



На правах рукописи

Ле Шонг Тунг

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ**

05.13.18 - Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

МОСКВА – 2005

М.С.С.

Работа выполнена в Московском государственном техническом
университете им. Н.Э. Баумана

Научный руководитель: д. т. н., с.н.с. Станкевич И.В.

Официальные оппоненты: д. т. н., проф. Чайнов Н. Д.
к.ф.-м.н., м.н.с. Савенков Е. Б.

Ведущая организация: ФГУП «Центральный институт
авиационного моторостроения
им. П.И. Баранова», Государственный
научный институт Российской Федерации

Защита состоится « ____ » _____ 2005 года в ____ часов на заседании
диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном
техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу: 105005, г. Москва,
2-я Бауманская ул., д. 5.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью
организации, просим высылать по адресу: 105005, г. Москва, 2-я
Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н.Э. Баумана, учёному секретарю совета
Д 212.141.15.

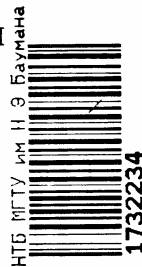
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке М
Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан « ____ » _____ 2005 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
д. ф.-м. н., профессор



Волков И.К.



ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы

Элементы теплонапряженных конструкций часто работают в условиях интенсивных тепловых и силовых воздействий. Работоспособность и долговечность таких конструкций зависят от многих взаимосвязанных факторов. Особенности работы теплонапряженных конструкций требуют совместного рассмотрения и температурного и силового воздействий.

В настоящее время одним из наиболее перспективных направлений исследования температурного и напряженно-деформированного состояний является математическое моделирование.

Высокая динамика современного развития вычислительных средств привела к появлению мощных компьютерных систем. Это открывает новые более широкие возможности эффективного использования математического моделирования сложных теплофизических и физико-механических процессов. В то же время качество математического моделирования во многом зависит, во-первых, от достоверности на теоретическом уровне принятых математических моделей, во-вторых, от полноты их алгоритмической и программной реализации.

Математическое моделирование в настоящее время интенсивно развивается. Строятся усовершенствованные модели сложных нелинейных физических процессов, конструируются новые численные алгоритмы, проводятся разнообразные вычислительные эксперименты: поисковые, диагностические, оптимизационные.

Дальнейшее интенсивное развитие методов математического моделирования как эффективного средства исследования сложных процессов теплообмена и деформирования является одной из актуальных проблем прикладной математики, так как открывает новые возможности в развитии таких предметных областей как теория теплопроводности и механика деформируемого твердого тела, значительно расширяет перспективы создания и практического использования систем автоматизированного проектирования.

Важнейшим с этой точки зрения является дальнейшее развитие прикладных методов математического моделирования применительно к решению новых классов задач вычислительной термомеханики, математические постановки которых в наиболее общем виде учитывают сложные физические эффекты, возникающие при неизотермическом вязкоупругопластическом деформировании. Это даёт возможность проведения более полного и тонкого анализа температурного и напряженно-деформированного состояний ответственных элементов конструкций, подверженных сложному термомеханическому нагружению, и, таким образом, получения данных для более точной оценки их ресурса.

В областях, имеющих сложную геометрическую форму, и при сравнительно невысоких требованиях к гладкости функций, входящих в формулировку задач теплопроводности, наиболее перспективны численные методы, среди которых продолжительное время, лидирующее положение занимают метод конечных элементов и метод граничных элементов.

Наряду с этими методами для решения задач теплопроводности и МДТТ также можно использовать метод локальных вариаций, который является главным объектом исследования этой работы. Метод прост по своей логике и легко программируется, что делает его удобным для практического использования на вычислительных машинах. Метод локальных вариаций позволяет легко учитывать ограничения на искомые функции, особенности геометрической формы области.

Важным преимуществом метода локальных вариаций является и то, что при его реализации не требуется формировать и решать систему линейных алгебраических уравнений большого порядка.

Актуальной является также проблема создания новых эффективных алгоритмов и на их основе современного прикладного программного обеспечения для решения нелинейных задач вычислительной термомеханики.

Цель работы. В соответствии с изложенным выше целью настоящей диссертационной работы является дальнейшее развитие прикладных численных методов решения нелинейных краевых задач вычислительной термомеханики с учётом особенностей поведения материала конструкции в условиях термосилового нагружения.

Постановленная цель достигается на основе решения **следующих задач:**

1. Разработка алгоритмов для решения нелинейных краевых задач теплопроводности в двумерных областях сложной геометрической формы с использованием метода локальных вариаций.
2. Разработка математических моделей и алгоритмов для решения физически нелинейных квазистатических краевых задач МДТТ в двумерных областях сложной геометрической формы с помощью метода локальных вариаций.
3. Создание на основе разработанных моделей и алгоритмов комплекса прикладных программ на основе метода локальных вариаций для решения двумерных нелинейных задач теплопроводности и МДТТ.

Научная новизна

Разработаны алгоритмы решения нелинейных краевых задач термомеханики в двумерных областях сложной геометрической формы, основанные на современных вычислительных технологиях и применении метода локальных вариаций в сочетании с методом переменных параметров упругости.

Достоверность результатов работы основана на строгости математического построения описанных моделей исследуемых теплофизических и физико-механических процессов; на тщательном и методическом тестировании разработанных алгоритмов и программ на решениях широко известных тестовых задач; на сравнении полученных результатов расчетов с результатами расчетов других авторов.

Практическая значимость. Разработанные алгоритмы диссертации могут быть использованы в исследовательских отделениях, ведущих работы по проектированию и производству теплонапряженных конструкций.

На защиту выносятся следующие положения:

- Алгоритмы решения нелинейных краевых задач теплопроводности в двумерных областях сложной геометрической формы.
- Итерационные алгоритмы решения физически нелинейных квазистатических краевых задач МДТТ в двумерных областях сложной геометрической формы с учетом особенности поведения материала конструкции в условиях термосилового нагружения.
- Программная реализация решения двумерных нелинейных задач теплопроводности и МДТТ.

Апробация работы. Материалы настоящей диссертационной работы докладывались на Первой международной научно-технической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения акад. В.Н. Челомея., Москва – Реутов, 24-25 мая 2004; итоговых научных конференциях МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2003 – 2004 г.г.; научных семинарах отдела ЭМ-2.4 НИИЭМ МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, 2003 - 2005г.г.; на симпозиуме «Образование через науку», Москва, 17 мая 2005; семинаре кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, 2005г.

Публикации. Основные содержания работы изложены в 2 статьях и 2 тезисах выступлений на конференциях.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав и выводов. Работа изложена на 130 страницах, содержит 35 иллюстраций и 3 таблицы. Библиография включает 89 наименований.

ОСНОВНЫЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследования, формулируются задачи исследования, научная новизна полученных результатов, защищаемые положения, структура и объём диссертационной работы.

В первой главе рассматривается задача теплопроводности.

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности

$$(\lambda(\bar{x}, T) T_{,i})_{,i} = 0, \quad \bar{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$T(\bar{x})|_{S_1} = T_w(\bar{x}), \quad \bar{x} \in S_1 \subset \partial\Omega; \quad (2)$$

$$-n_i \lambda(\bar{x}, T) T_{,i}|_{S_2} = q_w(\bar{x}, T), \quad \bar{x} \in S_2 \subset \partial\Omega; \quad (3)$$

$$-n_i \lambda(\bar{x}, T) T_{,i}|_{S_3} = \alpha_w(\bar{x}, T)(T(\bar{x}) - T_f(\bar{x})), \quad \bar{x} \in S_3 \subset \partial\Omega; \quad (4)$$

где $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \partial\Omega$, $\text{mes}(S_1 \cap S_2) = \text{mes}(S_1 \cap S_3) = \text{mes}(S_2 \cap S_3) = 0$.

Здесь $T(\bar{x})$ - температура; $\lambda(\bar{x}, T)$ - коэффициент теплопроводности; $T_w(\bar{x})$ - температура поверхности S_1 ; $q_w(\bar{x}, T)$ - плотность теплового потока на поверхности S_2 ; $\alpha_w(\bar{x}, T)$ - коэффициент теплоотдачи на поверхности S_3 ; $T_f(\bar{x})$ - температура среды у поверхности S_3 ; n_i - компоненты единичного вектора внешней нормали $\vec{n} = n_i \vec{e}_i$ к границе $\partial\Omega$. Запятой с индексом обозначена операция дифференцирования по пространственным координатам.

Решение нелинейной задачи (1)-(4) можно заменить решением последовательности линейных задач. При этом необходимо корректировать параметры задачи, зависящие от искомой температуры.

Численное решение каждой линейной дифференциальной задачи предполагает построение соответствующего дискретного аналога. В данной работе дискретный аналог строился с помощью процедур метода локальных вариаций, основанных на вариационной формулировке.

Вариационная задача теплопроводности, эквивалентная краевой задаче (1)-(4) может быть сформулирована в виде

$$\Phi(T) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\lambda T_{,i} T_{,i}] dx + \int_{S_2} q_w T ds + \int_{S_3} \alpha_w \left(\frac{1}{2} T - T_f \right) T ds \rightarrow \min, \quad T \in D, \quad (5)$$

где $D = \{u \in C^1(\Omega) \cap L_2(\bar{\Omega}), u|_{S_1} = T_w\}$.

В разделе рассматривается алгоритм решения поставленной вариационной задачи на основе метода локальных вариаций.

Разобьем область Ω на треугольную сетку с пространственными шагами $\Delta x, \Delta y$ (в зависимости от сложности геометрической формы решаемой задачи созданная сетка не обязательно должна быть равномерной).

Минимизируемый функционал (5) приближенно заменяется суммой

$$\Phi \approx I = \sum_{i=0}^{i=m} \sum_{j=0}^{j=n} (I_{ij}^1 + I_{ij}^2), \quad (6)$$

где I_{ij}^1 , I_{ij}^2 – приближенные значения вкладов в функционал по треугольникам с вершиной в точке (x_i, y_j) , $i = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, n}$.

Далее задаются начальные значения температуры $T_{ij}^{(0)}$ и выбирается достаточно малое число h , называемое шагом варьирования температуры. Затем в выбранном порядке варьируются значения температуры $T_{ij}^{(0)}$ во всех узлах области Ω прибавлением и вычитанием величины h , кроме тех, которые принадлежат поверхности S_1 .

На k -ой итерации для каждого узла сетки из трёх возможных значений $T_{ij}^{(k)}$, $T_{ij}^{(k)} + h$ и $T_{ij}^{(k)} - h$ выбирается то значение, которое минимизирует функционал (6). Если от итерации к итерации значение функционала не уменьшается, а значения $T_{ij}^{(k)}$ не изменяются (или меняются в небольшом числе узлов сетки), то шаг варьирования h уменьшается. Процесс варьирования продолжается до тех пор, пока шаг варьирования h не станет достаточно малым ($h < h^*$, где h^* – заданное число) и его дальнейшее уменьшение не приводит к уменьшению значения функционала (6). Далее сетка измельчается и процесс варьирования повторяется аналогичным образом. Узловые значения температуры считаются полученными, когда значения шага варьирования температуры h и пространственных шагов становятся достаточно малыми и их дальнейшее уменьшение не приводит к уменьшению значения функционала (6).

Для проверки алгоритма были рассмотрены решения тестовых задач теплопроводности для тонкостенной и толстостенной цилиндрических труб. Численные результаты были сравнены с аналитическими. Различие в решениях не превышало 3%.

Вторая глава диссертации посвящена решению красовой задачи термоупругости в двумерных областях. При этом были рассмотрены уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j}(\bar{u}, T) + \rho(\bar{x}, T) F_i(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Omega, \quad i, j = 1, 2; \quad (7)$$

граничные условия (кинематические и силовые)

$$u_i(\bar{x})|_{S_1} = u_i^0(\bar{x}), \quad \bar{x} \in S_1 \subset \partial\Omega, \quad i = 1, 2; \quad (8)$$

$$\sigma_{ij}(\bar{u}, T) n_j|_{S_2} = p_i(\bar{x}), \quad \bar{x} \in S_2 \subset \partial\Omega, \quad i, j = 1, 2; \quad (9)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij}(\bar{u}) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(\bar{x}) + u_{j,i}(\bar{x})), \quad \bar{x} \in \bar{\Omega}, \quad i, j = 1, 2; \quad (10)$$

и определяющие уравнения (безындexсная запись)

$$\tilde{\sigma} = \tilde{F}(\tilde{\varepsilon}, T); \quad (11)$$

где $\tilde{u}(\tilde{x})$ - вектор перемещений точки, определяемой радиусом-вектором $\tilde{x} = x_i \tilde{e}_i$; $\tilde{u}^0(\tilde{x})$ - вектор перемещений точек, расположенных на поверхности S_1 , $\tilde{x} \in S_1$; $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_j$ - тензор деформации; $\tilde{\sigma} = \sigma_{ij} \tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_j$ - тензор напряжений; $\rho(\tilde{x}, T)$ - плотность среды; $\tilde{F}(\tilde{x}) = F_i(\tilde{x}) \tilde{e}_i$ - вектор массовых сил; $\tilde{p}_i(\tilde{x}) = p_i(\tilde{x}) \tilde{e}_i$ - вектор внешней нагрузки, действующей на поверхности S_2 , $\tilde{x} \in S_2$; $\tilde{F}(\tilde{\varepsilon}, T)$ - тензор-оператор определяющих уравнений. Здесь $S_1 \cup S_2 = \partial\Omega$, $\text{mes}(S_1 \cap S_2) = 0$.

Структура определяющих уравнений (11) зависит от программ нагружения и проявляющихся при этом свойств материала.

В случае задачи термоупругости этими определяющими соотношениями являются зависимости закона Гука

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + s_{ij} = K(\varepsilon_{kk} - 3\alpha\Delta T)\delta_{ij} + 2G\left(\varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij}\right). \quad (12)$$

Вариационная формулировка задачи термоупругости записывается следующим образом

$$J[\tilde{u}] = \Phi[\tilde{u}] - \int_{\Omega} f_i^0 u_i d\Omega - \int_S p_i^0 u_i dS \rightarrow \min, \quad (13)$$

где

$$\Phi[\tilde{u}] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{K}{2} [u_{k,k} - 3\alpha\Delta T] + \frac{G}{4} \left[u_{i,j} + u_{j,i} - \frac{2}{3} u_{k,k} \delta_{ij} \right]^2 \right\} d\Omega, \quad (14)$$

Функционал (13) достигает минимума, когда векторное поле перемещений является действительным.

Для реальных элементов теплонапряженных конструкций сложной формы, выполненных из разнородных материалов с зависящими от температуры физико-механическими характеристиками, редко удастся воспользоваться аналитическими методами для определения параметров напряженно-деформированного состояния, необходимых для последующего анализа работоспособности исследуемой конструкций. В таких случаях более гибкими и универсальными являются численные методы, построенные на интегральной формулировке задачи. Численные методы решения задач могут быть использованы при анализе неупругого поведения конструкций, когда расчет проводится последовательными приближениями или последовательными этапами нагружения и на каждом приближении или этапе нагружения решается соответствующая задача

термоупругости. При этом на каждом приближении необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений большой размерности, что представляет значительные вычислительные трудности. Эти трудности можно обойти, если использовать метод локальных вариаций.

Экстремальные свойства функционала (13) позволяют решать задачи термоупругости в теле не только из линейно-упругого материала, но и нелинейно-упругого материала методом локальных вариаций.

Алгоритм решения задачи термоупругости по методу локальных вариаций заключается в следующем.

Разобьём область Ω на треугольные элементы.

Последовательно в каждом элементе с помощью метода локальных вариаций варьируются значения узловых перемещений. Компоненты вектора перемещений варьируются последовательно. Каждый компонент изменяется со своим шагом варьирования при постоянстве остальных компонентов вектора перемещений $\{u\}$. Процесс варьирования завершается, если при выполнении итераций при фиксированных значениях шагов варьирования h_1, h_2 значение функционала (13) не уменьшается, т. е. выполняется условие

$$J^{(k)} \leq J^{(k-1)}. \quad (15)$$

Затем уменьшаются размеры шагов варьирования h_1, h_2 и процесс варьирования повторяется. Сходимость считается достигнутой тогда, когда выполняется условие (15) и значения шагов варьирования h_1, h_2 становятся меньше заданного положительного достаточно малого числа h^*

$$\max(h_1, h_2) \leq h^*. \quad (16)$$

Для определения компонентов тензоров деформации и напряжений удобно использовать конечноэлементную технологию. В рамках конечно-элементной технологии нумеруются конечные элементы и узлы сетки. При этом узлы имеют двойную нумерацию: локальную - в пределах каждого конечного элемента i, j, k и глобальную - сквозную по всей сетке.

При этом компоненты тензора деформации вычисляются по формулам

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} u_k, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} v_k, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} v_k + \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} u_k, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A}, \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A}, \frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{b_j}{2A}, \frac{\partial N_j}{\partial y} = \frac{c_j}{2A}, \frac{\partial N_k}{\partial x} = \frac{b_k}{2A}, \frac{\partial N_k}{\partial y} = \frac{c_k}{2A},$$

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y),$$

$$N_j = \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y),$$

$$N_k = \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y),$$

$$a_i = x_j y_k - y_j x_k; a_j = x_k y_i - y_k x_i; a_k = x_i y_j - y_i x_j$$

$$b_i = y_j - y_k; b_j = y_k - y_i; b_k = y_i - y_j,$$

$$c_i = x_k - x_j; c_j = x_i - x_k; c_k = x_j - x_i,$$

A- площадь конечного элемента.

Компоненты тензора напряжений вычисляются с помощью выражений

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \{ \varepsilon^{(T)} \}, \quad (18)$$

где $[D]$ - матрица упругих характеристик, $\{ \varepsilon^{(T)} \}$ - вектор температурной деформации.

Для тестирования алгоритма были решены задачи теории упругости для цилиндрической трубы, которая находится под воздействием внутреннего давления и температурного поля.

Третья глава работы посвящена решению нелинейных краевых задач МДТТ. Рассмотрены особенности решения задач термоупругости с учетом пластичности и ползучести с помощью метода локальных вариаций. При решении упругопластических задач метод локальных вариаций используется совместно с методом переменных параметров упругости. При решении задач термоупругости с учетом ползучести использована теория старения.

Определяющие соотношения при решении упругопластической задачи были приняты в виде

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0 = \frac{2\sigma_u}{3\varepsilon_u} (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0), \quad i, j = 1, 2, \quad (19)$$

здесь $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ - среднее напряжение,

$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$ - средняя деформация.

Упругопластические свойства материала задавались диаграммой

деформирования

$$\sigma_u = A(\varepsilon_u)^m, \quad (20)$$

где в двухмерном случае интенсивности напряжений σ_u и деформации ε_u определяются следующим образом

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{11}^2 + 6\tau_{12}^2}, \quad (21)$$

$$\varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{11})^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{12}^2)}, \quad (22)$$

здесь s_{ij} и e_{ij} компоненты девиаторов напряжений и деформации соответственно.

С помощью (20) при решении упругопластической задачи определяется значение интенсивности напряжений по известному значению интенсивности деформации.

Для нелинейно упругого материала можно построить вариационную формулировку, в которой выражения функционала $\Phi[\vec{u}]$ зависит от конкретной формы связи между компонентами $\sigma_{ij}(\vec{x})$ и $\varepsilon_{ij}(\vec{x})$ тензоров напряжений и деформации.

Вариационная задача термоупругопластичности может быть сформулирована следующим образом

$$J_1[\vec{u}] = \int_{\Omega} \left[\frac{K}{2} (u_{k,k} - 3\alpha \Delta T)^2 + \int_0^{\varepsilon_u^{(p)}} \sigma_u(\zeta) d\zeta \right] d\Omega - \int_{\Omega} f_i^0 u_i d\Omega - \int_S p_i^0 u_i dS \rightarrow \min. \quad (23)$$

При этом задаются

- граничные условия

$$u_i(\vec{x})|_{S_1} = u_i^0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_1 \subset \partial\Omega, i=1,2;$$

$$\sigma_{ij}(\vec{u}, T) n_j|_{S_2} = p_i(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_2 \subset \partial\Omega, i, j=1,2;$$

- определяющие уравнения

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0 = \frac{2\sigma_u}{3\varepsilon_u} (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0),$$

Полная деформация вычисляется с помощью выражения

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^{(p)} + \varepsilon_{ij}^{(T)},$$

где $\varepsilon_{ij}^{(e)}$, $\varepsilon_{ij}^{(p)}$, $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ - компоненты деформации упругости, пластичности и температурной деформации соответственно.

Чтобы избежать численного вычисления интеграла $\int_0^{\varepsilon_u^{(p)}} \sigma_u(\zeta) d\zeta$ при решении вариационной задачи термоупругопластичности можно воспользоваться методом переменных параметров упругости совместно с методом локальных вариаций. Предполагается, что имеет место зависимость напряжений от деформации в соответствии с теорией малой упруго-пластической деформации в форме обобщенного закона Гука. При этом параметры упругости зависят от напряженного состояния в точке и поэтому различны для различных точек тела. В этом случае закон Гука можно записать в виде

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E^*} [\sigma_x + \mu^* \sigma_y] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E^*} [\sigma_y + \mu^* \sigma_x] \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G^*}, \end{cases} \quad (24)$$

где E^* , G^* , μ^* - переменные параметры упругости, вычисляемые по следующим формулам

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{\frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}}{1 + \frac{1-2\mu}{3E} \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}}, \\ \mu^* &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{3E} \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}}{1 + \frac{1-2\mu}{3E} \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}}, \\ G^* &= \frac{\sigma_u}{3\varepsilon_u}. \end{aligned} \quad (25)$$

В исходном нулевом приближении считается, что параметры E^* , μ^* и G^* равны параметрам упругости E , μ , G . В этом случае рассматривается минимизация функционала задачи термоупругости (массовые силы отсутствуют)

$$J[u] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} K [u_{k,k} - 3\alpha \Delta T]^2 + \frac{G}{4} \left[u_{i,j} + u_{j,i} - \frac{2}{3} u_{k,k} \delta_{ij} \right] \left[u_{i,j} + u_{j,i} - \frac{2}{3} u_{k,k} \delta_{ij} \right] \right\} d\Omega - \int_S p_i u_i dS. \quad (26)$$

При решении задачи термоупругости с учетом ползучести определяющие соотношения имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0) + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_u^{(c)}}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0), \quad (27)$$

или

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} (\dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij} \dot{\sigma}_0) + \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_u^{(c)}}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0), \quad (28)$$

здесь точкой обозначена производная по времени, $\varepsilon_u^{(c)}$ - интенсивность деформации ползучести, $\dot{\varepsilon}_u^{(c)}$ - интенсивность скоростей деформации.

Полная деформация является суммой упругой деформации $\varepsilon_{ij}^{(e)}$, температурной деформации $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ и деформации ползучести $\varepsilon_{ij}^{(c)}$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^{(c)} + \varepsilon_{ij}^{(T)}. \quad (29)$$

В работе была использована теория старения, это позволило при решении краевой задачи термоупругости с учетом ползучести использоваться эквивалентную вариационную постановку в виде

$$J_2[\vec{u}] = \int_{\Omega} \left(\int_0^{\varepsilon_u^{(c)}} \sigma_u(\zeta, T) d\zeta \right) d\Omega - \int_{\Omega} f_i^0 u_i d\Omega - \int_S p_i^0 u_i dS \rightarrow \min. \quad (30)$$

Функционал (30) минимизировался с помощью метода локальных вариаций, а для определения компонентов тензоров напряжений и деформации применялась конечноэлементная технология. Решение нелинейных задач тестировалось на сравнении с аналитическими решениями.

В четвертой главе в качестве примеров реализации разработанных методов, алгоритмов и программ представлены результаты расчётов температурного и напряжённо-деформированного состояний составной конструкции.

Исследуемая конструкция состоит из внутренней стенки с толщиной h' и внутренним радиусом R , наружной стенки толщиной h'' , которые связаны между собой ребрами высотой l . Соседние ребра расположены на

расстояние b друг от друга (рис. 1). На поверхности внутренней стенки действует давление p_z , температура среды, контактирующей с внутренней стенкой, T_z , коэффициент теплоотдачи α_z . В тракте охладителя – давление среды $p_{ж}$, температура $T_{ж}$ и коэффициент теплоотдачи $\alpha_{ж}$.

В разделе было проведено исследование температурного поля конструкции. Для этого была решена задача теплопроводности с изменением значений коэффициентов теплоотдачи α_z и $\alpha_{ж}$. Графики изменения температуры некоторых точек в оболочке изображены на рис.2. При увеличении значения коэффициента теплообмена с газом α_z , температура во внутренней стенке и ребре повышается (см. рис.2.б), а температура точек в наружной стенке практически не изменяется. На рис.2.в показаны графики изменения температуры этих же точек оболочки в зависимости от значения коэффициента теплоотдачи $\alpha_{ж}$. При увеличении коэффициента теплоотдачи к жидкости $\alpha_{ж}$ температура внутренней стенки падает, причем степень понижения тем больше, чем ближе рассматриваемая точка к охлаждаемой поверхности.

Результаты решения задачи термоупругости для составной конструкции показаны на рис.3. На рис.4 и рис.5 показаны результаты решений задач термоупругости с учетом пластичности и ползучести.

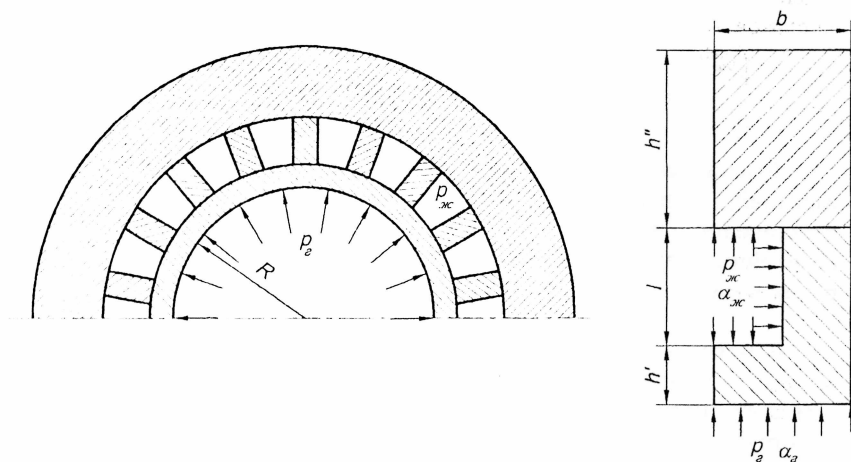


Рис.1. Расчетная схема составной конструкции

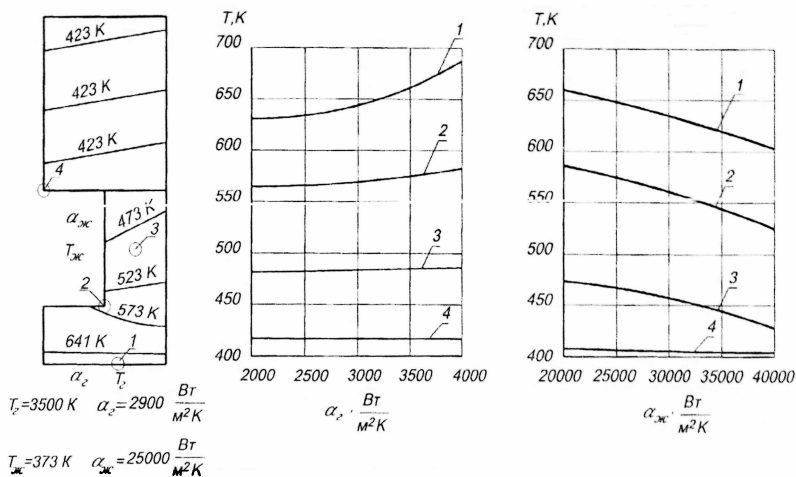


Рис.2. Температурное поле в составной двухслойной оболочке

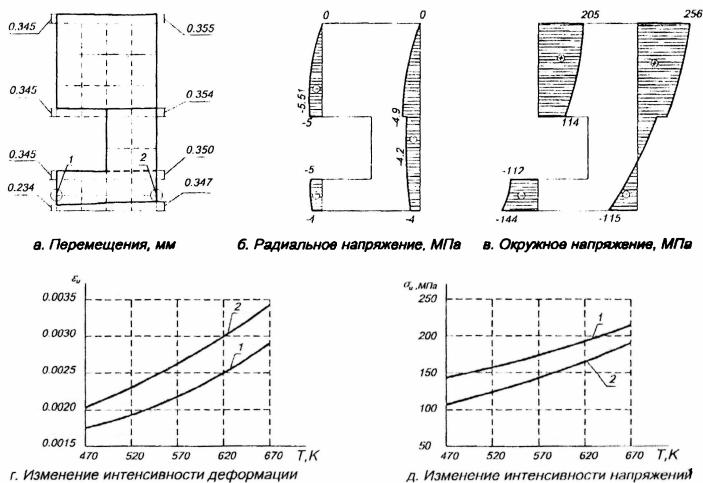


Рис.3. Результаты решения задачи термоупругости

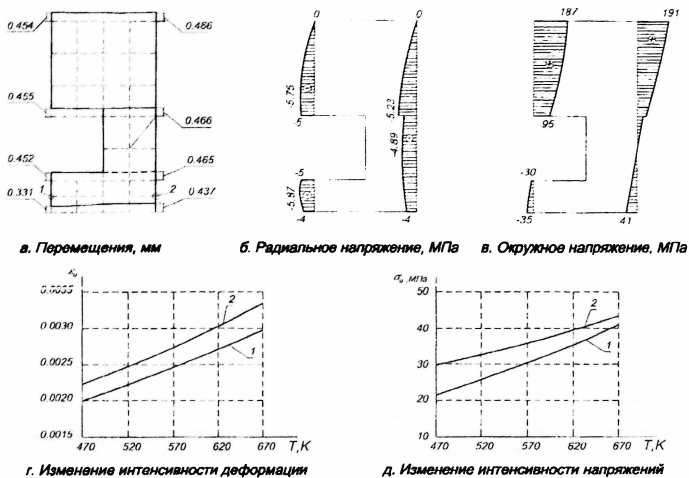


Рис. 4. Результаты решения задачи термоупругопластичности

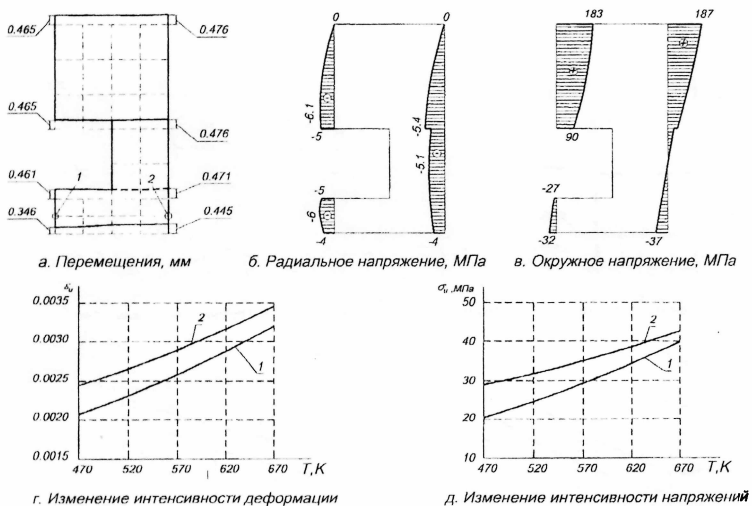


Рис. 5. Результаты решения задачи термоупругости с учетом ползучести

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработаны алгоритмы для решения нелинейных краевых задач теплопроводности в двумерных областях сложной геометрической формы на основе использования метода локальных вариаций.
2. Разработаны математические модели и итерационные алгоритмы для решения физически нелинейных квазистатических краевых задач МДТТ в двумерных областях сложной геометрической формы с учетом особенности поведения материала конструкции в условиях термостатического нагружения на основе использования метода локальных вариаций.
3. На основе разработанных моделей и алгоритмов создан комплекс прикладных программ для решения двумерных нелинейных задач теплопроводности и МДТТ.
4. Применительно к объектам энергомашиностроения решены двумерные задачи теплопроводности и МДТТ, демонстрирующие возможности разработанных методов, алгоритмов и программ.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

1. Ле Шонг Тунг. Математическое моделирование температурного состояния конструкции методом локальных вариаций // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. -2003. - № 3.-С. 41-47.
2. Станкевич И.В., Ле Шонг Тунг. Определение напряженно-деформированного состояния конструкции методом локальных вариаций // Аэрокосмические технологии: Материалы Первой международной научно-технической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея.- Москва, 2004. - С. 125-129.
3. Станкевич И.В., Ле Шонг Тунг. Решение плоской задачи термоупругопластичности методом локальных вариаций //Образование через науку: Тезисы докладов Международного симпозиума, посвященного 175-летию МГТУ имени Н. Э. Баумана. -Москва, 2005. -С. 583-584.
4. Станкевич И.В., Ле Шонг Тунг. Решение двумерных задач термоупругости и термоупругопластичности методом локальных вариаций // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. - 2005. - № 2.-С. 87-96.

Подписано к печати « 7 » июля 2005 г. Зак. 206. Объём 1 п.л. Тир. 100.
Типография МГТУ им. Н. Э. Баумана.