

УДК 62-526

Моделирование управляемого движения систем в методе обобщенной задачи динамического уравнивания

А.С. ГоробцовИнститут машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,
Волгоградский государственный технический университет

Simulation of control motion of systems in the method of the generalized dynamic balancing problem

A.S. GorobtsovBlagonravov Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences,
Volgograd State Technical University

Рассмотрена задача численного моделирования уравнений управляемого движения многомерных нелинейных систем (так называемая прямая задача). Эта задача является одним из основных этапов синтеза управления многомерными робототехническими системами: зооморфными и антропоморфными роботами, манипуляторами и др. Принято, что управление получено с помощью метода обобщенной задачи динамического уравнивания. Найденное таким образом управление разделено на две части: первая — управление, полученное с помощью метода обобщенной задачи динамического уравнивания, вторая — методом обратной задачи. Считалось, что каждой части управления соответствует своя группа приводов. Обе части управления найдены в виде зависимостей воздействий (моментов, сил в механических системах) в приводах. Предложен метод стабилизации управляемого движения путем введения обратной связи в модель программного движения. Определены кинематические параметры движения приводов, используемых в контурах обратных связей по отклонению положений и их производных. Метод применим к системам с избыточными связями и приводами. Рассмотрены численные примеры синтеза управляемого движения систем большой размерности. Метод прошел экспериментальную проверку на опытных образцах робота-андроида и робота-собаки. На существующей вычислительной элементной базе он является методом реального времени для систем с размерностью пространства состояний $10^2 \dots 10^3$.

EDN: JNQGLP, <https://elibrary/jnqglp>

Ключевые слова: управляемое движение, нелинейные системы, избыточные связи, динамическое уравнивание, робот-собака

The paper considers the problem of numerical modeling of the equations of controlled motion of multidimensional nonlinear systems, i.e., the direct problem. This problem is currently one of the key stages in the synthesis of control for multidimensional robotic systems, such as zoomorphic and anthropomorphic robots, manipulators, and others. In this work, it is assumed that the control is obtained using the method of the generalized dynamic balancing problem. The resulting control is divided into two parts. The first part is the control obtained using the method of the generalized dynamic balancing problem. The second part is the control obtained by the inverse problem method. It is assumed that each part of the controls corresponds to its own group of actuators. The controls are represented as dependen-

cies of the effects (moments, forces in mechanical systems) in the actuators. A method is proposed for stabilizing the controlled motion by introducing feedback into the model of the program motion. The kinematic parameters of the motion are also determined. The method is applicable to systems with redundant links and actuators. A number of numerical examples of the synthesis of controlled motion of high-dimensional systems are considered. The method has been experimentally tested on prototypes of an android robot and a dog robot. On the existing computational element base, the method is a real-time method for systems with a state space dimension of 10^2 – 10^3 .

EDN: JNQGLP, <https://elibrary/jnqglp>

Keywords: controlled motion, nonlinear systems, redundant links, dynamic balancing, dog robot

Задача управления многомерными нелинейными системами является актуальной в робототехнике, автомобилестроении и других отраслях промышленности, где методы оптимального управления линейными системами [1] не дают приемлемого решения. Существующие методы синтеза управления нелинейными системами основаны на принципе скольжения, заключающемся в расширении фазового пространства системы и формировании аттракторов к программной траектории [2, 3].

Известные примеры использования этого подхода ограничиваются системами невысокой размерности. В работе [4] рассмотрено решение задач управления для бесконечномерных нелинейных систем определенного класса, однако область их применения ограничена.

Среди методов, ориентированных на численные модели динамики систем, можно выделить два класса методов синтеза управления такими системами — метод обратной задачи и методы машинного обучения. Ограничения применения метода обратной задачи вызваны сложностью обеспечения устойчивости движения объекта в неклассическом смысле. Например, для шагающих роботов условие устойчивости — это поддержание динамического равновесия для исключения падений [5–8]. Особенностью таких систем является наличие избыточных связей и приводов.

Методы машинного обучения обычно построены на обучении с подкреплением [9–16], при котором управляющие воздействия интерполируются рекуррентной нейронной сетью с параметрами, определяемыми в процессе обучения. Для обучения, как правило, решается прямая задача динамики системы. Указанный подход получил широкое распространение. Разрабатывается специализированное программное обеспечение для решения прямой задачи, например Isaac SDK, адаптированное

под аппаратную базу высокопроизводительных вычислений.

Главный недостаток методов машинного обучения в задачах управления, заключается в том, что они относятся к методам Монте-Карло и требуют значительных вычислительных ресурсов.

В работах [13–16] реализовано управление роботом-собакой для некоторых режимов передвижения по плоской и неровной поверхности. В существующих работах-собаках отсутствует анализ робастности такого решения.

Предложенный в публикациях [17–19] метод обобщенной задачи динамического уравнивания, являющийся методом реального времени, позволяет синтезировать управление для широкого круга систем. Эффективность и устойчивость метода можно оценить только при решении прямой задачи.

Цель работы — рассмотреть решение прямой задачи для управления, полученного методом обобщенной задачи динамического уравнивания, на примерах.

Теоретическое описание метода. Многомерные нелинейные управляемые системы широкого класса можно описать с помощью дифференциально-алгебраических уравнений [17]

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}^T \mathbf{p} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(t); \\ \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}), \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{M}$ — матрица коэффициентов инерции; $\mathbf{x}$ — вектор координат системы размера n ; $\mathbf{D}$ — матрица переменных коэффициентов уравнений связей размера $k \times n$ (k — число уравнений связей); $\mathbf{p}$ — вектор множителей Лагранжа; $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$ — вектор внешних воздействий (t — время); $\mathbf{u}(t)$ — вектор управлений, приведенных к координатам системы; $\mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ — вектор правых частей уравнений связей.

Заметим, что для шагающих роботов вектор $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$ включает в себя силы взаимодействия с опорной поверхностью.

Систему (1) получаем из уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(t); \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

применением соотношений для условного экстремума соответствующего функционала.

В выражении (2) $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0$ — уравнения связей размера k .

Управляемое движение системы можно представить как движение с дополнительными связями, задающими перемещение некоторых заданных точек системы по некоторым заданным траекториям $\mathbf{y}(t)$, которые можно найти, например, методами оптимального управления. В этом случае управляющие силы $\mathbf{u}(t)$ в системе (1) можно заменить с помощью дополнительных уравнений связей. Тогда система (1) принимает вид

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}^T \mathbf{p} + \mathbf{D}_y^T \mathbf{p}_y = \mathbf{f}^*(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t); \\ \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}); \\ \mathbf{D}_y \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{y}}(t), \end{cases} \quad (3)$$

где $\mathbf{D}_y$ — матрица переменных коэффициентов, полученная из дополнительных уравнений связей, размера $k_1 \times n$ (k_1 — число дополнительных уравнений связей); $\mathbf{p}_y$ — вектор множителей Лагранжа, соответствующих дополнительным уравнениям связей; $\ddot{\mathbf{y}}(t)$ — вектор ускорений заданных дополнительных точек.

Система уравнений (2) эквивалентна (1), но не содержит неизвестных управляющих воздействий. Интегрируя уравнения (3) можно получить кинематические параметры программного движения — координаты $\mathbf{x}^*$ и их производные.

Предполагаем, что на систему уравнений (1) наложены k_2 связей ($k_2 \leq n - k$), которые исключают степени свободы приводов. Для механических систем такие связи можно ввести блокировкой поворотов шарниров вращения. В этом случае система уравнений (1) с учетом (3) приобретает вид

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_0^T \mathbf{p}_0 = \mathbf{f}^*(\dot{\mathbf{x}}^*, \mathbf{x}^*, t) - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}^* - \mathbf{D}^T \mathbf{p}; \\ \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}}^*, \mathbf{x}^*); \\ \mathbf{D}_0 \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}_0(\dot{\mathbf{x}}^*, \mathbf{x}^*), \end{cases} \quad (4)$$

где $\mathbf{x}^*$, $\dot{\mathbf{x}}^*$ и $\ddot{\mathbf{x}}^*$ — программные значения координат, их первых и вторых производных соот-

ветственно, полученные из системы (3); $\mathbf{D}_0$ — матрица коэффициентов, полученная из уравнений исключаяющих связей, размера $k_2 \times n$; $\mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}}^*, \mathbf{x}^*)$ — вектор правых частей вторых производных исключаяющих связей, $\mathbf{p}_0$ — вектор множителей Лагранжа, соответствующих исключаяющим связям.

Решая (4) как систему линейных алгебраических уравнений с вектором неизвестных

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{p}_0 \end{pmatrix},$$

находим $\mathbf{p}_0$. Сравнивая первое уравнение систем (1) и (4) и учитывая, что в (4) $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = 0$, запишем

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{D}_0^T \mathbf{p}_0. \quad (5)$$

Так как исключаяющие связи соответствуют степеням свободы приводов, уравнение (5) дает выражение для нахождения программных воздействий в приводах. Таким образом, уравнения (1)–(5) позволяют решить задачу синтеза управления многомерной системой по нахождению программных значений управляющих воздействий. Отметим, что система уравнений (4) эквивалентна (3) и соответствует выполнению условия

$$\mathbf{p}_y = 0. \quad (6)$$

Альтернативным методом синтеза управления рассматриваемых систем является метод обобщенной задачи динамического уравнивания [18, 19]. Исходными уравнениями для этого метода служат уравнения типа (1), из которых исключены управляющие функции в явном виде. Управляющие функции находят как множители Лагранжа для некоторых уравнений связей. При численном интегрировании (1) решают систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где индекс «0» указывает на решение системы; $\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Уравнение (7) можно представить как

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_r \\ \mathbf{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{p}_{30} \\ \mathbf{p}_{20} \\ \mathbf{p}_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{w}}(t), \quad (9)$$

где $\mathbf{p}_1$ — подвектор вектора множителей Лагранжа $\mathbf{p}$ размера k_{11} , соответствующий приводам; $\mathbf{p}_2$ — подвектор, размера k_{12} , соответствующий некоторым уравнениям связей $\mathbf{q}_2 = \mathbf{0}$, реакции которых должны быть равны заданным функциям $\mathbf{p}_r(t)$; $\mathbf{p}_3$ — подвектор остальных множителей Лагранжа вектора $\mathbf{p}$;

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{p}_{30} \\ \mathbf{p}_{20} \\ \mathbf{p}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \end{pmatrix}; \quad (10)$$

$\mathbf{A}_i$ — соответствующие подматрицы $\mathbf{A}^{-1}$; $\mathbf{w}(t)$ — вектор неизвестных вспомогательных функций размера k_{12} , которые обеспечивают выполнение вытекающего из выражения (9) соотношения

$$\mathbf{p}_r(t) = \mathbf{p}_{20} + \mathbf{A}_2 \ddot{\mathbf{w}}(t). \quad (11)$$

Из соотношения (11) находим вектор

$$\ddot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{A}_2^{-1} (\mathbf{p}_r(t) - \mathbf{p}_{20}). \quad (12)$$

Зная вектор (12), получаем программные воздействия в приводах

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_{10} + \mathbf{A}_1 \ddot{\mathbf{w}}(t). \quad (13)$$

Уравнения (9) с учетом выражения (12) задают управляемое движение системы (1) при условии выполнения критерия

$$I = \int_0^T R(\mathbf{p}_r(t)) dt, \quad (14)$$

где R — положительно определенная скалярная функция.

В простейшем случае, когда $\mathbf{p}_r(t) = \mathbf{0}$, критерий $I = 0$, что эквивалентно выполнению критерия

$$J = \int_0^T \sum_{i=1}^{k_{12}} q_{2i}(x) dt = 0, \quad (15)$$

где $q_{2i}(x)$ — левая часть соответствующих однородных уравнений связей в системе (2).

Справедливо утверждение, что функции (13) являются оптимальным управлением для (1) в смысле критерия (15). Аналогичное утвержде-

ние справедливо и для функций $\mathbf{p}_y$, обеспечивающих выполнение критерия

$$J = \int_0^T \sum_{i=1}^{k_1} q_{yi}(x) dt = 0.$$

Очевидно, что существуют критерии вида (14) для случаев $\mathbf{p}_r(t) \neq \mathbf{0}$.

Приведенные два способа нахождения управлений на основе уравнений (4) или (9) имеют преимущества и недостатки. Можно выписать уравнения для нахождения управлений и для смешанного способа. В этом случае управления типа (13) также находят на основе уравнений (10), а управления типа (5) из уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_3^T \mathbf{p}_3 + \mathbf{D}_0^T \mathbf{p}_0 = \mathbf{f}^*(\dot{\mathbf{x}}^*, \mathbf{x}^*, t) - \\ - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}^* - \mathbf{D}_1^T \mathbf{p}_1 - \mathbf{D}_2^T \mathbf{p}_r; \\ \mathbf{D}_3 \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}_3(\dot{\mathbf{x}}^*, \mathbf{x}^*); \\ \mathbf{D}_0 \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}_0(\dot{\mathbf{x}}^*, \mathbf{x}^*). \end{cases} \quad (16)$$

Индексы «1», «2», «3» в системе (16) аналогичны индексам уравнений (9).

С учетом параметров $\mathbf{w}(t)$ и $\mathbf{p}_0$, полученных по выражениям (12) и (5) соответственно, уравнения прямой задачи управляемого движения (1) принимают вид

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_1^T \mathbf{p}_1 + \mathbf{D}_2^T \mathbf{p}_2 + \mathbf{D}_3^T \mathbf{p}_3 = \\ = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) - \mathbf{D}_0^T \mathbf{p}_0 + \mathbf{A}_4 \mathbf{w}(t); \\ \mathbf{D}_3 \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}_3(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) + \mathbf{A}_3 \mathbf{w}(t); \\ \mathbf{D}_2 \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}_2(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) + \mathbf{A}_2 \mathbf{w}(t); \\ \mathbf{D}_1 \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}_1(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) + \mathbf{A}_1 \mathbf{w}(t). \end{cases} \quad (17)$$

Уравнения (17) описывают управляемое движение системы под действием управляющих воздействий. Реализуется движение системы с учетом условий, задаваемых функциями $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{w}(t)$. Линеаризованная система возмущенного движения для системы (17) может иметь нулевые корни характеристического уравнения, и, следовательно, быть неустойчивой.

Рассмотрим вопрос устойчивости управляемого движения. Управление типа (5) можно стабилизировать стандартными методами введения обратных связей по отклонениям

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{D}_0^T \mathbf{p}_0 + \mathbf{c}\delta + \mathbf{d}\dot{\delta}, \quad (18)$$

где δ — вектор ошибки в приводах по положению; $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ — матрицы коэффициентов обратных связей по отклонению положения и скорости движения.

Ошибки в приводах находят как разность положений приводов в управляемом и программном движениях, полученных из уравнений (17) и (3) соответственно. Управление типа (13) можно стабилизировать приложением воздействий по направлениям, определяемым связями $q_{2i}(x)$. Исходные уравнения для (9) принимают вид

$$\begin{cases} M\ddot{x} + D_1^T p_1 + D_2^T p_2 + D_3^T p_3 = f(\dot{x}, x, t) - \\ - D_0^T p_0 + A_4 w(t) + f_1(\dot{x}, x); \\ D_3 \ddot{x} = h_3(\dot{x}, x) + A_3 w(t); \\ D_2 \ddot{x} = h_2(\dot{x}, x) + A_2 w(t); \\ D_1 \ddot{x} = h_1(\dot{x}, x) + A_1 w(t). \end{cases} \quad (19)$$

По аналогии с (18) в правые части первого уравнения добавляем выражение

$$f_1(\dot{x}, x) = D_2^T (c(q_2(x^*) - q_2(x)) + d(\dot{q}_2(x^*) - \dot{q}_2(x))), \quad (20)$$

где знак «*» помечает координаты, полученные из уравнения (17).

Выражение (20), как и (18), задает обратные связи, только действующие на систему не в управляемом движении, а в уравнениях программного движения для определения управлений $w(t)$. Последние находят из выражений (12) с учетом системы (19).

Предложенный подход к синтезу управления многомерными нелинейными системами теоретически применим к широкому классу задач. Для существования решения (7) матрица A должна быть невырожденной. Кроме того, должна быть не вырождена матрица A_2 , которая может быть прямоугольной при $k_{12} > k_{11}$ (случай избыточных приводов) [19].

Примеры использования метода. Для реализации предложенного метода использован программный комплекс моделирования динамики связанных тел ФРУНД [20]. В программном комплексе реализованы также методы регуляризации [21], необходимые для решения задач с вырожденной матрицей A .

На рис. 1 показана расчетная схема робота-собаки [22]. Для исходного варианта (отсутствует хвост) модель содержит тринадцать тел и двенадцать приводов: $n = 78$, $k = 60$, $k_2 = 12$. Задавались траектории корпуса робота-собаки по шести координатам и точки каждой стопы по трем координатам — функция $y(t)$ ($k_1 = 18$). Синтезировалось управление для частоты шагания 3 Гц походкой с попарной перестанов-

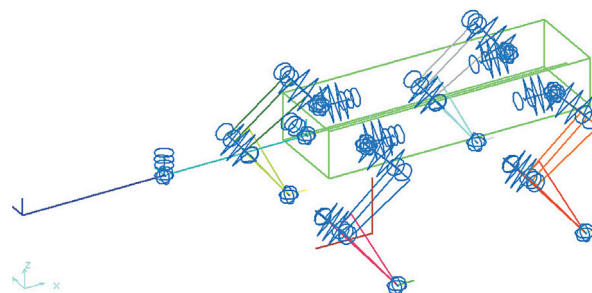


Рис. 1. Расчетная схема робота-собаки

кой диагонально расположенных стоп, что характерно для существующих образцов роботов-собак [14–16]. Управление находилось с помощью уравнений (4) и (5) в форме (18). Для анализа качества управления решалась прямая задача (1). Контакт стопы с опорной поверхностью в прямой задаче принимался упруго-вязким.

Анализ результатов расчета показал удовлетворительное качество управления с выбранными параметрами походки. Отмечен высокий уровень колебаний корпуса робота-собаки по всем направлениям, особенно по скоростям движения и ускорениям, что было подтверждено на опытном образце [22].

Для шагающих роботов актуальной являются походка с невысокой частотой шагания. Выполнен анализ управления при сниженной до 0,5 Гц частоты шагания. Управление находилось с помощью уравнений (4) и (5) в форме (18). В этом случае в управляемом движении робота-собаки присутствуют значительные угловые колебания, его движение носит стохастический характер (рис. 2).

Для стабилизации движения робота в расчетную схему введены два дополнительных тела аналогичные хвосту животного (см. рис. 1), которые придают роботу три дополнительные степени свободы. Считая степени свободы хвоста управляемыми по (13) и приравнявая к нулю реакции в трех связях, задающих программ-

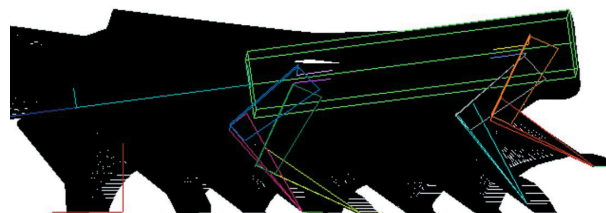


Рис. 2. Анимационная модель управляемого движения робота-собаки с частотой шагания 0,5 Гц без стабилизации хвостом

ные углы поворота корпуса (11), получено управление приводами хвоста и ног согласно (13) и (5).

При управлении со стабилизацией хвостом угловые колебания корпуса резко уменьшились. Использование управления дополнительными звеньями по (13) снижает угловые колебания в управляемом движении на 2–3 порядка. Расчеты управляемого движения для стабилизации хвостом выполнены для завышенных моментов инерции звеньев хвоста, однако это приемлемо для проверки эффективности метода на основе управления типа (13).

Проведены расчеты управляемого движения для задачи изменения ориентации системы в безопорном состоянии — переворот «кошки» вниз ногами (рис. 3). Модель робота-собаки дополнялась удлиненным хвостом из пятнадцати звеньев с чередованием четырнадцати цилиндрических шарниров по трем направлениям. Последние считались приводными в соотношении (13), а в выражении (11) учитывались два уравнения связей, задающие поворот относительно поперечной и продольной осей.

На рис. 3 показаны фазы поворота корпуса робота, полученные из решения системы (9). Параметры модели: $n = 168$, $k = 144$, $k_{11} = 14$, $k_{12} = 2$. Приводы ног были заблокированы. Модель обладает двенадцатью избыточными приводами. Система (12) решена методом условного экстремума с единичными весовыми коэффициентами [21]. Расчеты показали принципиальную возможность нахождения управлений для безопорных систем с избыточными

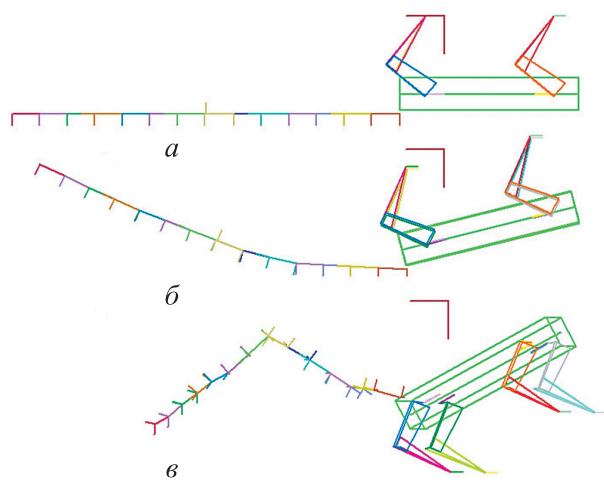


Рис. 3. Схемы переворота «кошки» в безопорном полете:
а — исходное положение; б — поворот корпуса относительно поперечной оси; в — поворот корпуса относительно продольной оси

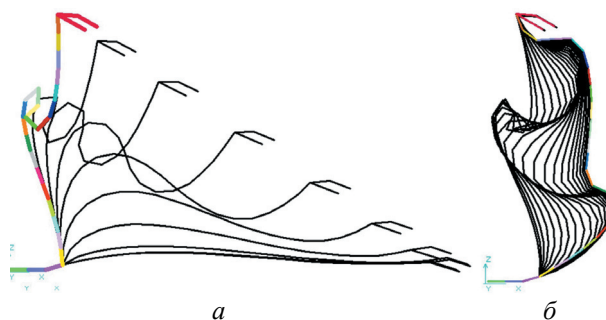


Рис. 4. Кинограммы управляемого движения цепной системы:

а — движение при перемещении последнего звена в заданное положение;
б — дрейф внутренних звеньев системы после достижения заданного положения

приводами путем изменения взаимного положения звеньев.

Еще одна тестовая многомерная система с избыточными приводами — цепь из двадцати пяти одинаковых подвижных звеньев, связанных цилиндрическими шарнирами. Параметры модели: $n = 150$, $k = 120$, $k_{11} = 22$, $k_{12} = 3$. Полная длина системы — 1 м. Смоделировано управляемое движение системы из начального горизонтального положения в заданное конечное. Конечное положение — смещение точек последнего правого звена (головы) на 0,89 м назад и 0,6 м вверх за 1 с. Решение получено с помощью уравнений (9)–(13). Три последних левых звена приняты неподвижными. Решение уравнения (12) выполнено методом условного экстремума [21] с весовыми коэффициентами, равными квадратам угловых скоростей в шарнирах.

На рис. 4, а показана кинограмма движения системы в конечное положение, которое напоминает движение змеи. В такой системе с большим количеством избыточных приводов в конечном положении скорости движения точек системы, кроме точек головы, не достигают нулевых значений, вследствие чего наблюдается значительный дрейф звеньев (рис. 4, б). Управление дрейфом осуществимо с помощью системы (19) и уравнения (20).

Рассмотрена цепная система, моделирующая железнодорожный состав, движущийся по криволинейному в плане пути. Модель содержала семь тел, связанных цилиндрическими шарнирами с вертикальной осью. В двух точках каждого тела в поперечном направлении задавалась кинематическая связь с линией, описывающей криволинейность пути в горизонтальной плоскости. Ставилась задача: за счет управления

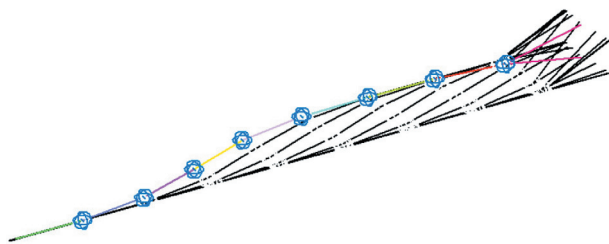


Рис. 5. Кинограмма движения модели поезда с огибанием криволинейности пути

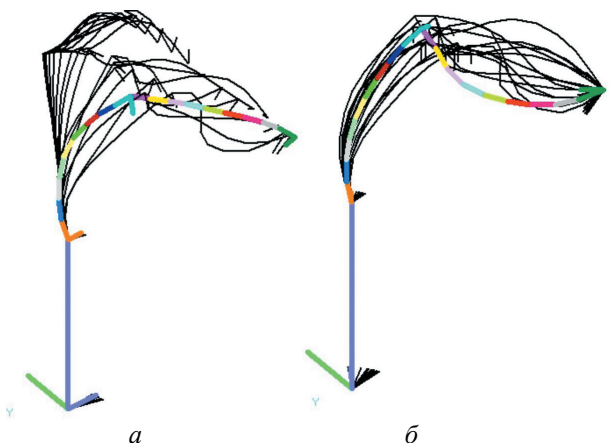


Рис. 6. Кинограммы движения упругого манипулятора:

a — из начальной точки в конечную;
б — колебания звеньев манипулятора после достижения конечной точки

моментом в сцепках вагонов обнулить реакции в поперечных кинематических связях, т. е. исключить боковую реакцию в контактах колесных пар с рельсами. Параметры модели: $n = 42$, $k = 28$, $k_{11} = 8$, $k_{12} = 8$. Задача решена на основе выражений (9)–(13). На рис. 5 показана кинограмма движения модели поезда с огибанием криволинейности пути под действием управляющих моментов в сцепках вагонов.

Рассмотрена неклассическая задача управления манипулятором с упругими звеньями. Исследован трехзвенный манипулятор, два звена которого обладают существенной податливостью (рис. 6, *a* и *б*).

Упругие звенья моделировались пространственными балками из девяти дискретных элементов с учетом геометрической нелинейности. Дискретные элементы связывались между собой сферическими шарнирами и трехмерными упругими элементами по угловым направлениям. Жесткость упругих элементов обеспечивала частоту низшей упругой формы колебаний балки около 3 Гц. Параметры модели: $n = 114$, $k = 71$, $k_{11} = 3$, $k_{12} = 3$.

Расчет выполнен с использованием выражений (9)–(13). Рассматривалось движение концевой точки по прямолинейной траектории со смещением в вертикальном и боковом направлениях на 0,5 м за 1,6 с. Длины всех трех звеньев равнялись 0,5 м. Расчетный анализ показал удовлетворительную точность следования концевой точки по программной траектории — 1...2 мм. После достижения конечной точки колебания упругих звеньев продолжались при неподвижной концевой точке (см. рис. 6, *б*).

Другие примеры можно найти в работах [18, 19]. Рассмотренные примеры имели вырожденную матрицу, для решения которой применены методы регуляризации [21]. Методы (5) и (13) использованы для синтеза управления на опытных образцах робота-собаки [22] и робота-андроида [23].

Выводы

1. Предложен метод, позволяющий решать задачу синтеза управления для многомерных нелинейных систем, ориентированных на численное решение. Это совпадает с современным подходом к решению актуальных задач управления, где широко используются численные модели объектов управления большой размерности. К таким подходам относят методы машинного обучения, в основе которых лежат математические вариационные методы на базисных функциях, воспроизводящих характеристики элементов нервной системы биологических систем. Недостатком таких подходов является высокая размерность пространства параметров, что в задачах управления ведет к значительному потреблению вычислительных ресурсов. Это также ограничивает размерность математических моделей управляемых систем, структуру которых максимально упрощают.

2. Предлагаемый метод теоретически обладает существенно меньшей размерностью пространства параметров, которая определяется числом избыточных приводов в системе. При отсутствии избыточных приводов метод дает однозначное решение, которое не является оптимальным, однако позволяет решать задачу оптимизации путем изменения структуры системы. По степени вычислительной сложности он является методом реального времени.

3. С точки зрения классической теории автоматического управления, предлагаемый метод реализует управление по силам. Показано,

что устойчивость достигается модификацией программного движения за счет динамического воздействия.

4. Реализованные в программном комплексе ФРУНД методы синтеза управления и расчет-

ного анализа управляемого движения позволяют считать метод перспективным для создания систем управления объектами широкого класса, например экзоскелетов и биопротезов.

Литература

- [1] Квакернаак Х., Сиван Р.М. *Линейные оптимальные системы управления*. Москва, Наука, 1977. 650 с.
- [2] Колесников А.А. *Основы теории синергетического управления*. Москва, Испо-Сервис, 2000. 264 с.
- [3] Александров А.Г. *Синтез регуляторов многомерных систем*. Москва, Машиностроение, 1986. 272 с.
- [4] Горобцов А.С., Рыжов Е.Н. *Задачи нелинейной стабилизации и аналитический синтез режимов движения многомерных динамических систем*. Волгоград, ВолгГТУ, 2008. 176 с.
- [5] Kim J.Y., Kim J.H. Error analysis and effective adjustment of the walking-ready posture for a biped humanoid robot. *Adv. Robot.*, 2010, vol. 24, no. 15, pp. 2137–2169, doi: <https://doi.org/10.1163/016918610X534295>
- [6] Pinto C.M.A., Machado J.A.T. Fractional central pattern generators for bipedal locomotion. *Nonlinear Dyn.*, 2010, vol. 62, no. 1-2, pp. 27–37, doi: <https://doi.org/10.1007/s11071-010-9696-4>
- [7] De Santis A., Di Gironimo G., Pelliccia L. et al. Biomechanically-based motion control for a digital human. *Int. J. Interact. Des. Manuf.*, 2012, vol. 6, no. 1, p. 15, doi: <https://doi.org/10.1007/s12008-012-0139-y>
- [8] Engelsberger J., Werner A., Ott C. et al. Overview of the torque-controlled humanoid robot TORO. *Proc. IEEE-RAS Int. Conf. on Humanoid Robots*, 2014, pp. 916–923, doi: <https://doi.org/10.1109/HUMANOIDS.2014.7041473>
- [9] Haarnoja T., Ha S., Zhou A. et al. Learning to walk via deep reinforcement learning. *arXiv:1812.11103*, doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1812.11103>
- [10] Siekmann J., Godse Y., Fern A. et al. Sim-to-real learning of all common bipedal gaits via periodic reward composition. *IEEE ICRA*, 2021, pp. 7309–7315, doi: <https://doi.org/10.1109/ICRA48506.2021.9561814>
- [11] Surana S., Lim B., Cully A. Efficient learning of locomotion skills through the discovery of diverse environmental trajectory generator priors. *arXiv:2210.04819*, doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2210.04819>
- [12] Bledt M.J., Powell B., Katz J. et al. Mit cheetah 3: design and control of a robust, dynamic quadruped robot. *IEEE/RSJ IROS*, 2018, pp. 2245–2252, doi: <https://doi.org/10.1109/IROS.2018.8593885>
- [13] Katz B., Di Carlo J., Kim S. Mini cheetah: a platform for pushing the limits of dynamic quadruped control. *IEEE ICRA*, 2019, pp. 6295–6301, doi: <https://doi.org/10.1109/ICRA.2019.8793865>
- [14] Gehring C., Fankhauser P., Isler L. et al. ANYmal in the field: solving industrial inspection of an offshore HVDC platform with a quadrupedal robot. In: *Field and service robotics*. Springer, 2021, pp. 247–260, doi: https://doi.org/10.1007/978-981-15-9460-1_18
- [15] Hwangbo J., Lee J., Dosovitskiy A. et al. Learning agile and dynamic motor skills for legged robots. *Sci. Robot.*, 2019, vol. 4, no. 26, art. eaau5872, doi: <https://doi.org/10.1126/scirobotics.aau5872>
- [16] Lee J., Hwangbo J., Wellhausen L. et al. Learning quadrupedal locomotion over challenging terrain. *Sci. Robot.*, 2020, vol. 5, no. 47, art. eabc5986, doi: <https://doi.org/10.1126/scirobotics.abc5986>
- [17] Горобцов А.С. Синтез параметров управляемого движения многозвенных механических систем произвольной структуры методом обратной задачи. *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2004, № 6, с. 43–50.
- [18] Gorobtsov A., Sychev O., Orlova Yu. et al. Optimal greedy control in reinforcement learning. *Sensors*, 2022, vol. 22, no. 22, art. 8920, doi: <https://doi.org/10.3390/s22228920>

- [19] Горобцов А.С. Обобщенная задача динамического уравнивания и перспективные направления ее применения. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 3, с. 14–24, doi: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2023-3-14-24>
- [20] Горобцов А.С., Карцов С.К., Плетнев А.Е. и др. *Компьютерные методы построения и исследования математических моделей динамики конструкций автомобилей*. Москва, Машиностроение, 2011. 462 с.
- [21] Горобцов А.С. The methods of the transform of multibody systems with redundant constraints. *EUROMECH Colloquium 495*. Брянск, БГТУ, 2008, с. 36.
- [22] Буданов В.М., Данилов В.А., Капытов Д.В. и др. Малогабаритный четырехногий шагающий робот на базе бесколлекторных моторов. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2025, № 3, с. 153–177.
- [23] Горобцов А.С. Особенности решения уравнений метода обратной задачи для синтеза устойчивого управляемого движения шагающих роботов. *Труды СПИИРАН*, 2019, т. 18, № 1, с. 85–122, doi: <https://doi.org/10.15622/sp.18.1.85-122>

References

- [1] Kwakernaak H., Sivan R. *Linear optimal control systems*. Wiley, 1972. 575 p. (Russ. ed.: *Lineynye optimalnye sistemy upravleniya*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 650 p.).
- [2] Kolesnikov A.A. *Osnovy teorii sinergeticheskogo upravleniya* [Fundamentals of synergetic control theory]. Moscow, Ispo-Servis Publ., 2000. 264 p. (In Russ.).
- [3] Aleksandrov A.G. *Sintez regulyatorov mnogomernykh system* [Synthesis of controllers for multidimensional systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986. 272 p. (In Russ.).
- [4] Gorobtsov A.S., Ryzhov E.N. *Zadachi nelineynoy stabilizatsii i analiticheskii sintez rezhimov dvizheniya mnogomernykh dinamicheskikh system* [Problems of nonlinear stabilization and analytical synthesis of motion regimes for multidimensional dynamic systems]. Volgograd, VolGTU Publ., 2008. 176 p. (In Russ.).
- [5] Kim J.Y., Kim J.H. Error analysis and effective adjustment of the walking-ready posture for a biped humanoid robot. *Adv. Robot.*, 2010, vol. 24, no. 15, pp. 2137–2169, doi: <https://doi.org/10.1163/016918610X534295>
- [6] Pinto C.M.A., Machado J.A.T. Fractional central pattern generators for bipedal locomotion. *Nonlinear Dyn.*, 2010, vol. 62, no. 1–2, pp. 27–37, doi: <https://doi.org/10.1007/s11071-010-9696-4>
- [7] De Santis A., Di Gironimo G., Pelliccia L. et al. Biomechanically-based motion control for a digital human. *Int. J. Interact. Des. Manuf.*, 2012, vol. 6, no. 1, p. 15, doi: <https://doi.org/10.1007/s12008-012-0139-y>
- [8] Engelsberger J., Werner A., Ott C. et al. Overview of the torque-controlled humanoid robot TORO. *Proc. IEEE-RAS Int. Conf. on Humanoid Robots*, 2014, pp. 916–923, doi: <https://doi.org/10.1109/HUMANOIDS.2014.7041473>
- [9] Haarnoja T., Ha S., Zhou A. et al. Learning to walk via deep reinforcement learning. *arXiv:1812.11103*, doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1812.11103>
- [10] Siekmann J., Godse Y., Fern A. et al. Sim-to-real learning of all common bipedal gaits via periodic reward composition. *IEEE ICRA*, 2021, pp. 7309–7315, doi: <https://doi.org/10.1109/ICRA48506.2021.9561814>
- [11] Surana S., Lim B., Cully A. Efficient learning of locomotion skills through the discovery of diverse environmental trajectory generator priors. *arXiv:2210.04819*, doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2210.04819>
- [12] Bledt M.J., Powell B., Katz J. et al. Mit cheetah 3: design and control of a robust, dynamic quadruped robot. *IEEE/RSJ IROS*, 2018, pp. 2245–2252, doi: <https://doi.org/10.1109/IROS.2018.8593885>
- [13] Katz B., Di Carlo J., Kim S. Mini cheetah: a platform for pushing the limits of dynamic quadruped control. *IEEE ICRA*, 2019, pp. 6295–6301, doi: <https://doi.org/10.1109/ICRA.2019.8793865>
- [14] Gehring C., Fankhauser P., Isler L. et al. ANYmal in the field: solving industrial inspection of an offshore HVDC platform with a quadrupedal robot. In: *Field and service robotics*. Springer, 2021, pp. 247–260, doi: https://doi.org/10.1007/978-981-15-9460-1_18

- [15] Hwangbo J., Lee J., Dosovitskiy A. et al. Learning agile and dynamic motor skills for legged robots. *Sci. Robot.*, 2019, vol. 4, no. 26, art. eaau5872, doi: <https://doi.org/10.1126/scirobotics.aau5872>
- [16] Lee J., Hwangbo J., Wellhausen L. et al. Learning quadrupedal locomotion over challenging terrain. *Sci. Robot.*, 2020, vol. 5, no. 47, art. eabc5986, doi: <https://doi.org/10.1126/scirobotics.abc5986>
- [17] Gorobtsov A.S. Synthesis of parameters of controlled motion of multi-link mechanical systems of arbitrary structure by the inverse problem method. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control], 2004, no. 6, pp. 43–50.
- [18] Gorobtsov A., Sychev O., Orlova Yu. et al. Optimal greedy control in reinforcement learning. *Sensors*, 2022, vol. 22, no. 22, art. 8920, doi: <https://doi.org/10.3390/s22228920> (in Russ.).
- [19] Gorobtsov A.S. Dynamic balance generalized problem and the promising areas of its application. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2023, no. 3, pp. 14–24, doi: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2023-3-14-24> (in Russ.).
- [20] Gorobtsov A.S., Kartsov S.K., Pletnev A.E. et al. *Kompyuternye metody postroeniya i issledovaniya matematicheskikh modeley dinamiki konstruktiv avtomobiley* [Computer methods for constructing and studying mathematical models of vehicle design dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2011. 462 p. (In Russ.).
- [21] Gorobtsov A.S. The methods of the transform of multibody systems with redundant constraints. *EUROMECH Colloquium 495*. Bryansk, BG TU Publ., 2008, pp. 36. (In Russ.).
- [22] Budanov V.M., Danilov V.A., Kapytov D.V. et al. MORS: BLDC based small sized quadruped robot. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* [Journal of Computer and System Sciences International], 2025, no. 3, pp. 153–177. (In Russ.).
- [23] Gorobtsov A.S. Features of solving the inverse dynamic method equations for the synthesis of stable walking robots controlled motion. *Trudy SPIIRAN* [SPIIRAS Proceedings], 2019, vol. 18, no. 1, pp. 85–122, doi: <https://doi.org/10.15622/sp.18.1.85-122> (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 23.10.2025

Информация об авторе

ГОРОБЦОВ Александр Сергеевич — доктор технических наук, главный научный сотрудник отдела «Механика машин и управление машинами». Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (101000, Москва, Малый Харитоньевский пер., дом 4, e-mail: info@imash.ru); заведующий кафедрой «Высшая математика». Волгоградский государственный технический университет (400005, Волгоград, Российская Федерация, пр-т им. В.И. Ленина, д. 28, e-mail: vm@vstu.ru).

Information about the author

GOROBTSOV Aleksander Sergeevich — Doctor of Science (Eng.), Chief Researcher. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101000, Moscow, Russian Federation, Malyy Kharitonievskiy Pereulok, Bldg. 4, e-mail: info@imash.ru); Head of Further Mathematics Department. Volgograd State Technical University (400005, Volgograd, Russian Federation, Lenin Ave., Bldg. 28, e-mail: vm@vstu.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Горобцов А.С. Моделирование управляемого движения систем в методе обобщенной задачи динамического уравнивания. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2026, № 7, с. 32–41.

Please cite this article in English as:

Gorobtsov A.S. Simulation of control motion of systems in the method of the generalized dynamic balancing problem. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2026, no. 7, pp. 32–41.