

Нелинейное деформирование и устойчивость эллиптической композитной цилиндрической оболочки при внешнем давлении

© Л.П. Железнов^{1,2}

¹ ФАУ «СибНИА имени С.А. Чаплыгина»,
Новосибирск, 630051, Российская Федерация

² ФГБОУ ВО СГУПС, Новосибирск, 630049, Российская Федерация

Задача устойчивости некруговых эллиптических цилиндрических оболочек, выполненных из композиционного материала, была решена с учетом моментности и нелинейности их докритического напряженно-деформированного состояния, а геометрически нелинейная задача устойчивости — методами конечных элементов и линеаризации Ньютона — Канторовича. В процессе решения нелинейной задачи критические нагрузки определяются с помощью критерия Сильвестра. Используются разработанные автором на основе гипотезы Тимошенко конечные элементы композитных цилиндрических оболочек естественной кривизны, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены их жесткие перемещения, что существенно влияет на сходимость решения. Исследована устойчивость эллиптической шарнирно-опертой цилиндрической оболочки, выполненной из полимерного композиционного материала, при нагружении внешним давлением. Выяснено влияние способов укладки монослоев, нелинейности деформирования, параметра эллиптичности на критические нагрузки потери устойчивости оболочки и весовую эффективность композитных оболочек.

Ключевые слова: эллиптические цилиндрические композитные оболочки, полимерные композиционные материалы, нелинейное деформирование, устойчивость, метод конечных элементов, внешнее давление, весовая эффективность

Введение. В конструкциях современных летательных аппаратов (ЛА) весьма часто используют форму фюзеляжа некругового поперечного сечения, что особенно заметно при проектировании широкофюзеляжных самолетов большой вместимости. Однако некруговые оболочки, в отличие от круговых, недостаточно хорошо исследованы на устойчивость. Если число публикаций по круговым оболочкам исчисляется тысячами [1, 2], то по некруговым — лишь несколькими десятками. Это можно объяснить, с одной стороны, меньшим использованием некруговых оболочек на практике, с другой — трудностями решения задач, связанными с переменностью радиуса кривизны, что приводит к появлению переменных коэффициентов в уравнениях устойчивости. Известные решения задач устойчивости получены аналитическими методами и, как правило, в линейном приближении, без учета моментности и нелинейности докритического состояния оболочек, т. е. в классической постановке. Большое внимание исследованию прочности и устойчивости таких оболочек в нелинейной

постановке уделено авторами работ [3–6], однако они рассматривали в основном металлические оболочки. В настоящее время в конструкциях ЛА широко применяются полимерные композиционные материалы (ПКМ), что существенно снижает вес конструкции при сохранении ее прочностных и жесткостных характеристик. Основополагающий вклад в разработку методов расчета композитных конструкций внесла школа В.В. Васильева [7, 8]. Издано большое количество работ, посвященных исследованию прочности таких конструкций, однако остаются нерешенными вопросы их прочности и устойчивости в условиях нелинейного исходного состояния. Последнее особенно важно для конструкций фюзеляжей самолетов, в которых потеря устойчивости обшивки недопустима. В большинстве опубликованных работ задачи устойчивости оболочек из композиционных материалов решаются в классической постановке при линейном исходном напряженно-деформированном состоянии [9, 10], но остаются нерешенными вопросы, связанные с прочностью и устойчивостью композитных конструкций при нелинейном их деформировании в условиях неоднородного напряженно-деформированного состояния.

Цель настоящей работы — представить решение геометрически нелинейной задачи прочности и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек из ПКМ при произвольном нагружении, полученное с помощью методов конечных элементов и линеаризации Ньютона — Канторовича [11] с использованием шагового метода по нагрузке и энергетического критерия устойчивости.

Критические нагрузки определялись в процессе решения геометрически нелинейной задачи с применением критерия Сильвестра. Для этого были использованы разработанные автором на основе гипотезы Тимошенко конечные элементы композитных цилиндрических оболочек естественной кривизны, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены их жесткие перемещения. Приведены результаты исследования влияния способов укладки монослоев, нелинейности деформирования и параметров эллиптичности на устойчивость и весовую эффективность эллиптической композитной цилиндрической оболочки, нагруженной внешним давлением. Результаты, представленные в статье, получены с использованием разработанного автором программного комплекса «Программа для расчета на прочность и устойчивость подкрепленных некруговых цилиндрических оболочек», зарегистрированного в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (Роспатенте) [12].

Основные соотношения для конечного элемента эллиптической цилиндрической оболочки из ПКМ, а также разработанные автором алгоритмы решения задачи прочности и устойчивости цилиндрических оболочек в условиях геометрически нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния опубликованы в работах [13–17].

Обшивка оболочки в данном случае будет рассмотрена как ортотропная. Ниже кратко изложен алгоритм решения нелинейной задачи.

Алгоритм решения нелинейной задачи. Вариационное уравнение Лагранжа для конечного элемента оболочки представим в виде

$$\delta \Pi = \delta W - \delta V = 0, \quad (1)$$

где δ — знак вариации; Π — потенциальная энергия; W — энергия деформации; V — работа внешних сил.

Варьируя (1) по узловым перемещениям конечного элемента, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений конечного элемента. С учетом условия совместности перемещений в узлах конечных элементов и граничных условий запишем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений оболочки:

$$K(u')u' - Q = 0, \quad (2)$$

где K — матрица жесткости оболочки, которая получается суммированием матриц жесткости отдельных конечных элементов с использованием матрицы индексов [18]; u' и Q — векторы узловых перемещений и обобщенных узловых сил оболочки.

Для решения системы (2) воспользуемся методом Ньютона — Канторовича [11], уравнения которого имеют следующий вид:

$$H(u'_n)\Delta = Q - G(u'_n), \quad G = K(u'_n)u'_n, \quad u'_{n+1} = u'_n + \Delta, \quad (3)$$

где H — гессиан системы, элементами которого являются элементы второй вариации потенциальной энергии деформации оболочки; Δ — вектор приращений узловых перемещений оболочки; G — градиент потенциальной энергии деформации.

Решение системы (3) получаем с помощью метода последовательных приближений и шагового метода по нагрузке. На каждой итерации решение системы линейных алгебраических уравнений отыскиваем методом Краута [19] с использованием L^TDL разложения матрицы H на одну диагональную D и две треугольные матрицы L .

Определив компоненты вектора узловых перемещений u' , найдем все компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки. Критическая нагрузка определяется или как предельная по расхождению итерационного процесса при резком возрастании перемещений в отдельных узлах конечно-элементной сетки, или как бифуркационная с использованием энергетического критерия устойчивости, согласно которому равновесное состояние устойчиво, если $\delta^2\Pi > 0$. Это условие требует положительной определенности гессиана H или положительности всех диагональных элементов матрицы D в L^TDL разложении

матрицы $\mathbf{H}$. Определив критическую нагрузку, отыскиваем форму потери устойчивости оболочки из решения системы $\mathbf{H}\ddot{\mathbf{u}} = 0$, где $\ddot{\mathbf{u}}$ — вектор бифуркационных узловых перемещений. В случае предельной точки форма потери устойчивости оболочки отыскивается из нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния для нагрузки, близкой к предельной.

Результаты исследований. Рассмотрим шарнирно опертую ($v = w = 0$, где v — перемещение по окружности; w — угол поворота срединной поверхности) некруговую цилиндрическую оболочку эллиптического поперечного сечения, выполненную из ПКМ и находящуюся под действием внешнего давления.

Оболочка длиной $L = 2000$ мм и толщиной $h = 3,456$ мм имеет радиус окружности R_0 с периметром P поперечного сечения некруговой оболочки (эквипериметрический радиус) $R_0 = P/2\pi = 2000$ мм, выполнена из 18-тислового композиционного материала ПКМ Torayca T700, механические характеристики которого приведены ниже [16]:

Модуль упругости в продольном направлении монослоя, МПа:

на растяжение E_1^+ 125 510

на сжатие E_1^- 114 380

Модуль упругости в поперечном направлении монослоя, МПа:

на растяжение E_2^+ 8780

на сжатие E_2^- 8670

Модуль сдвига G_{12} , МПа 4740

Коэффициент Пуассона монослоя μ_{12} 0,34

Толщина монослоя δ , мм 0,192

Жесткостные характеристики материала оболочки взяты из работы [17].

В силу симметрии нагрузки рассматривалась 1/2 часть оболочки, получаемая путем ее продольного разреза в вертикальной плоскости симметрии. Для расчета по линии разреза ставились условия симметрии ($v = 0$, $\vartheta_2 = 0$, где v — перемещение по окружности, ϑ_2 — угол поворота). Оболочка разбивалась конечно-элементной сеткой $m \times n = 15 \times 90$ (m — число конечных элементов по длине оболочки, n — число конечных элементов по окружности), что обеспечивало сходимость решения по числу конечных элементов с погрешностью, не превышающей 5 %.

Принятый параметр критической нагрузки k_q определяется следующим образом: $k_q = q^*/q_0$, где q^* — критические значения внешнего давления; q_0 — верхнее критическое значение внешнего

давления для круговой цилиндрической изотропной оболочки, $q_0 = 0,92E \frac{R}{L} (h/R)^2 \sqrt{\frac{h}{R}}$ [1].

Было рассмотрено пять вариантов укладки монослоев по толщине оболочки, а также для сравнения один вариант оболочки из алюминиевого сплава Д16Т, приведенных ниже:

Варианты укладки монослоев обшивки

Вариант	Укладка монослоев, град
1	[0/0/±45/90/0/±45/90/90/±45/0/90/±45/0/0]
2	[±45/±45/ ±45/ ±45/ ±45/ ±45/ ±45/ ±45/ ±45]
3	[±45/±45/±45/0/90/0/0/90/0/-45/45/-45/45/-45/45]
4	[0/90/0/90/0/90/0/90/0/90/0/90/0/90/0/90]
5	[0/0/0/90/0/±45/±45/±45/±45/0/90/0/0/0]
6	Металл Д16Т

Следует учитывать, что далее на рис. 2–7 сплошными линиями показаны результаты линейного, а пунктирными — нелинейного решений.

Зависимость параметра нагрузки k_q от параметра эллиптичности поперечного сечения $\bar{a} = a/b$ (a — горизонтальная полуось эллипса; b — вертикальная полуось эллипса) для вариантов 1–5 укладки монослоев в оболочке, в том числе и для металлической оболочки (вариант 6), показана на рис. 1. Результаты исследования оболочек с эллиптическим контуром поперечного сечения приведены на рис. 1, а, результаты исследования оболочек с овальным профилем сечения, составленного из двух пар окружностей [20], — на рис. 1, б. Эквивалентный радиус R_0 у них был одинаковый.

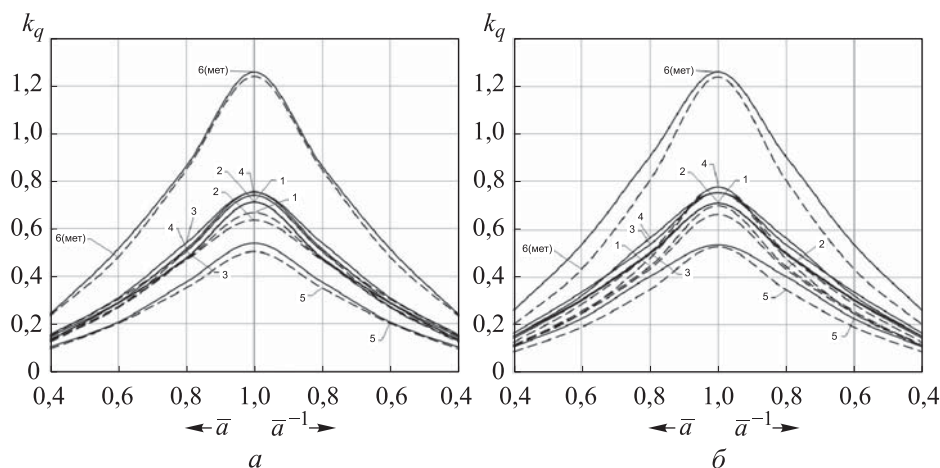


Рис. 1. Кривые зависимости параметра нагрузки k_q от параметра эллиптичности $\bar{a}$ соответствуют эллиптической (а) и овальной (б) оболочке

Анализ графиков, приведенных на рисунках, показывает, что критические значения параметра нагрузки существенно зависят как от параметра эллиптичности $\bar{a}$, так и от углов укладки монослоев. Качественно поведение параметра нагрузки k_q для оболочек эллиптического сечения и для овального поперечного сечения близки. Наибольшие значения этого параметра наблюдаются для круговых цилиндрических оболочек независимо от вида укладки монослоев. Причем характер поведения кривых изменяется в зависимости от параметра эллиптичности $\bar{a}$, в частности, с увеличением параметра эллиптичности темп уменьшения значения критического давления понижается. Наиболее эффективными оказались варианты укладки 3 и 4, наименее эффективными 2 и 5. Учет нелинейности, как правило, приводит к снижению значения параметра критической нагрузки. Значения критического внешнего давления для металлической оболочки выше, чем для композитной.

Для сравнения приведены в табл. 1 результаты расчетов эллиптических и овальных оболочек при линейном исходном состоянии

$$(\Delta (\%) = \frac{k_q^{\text{эл}} - k_q^0}{k_q^{\text{эл}}} \cdot 100 \%, \text{ где } k_q^{\text{эл}} \text{ — значения параметра критического}$$

момента для эллиптической оболочки, k_q^0 — для овальной оболочки) в зависимости от параметра эллиптичности оболочки для различных вариантов укладки монослоев в обшивке.

Таблица 1

Результаты расчета отношения параметров критических нагрузок для эллиптических и овальных оболочек, %, от параметра эллиптичности

Вариант укладки	Δ , %, при $\bar{a}$, равном						
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,25	1,67	2,5
1	-10,5	-6,2	-4,4	0,0	-4,4	-6,2	-10,5
2	-5,2	-6,6	-6,0	0,0	-6,0	-6,6	-5,2
3	-10,4	-10,3	0,0	0,0	0,0	-10,3	-10,4
4	-16,0	-11,9	-10,2	0,0	-10,2	-11,9	-16,0
5	-8,0	-10,5	-8,0	0,0	-8,0	-10,5	-8,0
6 (мет.)	-10,2	-5,0	-5,0	0,0	-5,0	-5,0	-10,2

Из анализа данных табл. 1 следует, что овальные оболочки выгоднее эллиптических независимо от способа укладки монослоев, причем с ростом параметра овальности $\bar{a}$ такое расхождение увеличивается.

Результаты исследования влияния нелинейности исходного состояния $(\Delta (\%) = \frac{k_{qn} - k_{ql}}{k_{ql}} \cdot 100 \%)$ на значения параметра k_q в зависимости

от параметра $\bar{a}$ для различных вариантов укладки монослоев в обшивке, где индексы l и n при k_q относятся к линейному и нелинейному решению соответственно, представлены в табл. 2.

Таблица 2

Влияние нелинейности на значения параметра нагрузки k_q

Вариант укладки	Δ , %, при $\bar{a}$, равном						
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,25	1,67	2,5
1	-1,8	-6,9	-1,8	-6,9	-1,8	-6,9	-1,8
2	-6,8	-6,8	-1,8	-12,3	-1,8	-6,8	-6,8
3	-1,7	-1,8	-6,9	-1,7	-6,9	-1,8	-1,7
4	-6,9	-6,8	-1,8	-1,7	-1,8	-6,8	-6,9
5	-6,8	-1,8	-6,9	-6,9	-6,9	-1,8	-6,8
6 (мет.)	-1,8	-6,9	-1,8	-1,6	-1,8	-6,9	-1,8

Сравнение данных из табл. 2 приводит к выводу, что нелинейность в основном приводит к снижению критических значений параметра нагрузки k_q для всех вариантов рассмотренных оболочек. Впрочем, влияние нелинейности незначительно (1,5...7,0 %) независимо от параметра эллиптичности $\bar{a}$ оболочки.

Зависимость параметра весовой эффективности k_g композитных оболочек, которая рассчитывается по формуле $k_g = k_q / k_{q1}(G / G_1)$ (k_q и k_{q1} — параметры критической нагрузки композитной и металлической оболочек; G и G_1 — их массы соответственно), от параметра эллиптичности поперечного сечения $\bar{a}$ для различных вариантов укладки монослоев в оболочке приведена на рис. 2.

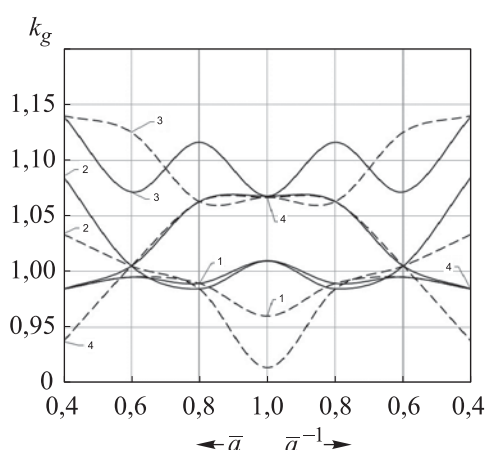


Рис. 2. Зависимость параметра весовой эффективности композитных оболочек k_g от параметра их эллиптичности $\bar{a}$

Анализ поведения кривых на рис. 2 показывает, что весовая эффективность существенно зависит как от параметра эллиптичности $\bar{a}$, так и от вариантов укладки монослоев в пакете оболочки. Весовая эффективность композитных оболочек доходит до 13 % (вариант 3). Для варианта укладки монослоев 3 весовая эффективность композитных оболочек выше, чем у металлических, независимо от параметра эллиптичности. Для варианта укладки монослоев 4 весовая эффективность таких оболочек выше, чем у металлических, только при малых значениях параметра эллиптичности $\bar{a} < 0,6$. Для других вариантов укладки монослоев весовая эффективность композитных оболочек либо сравнима, либо меньше, чем у металлических оболочек. Нелинейность практически не влияет на параметр весовой эффективности.

Критические значения параметра нагрузки k_q в зависимости от параметра эллиптичности $\bar{a}$ оболочки для различных вариантов укладки монослоев при нелинейном исходном напряженно-деформированном состоянии приведены в табл. 3. Жирным шрифтом выделены варианты расчета оболочек с наиболее эффективной укладкой монослоев.

Таблица 3

Критические значения параметра k_q

Вариант укладки	Параметр k_g при $\bar{a}$, равном						
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,25	1,67	2,5
1	0,129	0,267	0,469	0,667	0,469	0,267	0,129
2	0,135	0,270	0,466	0,634	0,466	0,270	0,135
3	0,149	0,302	0,504	0,741	0,504	0,302	0,149
4	0,122	0,270	0,504	0,741	0,504	0,270	0,122
5	0,093	0,201	0,350	0,504	0,350	0,201	0,093

Анализ данных табл. 3 показал, что наиболее эффективной является укладка по варианту 3 ($[\pm 45/\pm 45/\pm 45/0/90/0/0/90/0/-45/45/-45/45/-45/45]$) независимо от значения параметра эллиптичности оболочки. Далее представлены результаты исследования влияния углов укладки φ монослоев для этого варианта укладки, при этом угол 45° будет заменен параметром φ ($[\pm \varphi/\pm \varphi/\pm \varphi/0/90/0/0/90/0/-\varphi/\varphi/-\varphi/\varphi/-\varphi/\varphi]$).

Зависимость параметра нагрузки k_q от параметра эллиптичности $\bar{a}$ для различных углов укладки монослоев в оболочке представлена на рис. 3. Зависимость параметра k_q от углов укладки монослоев φ для различных значений параметра $\bar{a}$ оболочки приведена на рис. 4.

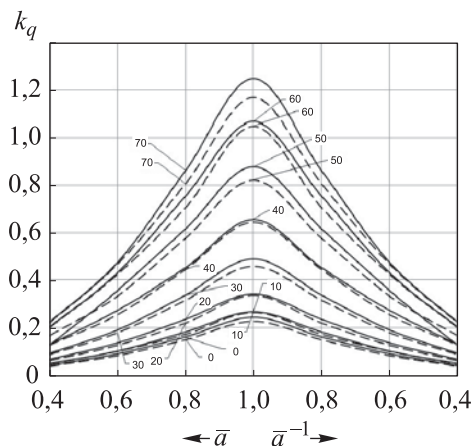


Рис. 3. Зависимости параметра критической нагрузки оболочки k_q от параметра эллиптичности $\bar{a}$

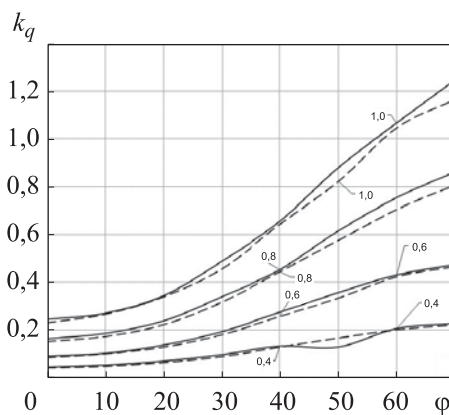


Рис. 4. Зависимости параметра нагрузки эллиптической оболочки k_q от угла укладки монослоев φ

Из анализа кривых на рис. 3 и 4 следует, что в этом случае наиболее эффективной будет укладка с углами $\varphi = 60 \dots 70^\circ$, а максимум параметра k_q достигается для параметра эллиптичности $\bar{a} = 1,0$, т. е. для круговой цилиндрической оболочки, независимо от размера угла φ . Для оболочек малой эллиптичности $\bar{a}$ и при больших углах φ ($\varphi > 40^\circ$) нелинейность снижает параметр k_q наиболее существенно.

Зависимость параметра весовой эффективности k_g от параметра эллиптичности $\bar{a}$ для различных углов укладки монослоев φ в оболочке показана на рис. 5.

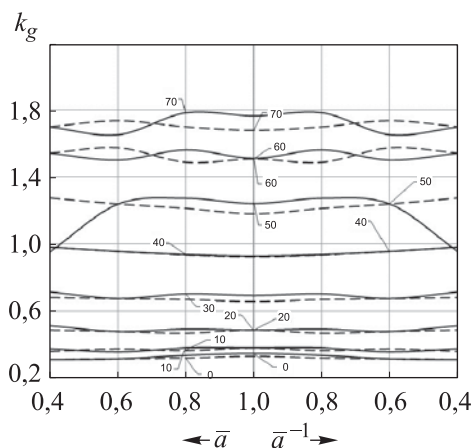


Рис. 5. Зависимости параметра весовой эффективности k_g от параметра эллиптичности $\bar{a}$ для различных углов укладки монослоев φ

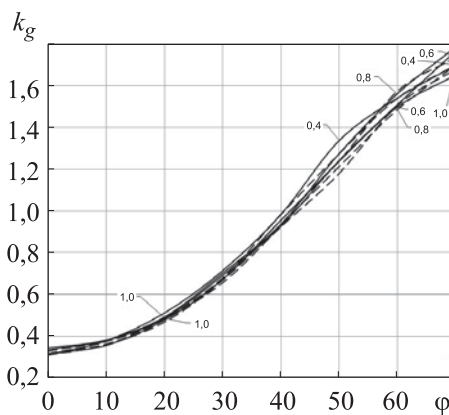


Рис. 6. Зависимости параметра весовой эффективности k_g от угла укладки монослоя φ

Зависимость параметра весовой эффективности k_g от углов укладки монослоев φ для различных значений параметра $\bar{a}$ представлена на рис. 6.

Анализ кривых на рис. 5 и 6 показывает, что весовая эффективность композитных оболочек существенно зависит от угла укладки монослоя φ и практически не зависит от параметра эллиптичности $\bar{a}$ оболочки в случае как линейного, так и нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния. Для углов укладки $\varphi < 40^\circ$ весовая эффективность композитных оболочек ниже, чем у металлической оболочки. Учет нелинейности, как правило, незначительно понижает весовую эффективность композитных оболочек.

Формы потери устойчивости для оболочки с различными значениями параметра эллиптичности $\bar{a}$ представлены на рис. 7. Форма потери устойчивости эллиптических оболочек существенно зависит от параметра эллиптичности $\bar{a}$. Оболочки теряют устойчивость на боковой поверхности от действия максимальных окружных усилий T_2 с образованием продольных волн в области малой кривизны для любых значений параметра эллиптичности $\bar{a}$, для круговой оболочки волнообразование распространяется на всю ее поверхность.

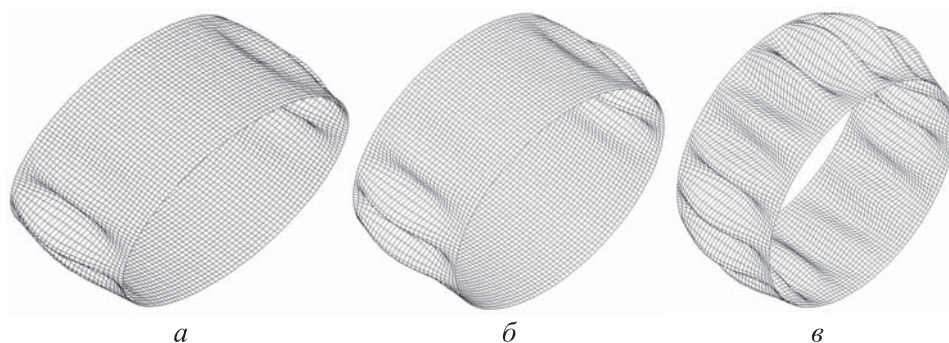


Рис. 7. Формы потери устойчивости для оболочек с различными значениями параметра эллиптичности $\bar{a}$:

a — 0,6; $б$ — 0,8; $в$ — 1,0

Закключение. Критические значения параметра нагрузки k_q зависят как от укладки монослоев в пакете, так и от параметра эллиптичности оболочки. Наибольшие значения параметра k_q достигаются для круговых цилиндрических оболочек независимо от укладки монослоев.

Учет нелинейности, как правило, ведет к снижению значения параметра k_q . Влияние нелинейности незначительно, в пределах до 6 %, независимо от параметра эллиптичности оболочки.

Углы укладки монослоев существенно влияют на параметр критической нагрузки. Оптимальными считаются укладки с углами φ в диапазоне $60 \dots 70^\circ$.

Значения параметра весовой эффективности композитных оболочек k_g зависят как от укладки монослоев в пакете, так и от параметра эллиптичности оболочки $\bar{a}$. В этом случае наиболее эффективна укладка с углами $\varphi > 40^\circ$.

Оболочки теряют устойчивость на боковой поверхности от действия максимальных окружных усилий T_2 с образованием продольных волн в области малой кривизны для любых значений параметра эллиптичности $\bar{a}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кабанов В.В. *Устойчивость оболочек*. Москва, Наука, 1978, 360 с.
- [2] Кабанов В.В. *Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек*. Москва, Машиностроение, 1982, 256 с.
- [3] Hutchinson J.W. The loss of stability of a cylindrical shell of oval cross-section under axial compression and its behaviour in the initial period after loss of stability [Хатчинсон Дж. Потеря устойчивости цилиндрической оболочки овального поперечного сечения под действием осевой сжимающей нагрузки и ее поведение в начальный период после потери устойчивости]. *Transaction of the ASME. Journal of Applied Mechanics, Ser. E*, 1968, vol. 35, no. 1, с. 73–78.
- [4] Tennyson R.C., Booton M., Caswell R.D. Buckling of imperfect elliptical shells under axial compression. *AIAA Journal*, 1971, vol. 9, no. 2, pp. 250–255.
- [5] Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при чистом изгибе. *Механика твердого тела*, 2004, № 3, с. 144–151.
- [6] Бойко Д.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Нелинейное деформирование и устойчивость овальных цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении. *СО РАН ПМТФ*, 2008, т. 49, № 1, с. 134–138.
- [7] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 272 с.
- [8] Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures*. Amsterdam, Elsevier, 2018, 900 p.
- [9] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1984, 446 с.
- [10] Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. *Статика и динамика оболочечных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1975, 376 с.
- [11] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*. Москва, Физматгиз, 1959, 684 с.
- [12] Железнов Л.П. *Программа для расчета на прочность и устойчивость подкрепленных некруговых цилиндрических оболочек*. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2013615613 РФ. Зарегистрировано в реестре Роспатента 17.06.2013.
- [13] Кабанов В.В., Железнов Л.П. К расчету цилиндрической оболочки методом конечных элементов. *Прикладная механика*, 1985, т. 21, № 9, с. 35–38.
- [14] Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении. *СО РАН, ПМТФ*, 2002, т. 43, № 4, с. 155–160.

- [15] Бойко Д.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно-подкрепленных эллиптических цилиндрических композитных оболочек при кручении и внутреннем давлении. *Авиационная техника*, 2018, № 2, с. 27–34.
- [16] Железнов Л.П., Серьезнов А.Н. Нелинейное деформирование и устойчивость композитного отсека фюзеляжа самолета при чистом изгибе. *Авиационная техника*, 2021, № 3, с. 22–30.
- [17] Железнов Л.П., Серьезнов А.Н. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитного отсека фюзеляжа самолета при поперечном изгибе. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2021, № 10, с. 106–116.
- [18] Постнов В.А., Хархурим И.Я. *Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций*. Ленинград, Судостроение, 1974, 341 с.
- [19] Уилкинсон Д., Райнш К. *Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра*. Москва, Машиностроение, 1976, 390 с.
- [20] Железнов Л.П. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитной некруговой цилиндрической оболочки при нагружении изгибающим моментом. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2024, № 6 (771), с. 108–116.

Статья поступила в редакцию 02.04.2026

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Железнов Л.П. Нелинейное деформирование и устойчивость эллиптической композитной цилиндрической оболочки при внешнем давлении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2026, вып. 8. EDN DTKMGA

Железнов Лев Петрович — д-р техн. наук, заместитель начальника отделения усталостной и статической прочности конструкций по науке, Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина (ФАО «СибНИА имени С.А. Чаплыгина»), профессор кафедры ИТТ ФГБОУ ВО СГУПС. Автор более 130 научных работ в области «Прочность летательных аппаратов». e-mail: zgeleznov@sibnia.ru

Nonlinear Deformation and Stability of an Elliptical Composite Cylindrical Shell under External Pressure

© L.P. Zheleznov^{1, 2}

¹ Federal Autonomous Institution “Siberian Aeronautical Research Institute named after S.A. Chaplygin” (SibNIA), Novosibirsk, 630051, Russian Federation

² Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Siberian State Transport University” (SGUPS), Novosibirsk, 630049, Russian Federation

The problem of stability of non-circular elliptical cylindrical shells made of composite material is solved, taking into account moment effects and material nonlinearity of their subcritical stress-strain state. The geometrically nonlinear stability problem is solved by finite element methods and the Newton–Kantorovich linearization method. Critical loads are determined in the process of solving a nonlinear problem using the Sylvester criterion. The finite elements of composite cylindrical shells of natural curvature developed by the author on the basis of the Timoshenko hypothesis are used, in the approximation of the displacements of which their rigid displacements are explicitly highlighted, which significantly affects the convergence of the solution. The stability of an elliptical, pivotally supported cylindrical shell made of a polymer composite material under external pressure is investigated. The influence of the monolayer laying methods, the nonlinearity of deformation, and the ellipticity parameter on the critical loads of shell stability loss and the high efficiency of composite shells has been clarified.

Keywords: elliptical cylindrical composite shells, polymer composite materials, nonlinear deformation, stability, finite element method, external pressure, weight efficiency

REFERENCES

- [1] Kabanov V.V. *Ustoychivost obolochek* [Stability of shells]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 360 p.
- [2] Kabanov V.V. *Ustoychivost neodnorodnykh tsilindricheskikh obolochek* [Stability of inhomogeneous cylindrical shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982, 256 p.
- [3] Hutchinson J.W. Postbuckling behavior of oval cylindrical shells under axial compression. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, vol. 35, no.1, pp. 73–78 [In Russ.: Poterya ustoychivosti tsilindricheskoy obolochki ovalnogo poperechnogo secheniya pod deystviem osevoy szhimayuschey nagruzki i ee povedeniye v nachalnyy period posle poteri ustoychivosti].
- [4] Tennyson R.C., Booton M., Caswell R.D. Buckling of imperfect elliptical cylindrical shells under axial compression. *AIAA Journal*, 1971, vol. 9, no. 2, pp. 250–255.
- [5] Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Issledovanie nelineynogo deformirovaniya i ustoychivosti nekrugovykh tsilindricheskikh obolochek pri chistom izgibe [Investigation of nonlinear deformation and stability of non-circular cylindrical shells under pure bending]. *Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids*, 2004, no. 3, pp. 144–151.
- [6] Boyko D.V., Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost' oval'nykh tsilindricheskikh obolochek pri kombinirovannom nagruzhении [Nonlinear deformation and stability of oval cylindrical shells under combined loading]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, vol. 49, no. 1, pp. 134–138.

-
- [7] Vasiliev V.V. *Mekhanika konstruktsey iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 272 p.
 - [8] Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures*. Amsterdam, Elsevier, 2018, 900 p.
 - [9] Alfutov N.A., Zinoviyev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogosloynnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 446 p.
 - [10] Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N. *Statika i dinamika obolocheknykh konstruktsey* [Statics and dynamics of shell structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 376 p.
 - [11] Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsionalnyy analiz v normirovannykh prostanstvakh* [Functional analysis in normed spaces]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 684 p.
 - [12] Zheleznov L.P. *Programma dlya rascheta na prochnost i ustoychivost podkreplennykh nekrugovykh tsilindricheskikh obolochek* [Program for strength and stability analysis of stiffened non-circular cylindrical shells]. Certificate of state registration of a computer program No. 2013615613 RF. Registered in the Register of Rospatent on June 17, 2013.
 - [13] Kabanov V.V., Zheleznov L.P. K raschetu tsilindricheskoy obolochki metodom konechnykh elementov [On the calculation of a cylindrical shell by the finite element method]. *Prikladnaya mekhanika — International Applied Mechanics*, 1985, vol. 21, no. 9, pp. 35–38.
 - [14] Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Issledovanie nelineynogo deformirovaniya i ustoychivosti nekrugovykh tsilindricheskikh obolochek pri osevom szhatii i vnutrennem davlenii [Investigation of nonlinear deformation and stability of non-circular cylindrical shells under axial compression and internal pressure]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 155–160.
 - [15] Boyko D.V., Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost' diskretno-podkreplennykh ellipticheskikh tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek pri kruchenii i vnutrennem davlenii [Nonlinear deformation and stability of discrete-reinforced elliptical cylindrical composite shells under torsion and internal pressure]. *Aviatsionnaya tekhnika — Russian Aeronautics*, 2018, no. 2, pp. 27–34.
 - [16] Zheleznov L.P., Serieznov A.N. Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost' kompozitnogo otseka fyuzelyazha samoleta pri chistom izgibe [Nonlinear deformation and stability of a composite aircraft fuselage section under pure bending]. *Aviatsionnaya tekhnika — Russian Aeronautics*, 2021, no. 3, pp. 22–30.
 - [17] Zheleznov L.P., Serieznov A.N. Issledovanie nelineynogo deformirovaniya i ustoychivosti kompozitnogo otseka fyuzelyazha samoleta pri poperechnom izgibe [Research on Nonlinear Deformation and Stability of an Aircraft Fuselage Composite Section under Transverse Bending]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye — BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2021, no. 10, pp. 106–116.
 - [18] Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya. *Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruktsey* [Finite element method in the analysis of ship structures]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1974, 341 p.
 - [19] Wilkinson J.H., Reinsch C. *Handbook for Automatic Computation. Vol. II. Linear Algebra*. New York, Springer-Verlag, 1971 [In Russ.: Uilkinson D., Raynsh K. *Spravochnik algoritmov na yazyke Algol. Lineynaya algebra*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, 390 p.].
-

- [20] Zheleznov L.P. Issledovanie nelineynogo deformirovaniya i ustoychivosti kompozitnoy nekrugovoy tsilindricheskoy obolochki pri nagruzhении izgibayuschim momentom [Study of nonlinear deformation and stability of the non-circular composite cylindrical shell exposed to loading with the bending moment]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye — BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2024, no. 6 (771), pp. 108–116.

Zheleznov L.P., Dr. Sc. (Eng.), Deputy Head of the Department of Fatigue and Static Strength of Structures for Research, Federal Autonomous Institution “Siberian Aeronautical Research Institute named after S.A. Chaplygin” (SibNIA); Professor of the Department of Information Technologies and Telecommunications, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Siberian State Transport University” (SGUPS); author of more than 130 scientific publications in the field of aircraft strength. e-mail: zgeleznov@sibnia.ru