

УДК 621.7.011

Упругопластическая деформация при изгибе заготовок

Васильев Михаил Геннадьевич

Заикин Ярослав Игоревич

yrik20021@mail.ru

ТвГТУ, Тверь, Россия

Аннотация. Изложена методика расчета и определены зависимости напряжения от деформации, выявлены границы между упругой и пластическими зонами. Используются экспоненциальные функции, удовлетворяющие постулату аддитивности для малых величин деформации. Для заготовки прямоугольного сечения использована безразмерная характеристика кривизны и безразмерный параметр, характеризующий нагрузку. Определены значения параметров потери несущей способности для идеально пластического материала без упрочнения. Для случая нагружения балки на двух опорах определен изгибающий момент в виде функции, разлагаемой в ряд Тейлора и определена максимальная кривизна балки, что позволило использовать одни формулы во всем диапазоне упругопластической деформации. Сравнительный анализ расхождения теоретических и экспериментальных исследований энергосиловых параметров не превышает 8 %. Разработанная методика расчета деформации заготовок для процессов упругопластической деформации применима при проектировании машин для вальцовки или правки заготовок.

Ключевые слова: деформация, изгиб, кривизна, нейтральная линия, экспоненциальные функции

Elastic - plastic deformation during bending of workpieces

Vasilyev Mikhail Gennadievich

Zaikin Yaroslav Igorevich

yrik20021@mail.ru

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The calculation method is described and the stress-strain dependences are determined, the boundaries between the elastic and plastic zones are revealed. Exponential functions are used, which satisfy the postulate of additivity for small values of deformation. For a rectangular cross-section, a dimensionless curvature characteristic and a dimensionless parameter characterizing the load are used. The values of the parameters for the loss of load-bearing capacity for an ideally plastic material without hardening are determined. For the case of a beam loaded on two supports, the bending moment is determined as a function that can be expanded in a Taylor series, and the maximum curvature of the beam is determined, which allows the use of the same formulas throughout the range of elastic-plastic deformation. A comparative analysis of the discrepancy between the theoretical and experimental results is performed.

Keywords: deformation, bending, curvature, neutral line, exponential functions

Введение. Сложность расчетов при упругопластической деформации определяется тем, что необходимо использовать различные зависимости напряжения σ от деформации ε в областях упругой и пластической деформаций. В области упругой деформации используют закон Гука, а при пластической деформации нелинейные функции $\sigma(\varepsilon)$, а в простейшем случае, для идеально-пластической среды условие $\sigma = \sigma_T = \text{const}$, где σ_T — предел текучести. При этом приходится определять форму границы между упругой и пластической зонами.

Материалы и методы исследований. В работах В. Прагера и Р. Хилла предлагалось использовать единую функцию, применимую, как приближенную, во всем диапазоне деформаций.

Предложена функция

$$\sigma = \sigma_T \operatorname{th} \left(\frac{E\varepsilon}{\sigma_T} \right), \quad (1)$$

где E — модуль упругости; th — гиперболический тангенс.

Функция (1) при малых величинах ε приближается к линейной функции $\sigma = E\varepsilon$, а при увеличении ε стремится к величине σ_T , (при $\varepsilon = \frac{4\sigma_T}{E}$ функция $\sigma(\varepsilon)$ равна $0,999\sigma_T$ и не значительно отличается от σ_T).

Упростить расчеты возможно при использовании экспоненциальной функции, удовлетворяющей постулату аддитивности [1–3]:

$$\sigma(\varepsilon) = \sum_{a_i}^n \frac{b_i}{a_i} [1 - \exp(-a_i \varepsilon)], \quad (2)$$

где a_i , b_i — коэффициенты, определяемые на основании экспериментальных данных [4–6].

Если ограничиться одним членом ряда, то вместо (2) получим

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_T \left[1 - \exp \left(-\frac{E}{\sigma_T} \varepsilon \right) \right], \quad (3)$$

т. е. $a_1 = -\frac{E}{\sigma_T}$; $b_1 = E$.

Если изгибающий момент определен в виде функции $M(x)$, а также используется гипотеза плоских сечений и деформация, как обычно при изгибе, равна $\varepsilon = Ky$, где K — кривизна нейтральной линии [3, 5], то получаем уравнение

$$M(x) = 2 \int_0^{0,5h} y b \sigma dy, \quad (4)$$

где для заготовок симметричного сечения: $b(y)$ — ее ширина, h — максимальная толщина.

Например, для заготовки прямоугольного сечения $b \times h$, ограничившись двумя членами ряда (2), получим

$$M(x) = \frac{\sigma_T b h^2}{4} - \frac{2b}{K^2} \left(\frac{b_1}{a_1^3} + \frac{b_2}{a_2^3} \right) + \frac{bh}{K} \left[\frac{b_1}{a_1^2} \left(1 + \frac{2}{a_1 K h} \right) \exp(-0,5 a_1 K h) + \frac{b_2}{a_2^2} \left(1 + \frac{2}{a_2 K h} \right) \exp(-0,5 a_2 K h) \right].$$

Если использовать один член ряда и зависимость (3), то удобно ввести безразмерную характеристику кривизны $\varphi = \frac{Kl}{a}$, где $a = \frac{\sigma_T l}{Eh}$, l — длина деформируемой заготовки. В этом случае из (4) получаем

$$\frac{4M(x)}{\sigma_T b h^2} = 1 - \frac{8}{\varphi^2} + \frac{4}{\varphi} \left(1 + \frac{2}{\varphi} \right) \exp(-0,5\varphi). \quad (5)$$

Например, для заготовки на двух опорах, подвергаемой изгибу усилием P , приложенным в центре ее длины, $M(x) = 0,5Px$ и вместо (5) получим

$$2m \frac{x}{l} = f(\varphi), \quad (6)$$

где $m = \frac{Pl}{\sigma_T b h^2}$ — безразмерный параметр, характеризующий нагрузку. (Обычно при $m \leq \frac{2}{3}$ имеет место только упругая деформация, а предельная величина $m = 1,0$ соответствует потере несущей способности для идеально пластического материала без упрочнения).

Если разложить в (5) экспоненциальную функцию в ряд Тейлора, то получим

$$2m \frac{x}{l} = \frac{\varphi}{3} - \frac{\varphi^2}{16} + (2 + \varphi) \sum_{i=5}^n \frac{(-1)^i \varphi^{i-2}}{i! 2^{i-2}},$$

а при малых « φ » ограничившись первым членом $\frac{\varphi}{3}$, получим

$$\varphi = 6m \frac{x}{l},$$

формулу, следующую из закона Гука. Сохранив два члена ряда, можно получить зависимость

$$\varphi = 2,67 \left(1 - \sqrt{1 - 4,5m \frac{x}{l}} \right),$$

(из (5) следует, что при $\frac{4M(x)}{\sigma_T b h^2} \rightarrow 1$, $\varphi \rightarrow \infty$).

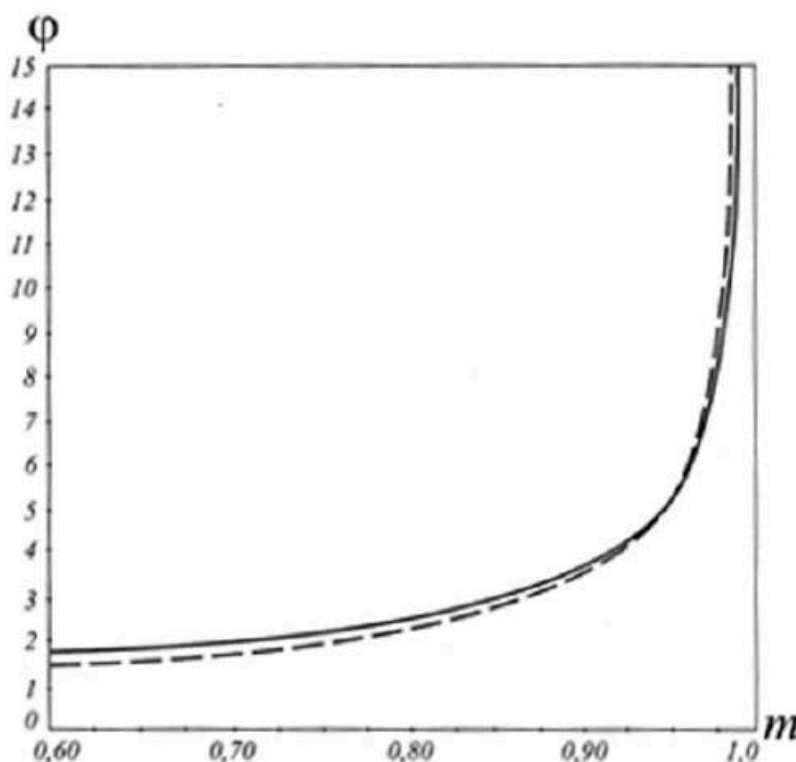
Обсуждение полученных результатов. Приняв $K \approx \frac{d^2 V}{dx^2}$, где $V(x)$ — прогиб, можно определить его интегрированием. При этом не нужно проводить расчеты для упругой и упругопластической зон, находить их границы. Формулы типа (5), (6) применимы только при нагрузке [7]. Удовлетворительное приближение к функции $\varphi(m)$, описывающей максимальную кривизну при $x = 0,5l$ для балки на двух опорах дает функция

$$\varphi = \frac{2,1\sqrt{m}}{\sqrt{3(1-m)}}, \quad (7)$$

точное решение в области пластических деформаций дает в этом случае функция

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{3(1-m)}}. \quad (8)$$

Для сравнения на рисунке приведены графики $\varphi(m)$ согласно формуле (8) — сплошная линия, и согласно формуле (7) — штриховая линия. Видно, что они в диапазоне 0,5–0,999 близки (расхождения не превышают 8 %).



Графики функция $\varphi(m)$

Поэтому можно с точностью, достаточной для практических расчетов, определять кривизну для изгиба одной силой по формуле

$$\varphi = \frac{Kl}{a} = \frac{d^2V}{dx^2} \frac{l}{a} = \frac{2,1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2mx}{l}} \left(1 - 2m \frac{x}{l}\right)^{-0,5}$$

или

$$\varphi = 1,715 \sqrt{\frac{mx}{l}} \left(1 - 2m \frac{x}{l}\right)^{-0,5}.$$

Заключение. При расчетах деформации упругопластического изгиба заготовок в ряде случаев для определения зависимости кривизны от изгибаю-

щего момента возможно использование одной функции для зоны упругой и пластической деформации.

Список источников

- [1] Бровман Т.В. Усилия при локальной деформации полых заготовок. *Технология металлов*, 2015, № 6, с. 9–13.
- [2] Yusupov V.S. Forming of curvilinear metal billets. FNM 2018 IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series, 2018, vol. 1134, art. no. 012008.
- [3] Бровман Т.В. Расчет усилий при локальной деформации труб. *Механическое оборудование металлургических заводов*, 2019, № 2 (13), с. 49–53.
- [4] Бровман Т.В. Определение влияния анизотропии на усилие деформации. *Прокатное производство. Приложение к журналу «Технология металлов»*, 2024, № 21, с. 14–20.
- [5] Шинкин В.Н. *Сопротивление материалов. Простые и сложные виды деформаций в металлургии*. Москва, Издательский дом МИСиС, 2008, 307 с.
- [6] Бровман Т.В. Получение точных деталей в нестационарных процессах деформации изгиба. *Физика и химия обработки материалов*, 2020, № 2, с. 80–84.
- [7] Иванников А.Ю., Юсупов В.С. Новые достижения в области порошковой металлургии высокоэнтропийных сплавов для высокотемпературных приложений. Краткий обзор. *Известия высших учебных заведений. Черная металлургия*, 2024, т. 67, № 5, с. 509–519.