

УДК 621.396.969

Некоторые методы определения коэффициентов авторегрессионного процесса

© С.Ю. Красавин

АО «НПО дальней радиолокации имени академика А.Л. Минца»

Рассмотрены методы определения коэффициентов авторегрессионного процесса для нахождения его спектральной плотности мощности. Предложены метод прямого определения коэффициентов по входной выборке и метод непрерывного уточнения коэффициентов на основе фильтра Калмана. Приведены результаты математического моделирования, подтверждающие работоспособность и эффективность данных методов определения коэффициентов авторегрессии. Рассмотрены дополнительные возможности обработки сигналов при использовании фильтра Калмана для определения коэффициентов авторегрессии.

Ключевые слова: авторегрессионный процесс, спектр мощности, фильтр Калмана.

Введение. Интерес к параметрическому представлению анализируемых процессов определен возможностью лучшего разрешения спектральных гармонических компонентов, иногда называемого сверхразрешением.

Действительно, при наблюдении классических оценок спектров последовательностей конечной длины на базе преобразования Фурье и авторегрессионные спектральные оценки и использовании определения разрешающей способности «по Релею» может сложиться впечатление о «сверхразрешении» авторегрессионных спектральных оценок.

Разрешающая способность классического спектрального оценивания зависит от длины выборки. Конечность выборки означает ограниченную длину корреляционной функции, что и накладывает ограничения на разрешающую способность. Спектральная плотность мощности (СПМ) авторегрессионного процесса имеет эквивалентные представления [1]:

$$\text{СПМ}(\omega) = \frac{T\rho}{\left| 1 + \sum_{m=1}^M (A_m e^{-j\omega m T}) \right|^2} = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} (R_y(k) e^{-j\omega k T}),$$

учитывая, что при $k > M$ имеем

$$R_y(k) = -\sum_{m=1}^M (A_m R_y(k-m)),$$

где ω — частота; ρ — мощность формирующего белого шума; T — период; A_m — коэффициенты авторегрессии; M — порядок авторегрессионной модели; $R_y(k)$ — отсчеты корреляционной функции авторегрессионного процесса/

Основой высокого разрешения СПМ авторегрессионного процесса является бесконечная экстраполяция корреляционной функции.

Стандартным способом определения коэффициентов авторегрессии является решение системы уравнений Юла — Уолкера:

$$\begin{bmatrix} R_y(0) & R_y(1)^* & \dots & R_y(M)^* \\ R_y(1) & R_y(0) & \dots & R_y(M-1)^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y(M) & R_y(M-1) & \dots & R_y(0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $R_y(m)$ — элемент корреляционной матрицы входного процесса; M — порядок авторегрессии; ρ — мощность формирующего процесса; $()^*$ — комплексное сопряжение.

При решении обычно применяется рекуррентный алгоритм Левинсона, использующий свойства корреляционной матрицы (эрмитово сопряжение теплицевой матрицы). Рекуррентные свойства алгоритма Левинсона позволяют последовательно оценивать наборы коэффициентов авторегрессии с первого до M -го. Однако для его применения необходимо задаться максимальным порядком M и оценить корреляционную функцию $R_y(0..M)$ входного процесса по его реализации.

Существуют и другие методы определения коэффициентов авторегрессии.

Определение коэффициентов авторегрессии методом Берга. Алгоритм гармонического среднего, или алгоритм Берга, называемый также алгоритмом прямого и обратного линейного предсказания [1],

обеспечивает последовательное рекуррентное определение коэффициентов авторегрессии в возрастающем порядке.

Опишем его пошагово для порядка модели M .

Начальные установки.

Для $n = 1, 2, \dots, N$ определим $f_n = b_n = y_n$,

$$P_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n y_n^*, \quad k = 1,$$

где $()^*$ — комплексное сопряжение.

Начало.

Вычисляется коэффициент отражения k -й ступени фильтра

$$\rho_k = \frac{-2 \sum_{n=k+1}^N (f_n b_{n-1}^*)}{\sum_{n=k+1}^N (f_n f_n^* + b_{n-1} b_{n-1}^*)}$$

и средняя мощность ошибки предсказания

$$P_k = P_{k-1} (1 - \rho_k \rho_k^*).$$

Для $j = 1, 2, \dots, k-1$ определим

$$a_{j,k} = a_{j,k} + \rho_k a_{j,k}^*,$$

$$a_{k,k} = \rho_k,$$

$$k = k + 1.$$

Если $k > M$, то «Окончить», иначе продолжим.

Для $n = k, k+1, \dots, N$ переопределим

$$f_n = f_n + \rho_{k-1} f_{n-1}$$

$$b_n = b_{n-1} + \rho_{k-1}^* b_n$$

Перейти на «Начало».

К достоинствам этого алгоритма можно отнести простоту реализации, гарантированную устойчивость решения и возможность последовательного оценивания достаточности порядка модели, например, по информационным критериям Акаике [1].

В дополнение к известным алгоритмам определения коэффициентов авторегрессии предлагаются к рассмотрению еще два — метод прямого определения коэффициентов по входной выборке и метод по-

следовательного уточнения коэффициентов методом калмановской фильтрации.

Прямой метод определения коэффициентов авторегрессии. Исходя из модели авторегрессионного процесса,

$y_t = Y_{t-1} \times A^T + \zeta_t$ — уравнение измерений (модель процесса);

A^T — вектор коэффициентов авторегрессии;

$Y_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-1}, \dots, y_{t-M}\}$ — вектор из M предыдущих значений входного процесса;

ξ_k, ζ_t — шумы состояния и измерений соответственно;

M — порядок авторегрессионной модели.

Можно записать матричное уравнение

$$Y1 \times A = YM, \text{ или } \begin{bmatrix} y_{t-1} & \cdots & y_{t-M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_M & \cdots & y_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_t \\ \cdots \\ y_{t-M-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда, применив псевдообращение матрицы $Y1$, получим

$$A = (Y1^H \times Y1)^{-1} \times Y1^H \times YM,$$

где $()^H$ обозначает транспонирование и комплексное сопряжение.

Отметим, что обращению подлежит комплексная матрица размерностью $M \times M$.

Оценка коэффициентов авторегрессии при помощи фильтра Калмана. Рассмотрим калмановскую процедуру оценивания коэффициентов авторегрессии входного процесса.

Пусть

$A_t = A_{t-1} + \xi_t$ — уравнение состояния для коэффициентов авторегрессии;

$y_t = Y_{t-1} \times A_{t-1}^T + \zeta_t$ — уравнение измерений (модель процесса);

A_t — вектор коэффициентов авторегрессии на t -м шаге;

$Y_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-1}, \dots, y_{t-M}\}$ — вектор из M предыдущих значений входного процесса;

ξ_k, ζ_k — шумы состояния и измерений соответственно;

M — порядок авторегрессионной модели.

Тогда оценка коэффициентов авторегрессии на t -м шаге определяется как

$$A_t = A_{t-1} + U_t \times (y_t - Y_{t-1} \times A_{t-1}^T),$$

где $U_t = P_{t/(t-1)} \times Y_{t-1}^T \times (Y_{t-1} \times P_{t/(t-1)} \times Y_{t-1}^T + \sigma_\xi^2)^{-1}$, $P_{t/t-1} = P_{t-1} + \sigma_\xi^2$, а корреляционная матрица ошибок их определения

$$P_t = (I - U_t \times Y_{t-1}) \times P_{t/(t-1)},$$

где I — единичная матрица.

Предлагаемый метод не использует процедуры обращения матриц.

Результаты моделирования. Для качественного сравнения результатов спектрального оценивания по коэффициентам авторегрессии, полученным рассмотренными методами, была разработана математическая модель входного сигнала, аналогичная случаю обнаружения цели на фоне отражения от морской поверхности.

Отражения от моря моделировались в виде двух гармонических сигналов на частотах, соответствующих береговскому рассеянию, со случайной начальной фазой и разными амплитудами.

Сигнал от цели моделировался также в виде гармонического сигнала на заданной частоте со случайной начальной фазой. Гармонические сигналы формировались на фоне нормального белого шума.

Параметры модели следующие:

- рабочая частота — 10 МГц;
- частота повторения — 10 Гц;
- амплитуда левого максимума помехи — 100;
- амплитуда правого максимума помехи — 400;
- амплитуда полезного сигнала — 4;
- частота полезного сигнала — 0,9 Гц;
- мощность шумов — 1;
- длина выборки — 64.

Формировалась классическая оценка спектра на основе преобразования Фурье с «окном» Блэкмана — Харриса с дополнением (удвоением) входной выборки нулями с некогерентным накоплением по пяти реализациям.

Авторегрессионный спектр рассчитывался по полученным коэффициентам авторегрессии для модели восьмого порядка ($M = 8$) в каждой независимой реализации.

Результаты спектрального оценивания представлены на рис. 1–3, на которых жирной линией показан классический спектр, а тонкими линиями — пять реализаций авторегрессионного спектра (в случае фильтра Калмана — на момент окончания реализации).

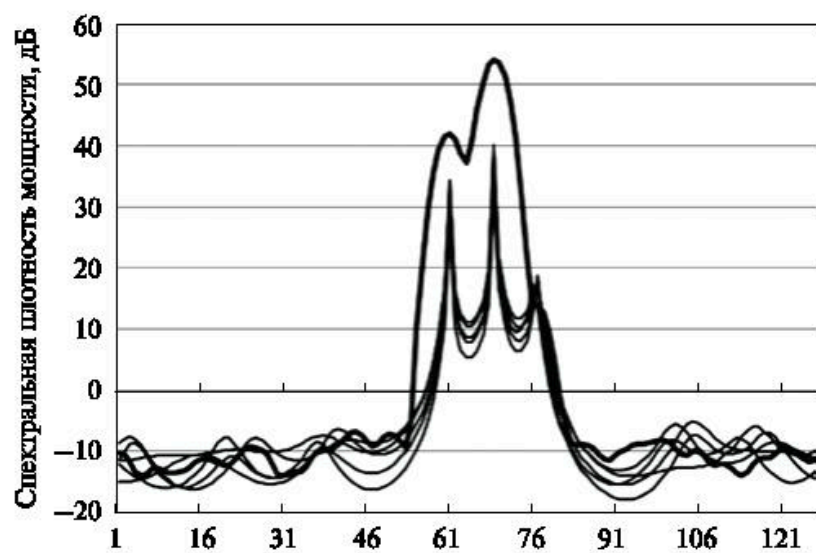


Рис. 1. Алгоритм Берга

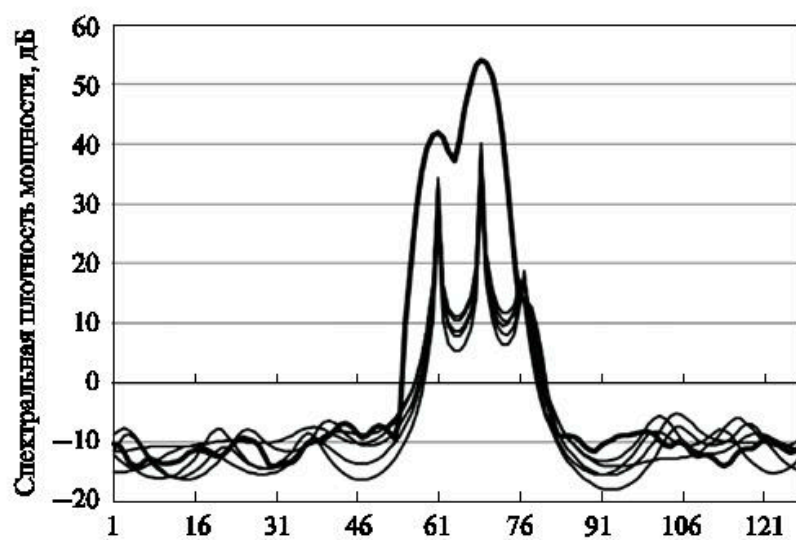


Рис. 2. Прямой метод

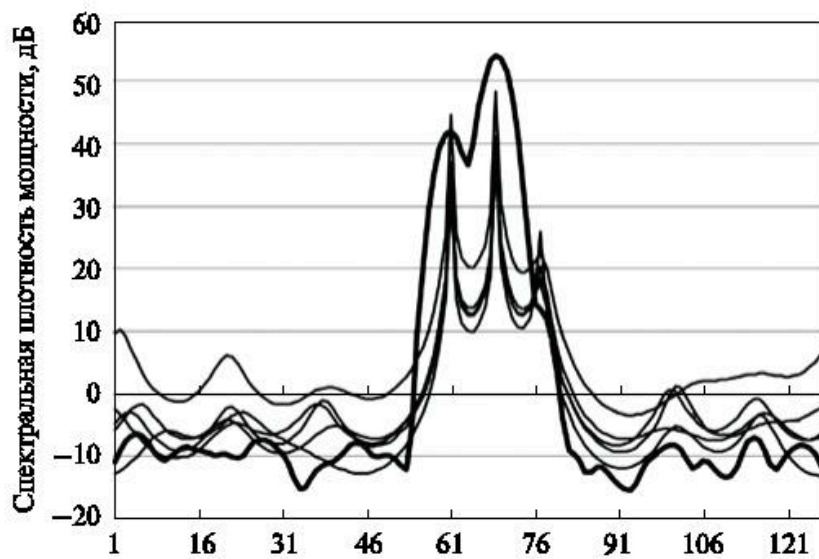


Рис. 3. Алгоритм Калмана

Результаты моделирования показали эффективность предложенных методов и подтвердили возможность разрешения малого сигнала на фоне более мощного даже в случае, когда классическое спектральное оценивание не формирует локального максимума на частоте малого сигнала.

Дополнительные возможности оценивания коэффициентов авторегрессии при помощи фильтра Калмана. Использование фильтра Калмана при оценке коэффициентов авторегрессии предоставляет некоторые дополнительные возможности обработки сигналов.

Обратим внимание на то, что величина $\Delta y_t = y_t - Y_{t-1} \times A_{t-1}^T$, получаемая на каждом шаге, есть ошибка прогноза входного процесса.

При наличии сигнала, пораженного хаотической импульсной помехой (при наличии аномально большой ошибки прогноза), измеренный сигнал может быть заменен его прогнозом, что может улучшить качество его спектрального анализа.

При наличии мощных пассивных помех, применяя фильтр малого порядка в качестве выходного сигнала, можно использовать сам сигнал ошибки, в котором пассивная помеха будет компенсирована.

Главным достоинством оценивания коэффициентов авторегрессии при помощи фильтра Калмана является последовательная по времени оценка коэффициентов авторегрессии, что дает возможность осуществлять время-частотный анализ входных сигналов, в том числе и нестационарных.

Ниже приведены иллюстрация работы динамического оценивания спектра мощности.

В качестве входных данных использовались комплексные выборки суммарного сигнала для двух одновременно маневрирующих целей с выхода имитатора с параметрами:

- мощность шума — единичная;
- амплитуда пассивной помехи — сто единиц;
- мощности первого и второго сигналов равны мощности шума;
- сигналы и пассивная помеха — не флюктуирующие.

Обработка велась применительно к 256 накапливаемым импульсам.

Динамика изменения доплеровского смещения сигналов от двух маневрирующих целей (номер доплеровского фильтра в зависимости от номера периода повторения) показана на рис. 4.

Спектр суммарного сигнала (окно Блэкмана — Харриса) приведен на рис. 5. Очевидно, что сигналы с подобной динамикой изменения доплеровской частоты не могут быть выделены.

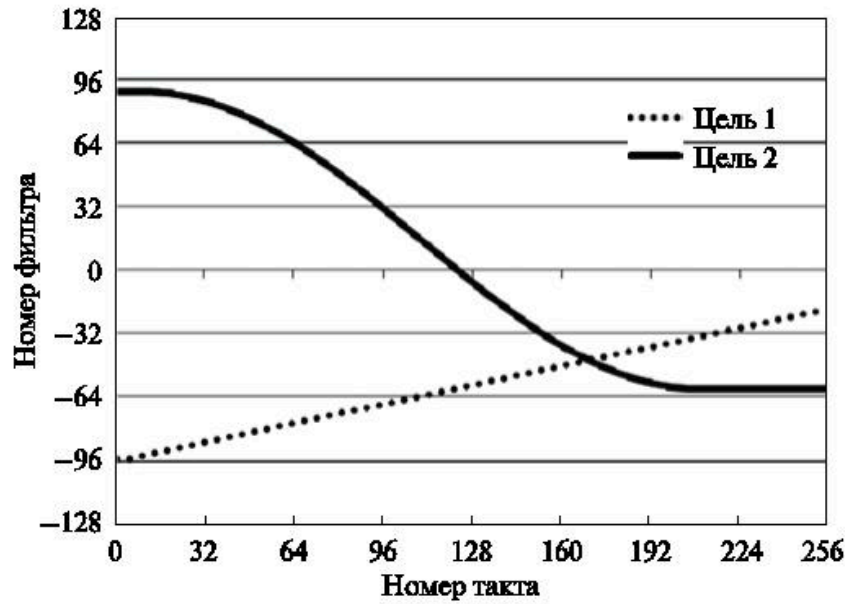


Рис. 4. Моделируемые временные зависимости доплеровского смещения сигналов от целей на этапе маневра

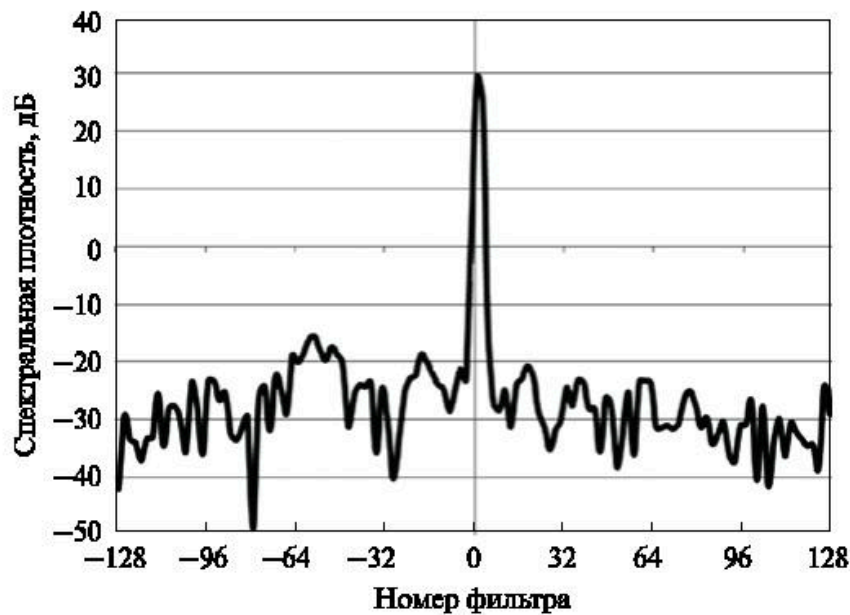


Рис. 5. Спектр моделируемого суммарного сигнала

На рис. 6 показана спектрально-временная характеристика суммарного сигнала после режекции пассивной помехи (выход авторегрессионного спектрального оценивания по модели четвертого порядка).

Локальные максимумы спектрально-временной характеристики могут быть объединены методами траекторной обработки в треки, по которым, например, при помощи метода наименьших квадратов могут быть вычислены полиномы, аппроксимирующие динамику изменения номера доплеровского фильтра цели на этапах маневра.

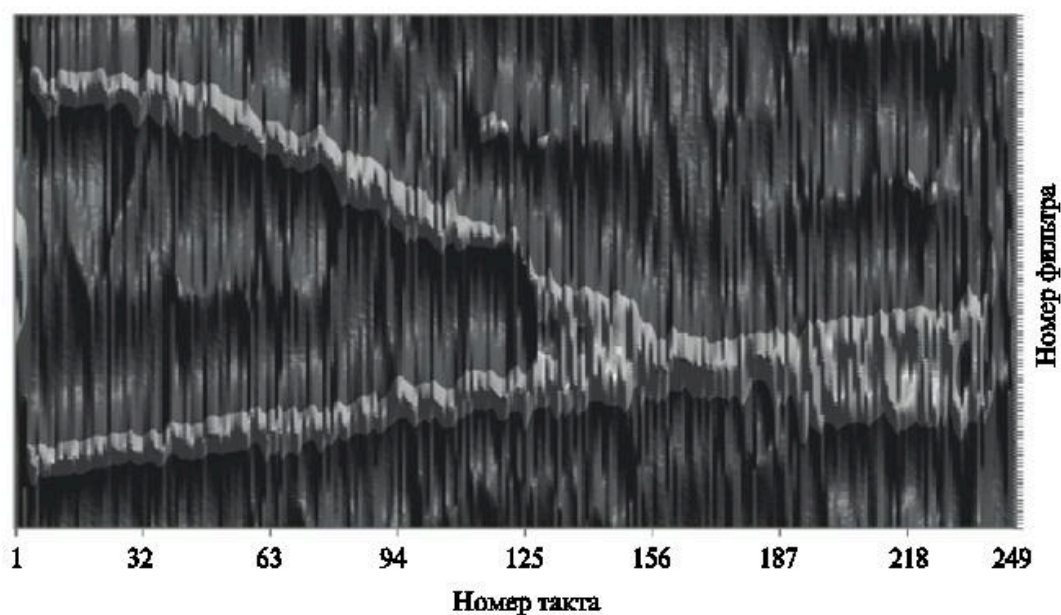


Рис. 6. Спектрально-временная характеристика суммарного сигнала

Возможности предложенного метода время-частотного анализа по реальным данным может быть подтверждена только косвенным образом, так как в обычное время воздушные цели не совершают маневры с большим ускорением.

Так, на рис. 7 показан фрагмент отметок от гражданского самолета на этапе ожидания посадки, показывающий динамику доплеровского смещения при обработке с когерентным накоплением ~ 10 с.

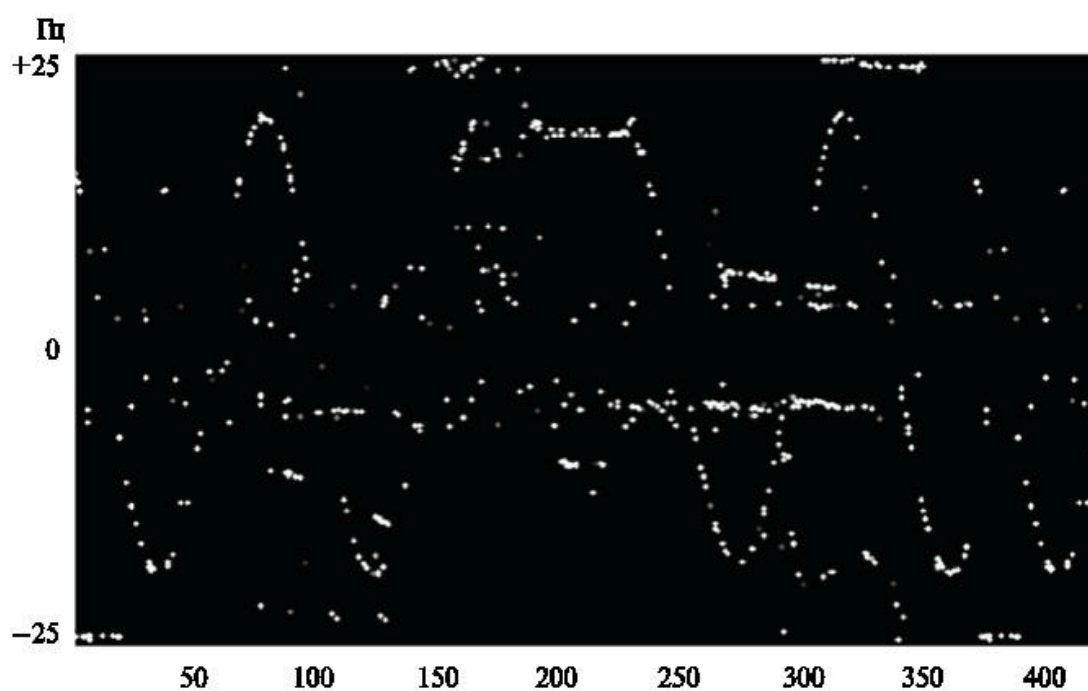


Рис. 7. Динамика доплеровского смещения сигнала от гражданского самолета на этапе ожидания посадки

При этом очевидно, что динамика изменения доплеровского смещения не оказывает существенного влияния на обнаружение. Так, например, на рис. 8 показан спектр сигнала на 259-м такте обработки. На рис. 9 показаны положения авторегрессионных спектральных максимумов, полученных после обработки каждого импульса.

Применение время-частотного анализа с использованием фильтра Калмана для динамического оценивания коэффициентов авторегрессии в данном случае не может дать выигрыш в характеристиках обнаружения и лишь подтверждает работоспособность метода, показав малые изменения доплеровского смещения от импульса к импульсу на анализируемом интервале ~ 5 с.

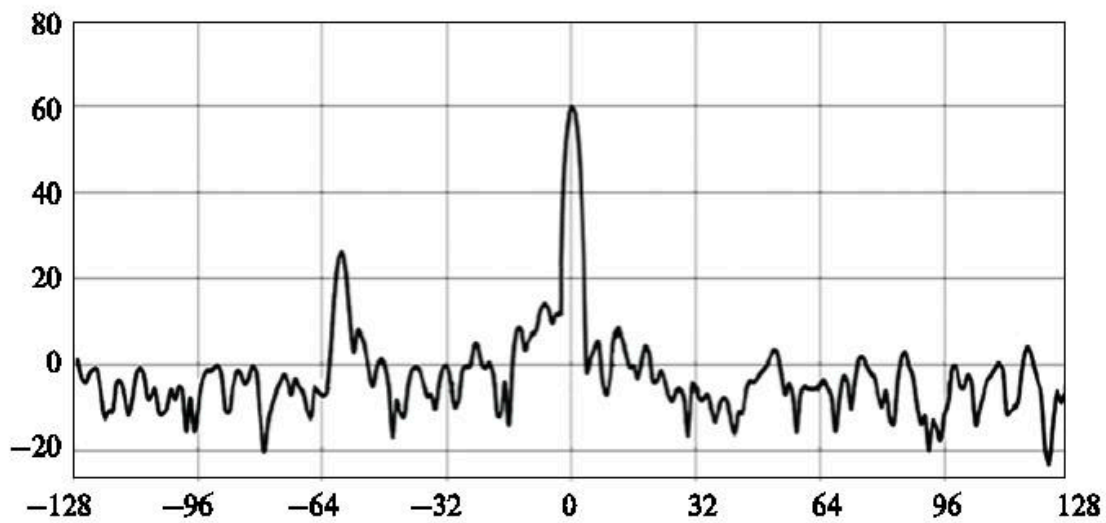


Рис. 8. Спектр отраженного сигнала, дБ, на 259-м такте обработки



Рис. 9. Оценка динамики изменения доплеровского смещения на 259-м такте обработки на 256 периодах повторения импульса

Использование фильтра Калмана для текущей оценки коэффициентов авторегрессии может найти применение при компенсации пассивных помех и борьбе с хаотическими импульсными помехами, а также для время-частотного анализа сигналов. Более подробно применение возможностей данного метода описано в работах [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Марпл С.Л. *Цифровой спектральный анализ и его приложения*. Москва, Мир, 1990, 584 с.
- [2] Красавин С.Ю., Панкратьев В.С. Рекуррентный алгоритм режекции узкополосных пассивных и широкополосных импульсных помех для использования в загоризонтной радиолокации. *Материалы IX Всероссийской научно-технической конференции «Дальняя радиолокация на службе Отечества»*. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022, 387 с.
- [3] Красавин С.Ю. Когерентно-некогерентный следящий фильтр маневров. *Сб. научных статей по материалам VI Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы и перспективы развития радиотехнических и инфокоммуникационных систем» («Радиоинфоком-2022»)*. Москва, РТУ МИРЭА, 2022, 882 с.

Красавин Сергей Юрьевич — начальник лаборатории АО «НПО дальней радиолокации имени академика А.Л. Минца».

e-mail: skrasavin@npodr.ru

Some methods for determining the coefficients of an autoregressive process

© S.Yu. Krasavin

Long-Range Radar, JSC

The methods for determining the coefficients of an autoregressive process for determining its power spectral density are considered. A method for directly determining the coefficients from an input sample and a method for continuously refining the coefficients based on the Kalman filter are proposed. The results of mathematical modeling are presented, confirming the operability and effectiveness of the proposed methods for determining the autoregressive coefficients. Additional possibilities for signal processing are considered when using the Kalman filter to determine the autoregressive coefficients.

Keywords: autoregressive process, power spectrum, Kalman filter.

Krasavin S.Yu., Head of the laboratory of Long-Range Radar, JSC.

e-mail: skrasavin@npodr.ru