

На правах рукописи

ГРИДНЕВА Анна Юрьевна

**РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА КОМПЛЕКСНОЙ
ОЦЕНКИ ИТЕРАЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА II РОДА**

**Специальность 05.13.11 – Математическое и программное
обеспечение вычислительных машин, комплексов и
компьютерных сетей**

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук**



Москва – 2005

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана.

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
К.А. Майков

Официальные оппоненты: доктор технических наук, доцент
М.В. Ульянов
кандидат физико-математических наук, доцент
С.П. Куликов

Ведущая организация: Институт проблем управления им.
В.А. Трапезникова РАН

Защита диссертации состоится «__» _____ 200__ года на заседании диссертационного совета Д 212.141.10 в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу 107005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

Отзыв на автореферат в одном экземпляре, заверенный печатью, просим направлять в адрес совета университета.

Автореферат разослан «__» _____ 200__ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.т.н., доцент



С.Р. Иванс



ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из универсальных инструментов математического моделирования является аппарат интегральных уравнений Фредгольма II рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad (1)$$

где $K(x,s)$ – ядро уравнения, определенное в квадрате $\{a \leq x, s \leq b\}$, $f(x)$ – правая часть уравнения, $y(x)$ – искомая функция, $x \in [a, b]$, λ – параметр уравнения. Интегральные уравнения применяются при решении задач автоматического управления (Н.Д. Егупов, С.В. Лапин), оптимальной линейной фильтрации (Г.И. Василенко), теории колебаний (В.К. Кабулов, А.Д. Мышкис), теории электромагнитного рассеяния (Д. Колтон, Р. Кресс, А.Б. Самохин). Алгоритмы решения интегральных уравнений подразделяются на две основные группы: прямые и итерационные. Прямые алгоритмы (В.Я. Арсенин, Б.Г. Галеркин, С.Л. Соболев) предлагают заменить решаемое уравнение более простым уравнением с помощью аппроксимации интегрального оператора. На практике чаще используются итерационные алгоритмы (А.Ф. Верлань, Г.Н. Положий, А.Б. Самохин), позволяющие контролировать погрешность решения в процессе вычислений.

Существование широкого спектра алгоритмов решения интегральных уравнений приводит к необходимости выбора рационального алгоритма при разработке программно-алгоритмических комплексов численного моделирования систем с использованием интегральных операторов фредгольмовского типа. Из-за недостатка практических рекомендаций по выбору алгоритмов критерием выбора часто служит тривиальность структуры алгоритма, а не его функциональная эффективность. При этом подтверждение правильности или ошибочности выбора алгоритма становится возможным лишь после его программной реализации.

Следовательно, разработка математического и программного обеспечения для априорного анализа эффективности алгоритмов решения интегральных уравнений имеет существенное теоретическое и практическое значение. Как правило, математические модели строятся с использованием интегральных или дифференциальных уравнений, причем большинство математических моделей, построенных на основе дифференциальных уравнений, может быть редуцировано к эквивалентным моделям, использующим интегральные операторы. С учетом этого особую актуальность приобретает задача количественной оценки эффективности алгоритмов решения интегральных уравнений. Наиболее эффективный метод решения этой задачи построен на основе концепции комплексной оценки эффективности вычислительного алгоритма (Свистельник А.А., Рубцов В.Я.), позволяющей получить количественные оценки эффективности до стадии программной реализации алгоритма и его эксперименталь-

ных исследований. Применение данной концепции достаточно затруднительно из-за отсутствия практических рекомендаций по вычислению значений показателей качества для широко используемых алгоритмов, в частности, алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.

Таким образом, задача разработки и реализации метода комплексной оценки итерационных алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода является, бесспорно, актуальной.

Целью диссертационной работы является разработка математического, алгоритмического и программного обеспечения для комплексной оценки итерационных алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.

Для достижения поставленной цели в диссертации необходимо решить следующие **основные задачи**:

1. Сформулировать критерий оценки эффективности алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода в многомерном пространстве качества.
2. Разработать алгоритмическое обеспечение для оценки эффективности алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.
3. Создать программный комплекс для выбора эффективного алгоритма решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.
4. Провести исследование областей применимости разработанных положений к другим классам алгоритмов.

Методы исследования. В работе применены методы теории интегральных уравнений, теории алгоритмов, теории графов, теории синтаксического анализа и компиляции, теории синтаксически управляемых редакторов, методы вычислительной математики и функционального анализа. При разработке программного обеспечения применялись методы объектно-ориентированного программирования с использованием сред разработки Borland Delphi 7, Borland C++ Builder 5, Microsoft Visual C++ 6.0.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- для алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода разработана новая методика построения многомерного пространства качества, позволяющая определить структуру пространства и компоненты вектора эффективности;
- разработаны оригинальные методики количественной оценки значений показателей эффективности алгоритма решения интегральных уравнений Фредгольма II рода до этапа его программной реализации;
- на основании предложенных методик построен и программно реализован алгоритм комплексной оценки эффективности алгоритмов численного решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.

Практическая значимость.

1. Разработанные теоретические положения доведены до практических методик, алгоритмических структур и их программных реализаций, включенных

в состав программного комплекса векторной оценки эффективности алгоритмов, который применяется для исследования алгоритмов решения линейных интегральных уравнений Фредгольма II рода, что позволяет повысить эффективность программно-алгоритмических комплексов численного моделирования с использованием интегральных операторов.

2. Положительные результаты внедрения позволяют рекомендовать использование построенного комплекса при разработке программного обеспечения математического моделирования систем с использованием интегральных уравнений фредгольмовского типа, а также в учебном процессе в курсах, связанных с исследованием эффективности алгоритмов.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Теоретические положения построения системы показателей качества алгоритма решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.
2. Методики априорной количественной оценки показателей эффективности алгоритма решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.
3. Алгоритм комплексной оценки эффективности алгоритмов численного решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.
4. Программный комплекс векторной оценки эффективности алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.

Внедрение результатов работы. Результаты работы используются при проведении лабораторного практикума в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана и в Московском государственном институте электроники и математики (техническом университете).

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная конференция «Математика, ее приложения и математическое образование», Улан-Удэ, 2002;
2. 12-я Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Владимир, 2003;
3. Всероссийская конференция «Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы», Улан-Удэ, 2003;
4. 5-й всероссийский семинар «Сеточные методы для краевых задач и приложения», Казань, 2004;
5. 5, 6, 7, 8-й всероссийские научно-практические семинары «Новые информационные технологии», Москва, 2002 – 2005.

Публикации по теме диссертации. По теме диссертации опубликовано 14 печатных работ. Из них 5 статей, 9 тезисов докладов на международных и всероссийских научных конференциях и семинарах. В работах, опубликованных в соавторстве, автору принадлежит разработка математического, алгоритмического и программного обеспечения для оценки эффективности алгоритмов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы из 191 наименования и 17 приложений. Общий

объем работы составляет 152 страницы, в том числе 121 страница основного текста, включая 33 рисунка и 12 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность разработки алгоритмического и программного обеспечения метода комплексной оценки эффективности алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода и формулируется цель исследования.

В **первой главе** проведен анализ литературных источников и построена классификация методов оценки эффективности вычислительных алгоритмов. Методы численной оценки качества алгоритмов разделены на две основные группы: аналитические и экспериментальные. Аналитические методы (Д. Грин, Д. Кнут, С.Л. Соболев, Дж. Трауб) основаны на исследовании структуры алгоритма с учетом априорных сведений о свойствах исходных данных. Эти методы позволяют получить значения показателей качества алгоритма в широком диапазоне изменения входных параметров и осуществить оптимизацию качества алгоритма формальными методами. Экспериментальные методы (В.И. Воробьев, С. Гудман, В.Г. Тоценко) предлагают для получения количественной оценки эффективности алгоритма провести одну или несколько серий вычислительных экспериментов с последующей обработкой их результатов. Точность экспериментальных оценок зависит от количества проведенных экспериментов, причем повышение точности оценки приводит к резкому увеличению времени вычисления оценки, что является основным недостатком экспериментальных методов. Наиболее результативными при анализе вычислительных алгоритмов оказываются комбинированные методы (В.М. Зыбарев, А.Ф. Кулаков), позволяющие с помощью аналитических методов получить априорные оценки значений каждого показателя качества алгоритма и при необходимости уточнить их в результате серии экспериментов.

В рамках каждой группы методов выделены многокритериальные методы (Е.Я. Карповский, Свистельник А.А., Рубцов В.Я.) и методы единичных оценок (В.Н. Григорьев, Е.Л. Евневич, Дж. Райс). Методы единичных оценок основаны на использовании одного из основных показателей качества алгоритма. При этом алгоритмы сравниваются только по выбранному показателю. При многокритериальной оценке качества вычислительного алгоритма применяются дифференциальная, интегральная и комплексная методики. Дифференциальная методика (А.А. Саркисян, А.А. Свистельник) основана на использовании отдельных показателей качества и учитывает значения каждого показателя качества, что позволяет при неудовлетворительном качестве определить свойства алгоритма, требующие улучшения. При использовании интегральной методики (Т.М. Леденева, Е.Я. Карповский) оценки уровня качества алгоритма применяют один обобщенный показатель, который является функцией от нескольких единичных показателей. Интегральная методика позволяет получить обобщенное значение показателя качества и сделать вывод об уровне качества алгорит-

ма. Вместе с тем, эта методика не дает информации о том, на какие параметры алгоритма следует воздействовать, чтобы улучшить значения его показателей качества. Комплексная методика (А.Ф. Кулаков) основана на совместном применении единичных и интегральных показателей. При использовании комплексной методики часть единичных показателей объединяют в группы. После этого вычисляют значения групповых и единичных показателей качества алгоритма. Комплексная методика компенсирует недостатки дифференциальной и интегральной методик, но ее применение осложняется незавершенностью методики, а именно, отсутствием практических рекомендаций по выбору единичных показателей качества, объединяемых в группы, и построению обобщенного показателя качества алгоритма.

Следовательно, для получения практически пригодной информации о качестве алгоритма целесообразно использовать многокритериальную оценку, построенную по комплексной методике. В рамках комбинированного подхода к оценке эффективности алгоритма эта методика реализуется методом комплексной оценки качества вычислительных алгоритмов (А.Ф. Кулаков, А.А. Свистельник). Этот метод позволяет получить количественные оценки эффективности вычислительного алгоритма при решении прикладной задачи до стадии его программной реализации и экспериментальных исследований. Основным недостатком данного метода является отсутствие практических рекомендаций по вычислению значений показателей качества для целого ряда наиболее практически используемых алгоритмов, в частности, алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.

В результате проведенного анализа методов оценки эффективности вычислительных алгоритмов сформулированы основные задачи, решаемые в диссертации.

Во второй главе построена структура многомерного пространства качества алгоритма решения интегральных уравнений Фредгольма II рода, разработаны методики априорной оценки значений показателей эффективности алгоритма, построен алгоритм комплексной оценки эффективности алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.

Эффективность алгоритма описывается вектором, каждая компонента которого является значением показателя качества в определенной точке пространства исходных данных. Рассмотрим показатель качества как функцию

$$Q = f^k(\bar{x}, \bar{p}, \bar{z}), \quad (2)$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{m_1})$ – вектор исходных данных алгоритма; $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{m_2})$ – вектор параметров алгоритма; $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{m_3})$ – вектор параметров функции показателя качества. Это позволит не только оценить эффективность алгоритма в заданной точке пространства исходных данных и параметров алгоритма, но и построить зависимость эффективности алгоритма от его исходных данных и параметров. Для более детального анализа будем формировать вектор качества,

каждая компонента которого характеризует влияние определенной группы исходных данных на его эффективность. Полученный вектор качества представляет собой совокупность функций показателей качества (2)

$$\bar{V}^K(\bar{p}, \bar{z}) = (f^K(\bar{x}_1, \bar{p}, \bar{z}), f^K(\bar{x}_2, \bar{p}, \bar{z}), \dots, f^K(\bar{x}_q, \bar{p}, \bar{z})), \quad (3)$$

где $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_q$ – векторы различных групп исходных данных.

При многокритериальной оценке качества алгоритма совокупность функций (2) и векторов качества (3) описывает пространство качества алгоритма L_n^K

$$L_n^K = (f_1^K, f_2^K, \dots, f_m^K, \bar{V}_1^K, \bar{V}_2^K, \dots, \bar{V}_n^K). \quad (4)$$

В пространстве L_n^K (4) эффективность алгоритма отображается точкой

$$\bar{u}^K = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m, \bar{V}_1^K, \bar{V}_2^K, \dots, \bar{V}_n^K), \quad (5)$$

при построении которой функции показателей качества рассматриваются в определенной точке пространства исходных данных. Таким образом, точка в пространстве качества характеризует эффективность алгоритма для решения определенной задачи.

Размерность пространства качества соответствует количеству рассматриваемых характеристик алгоритма и определяется при решении задачи выбора компонент пространства качества, в результате которого предложена двухуровневая система показателей качества. На первом – базовом уровне находятся показатели качества, общие для всех вычислительных алгоритмов заданного класса. На втором – дополнительном уровне находятся показатели, актуальные для решаемой прикладной задачи. В пространстве качества алгоритмов решения уравнений Фредгольма II рода базовыми показателями являются сложность алгоритма, его скорость сходимости и устойчивость решения уравнения к ошибкам исходных данных. Дополнительные показатели качества включают в себя погрешность решения интегрального уравнения, эффективный порядок точности алгоритма, время выполнения алгоритма и объем требуемой памяти. Структура вектора эффективности алгоритма решения интегрального уравнения Фредгольма II рода представлена на рис. 1.

На основании разработанных методик оценки значений показателей качества алгоритма построен алгоритм комплексной оценки эффективности алгоритма решения интегральных уравнений Фредгольма II рода. Исходными данными для алгоритма оценки эффективности являются формализованные описания интегрального уравнения и алгоритма его решения. Результатом алгоритма оценки эффективности будет вектор (5), состоящий из семи компонент, в пространстве качества (4).

Первый этап оценки эффективности алгоритма заключается в формализации исходных данных с целью приведения интегрального уравнения и алгоритма его решения к определенному виду, позволяющему количественно оценить эффективность алгоритма. На этом же этапе проверяется корректность построенных описаний, и переход к следующему этапу происходит только в том

случае, если формализованные описания не содержат ошибок. Такой подход позволяет существенно упростить алгоритмы оценки значений показателей качества.



Рис. 1. Структура вектора эффективности алгоритма решения интегрального уравнения Фредгольма II рода

На втором этапе оценки эффективности алгоритма вычисляются значения показателей качества. При этом принципиальное значение имеет последовательность вычисления значений показателей. Сначала оценивается скорость сходимости алгоритма. Если исследуемый алгоритм не позволяет построить сходящуюся последовательность приближений, то выполнение алгоритма оценки эффективности завершается. Для сходящегося алгоритма вычисляются остальные оценки эффективности. Сначала оценивается время выполнения базовых операций. Полученные результаты используются для определения весо-

вых коэффициентов в функции сложности алгоритма. Затем вычисляются оценки погрешности решения, эффективного порядка точности алгоритма и устойчивости решения уравнения к ошибкам исходных данных.

Третий этап оценки эффективности алгоритма заключается в формировании вектора эффективности на основе вычисленных значений показателей качества и визуализации результатов.

Разработанный алгоритм позволяет получить как единичные оценки эффективности алгоритма, так и комплексную оценку эффективности в виде вектора в пространстве качества (4). Построенный алгоритм реализован в программном комплексе векторной оценки эффективности алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.

В третьей главе разработана и обоснована алгоритмическая структура программного комплекса векторной оценки эффективности алгоритма, построены конструкторы, с помощью которых пользователь может формализовать описание интегрального уравнения Фредгольма II рода и алгоритма его решения, реализованы алгоритмы оценки качества и эффективности алгоритма решения интегральных уравнений Фредгольма II рода, разработана система представления результатов оценки алгоритма.

Программный комплекс оценки эффективности алгоритмов численного решения интегральных уравнений Фредгольма II рода предназначен для вычисления значений показателей качества алгоритма до стадии его программной реализации и экспериментальных исследований. Исходными данными комплекса служат формализованные описания интегрального уравнения и алгоритма его решения. Комплекс позволяет

- формализовать описание интегрального уравнения Фредгольма II рода и алгоритма его решения;
- построить вектор эффективности алгоритма в пространстве качества (4);
- вычислить значения каждой компоненты вектора эффективности алгоритма;
- визуализировать вектор эффективности алгоритма;
- реализовать сравнительный анализ эффективности двух альтернативных алгоритмов решения конкретного интегрального уравнения Фредгольма II рода;
- сравнить эффективность алгоритма применительно к решению различных интегральных уравнений Фредгольма II рода.

Алгоритмическая структура программного комплекса, приведенная на рис. 2, функционально объединяет подсистемы подготовки исходных данных, оценки эффективности алгоритма и визуализации полученных результатов.

Подсистема подготовки исходных данных включает в себя конструкторы формализованных описаний интегральных уравнений и вычислительных алгоритмов. Конструктор описаний интегральных уравнений Фредгольма II рода позволяет задать функции ядра, правой части и точного решения уравнения в аналитическом виде и указать значения параметров уравнения. Конструктор

описаний вычислительных алгоритмов предназначен для формализации исследуемого алгоритма решения интегральных уравнений Фредгольма II рода как в виде блок-схемы, так и в виде текста. В конструкторе реализованы шаблоны основных алгоритмических структур и предусмотрены специальные блоки для выполнения действий над функциями одного и двух переменных, вычисления определенных интегралов и норм функций.



Рис. 2. Алгоритмическая структура программного комплекса

Подсистема оценки эффективности алгоритма используется для построения комплексной оценки эффективности алгоритма в пространстве каче-

ства и определения значений следующих показателей эффективности алгоритма: число итераций, необходимых для решения уравнения (оценка скорости сходимости алгоритма), число обращений к заданным базовым операциям (оценка сложности алгоритма), время выполнения алгоритма, требуемый объем памяти, погрешность решения уравнения, эффективный порядок точности алгоритма, показатель устойчивости решения уравнения к ошибкам исходных данных. В диссертации разработаны следующие алгоритмы вычисления значений базовых показателей качества.

- Алгоритм оценки скорости сходимости. Исходными данными алгоритма оценки являются требуемая точность решения интегрального уравнения, количество проверочных итераций и максимальное количество выполняемых итераций. В процессе реализации алгоритма оценки строится начальное приближение к решению уравнения $y_0(x)$ и выполняется несколько первых итераций исследуемого алгоритма. После выполнения каждой итерации определяется текущее значение коэффициента q_i ,

$$q_i = \|y_i(x) - y_{i-1}(x)\| / \|y_{i-1}(x) - y_{i-2}(x)\| \quad (6)$$

и анализируется последовательность значений $\{q_i\}$. Если последовательность сходится к некоторому пределу $q < 1$, то значение коэффициента сжатия алгоритма полагается равным пределу последовательности. В противном случае, если последовательность является монотонно возрастающей, то делается вывод, что оценить число итераций невозможно. Если последовательность не имеет предела и не является монотонной, то значение коэффициента сжатия полагается равным максимальному элементу последовательности. Полученное значение коэффициента сжатия используется при оценке скорости сходимости с помощью принципа сжимающих отображений

$$n = (\ln \varepsilon + \ln(1 - q) - \ln \|y_1(x) - y_0(x)\|) / \ln q, \quad (7)$$

где n – оценка числа итераций, ε – требуемая точность решения уравнения, q – коэффициент сжатия алгоритма.

- Алгоритм оценки значения показателя сложности алгоритма. На первом этапе для каждого блока алгоритма определяется совокупность циклов, в которые он входит. Все циклы исследуемого алгоритма последовательно пронумерованы, и каждому из них поставлена в соответствие переменная, значение которой равно числу повторений тела цикла. На втором этапе вычисляются оценки значений сложности каждого блока алгоритма. При этом в результате анализа арифметического выражения, вычисляемого на каждом шаге алгоритма, определяется число обращений к базовой операции. Полученное значение умножается на коэффициент, зависящий от типа левой части выражения: m – для функции одной переменной и m^2 – для функции двух переменных, где m – число узлов сетки. На третьем этапе для блоков, входящих в циклические структуры, вычисленные значения показателей сложности ум-

ножаются на количество повторений тела цикла. Сумма полученных результатов образует значение оценки сложности алгоритма.

- **Алгоритм оценки устойчивости решения интегрального уравнения к ошибкам исходных данных.** Устойчивость решения интегрального уравнения описывается трехкомпонентным вектором, каждая компонента которого характеризует чувствительность решения к ошибкам различных групп исходных данных. Первая компонента вектора характеризует устойчивость решения к ошибкам в правой части уравнения, вторая – к ошибкам ядра уравнения, третья – к ошибкам при задании параметра уравнения. Устойчивость решения интегрального уравнения оценивается по результатам серии экспериментов. Исходными данными алгоритма оценки устойчивости являются: количество выполняемых итераций, количество экспериментов и параметры распределения ошибки исходных данных. В ходе каждого эксперимента в соответствии с заданным распределением происходит случайное искажение исходных данных. Для измененного уравнения выполняется несколько первых итераций исследуемого алгоритма. Результат вычислений обозначим $y_i^s(x)$. После каждого эксперимента вычисляется значение локальной степени неустойчивости

$$U_i = \|y_i^s(x) - y^s(x)\| / \Delta_i, \quad (8)$$

где Δ_i – ошибка исходных данных. По результатам экспериментов вычисляется значение глобальной степени неустойчивости

$$U_p = \|U_i\| / C, \quad (9)$$

где C – максимальная допустимая локальная степень неустойчивости, и значение нормированного показателя устойчивости

$$u = \begin{cases} 1 - U_p, & U_p < 1, \\ 0, & U_p \geq 1, \end{cases} \quad (10)$$

которое является компонентой вектора устойчивости.

Подсистема визуализации результатов используется для отображения результатов работы программного комплекса оценки эффективности алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода. Эта подсистема позволяет визуализировать и сравнивать векторные оценки эффективности алгоритмов. Представление вектора эффективности в виде гистограммы удобно при сравнении эффективности двух алгоритмов, так как оно позволяет сравнить значения совпадающих компонент векторов. Полигональная форма представления позволяет получить комплексное представление об эффективности алгоритма, но затрудняет восприятие значений отдельных показателей качества. При сравнении векторов эффективности полигональная форма представления дает возможность сравнивать комплексные оценки, а не значения отдельных показателей. Звездообразная форма представления компенсирует недостатки первых двух форм, но не позволяет сравнивать векторы эффективности, по-

этому для сравнения векторов разработана специальная форма представления. Один из сравниваемых алгоритмов принимается за эталон, и его эффективность полагается равной 100%. Эффективность алгоритма-эталона изображается в виде правильного семиугольника. Для второго алгоритма по нормированным значениям показателей качества вычисляются относительные оценки. Таким образом, графическая интерпретация в виде многоугольников позволяет оценить степень близости исследуемого и эталонного алгоритмов.

В четвертой главе приведены результаты экспериментальных исследований разработанных алгоритмов вычисления показателей эффективности, получены оценки эффективности наиболее распространенных алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода, а также исследованы области применимости построенного программного комплекса.

Для экспериментальных исследований алгоритмов оценки эффективности рассматривается один из наиболее распространенных алгоритмов решения интегральных уравнений – алгоритм простой итерации и две его модификации: алгоритм Положего и алгоритм осреднения функциональных поправок. Метод Положего расширяет область сходимости метода простой итерации, а метод осреднения функциональных поправок разработан для повышения скорости сходимости метода простой итерации. Результаты экспериментальных исследований алгоритма оценки скорости сходимости представлены в таблице 1.

Таблица 1

	Уравнение	Метод простой итерации	Метод осреднения поправок	Метод Положего
(11)	$v(x) + \frac{\rho\omega^2}{p} \int_0^1 G(x,s)v(s)ds = -\frac{1}{p} \int_0^1 G(x,s)\varphi(s)ds$	10	6	18
(12)	$y(x) - \int_0^x e^{-2(x-s)} y(s)ds = 1 + x$	11	Не сходится	1586
(13)	$y(x) - \int_0^x \sin(x-s)y(s)ds = x$	9	11	82
(14)	$y(x) - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x-s)y(s)ds = \sin(x)$	Не сходится	Не сходится	Не сходится
(15)	$y(x) - \int_0^{\pi} \cos(x+s)y(s)ds = 2\sin x + 3$	Не сходится	Не сходится	126

Алгоритм осреднения функциональных поправок выполняется за меньшее число итераций, чем алгоритм простой итерации, что свидетельствует о том, что скорость сходимости первого алгоритма выше. При этом алгоритм осреднения функциональных поправок обладает более узкой областью сходимости; он не позволяет построить сходящуюся последовательность приближений для уравнения (12), которое является интегральным уравнением Вольтерра II рода. Из рассматриваемых алгоритмов решения интегральных уравнений наиболее широкой областью сходимости обладает алгоритм Положего. Для представленных уравнений алгоритм не сходится только для уравнения (14), не

имеющего решения. Заметим, что расширение области сходимости при переходе от метода простой итерации к методу Положего приводит к снижению скорости сходимости.

Экспериментально исследована ситуация, когда алгоритм осреднения функциональных поправок совершает меньше итераций, чем алгоритм простой итерации, но время выполнения первого алгоритма больше, чем время выполнения второго. График зависимости времени выполнения алгоритма от количества узлов сетки, построенной для уравнения (11), приведен на рис. 3.

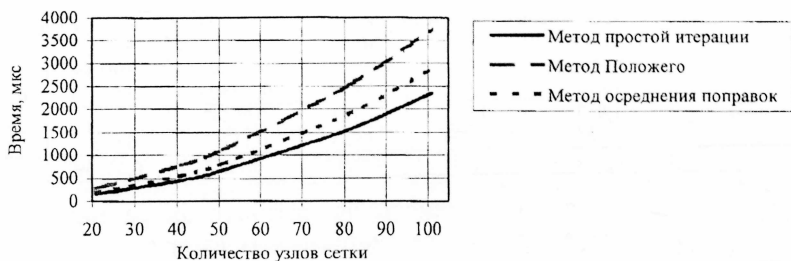


Рис. 3. Зависимость времени выполнения алгоритма от количества узлов сетки

Для уравнения (11) число итераций, выполняемых алгоритмом осреднения функциональных поправок, на 40% меньше, чем число итераций, выполняемых алгоритмом простой итерации (см. табл. 1), но при этом время вычислений для первого алгоритма на 22% больше, чем для второго. Такие результаты объясняются при анализе сложности алгоритмов. Возьмем в качестве базовой операции операцию вычисления определенного интеграла. Обозначим m – количество узлов сетки, n – число итераций, выполняемых алгоритмом. Функции сложности рассматриваемых алгоритмов представлены в таблице 2.

Таблица 2

Алгоритм	Функция сложности
Простой итерации	mn
Положего	$m^2 + mn + 2m + 1$
Осреднения функциональных поправок	$n \cdot (2m + 1) + 2m + 2$

На одной итерации алгоритма простой итерации определенный интеграл вычисляется m раз, а на одной итерации алгоритма осреднения функциональных поправок – $(2m+1)$ раз. Следовательно, более высокая скорость сходимости алгоритма осреднения функциональных поправок не определяет уменьшения времени вычислений.

Проведены исследования зависимости погрешности решения и эффективного порядка точности алгоритма от используемого метода численного интегрирования. При этом рассматривались три наиболее распространенных метода: прямоугольников, трапеций и Симпсона. Результаты экспериментальных исследований представлены в таблице 3.

В большинстве случаев для всех алгоритмов оценки эффективного порядка точности алгоритмов близки к теоретическим оценкам точности методов численного интегрирования, за исключением оценок для алгоритмов, решающих уравнение (12). Во всех случаях оценка погрешности решения уравнения определяется как $O(h^r)$, где r – оценка эффективного порядка точности, h – шаг сетки, заданный при построении формализованного описания интегрального уравнения.

Таблица 3

Уравнение	Эффективный порядок точности			Погрешность решения		
	Метод прямоугольников	Метод трапеций	Метод Симпсона	Метод прямоугольников	Метод трапеций	Метод Симпсона
(11)	1,017	2,001	4,018	0,000938	0,000671	0,000433
(12)	1,038	1,081	1,121	0,05542	0,117	0,143
(13)	0,984	1,999	3,953	0,11752	0,0657	0,0163
(15)	1,002	2,001	4,0037	0,1327	0,00359	$7,4 \cdot 10^{-6}$

Для оценки области применимости построенного программного комплекса исследовались эффективности рассматриваемых алгоритмов при решении интегральных уравнений Вольтерра II рода. Для этого уравнение Вольтерра II рода было сведено к уравнению Фредгольма II рода с помощью операции «доопределения ядра»¹

$$K(x,s) = \begin{cases} M(x,s), & a \leq x \leq s, \\ 0, & s < x \leq b, \end{cases} \quad (16)$$

где $M(x,s)$ – ядро уравнения Вольтерра II рода, $K(x,s)$ – ядро уравнения Фредгольма II рода.

Экспериментально показано, что преобразование (16) позволяет использовать для решения уравнений Вольтерра II рода алгоритмы решения интегральных уравнений Фредгольма II рода. Но применение преобразования (16) целесообразно только при условии, что функция ядра построенного уравнения Фредгольма II рода не имеет разрывов на диагонали $x = s$. В противном случае, как продемонстрировали исследования (см. табл. 3), показатели точности, погрешности и устойчивости имеют неудовлетворительные значения.

Полученные оценки эффективности известных алгоритмов решения интегральных уравнений согласуются с опубликованными ранее, что подтверждает работоспособность разработанного алгоритмического и программного обеспечения метода комплексной оценки алгоритмов численного решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.

В приложениях приведены блок-схемы разработанных алгоритмов, описаны используемые порождающие грамматики, представлены таблицы синтаксического анализатора.

¹ Методы анализа, синтеза и оптимизации нестационарных систем автоматического управления / Под ред. Н.Д. Егупова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 684 с.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработана классификация методов оценки эффективности вычислительных алгоритмов. Показана практическая необходимость использования многокритериальных методов оценки применительно к алгоритмам решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.
2. Предложено многомерное пространство качества алгоритма решения интегральных уравнений Фредгольма II рода, включающее базовые и дополнительные компоненты комплексной оценки.
3. Разработаны алгоритмы вычисления значений показателей эффективности алгоритма решения интегральных уравнений Фредгольма II рода до этапа его программной реализации.
4. Создан программный комплекс оценки эффективности алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода, позволяющий проводить сравнительный анализ эффективности алгоритмов в многомерном пространстве.
5. Анализ результатов 80 экспериментов подтверждает работоспособность комплекса для исследования алгоритмов решения интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма II рода.

РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Гриднева А.Ю. К вопросу модификации метода Положего для решения интегральных уравнений фредгольмовского типа II рода с вырожденными ядрами // Информатика и системы управления в XXI веке: Сборник трудов студенческой научной конференции МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М., 2001. – С. 78 – 80.
2. Гриднева А.Ю., Комалов С.С., Майков К.А. К вопросу оценки сходимости алгоритма решения интегральных уравнений с несимметричными ядрами модифицированным методом Положего // Новые информационные технологии: Материалы 5-го всероссийского научно-практического семинара. – М., 2002. – С. 195 – 198.
3. Гриднева А.Ю., Майков К.А. Некоторые аспекты анализа сходимости решения интегрального уравнения Фредгольма II рода с вырожденным ядром модифицированным методом Положего // Математика, ее приложения и математическое образование: Материалы международной конференции. – Улан-Удэ, 2002. – С. 151 – 156.
4. Гриднева А.Ю. К вопросу количественной оценки устойчивости алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода // Информатика и системы управления в XXI веке: Сборник трудов студенческой научной конференции МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М., 2002. – С. 294 – 298.
5. Гриднева А.Ю., Майков К.А. Некоторые аспекты построения программно-алгоритмического комплекса для количественной оценки устойчивости решения линейного интегрального уравнения Фредгольма II рода // Новые ин-

- формационные технологии: Материалы 6-го всероссийского научно-практического семинара. – М., 2003. – С. 49 – 54.
6. Гриднева А.Ю., Майков К.А. К вопросу оценки эффективности алгоритмов // Новые информационные технологии: Материалы 6-го всероссийского научно-практического семинара. – М., 2003. – С. 46 – 48.
 7. Гриднева А.Ю., Майков К.А. К вопросу комплексной оценки эффективности алгоритмов // Тезисы докладов 12-ой Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. – М., 2003. – С. 215 – 217.
 8. Гриднева А.Ю. Некоторые аспекты алгоритмической структуры программного комплекса векторной оценки эффективности алгоритмов // Информатика и системы управления в XXI веке: Труды молодых ученых, аспирантов и студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М., 2003. – №1. – С. 334 – 336.
 9. Гриднева А.Ю., Майков К.А. К вопросу о построении комплексного критерия эффективности алгоритма // Информационные и вычислительные технологии и системы: Материалы всероссийской конференции. – Улан-Удэ, 2003. – Ч. 1. – С. 115 – 119.
 10. Гриднева А.Ю., Майков К.А., Смирнова С.И. Редактор алгоритмов как компонента программного комплекса векторной оценки эффективности алгоритмов // Новые информационные технологии: Материалы 7-го всероссийского научно-практического семинара. – М., 2004. – С. 137 – 141.
 11. Гриднева А.Ю., Майков К.А., Худокормов А.А. К вопросу разработки алгоритма априорной оценки погрешности итерационных алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода // Сеточные методы для краевых задач и приложения: Материалы 5-го всероссийского семинара. – Казань, 2004. – С. 55 – 58.
 12. Гриднева А.Ю., Худокормов А.А. Некоторые аспекты построения алгоритма априорной оценки устойчивости итерационных алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода // Информатика и системы управления в XXI веке: Труды молодых ученых, аспирантов и студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М., 2004. – №2. – С. 178 – 180.
 13. Гриднева А.Ю. К вопросу оценки скорости сходимости алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма II рода // Информатика и системы управления в XXI веке: Труды молодых ученых, аспирантов и студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М., 2004. – №2. – С. 180 – 184.
 14. Гриднева А.Ю., Майков К.А. Модуль построения поверхности сложности алгоритма как компонента программного комплекса векторной оценки эффективности алгоритмов // Новые информационные технологии: Материалы 8-го всероссийского научно-практического семинара. – М., 2005. – С. 26 – 34.

У1738111
Гриднева А.Ю.
Разработка и реализация
метода комплексной оценки
итерационных алгоритмов
решения интегральных ура...
2005

У 1738111

ВОЗВРАТИТЕ КНИГУ НЕ ПОЗЖЕ
обозначенного здесь срока

Подписано к печати 7/11/2005 Заказ №361 Объем 1.0 п.л. Тир. 100 экз.

Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.