}$ согласована с алгоритмом коррекции параметров напряженного состояния, то метод Ньютона решения уравнения (13) будет иметь квадратичную скорость сходимости. Поэтому для получения такой матрицы должна быть использована система (25). Матрица $\hat{\mathbf{D}}$ является матричной формой тензора с компонентами

$$D^{ep}_{ijpq} = \left.\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{pq}}\right|_{\varepsilon^{(k-1)}_{n+1}}, \quad i,j,p,q = 1,2,3. \tag{27}$$

Выражение (27) содержит частные производные, вообще говоря, неявной функции (12), определяемой алгоритмом коррекции параметров напряженного состояния в процессе нагружения. Так как в пределах промежутка $[t_n, t_{n+1}]$ изменяется только ε_{n+1}, то σ_{n+1} является функцией только ε_{n+1}. Таким образом, при фиксированном значении α_n функция (12) является аналогом закона нелинейной упругости. Так как входными данными в процедуру коррекции параметров напряженного состояния является деформация «упругий предиктор» $\varepsilon^{e\ trial\ (k)}_{n+1}$, то на $(k-1)$ -ой итерации, соответствующей промежутку $[t_n, t_{n+1}]$, функцию (12) можно переписать в виде $\bar{\sigma}^{(k-1)}_{n+1} = \bar{\sigma}\left(\alpha_n, \varepsilon^{e\ trial\ (k-1)}_{n+1}\left(\varepsilon^{(k-1)}_{n+1}\right)\right)$. Поскольку $\Delta\varepsilon = d\varepsilon^{(k-1)}_{n+1} = d\varepsilon^{e\ trial\ (k-1)}_{n+1}$, то (27) принимает вид $D^{ep}_{ijpq} = \left.\frac{d\sigma_{ij}}{d\varepsilon^{e\ trial}_{pq}}\right|_{\varepsilon^{(k-1)}_{n+1}}$.

Касательная матрица принимает вид (индекс «$(k-1)$» опущен)

$$\hat{\mathbf{D}} = \left(\mathbf{I} + \Delta\lambda_{n+1}\mathbf{D}(T)\mathbf{S}(T)\right)^{-1}\left(\mathbf{D}(T) - \frac{\mathbf{R}(T)}{B(T)}\right),$$

где

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} L_1A_1 & L_1A_2 & 2L_1A_3 & L_1A_4 \\ L_2A_1 & L_2A_2 & 2L_2A_3 & L_2A_4 \\ L_3A_1 & L_3A_2 & 2L_3A_3 & L_3A_4 \\ L_4A_1 & L_4A_2 & 2L_4A_3 & L_4A_4 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{L}} = \left(\mathbf{D}\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{DS}\bar{\sigma}_{n+1}\right),$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\left(\mathbf{I} + \Delta\lambda_{n+1}\mathbf{DS}\right)^{-1}\mathbf{D}\right]\left(\mathbf{S}\bar{\sigma}_{n+1} + \bar{\mathbf{q}} - \Delta\lambda_{n+1}2\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_\gamma \frac{d\sigma_\gamma}{d\bar{\varepsilon}^p_{n+1}} \frac{\mathbf{S}\left(\mathbf{S}\bar{\sigma}_{n+1} + \bar{\mathbf{q}}\right)}{\sqrt{\left(\mathbf{S}\bar{\sigma}_{n+1} + \bar{\mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}\left(\mathbf{S}\bar{\sigma}_{n+1} + \bar{\mathbf{q}}\right)}}\right),$$

$$B = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_\gamma \frac{d\sigma_\gamma}{d\bar{\varepsilon}^p_{n+1}} \frac{\left(\mathbf{S}\bar{\sigma}_{n+1} + \bar{\mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}\left(\mathbf{S}\bar{\sigma}_{n+1} + \bar{\mathbf{q}}\right)}{\sqrt{\left(\mathbf{S}\bar{\sigma}_{n+1} + \bar{\mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}\left(\mathbf{S}\bar{\sigma}_{n+1} + \bar{\mathbf{q}}\right)}} +$$

$$+\left(\mathbf{S}\vec{\sigma}_{n+1}+\vec{\mathbf{q}}-\Delta\lambda_{n+1}2\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y\frac{d\sigma_Y}{d\bar{\varepsilon}^p_{n+1}}\frac{\mathbf{S}\left(\mathbf{S}\vec{\sigma}_{n+1}+\vec{\mathbf{q}}\right)}{\sqrt{\left(\mathbf{S}\vec{\sigma}_{n+1}+\vec{\mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}\left(\mathbf{S}\vec{\sigma}_{n+1}+\vec{\mathbf{q}}\right)}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}\left[\left(\mathbf{I}+\Delta\lambda_{n+1}\mathbf{DS}\right)^{-1}\left(\mathbf{D}\vec{\mathbf{q}}+\mathbf{DS}\vec{\sigma}_{n+1}\right)\right].$$

В четвёртой главе приведены результаты применения разработанных методик и алгоритмов для математического моделирования пластического деформирования конструкций, испытывающих как механические (длинная цилиндрическая труба, нагруженная внутренним давлением), так и термомеханические воздействия (камера сгорания жидкостного ракетного двигателя).

Материал трубы моделировался как анизотропный и разносопротивляющийся, а материал камеры – как изотропный и разносопротивляющийся. Для оценки влияния эффекта разносопротивляемости проведено сравнение результатов расчётов НДС цилиндрической трубы, полученных при применении критериев текучести Хилла и Хоффмана, и НДС камеры сгорания, найденных при использовании критериев текучести Мизеса и Хоффмана.

Показано, что пластическое деформирование разносопротивляющихся конструкционных материалов не всегда может быть адекватно описано с помощью простейших математических моделей, так как при этом могут быть выявлены не все эффекты, оказывающие существенное влияние на работу конструкции. Следовательно, в случае аварии диагностика её причин будет затруднена.

Так, уровень остаточных напряжений (в том числе и наиболее опасных окружных) в трубе из материала, описываемого моделью Хоффмана, существенно ниже, чем в трубе из материала, описываемого моделью Хилла. Кроме того, труба из материала Хоффмана является более жёсткой, а опасность расслоения её материала меньше. Таким образом, при одинаковой нагрузке труба из материала Хоффмана может иметь меньшее поперечное сечение по сравнению с трубой из материала Хилла. Следовательно, учёт эффекта разносопротивляемости материала при расчёте НДС трубы может привести к экономии материала и снижению веса конструкции.

При расчёте НДС камеры сгорания жидкостного ракетного двигателя различие в радиальных перемещениях, полученных при использовании моделей Мизеса и Хоффмана, составляет около 10%, причем в камере из разносопротивляющихся материалов они больше. Таким образом, учёт эффекта разносопротивляемости при расчёте НДС камеры позволяет точнее оценить жёсткость конструкции. После снятия нагрузки в оболочке камеры, изготовленной из материалов Мизеса, связи между медной и стальной стенками оболочки камеры останутся растянутыми, а в оболочке камеры, изготовленной из материалов Хоффмана – сжатыми. Радиальные напряжения в шве, соединяющем медную и стальную стенки оболочки, отличаются в 4,5 раза (для модели материала Мизеса они больше).

Полученные результаты хорошо согласуются с известными результатами для предельных случаев (когда модель Хоффмана совпадает с моделью Мизеса), что подтверждает правильность разработанных алгоритмов.

При расчёте НДС одной и той же трубы, нагруженной одним и тем же

внутренним давлением, решения плоской и осесимметричной задач вдоль радиуса трубы совпали, что также свидетельствует о правильности разработанных алгоритмов. Такое совпадение наблюдалось и в случае анизотропного разносопротивляющегося материала.

Показана квадратичная скорость сходимости решения – метод Ньютона решения системы уравнений МКЭ сходился за 4–5 итераций на каждом шаге нагружения, что показывает правильность полученных касательных матриц как в изотермическом случае, так и при неравномерном нагреве.

С использованием разработанной методики подсчёта значения встречного функционала на основе полученной двойственной вариационной постановки задачи деформационной теории термопластичности анизотропных сред проведена оценка погрешности приближенного решения задачи теории течения, полученного для случая простого нагружения. Найденное НДС трубы, изготовленной из материала с критерием текучести Хилла, попало в достаточно узкую «вилку» вариационных оценок – разница значений прямого и встречного функционалов составила 1,385%. Этот факт свидетельствует как о достоверности найденного НДС трубы, так и о возможности применения предложенной методики подсчета значений встречного функционала для задач деформационной теории пластичности анизотропных сред.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Построены алгоритмы МКЭ для расчёта пластического состояния ортотропного разносопротивляющегося материала с критерием текучести Хоффмана в случаях равномерного и неравномерного нагрева. Для коррекции параметров напряжённого состояния в точке интегрирования Гаусса в процессе нагружения применён алгоритм «упругий предиктор / пластический корректор». Для получения физически достоверного скорректированного состояния в случае больших отношений модулей Юнга материала по направлениям его упругой ортотропии разработан алгоритм поиска начального приближения для метода Ньютона, используемого на стадии «пластический корректор» алгоритма. Найдена касательная матрица, обеспечивающая квадратичную скорость сходимости метода Ньютона решения системы уравнений МКЭ – метод сходился за 4–5 итераций на каждом шаге нагружения.
2. Показано, что чем больше отношение модулей Юнга материала по направлениям его упругой ортотропии, тем меньше должны быть шаги нагружения при расчёте НДС конструкции. В таком случае рекомендуется проверять сходимость при уменьшении шагов нагружения.
3. Достоверность разработанных алгоритмов подтверждается хорошим совпадением полученных результатов с известными, в том числе и для предельных случаев – при совпадении моделей Хоффмана и Мизеса.
4. Путём математического моделирования пластического деформирования элементов конструкций, испытывающих как механические, так и термомеханические воздействия, показано, что пластическое состояние разносо-

противляющихся конструкционных материалов не всегда может быть адекватно описано с помощью простейших математических моделей, так как при этом могут быть выявлены не все эффекты, оказывающие существенное влияние на работу конструкции.

5. На случай анизотропных сред обобщена известная двойственная вариационная формулировка задачи деформационной теории термопластичности изотропных сред. Построены обладающие экстремальными свойствами функционалы в перемещениях и напряжениях, по разности значений которых можно найти оценку погрешности приближённого решения в энергетической норме. Предложена методика нахождения значения функционала в напряжениях, которая не требует решения дополнительной системы уравнений.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

1. Зарубин В.С., Красновский Е.Е. Двойственная вариационная постановка задачи деформационной теории термопластичности анизотропных тел // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. – 2005. – № 1(16). – С. 41-54.

2. Красновский Е.Е. Математическое моделирование пластического течения анизотропного разносопротивляющегося материала // Известия вузов. Машиностроение. – 2005. – № 5.

3. Красновский Е.Е. Построение допустимого поля напряжений для встречного функционала в теории упругости // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14, № 8. – С. 124-127.

4. Красновский Е.Е. Построение допустимого поля напряжений для встречного функционала // Тезисы докладов XI Международной конференции по вычислительной математике и современным прикладным программным системам. г. Истра, 2-6 июля 2001 г. – М., 2001. – С. 235-236.

5. Красновский Е.Е. Применение метода конечных элементов к расчёту пластического течения разносопротивляющихся ортотропных композитов с критерием текучести Хоффмана // Материалы Первой международной научно-технической конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея. – М., 2004. – С. 99-103.

6. Красновский Е.Е. Расчёт пластического течения ортотропных композитов с критерием текучести Хоффмана методом конечных элементов // Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы: Сборник трудов научно-методической конференции, посвящённой 40-летию НУК ФН МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М., 2005. – С. 545-553.

Подписано к печати «12» апреля 2005 г. Зак. 105. Объём 1 п.л. Тир. 100.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.