

УДК 691.175.5

Методика расчета зубчатого зацепления из композиционных материалов

П.Д. Ключев

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Calculation methodology for composite material gear meshing

P.D. Klyuev

Bauman Moscow State Technical University

Современные отрасли машиностроения, включая аэрокосмическую, автомобильную и робототехнику, характеризуются динамичным развитием, что предъявляет к механическим передачам все более высокие требования. Основными аспектами проектирования таких передач становятся не только традиционные параметры прочности и надежности, но и минимизация массы и габаритных размеров, снижение уровня шума и вибраций, а также увеличение ресурса в условиях экстремальных нагрузок. В этом контексте традиционные материалы на основе металлов и сплавов зачастую достигают эксплуатационных пределов. Предложена усовершенствованная методика расчета контактной прочности зубчатых передач, в которых одно зубчатое колесо изготовлено из композиционных материалов, а другое — из стали. Существующие подходы, основанные на классической теории Герца, не в полной мере учитывают анизотропные свойства композиционных и функционально-градиентных материалов. Разработана механико-математическая модель, которая рассматривает контакт зуба жесткого (стального) колеса с зубом колеса из композиционного материала как задачу о вдавливании жесткого цилиндра в ортотропную или градиентную полуплоскость. Выведены аналитические выражения для определения напряженно-деформированного состояния, включая распределение нормальных и максимальных касательных напряжений по глубине зуба. Методика апробирована на примере расчета зубьев из ортотропного материала (армированного стекловолокном) и функционально-градиентного материала с переменным модулем упругости.

EDN: JGRURH, <https://elibrary/jgrurh>

Ключевые слова: зубчатая передача, композиционные материалы, ортотропные материалы, функционально-градиентные материалы, контактные напряжения, напряженно-деформированное состояние

Modern mechanical engineering industries, including aerospace, automotive, and robotics, are characterized by dynamic development, which places increasingly high demands on mechanical transmissions. Key aspects in the design of such transmissions now encompass not only traditional parameters of strength and reliability but also the minimization of mass and dimensions, reduction of noise and vibration levels, and an increase in service life under extreme loading conditions. In this context, traditional metal-based materials often reach their operational limits. This paper presents an advanced engineering methodology for calculating the contact strength of gear transmissions in which one gear is made of composite materials and the other is steel. Existing approaches, based on classical Hertzian theory, do not fully account for the anisotropic properties of composites and functionally graded materials. The study proposes a mechanical-mathematical model that considers the contact of a tooth

from a rigid (steel) gear with a tooth from a composite gear as a problem of indentation of a rigid cylinder into an orthotropic or functionally graded half-plane. The aim of the work is to develop analytical relationships for determining the stress-strain state, including the distribution of normal and maximum shear stresses along the tooth depth. The methodology was validated using the example of gear teeth made from orthotropic (glass fiber-reinforced) and functionally graded materials with a variable elastic modulus.

EDN: JGRURH, <https://elibrary/jgrurh>

Keywords: gear transmission, composite materials, orthotropic materials, functional gradient materials, contact stresses, stress-strain state

Одним из перспективных направлений повышения контактной прочности при проектировании зубчатых передач (ЗП) является интеграция в узлы трения инновационных материалов, включая композиционные (КМ) и функционально-градиентные (ФГМ). Особенность этих материалов заключается в возможности целенаправленного варьирования таких механических характеристик, как удельная прочность, износостойкость, демпфирующая способность и коррозионная стойкость.

Применение КМ, например, на основе полимерной матрицы, армированной углеродными волокнами, позволяет значительно снизить массу детали. Однако внедрение новых материалов требует разработки адекватных и точных методов их расчета, что представляет собой актуальную задачу современного машиностроения, напрямую связанную с экономической эффективностью проектирования и эксплуатации конструкций.

Актуальность данного исследования обусловлена значительным разрывом между существующими методиками [1] проектирования и реальным поведением новых материалов в условиях контактного нагружения. Традиционно для расчета контактной прочности ЗП используют решение Г. Герца, разработанное для идеально упругих, изотропных и однородных тел. Однако КМ характеризуются выраженной анизотропией (ортотропией), а ФГМ — плавным градиентом механических свойств по объему. Применение классической теории Герца в таких случаях приводит к значительным погрешностям определения контактных напряжений и их распределения по глубине, что влечет за собой некорректный прогноз усталостной долговечности.

Однако контактное взаимодействие в зубчатых зацеплениях представляет собой сложный процесс, сопровождаемый формированием объемного напряженного состояния. Наиболее критическими с точки зрения усталостного разрушения являются максимальные касательные

напряжения, возникающие в глубинных слоях материала. Для изотропных материалов их локализация хорошо исследована, но для анизотропных и градиентных структур [2] наблюдается кардинальное смещение областей максимальных напряжений, что требует разработки принципиально новых подходов к анализу.

Несмотря на важность контактных напряжений в зубчатых колесах (ЗК) из КМ, всесторонний анализ этих напряжений в литературе представлен недостаточно, и на сегодняшний день отсутствуют адаптированные для инженерной практики методики расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) зубьев из КМ и ФГМ, учитывающие их специфические механические свойства.

Цель исследования — разработка комплексной аналитической методики расчета контактных напряжений и перемещений в зубьях ЗК, изготовленных из ортотропных КМ и ФГМ, взаимодействующих с жестким (стальным) ЗК.

Научная новизна исследования заключается в разработке комплексного подхода к расчету НДС передач, выполненных из КМ, который объединяет модели как ортотропного материала, так и ФГМ в рамках единой методологической базы. Предложены инженерные аналитические зависимости, альтернативные классической формуле Герца, что позволит повысить точность и надежность расчета.

Практическая значимость результатов исследования [3] состоит в том, что разработанная методика позволит проектировщикам осуществлять более точный и обоснованный прогноз контактной прочности и долговечности ЗП из современных КМ на ранних стадиях проектирования. Это будет способствовать созданию более надежных, эффективных и легких механических систем, а также оптимизации выбора свойств КМ с использованием современного программного обеспечения.

Проведен анализ нескольких контактных задач, применимых к инженерному расчету взаи-

модействия зубьев ЗК, моделируемых как цилиндрические тела. Выполнен анализ НДС и трибологических характеристик, что позволило глубже понять механизмы контактного взаимодействия и разработать рекомендации по повышению эксплуатационных характеристик [4] ЗП из новых материалов.

Постановка задачи. При работе ЗП, состоящей из двух ЗК, одно из которых выполнено из стали, а другое — из КМ, возникает взаимодействие зубьев двух ЗК. Представим разрабатываемый подход к реализации расчета напряжений и перемещений как на поверхности, так и по глубине зуба из КМ.

Модуль упругости стального ЗК значительно выше, чем у ЗК из КМ, следовательно, можно рассматривать контактную задачу о вдавливании жесткого цилиндра в полуплоскость из КМ. В случае наличия данных о распределении поверхностного давления при взаимодействии зубьев ЗК, изготовленных из различных материалов, и о площади контакта, можно проводить расчеты напряжений и перемещений.

Расчеты могут быть выполнены для изотропных и ортотропных материалов, а также для полуплоскости, моделирующей ФГМ. Ввиду того, что площадь контакта между зубом и внешней средой относительно мала, можно легко разработать математическую модель для расчета параметров контакта. Эта модель основана на методике расчета напряжений в полубесконечном упругом теле при плоской деформации. Для дальнейшего создания алгоритма расчета НДС при взаимодействии зубьев ЗК построим механико-математическую модель контакта зубьев ЗК из КМ (рис. 1).

Методика расчета. Рассмотрим ЗК из КМ, армированное волокнами, которые ориентированы в направлении одной из осей X или Y (координатные оси совпадают с основными направлениями материала). С позиции макромеханики расчет НДС такого материала под действием граничной нагрузки [5] необходимо рассматривать на основе закономерностей ортотропии.

Представим расчет НДС полубесконечного ортотропного тела при взаимодействии зубьев ЗК из КМ, подверженного воздействию поверхностного давления p , распределенного по закону

$$p(x) = p_0 \sqrt{a^2 - x^2}; \quad p_0 = \frac{2P}{L\pi a^2} \quad (1)$$

или согласно выражению

$$p_x = m \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Здесь a — размер зоны контакта; R_1 и R_2 — радиусы двух взаимодействующих цилиндров, мм; P и L — действующее усилие и длина цилиндра;

$$m = \frac{1}{[(\beta_1 + \beta_2) S_{22}]^{(1)} + [(\beta_1 + \beta_2) S_{22}]^{(2)}};$$

$$\beta_{1,2} = \left(\sqrt{\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}}} \right)^{-1},$$

где индекс «(1)» — характеризует материал первого цилиндра, а индекс «(2)» — второго цилиндра; S_{22} , S_{66} , S_{12} , S_{11} — постоянные.

При плоской деформации постоянные определяются следующим образом:

$$S_{11} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1}; \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1};$$

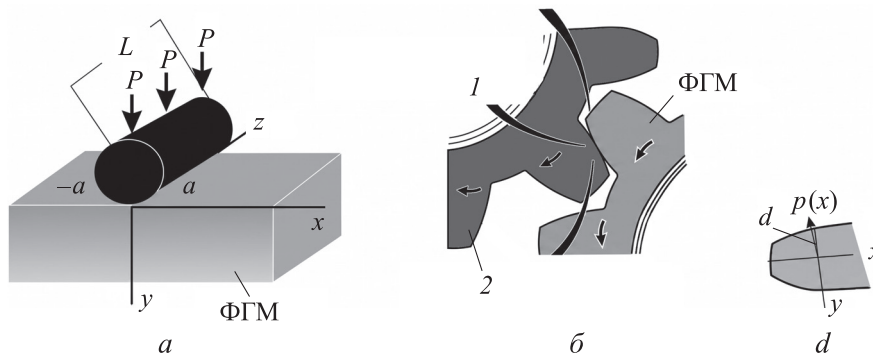


Рис. 1. Результаты моделирования контакта зубьев шестерни из ФГМ:
 а — механико-математическая модель;
 б — схема реальной ЗП (1 — контактное взаимодействие; 2 — стальное ЗК);
 в — схема расчета напряжений в зубе из ФГМ

$$S_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2}; \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}.$$

Здесь ν_{13} , ν_{32} — коэффициенты Пуассона; E_1 , E_2 — модули упругости материала; G_{12} — модуль сдвига материала;

$$E_1 = VE_f + (1 - V)E_m; \quad E_2 = \frac{E_m(1 + \eta V)}{1 - \eta V};$$

$$G_{12} = G_m \frac{G_f(1 + V) + G_m(1 - V)}{G_f(1 - V) + G_m(1 + V)};$$

$$\eta = \frac{E_f - E_m}{E_f + E_m}; \quad \nu_{12} = \nu_{13} = V\nu_f + (1 - V)\nu_m;$$

$$\nu_{21} = \nu_{31} = \frac{E_2}{E_1}\nu_{12}; \quad \nu_{23} = \nu_{32} = 1 - \nu_{21} - \frac{E_2}{3K};$$

$$K = \frac{K_f K_m}{VK_m + (1 - V)K_f}; \quad K_f = \frac{E_f}{3 - 6\nu_f};$$

$$K_m = \frac{E_m}{3 - 6\nu_m},$$

где V — объемное содержание материала в матрице; E_f , E_m и ν_f , ν_m — модули упругости и коэффициенты Пуассона волокна и матрицы соответственно; K_f и K_m — объемные модули упругости волокна и матрицы.

Здесь для упрощения заменяем действие металлического (жесткого) цилиндра на границу ортотропной полуплоскости распределенным давлением согласно закону (1).

Напряжения — нормальные σ_y , σ_x и касательные τ_{xy} — и перемещения u в ортотропном теле определяются следующими [6] соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{1}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \times \\ &\times \int_{-a}^a p(s) \left[\frac{1}{(x-s)^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2}} - \frac{1}{(x-s)^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2}} \right] ds; \\ \sigma_x &= \frac{y}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \times \\ &\times \int_{-a}^a p(s) \left[\frac{1}{\beta_1^2(x-s)^2 + y^2} - \frac{1}{\beta_2^2(x-s)^2 + y^2} \right] ds; \\ \tau_{xy} &= \int_{-a}^a p(s) \frac{x-s}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \times \\ &\times \left[\frac{1}{(x-s)^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2}} - \frac{1}{(x-s)^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2}} \right] ds; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \int_{-a}^a p(s) \times \\ &\times \left[\beta_1 R_1 \operatorname{arctg} \frac{(x-s)\beta_1}{y} - \beta_2 R_2 \operatorname{arctg} \frac{(x-s)\beta_2}{y} \right] ds + C; \end{aligned}$$

$$R_1 = \frac{S_{11}}{\beta_1^2} - S_{12},$$

где y , x и s — глубина, ширина и длина дуги поверхности зуба соответственно; C — постоянная.

В предельном случае — при $\beta_1 = \beta_2 \rightarrow 1$ — имеем следующие выражения для напряжений и перемещения в изотропной полуплоскости:

$$\sigma_y = \frac{-2y^3}{\pi} \int_{-a}^a p(s) \frac{1}{[(x-s)^2 + y^2]^2} ds;$$

$$\sigma_x = \frac{-2y}{\pi} \int_{-a}^a p(s) \frac{(x-s)^2}{[(x-s)^2 + y^2]^2} ds;$$

$$\tau_{xy} = \frac{-2y^2}{\pi} \int_{-a}^a p(s) \frac{x-s}{[(x-s)^2 + y^2]^2} ds;$$

$$u = \frac{1}{\pi E} \left[\frac{(1-\nu)xy}{x^2 - y^2} - (1-\nu) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right] + C_{1y} + C_0,$$

где E — модуль упругости материала; ν — коэффициент Пуассона материала; C_{1y} — произвольная постоянная интегрирования; C_0 — нулевой член.

Максимальное касательное напряжение определяем как

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Решим контактную задачу для двух гладких ортотропных цилиндров с параллельными осями, прижатыми друг к другу постоянной в направлении оси z линейной силой P . Считаем, что каждый из них можно заменить упругой ортотропной полуплоскостью с неизвестным законом распределения, который удовлетворяет условию [7] равновесия

$$\int_{-a}^a p(t) dt = P,$$

где t — время.

Размер зоны контакта вычисляем по формуле

$$a = \sqrt{\frac{2PR_1R_2}{\pi m(R_1 + R_2)}}.$$

Зная закон распределения давления p в области контакта, нетрудно найти максимальное перемещение ортотропной полуплоскости при вдавливании жесткого цилиндрического штампа. Используя зависимости для перемещений при $x = 0$, получаем

$$u_1 = -\frac{1}{\pi} \left[S_{22} (\beta_1 + \beta_2) \int_{-a}^a p(t) \ln|t| dt - k_0 P \right]^{-1}.$$

Здесь

$$k_0 = \frac{1}{\beta_2^2} \left[S_{22} (\beta_1 + \beta_2) \ln h - \frac{S_{22}}{\beta_1 - \beta_2} (\beta_1^2 \ln \beta_1 - \beta_2^2 \ln \beta_2) - \frac{S_{12}}{\beta_1 - \beta_2} \ln \beta_1 \right]^2,$$

где h — высота зуба.

При расчете напряжений [8] для полубесконечного тела из ФГМ считаем, что модуль Юнга зависит от глубины y и изменяется по простому степенному закону

$$E = E_0 (y)^k,$$

где k — коэффициент градиента, $0 \leq k \leq 1$.

При $y = 0$ модуль упругости материала

$$E = E_0 (y)^k$$

или в общем случае

$$E = E_0 (y + H)^k,$$

где E_0 — начальный модуль упругости материала; H — твердость поверхности материала, $H \geq 0$.

Если поверхностное давление распределяется по закону [6]

$$p(x) = \gamma(k) \frac{P}{2a} \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1+k}{2}}; \quad (3)$$

$$\gamma(k) = \frac{\Gamma(3+k)}{2^{(1+k)} \Gamma^2\left(\frac{3+k}{2}\right)},$$

то напряжения определяются соотношениями

$$\sigma_y = -y^{(2+k)} F_{k\beta} \int_{-a}^a \frac{p(s) \cos\left(\beta \arctg \frac{x-s}{y}\right)}{\left[(x-s)^2 + y^2\right]^{\frac{3+k}{2}}} ds;$$

$$\sigma_x = -y^k F_{k\beta} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s)^2 \cos\left(\beta \arctg \frac{x-s}{y}\right)}{\left[(x-s)^2 + y^2\right]^{\frac{(3+k)}{2}}} ds;$$

$$\tau_{xy} = -y^{k+1} F_{k\beta} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s) \cos\left(\beta \arctg \frac{x-s}{y}\right)}{\left[(x-s)^2 + y^2\right]^{\frac{(3+k)}{2}}} ds;$$

$$0 < y \leq d.$$

Здесь

$$F_{k\beta} = \frac{2^{(k+1)} (k+2) \Gamma\left(\frac{3+k+\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3+k-\beta}{2}\right)}{\pi \Gamma(3+k)};$$

$$\beta = \sqrt{(k+1) \left(1 - \frac{kv}{1-v}\right)},$$

где Γ — гамма-функция,

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\gamma-1} dt;$$

v — коэффициент Пуассона материала ФГМ; d — расстояние до середины зуба (см. рис. 1, в).

Максимальные касательные напряжения $\tau_{\max}$ определяем по формуле (2), как и для ортотропного случая. Перемещение u_y и размер зоны контакта a находим по выражениям

$$u_y(x) = \frac{1-v^2}{E_0} \frac{P}{2I_k} \frac{\beta}{k+1} \frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{k|x|^k};$$

$$a^{(2+k)} = \frac{(1-v^2) 2RP\beta(k+2) \sin(\beta\pi/2)}{E_0(1-k^2)\pi} \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{3+k+\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3+k-\beta}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{3+k}{2}\right),$$

где

$$I_k = \frac{\pi \Gamma(3+k)}{2^{(k+2)} (k+2) \Gamma\left(\frac{3+k+\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3+k-\beta}{2}\right)}.$$

В частном случае — при $k=0$ — получаем такие же напряжения и перемещения, как и в изотропной полуплоскости. Для определения максимальных контактных напряжений [9] при вдавливании жесткого цилиндра в полуплоскость из ФГМ используем выражение (3) при $x=0$

$$\sigma_c = -\gamma(k) \frac{P}{2a}. \quad (4)$$

Для построения инженерного расчета на контактную прочность зубьев ЗК из ФГМ при контакте с жестким ЗК вместо формулы, применяемой при расчете на контактную выносливость, принятой на основе теории Герца [10], будем использовать соотношение (4).

В предельном случае для выражения (3), когда $k \rightarrow 0$, получаем формулу Герца

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a} \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Далее преобразуем выражение (4) в формулу для определения максимальных контактных напряжений, используя методику, с учетом применения существующих геометрических и других коэффициентов, уточняющих инженерный расчет зубьев ЗК на контактную прочность.

Результаты расчета и обсуждение. С помощью разработанной методики выполнен расчет НДС зубьев ЗК со следующими физико-механическими характеристиками: шестерня из КМ, состоящего из полиамидной [11] матрицы и стеклянных волокон, с модулями упругости $E_m = 3500$ МПа и $E_f = 85\,000$ МПа, коэффициентами Пуассона $\nu_m = 0,35$ и $\nu_f = 0,20$, моду-

лями сдвига $G_m = 1300$ МПа и $G_f = 34\,420$ МПа, объемным содержанием волокон $V = 20\%$; ЗК из стали с модулем упругости $E = 207\,000$ МПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ и модулем сдвига $G = 79\,615$ МПа.

По приведенным формулам получены следующие физические постоянные материала (ортоотропного) для шестерни: $E_1 = 19\,800$ МПа; $\eta = 0,92$; $E_2 = 5080,33$ МПа; $G_{12} = 1893,47$ МПа; $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,32$; $\nu_{21} = \nu_{31} = 0,08$; $K_f = 47\,222,22$ МПа; $K_m = 47\,222,22$ МПа; $K = 4763,05$ МПа; $\nu_{23} = \nu_{32} = 0,56$.

Тогда материал шестерни будет иметь постоянные $S_{11} = 4,92 \cdot 10^{-5}$ МПа $^{-1}$; $S_{12} = -1,75 \cdot 10^{-5}$ МПа $^{-1}$; $S_{22} = 13 \cdot 10^{-5}$ МПа $^{-1}$; $S_{66} = 53 \cdot 10^{-5}$ МПа $^{-1}$; $\beta_1 = 0,32$; $\beta_2 = 1,89$, а материал ЗК — $S_{11} = 4,92 \cdot 10^{-5}$ МПа $^{-1}$; $S_{12} = -1,88 \cdot 10^{-6}$ МПа $^{-1}$; $S_{22} = 4,40 \cdot 10^{-6}$ МПа $^{-1}$; $S_{66} = 1,26 \cdot 10^{-5}$ МПа $^{-1}$; $\beta_1 = 0,998$; $\beta_2 = 1,002$. Параметр $m = 3269,06$ МПа.

Для расчета НДС зубьев ЗК заменим тело зуба, контактирующего с жестким зубом, по-

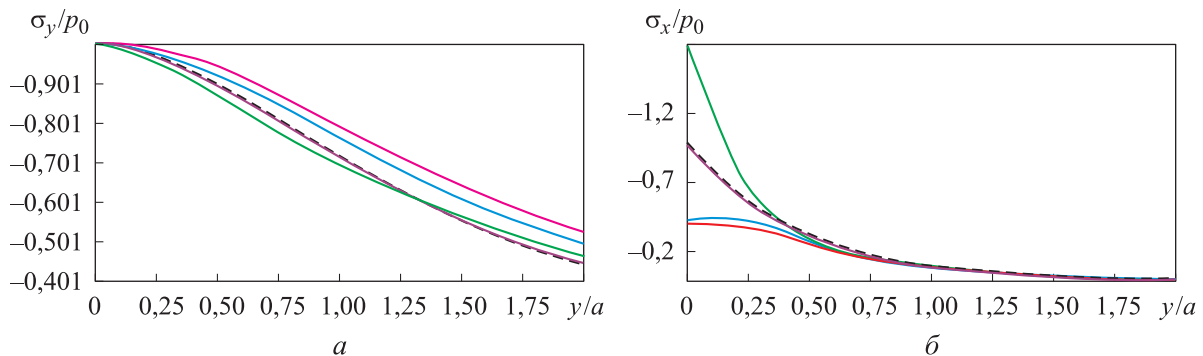


Рис. 2. Распределение относительных нормальных напряжений σ_y/p_0 (а) и σ_x/p_0 (б) по относительной глубине тела зуба y/a для различных материалов:

--- — ФГМ, $k = 0$; — — ФГМ, $k = 0,99$; — — ФГМ, $k = 0,50$;
— — ортотропный материал; — — изотропный материал

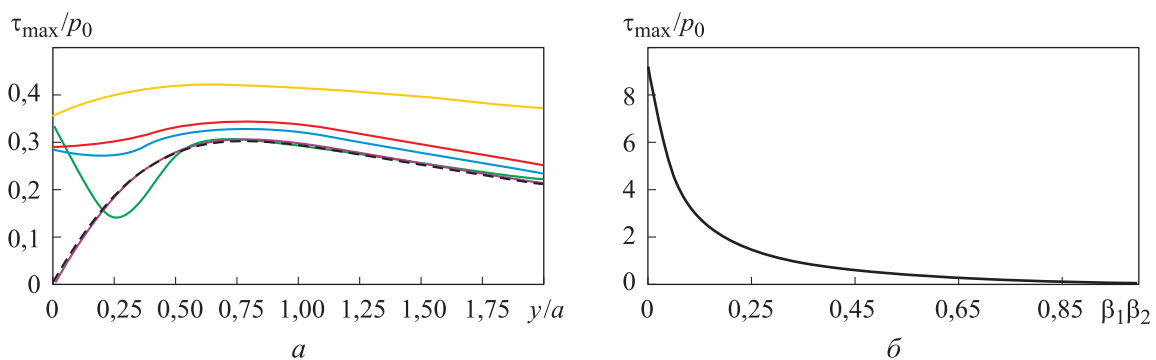


Рис. 3. Зависимости относительного максимального касательного напряжения $\tau_{\max}/p_0$

от относительной глубины тела зуба y/a (а) и произведения $\beta_1\beta_2$ (б) для различных материалов:
--- — ФГМ, $k = 0$; — — ФГМ, $k = 0,99$; — — ФГМ, $k = 0,5$; — — ортотропный материал, $\beta_1 = 0,32$; $\beta_2 = 1,89$;
— — ортотропный материал, $\beta_1 = 0,70$, $\beta_2 = 5,00$; — — изотропный материал

луплоскостью (изотропной, ортотропной, функционально-градиентной) с заданным действующим давлением на границе по закону

$$p(x) = p_0 \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Далее рассчитываем НДС в полуплоскостях с указанными свойствами материалов. На рис. 2, а, б и рис. 3, а показано распределение относительных нормальных σ_y/p_0 , σ_x/p_0 и касательных $\tau_{\max}/p_0$ напряжений по глубине тела зуба [12] от поверхности контакта (относительной глубине тела зуба) y/a для различных материалов: для ортотропной полуплоскости, которая переходит в изотропную при $\beta_i \rightarrow 1$ ($\beta_1 = 0,999$, $\beta_2 = 1,001$), для ортотропной ($\beta_1 = 0,32$, $\beta_2 = 1,89$) и функционально-градиентной ($k = 0; 0,5; 0,99$).

Получены все напряжения для изотропного случая ($k = 0$ для ФГМ, $\beta_1 \approx 1$, $\beta_2 \approx 1$ для ортотропного материала). Как видно из рис. 2, а, б и рис. 3, в, свойства изотропного материала могут

значительно влиять на распределение относительных напряжений σ_y/p_0 , σ_x/p_0 и $\tau_{\max}/p_0$ для ФГМ при $k = 0$ по относительной глубине тела зуба y/a .

Следует отметить, что с возрастанием коэффициента градиента k напряжение σ_y/p_0 в ФГМ увеличивается, а напряжение σ_x/p_0 почти не изменяется. Для ортотропного случая на поверхности относительные нормальные напряжения σ_x/p_0 и σ_y/p_0 принимают максимальные значения ($\sigma_x/p_0 = -1,6528$, $\sigma_y/p_0 = -1$) и постепенно [13] убывают с глубиной. Относительные нормальные напряжения σ_x/p_0 и σ_y/p_0 связаны соотношением

$$\frac{\sigma_x}{p_0} = \frac{\sigma_y}{p_0 \beta_1 \beta_2} = -\frac{1}{0,32 \cdot 1,89} = 1,6534.$$

Относительное максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}/p_0 = 0,32642$, где

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta_1 \beta_2} - 1 \right).$$

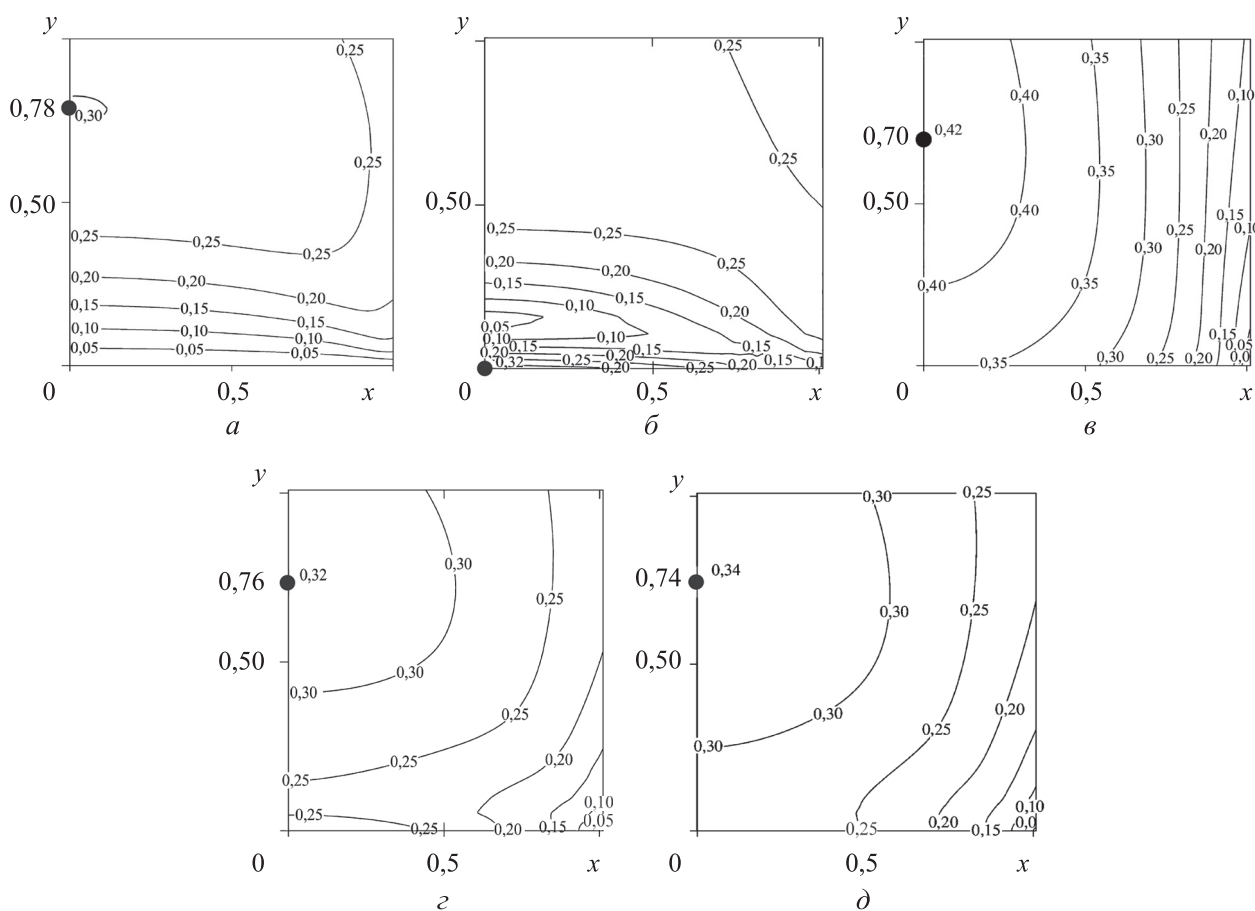


Рис. 4. Линии уровня относительных максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}/p_0$ для различных материалов:

а — изотропного материала, ортотропного, $\beta_1 = \beta_2 \approx 1$ (случай изотропии), ФГМ, $k = 0$; б — ортотропного материала, $\beta_1 = 0,32$, $\beta_2 = 1,89$; в — ортотропного материала $\beta_1 = 0,70$, $\beta_2 = 5,00$; г — ФГМ, $k = 0,5$; д — ФГМ, $k = 0,99$

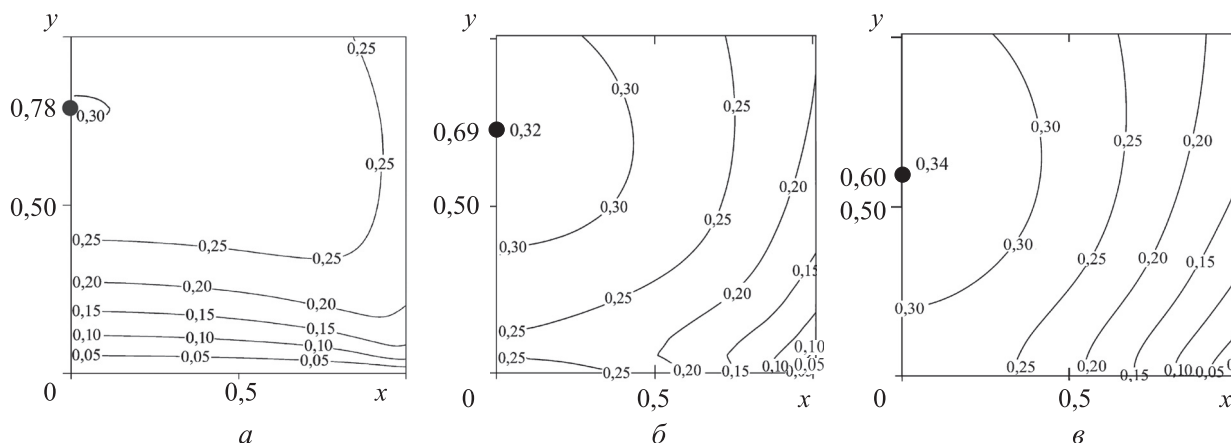


Рис. 5. Линии уровня относительных максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}/p_0$ для ФГМ при коэффициенте градиента $k = 0$ (а), 0,50 (б) и 0,99 (в)

На рис. 4 приведены линии уровня относительных максимальных [14] касательных напряжений $\tau_{\max}/p_0$ для различных материалов.

На рис. 5 показаны линии уровня относительных максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}/p_0$ для ФГМ с заданным действующим давлением на границе по закону (3).

По результатам анализа НДС зубьев ЗК из КМ и ФГМ можно заключить следующее. Разработанная методика расчета демонстрирует существенное влияние анизотропии механических свойств КМ и градиента модуля упругости ФГМ на распределение контактных напряжений по глубине зуба. Для ортотропного материала с параметрами $\beta_1 = 0,32$ и $\beta_2 = 1,89$ наблюдается значительное перераспределение напряжений по сравнению с изотропным случаем. Установлено, что в ортотропных материалах максимальные касательные напряжения $\tau_{\max}$ смещаются вглубь тела зуба и изменяют значения в зависимости от степени анизотропии, характеризуемой произведением $\beta_1\beta_2$.

Для ФГМ показано, что с увеличением коэффициента градиента k от 0 до 0,99 происходит существенное изменение картины распределения [15] напряжений σ_y/p_0 при практической неизменности напряжений σ_x/p_0 . Анализ линий уровня максимальных касательных напряжений подтвердил, что для материалов с выраженной анизотропией и градиентом свойств характерно сложное объемное НДС, качественно отличающееся от классического случая Герца.

Полученные результаты убедительно доказывают необходимость учета анизотропных и градиентных свойств материалов при проекти-

ровании ЗП, так как использование классической теории Герца приводит к существенным погрешностям определения как значений напряжений, так и мест их максимальной концентрации. Предложенная методика позволяет осуществлять более точный прогноз контактной прочности ЗП из современных материалов, что открывает возможности для создания более надежных и эффективных механических систем.

Выводы

1. Предложена методика расчета НДС зубьев ЗК из КМ на основе существующей теории о математических моделях ортотропных и функционально-градиентных материалов.
2. Установлено значительное влияние анизотропии и градиента свойств на картину распределения напряжений. Результаты работы позволяют проводить более точные прогнозы контактной выносливости и служат основой для оптимизации конструкций ЗП из современных материалов.
3. Расчет напряжений в упругом теле зубьев ЗК из КМ показал совпадение с известными данными расчета для зубьев из изотропных материалов (в частном случае) при выбранных определенных параметрах.
4. По приведенным зависимостям и графикам можно легко определить возникающие максимальные напряжения при контакте жесткого цилиндрического тела с упругой полуплоскостью из указанных материалов, т. е. для ортотропных и функционально-градиентных материалов. Изменение закона распре-

деления давления (3) на (1), действующего на поверхности полуплоскости из ФГМ, незначительно влияет на окончательный результат, поэтому для оценки возникающих напряжений можно применять более простую зависимость (1).

5. Результаты работы могут найти применение в инженерных расчетах элементов конструкций из современных материалов, а именно напряженного состояния и деформативности зубьев ЗК из КМ.

Литература

- [1] Belousov Yu.V., Shambina S.L., Rekach F.V. Development of methodology for calculation of permissible stresses for evaluation of contact strength of cylindrical gears in case of overload. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019, vol. 675, art. 012068, doi: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/675/1/012068>
- [2] Polyakov S.A., Kuksenova L.I., Alekseeva M.S. Methodological foundations for choosing the materials for gears according to wear resistance criteria. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2019, vol. 48, no. 4, pp. 328–335, doi: <https://doi.org/10.3103/S1052618819040125>
- [3] Zakharov M.N., Ermolaev M.M., Kuralina N.N. Using plastic pinions with a steel wrapper in planetary cycloid gears. *Russ. Engin. Res.*, 2023, vol. 43, no. 10, pp. 1173–1117, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068798X23100398>
- [4] Старжинский В.Е. *Пластмассовые зубчатые колеса в механизмах приборов*. Санкт-Петербург, Гомель, ИММС, 1998. 537 с.
- [5] Фролов К.В., ред. *Теория механизмов и механика машин*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 566 с.
- [6] Каргин П.А. Проектирование и испытание самотормозящейся зубчатой передачи. *Вестник машиностроения*, 2008, № 12, с. 3–6.
- [7] Красовский А.Б. *Основы электропривода*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019. 408 с.
- [8] Тимофеев Г.А. Варианты самоторможения и модификации цилиндрических самотормозящихся зубчатых передач. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2023, № 4, с. 55–67. EDN: HRKFVE
- [9] Артоблевский И.И. *Теория механизмов и машин*. Москва, Альянс, 2008. 639 с.
- [10] ГОСТ Р 50779.27–2017. *Статистические методы. Распределение Вейбулла. Анализ данных*. Москва, Стандартинформ, 2017. 57 с.
- [11] Шишмарев В.Ю. *Надежность технических систем*. Москва, Юрайт, 2018. 306 с.
- [12] Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П. *Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность*. Москва, Машиностроение, 1985. 224 с.
- [13] Lin C., Xia X., Li P. Geometric design and kinematics analysis of coplanar double internal meshing non-circular planetary gear train. *Adv. Mech. Eng.*, 2018, vol. 10, no. 12, doi: <https://doi.org/10.1177/1687814018818910>
- [14] Набатников Ю.Ф. Обеспечение точности соединений деталей машин методом межгрупповой взаимозаменяемости. *Вестник машиностроения*, 2012, № 11, с. 43–51.
- [15] Нейдорф Р.А., Черногоров И.В., Полях В.В. и др. Экспериментальное исследование возможностей решения многоэкстремальных задач оптимизации эвристическими методами. *Вестник ДГТУ*, 2015, т. 15, № 4, с. 82–93, doi: <https://doi.org/10.12737/16074>

References

- [1] Belousov Yu.V., Shambina S.L., Rekach F.V. Development of methodology for calculation of permissible stresses for evaluation of contact strength of cylindrical gears in case of overload. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019, vol. 675, art. 012068, doi: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/675/1/012068>
- [2] Polyakov S.A., Kuksenova L.I., Alekseeva M.S. Methodological foundations for choosing the materials for gears according to wear resistance criteria. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2019, vol. 48, no. 4, pp. 328–335, doi: <https://doi.org/10.3103/S1052618819040125>

- [3] Zakharov M.N., Ermolaev M.M., Kuralina N.N. Using plastic pinions with a steel wrapper in planetary cycloid gears. *Russ. Engin. Res.*, 2023, vol. 43, no. 10, pp. 1173–1117, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068798X23100398>
- [4] Starzhinskiy V.E. *Plastmassovye zubchatye kolea v mekhanizmaxh priborov* [Plastic gears in instrument mechanisms]. Sankt-Peterburg, Gomel, IMMS Publ., 1998. 537 p. (In Russ.).
- [5] Frolov K.V., ed. *Teoriya mekhanizmov i mekhanika mashin* [Theory of mechanisms and mechanics of machines]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2017. 566 p. (In Russ.).
- [6] Kargin P.A. Design and testing of self-braking gear transmission. *Vestnik mashinostroeniya*, 2008, no. 12, pp. 3–6. (In Russ.). (Eng. version: *Russ. Engin. Res.*, 2008, vol. 28, no. 12, pp. 1153–1158, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068798X08120010>)
- [7] Krasovskiy A.B. *Osnovy elektroprivoda* [Basics of electric drive]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2019. 408 p. (In Russ.).
- [8] Timofeev G.A. Options for self-braking and modification of the cylindrical self-braking gears. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mechan. Eng.], 2023, no. 4, pp. 55–67. EDN: HRKFVE (In Russ.).
- [9] Artobolevskiy I.I. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. Moscow, Alyans Publ., 2008. 639 p. (In Russ.).
- [10] GOST R 50779.27–2017. *Statisticheskie metody. Raspredelenie Veybulla. Analiz dannykh* [Statistical methods. Weibull distribution. Data analysis]. Moscow, Standartinform Publ., 2017. 57 p. (In Russ.).
- [11] Shishmarev V.Yu. *Nadezhnost tekhnicheskikh system* [Reliability of technical systems.]. Moscow, Yurayt Publ., 2018. 306 p. (In Russ.).
- [12] Kogaev V.P., Makhutov N.A., Gusenkov A.P. *Raschety detaley mashin i konstruksiy na prochnost i dolgovechnost* [Strength and durability calculations of machine parts and structures]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1985. 224 p. (In Russ.).
- [13] Lin C., Xia X., Li P. Geometric design and kinematics analysis of coplanar double internal meshing non-circular planetary gear train. *Adv. Mech. Eng.*, 2018, vol. 10, no. 12, doi: <https://doi.org/10.1177/1687814018818910>
- [14] Nabatnikov Yu.F. The accuracy assurance of joint assemblies of machinery by intergroup compatibility technology. *Vestnik mashinostroeniya*, 2012, no. 11, pp. 43–51. (In Russ.).
- [15] Neydorf R.A., Chernogorov I.V., Polyakh V.V. et al. Experimental study on solution possibilities of multiextremal optimization problems through heuristic methods. *Vestnik DGTU* [Vestnik of Don State Technical University], 2015, vol. 15, no. 4, pp. 82–93, doi: <https://doi.org/10.12737/16074> (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 18.12.2025

Информация об авторе

КЛЮЕВ Павел Дмитриевич — аспирант кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: samboevo9@yandex.ru).

Information about the author

KLYUEV Pavel Dmitrievich — Postgraduate, Theory of Machines and Mechanisms Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: samboevo9@yandex.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Клюев П.Д. Методика расчета зубчатого зацепления из композиционных материалов. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2026, № 7, с. 22–31.

Please cite this article in English as:

Klyuev P.D. Calculation methodology for composite material gear meshing. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2026, no. 7, pp. 22–31.