

На правах рукописи

Титарев Владимир Александрович

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА**

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

В. Титарев

Москва – 2003

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор Е.М. Шахов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук Ф.Г. Черемисин

доктор технических наук А.И. Ерофеев

Ведущая организация:

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Защита состоится "21" сентября 2003 года в 11 часов 00 мин.
на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу:
107005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью организации, просим высылать по адресу: 107005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н.Э. Баумана, ученому секретарю совета Д 212.141.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан "10" сентября 2003 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета, д.ф.м.н., профессор



Волков И.К.

Актуальность работы.

Основным уравнением кинетической теории газов является уравнение Больцмана, которое представляет собой исключительно сложное нелинейное интегро – дифференциальное уравнение. Несмотря на значительный прогресс в разработке методов прямого численного решения кинетического уравнения, достигнутый в последнее время, высокая размерность уравнения ограничивает возможности его решения на вычислительных машинах.

Вероятно, наиболее популярной альтернативой прямому численному решению уравнения Больцмана является метод Монте-Карло, который направлен на то, чтобы обойти прямое численное решение уравнения Больцмана и моделировать непосредственно движение фиксированного числа частиц в ячейках численной сетки. Получили распространение модификации метода, предложенные Бердом и Белоцерковским и Яницким.

Другой альтернативой является построение и численное решение модельных кинетических уравнений, которые аппроксимируют уравнение Больцмана. В настоящее время широкое распространение получила модельное уравнение неполного третьего приближения, получившие название модели Шахова, или S-модели. Несмотря на то, что данное модельное кинетическое уравнение значительно проще для численного решения на вычислительных машинах, чем точное уравнение Больцмана, оно также является сложным интегро-дифференциальным уравнением высокой размерности.

Можно отметить следующие типичные трудности численного решения как модельного, так и точного кинетического уравнений. При расчетах течений с большими числами Кнудсена для достижения удовлетворительной точности часто необходимо учитывать разрывы функции распределения, что существенно усложняет численный алгоритм и его программную реализацию. С другой стороны, численное решение кинетического уравнения при малых числах Кнудсена требует построения полностью консервативных методов высокого (минимум второго) порядка аппроксимации. При этом как для больших, так и для малых чисел Кнудсена используемые конечно-разностные схемы должны обладать возможностью рассчитывать разрывные решения.

Таким образом, представляется актуальной разработка новых и улучшение существующих эффективных численных алгоритмов повышенного (минимум второго) порядка аппроксимации для модельного кинетического уравнения, с выделением разрывов при расчетах с большими числами Кнудсена и обеспечивающих возможность сквозного расчета течений с

разрывами и консервативность расчета для малых чисел Кнудсена, а также применение данных алгоритмов к задачам механики разреженных газов с целью получения более точных решений ряда известных и новых задач. При этом часть разработанных численных алгоритмов может быть в дальнейшем использована для решения уравнения Больцмана с точным интегралом столкновений.

Целью работы является улучшение существующих и разработка новых численных алгоритмов решения многомерного модельного кинетического уравнения. а также практическое применение данных методов для решения ряда задач механики разреженных газов.

Метод исследования. Применяются методы механики разреженных газов и вычислительной математики.

Научная новизна.

Решена задача о нестационарном испарении с плоской поверхности конденсированной фазы в полупространство в широком диапазоне значений числа Кнудсена и коэффициента испарения.

Предложена процедура учета разрывов функции распределения при вычислении интегралов по молекулярной скорости для двухмерного стационарного кинетического уравнения.

Решена задача о слое смещения двух сверхзвуковых потоков разреженного газа за задней кромкой гладкой пластины.

Рассчитано поперечное обтекание пластины с различными граничными условиями гиперзвуковым потоком разреженного газа для чисел Маха $2 \leq M \leq 30$ и числа Кнудсена $Kn \geq 1$.

Предложен новый метод построения полностью консервативных численных методов для нестационарного кинетического уравнения с модельным оператором столкновений, который обеспечивает выполнение законов сохранения массы, момента и энергии газа для любых чисел Кнудсена и граничных условий диффузного отражения, а также правильную аппроксимацию вектора потока тепла.

Построен полностью консервативный численный метод третьего и выше порядка аппроксимации для двухмерного нестационарного кинетического уравнения с модельным оператором столкновений в виде S-модели.

Рассчитано поперечное обтекание пластины сверхзвуковым потоком разреженного газа при числе Кнудсена $Kn = 5 \times 10^{-3}$ и чисел Маха набегающего потока $M = 5, 10$ для теплоизолированной пластины и $M = 5$ для холодной пластины.

Практическая и теоретическая ценность. Численные методы, разработанные в данной работе, применимы для расчета течений разре-

женного газа в широком диапазоне чисел Маха и Кнудсена. Разработанные программы позволяют получить решения известных задач с более высокой точностью, а также строить решения новых задач, получение решений которых обычными методами было бы затруднено. Часть разработанных численных алгоритмов может в дальнейшем быть использована для численного решения уравнения Больцмана с точным интегралом столкновений.

Основные результаты, которые выносятся на защиту:

1. Расчет нестационарного испарения с плоской поверхности конденсированной фазы для всех режимов испарения произвольной интенсивности.
2. Численный алгоритм решения двумерного стационарного уравнения с учетом разрывов функции распределения не только в конечно-разностной схеме второго порядка аппроксимации, но и в процедуре вычисления интегралов от функции распределения по молекулярной скорости
3. Расчет течения разреженного газа за задней кромкой гладкой пластины.
4. Расчет поперечного обтекания пластины гиперзвуковым потоком разреженного газа при граничных условиях теплоизолированной и холодных пластин.
5. Метод построения консервативных численных методов для трехмерного кинетического уравнения с оператором столкновений в виде S-модели без коррекций функции распределения.
6. Консервативная схема повышенного (от третьего и выше) порядка аппроксимации для двумерного кинетического уравнения с оператором столкновений в виде S-модели.
7. Расчет поперечного обтекания пластины сверхзвуковым потоком разреженного газа для числа Кнудсена $Kn = 5 \times 10^{-3}$ при граничных условиях теплоизолированной (числа Маха 5 и 10) и холодной (число Маха 5) пластины.

Аппробация работы.

Результаты диссертационной работы докладывались на:

- Российской национальной конференции по теплообмену, Москва, МЭИ, 1998 г.
- Пятом Международном совещании-семинаре 'Инженерные проблемы новой техники', Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998 г.
- Второй международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях, Санкт-Петербург, 1998 г.
- II Всероссийской научно-технической конференции молодых ученых 'Современные проблемы аэрокосмической техники', Жуковский, ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, 1999 г.
- Международной научно-технической конференции молодых ученых 'Современные проблемы аэрокосмической науки и техники', Жуковский, ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского. 2000 г.
- Семинаре Сектора кинетической теории ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, Москва, 2003 г.
- Семинаре по математической физике ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2003 г.
- Семинаре ФАЛТ МФТИ, Жуковский, 2003 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 работ.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждаются общие подходы к моделированию течений разреженного газа. Кратко описаны принципы построения модельных уравнений Больцмана, в частности моделей Шахова и Крука (БГК модели). Приведен обзор существующих численных методов решения точного и модельного кинетических уравнений Больцмана и кратко изложены основные результаты работы.

В безразмерных переменных кинетическое уравнение для функции распределения молекул по скоростям $f(t, \vec{t}, \vec{\xi})$ с модельным оператором столкновений Шахова имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \nu(f^+ - f)$$

$$f^+ = f_m \left[1 + \frac{4}{5}(1 - \text{Pr}) S_\alpha c_\alpha (c^2 - \frac{5}{2}) \right], \quad \nu = \frac{8}{5\sqrt{\pi}} \frac{nT}{\mu} \frac{1}{\text{Kn}} \quad (1)$$

$$f_m = \frac{n}{(\pi T)^{3/2}} \exp(-c^2), \quad c_i = \frac{\xi_i - u_i}{\sqrt{T}}, \quad S_i = \frac{2q_i}{nT^{3/2}}$$

Здесь t – время, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ – координата физического пространства, $\vec{\xi} = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ – вектор молекулярной скорости, f_m – локально-максвелловская функция распределения, Pr – число Прандтля, Kn – число Кнудсена, S_i – приведенный вектор теплового потока. При известной функции распределения макропараметры газа выражаются в виде интегралов по молекулярной скорости:

$$\begin{aligned} n &= \int_{R^3} f d\vec{\xi}, \quad nu_i = \int_{R^3} \xi_i f d\vec{\xi}, \\ E &= \int_{R^3} \xi^2 f d\vec{\xi}, \quad q_i = \frac{1}{2} \int_{R^3} (\xi_i - u_i) |\vec{\xi} - \vec{u}|^2 f d\vec{\xi} \end{aligned} \quad (2)$$

Первый раздел диссертации посвящен кинетическому анализу нестационарного процесса испарения с плоской поверхности тела в полупространство, занятое газовой фазой (паром) конденсированного тела, при внезапном повышении температуры тела до некоторой постоянной. Поверхность раздела фаз представляет собой плоскость $x = 0$. В начальный момент времени $t = 0$ температура конденсированной фазы мгновенно поднимается до температуры $T_w > 1$ и затем остается постоянной для всех $t > 0$. При этом на испаряющей поверхности принималось, что часть α от общего потока падающих молекул конденсируется на поверхности равна, а $(1 - \alpha)$ рассеивается поверхностью по диффузному закону с полной тепловой аккомодацией, т. е. при температуре T_w , где α – коэффициент конденсации и одновременно коэффициент испарения.

Исследование течения ведется на основе численного решения нестационарного кинетического уравнения для редуцированной функции распределения (g, h)

$$g = \int_{R^2} f d\xi_y d\xi_z, \quad h = \int_{R^2} f(\xi_y^2 + \xi_z^2) d\xi_y d\xi_z \quad (3)$$

которое в безразмерных переменных записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial g}{\partial x} &= \nu(G - g), \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial h}{\partial x} = \nu(H - h) \\ G &= G^0 \left[1 + \frac{4}{5}(1 - Pr)S_x c_x (c^2 - \frac{3}{2}) \right], \quad G^0 = \frac{n}{(\pi T)^{1/2}} \exp(-c^2) \\ H &= H^0 \left[1 + \frac{4}{5}(1 - Pr)S_x c_x (c^2 - \frac{1}{2}) \right], \quad H^0 = T G^0, \end{aligned} \quad (4)$$

Начальные условия и граничные условия на границе раздела фаз в термине функций g , h имеют вид

$$\begin{aligned} g(0, x, \xi_x) &= h(0, x, \xi_x) = g_\infty = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi_x^2) \\ x &= +0, \quad \xi_x > 0: \quad g = g_w = (\alpha n_s + (1 - \alpha)n_0)G_M \\ h &= h_w = T_w g_w, \quad G_M = \pi^{-1/2} \exp(-\xi_x^2/T_w) \\ n_s &= \frac{1}{T_w} \exp(-Q(\frac{1}{T} - 1)), \quad n_0 = -2\sqrt{\frac{\pi}{T_w}} \int_{-\infty}^0 \xi_x g d\xi_x \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь индекс s относится к макропараметрам насыщенного пара, определяемых обычной кривой насыщения, Q – безразмерная удельная теплота парообразования, которую для простоты считаем постоянной.

Сформулированная задача решалась численно методом конечных разностей на неравномерной сетке с помощью TVD схемы второго порядка точности. Было выполнено исследование режимов испарения произвольной интенсивности, начиная от слабого испарения, соответствующего малому скачку температуры в начальный момент времени (линеаризованный вариант), до очень сильного испарения в вакуум. При этом основная цель состояла в изучении влияния коэффициента испарения как на скорость испарения, так и на картину возникающего течения.

Было получено, что скорость уноса массы с испаряемой поверхности со течением времени быстро выходит на константу и слабо отклоняется от прямой пропорциональности коэффициенту испарения для всех режимов испарения. При этом характер течения существенно зависит от коэффициента испарения. При малых значениях этого коэффициента движение газа может оказаться всюду нестационарным, несмотря на постоянное значение расхода массы с испаряемой поверхности. Так, на рисунке 1 изображены распределения плотности в момент времени $t = 5$ для $Kn = 0.01$ при $T_w = 2$ и $Q = 5$, что соответствует плотности $\delta n_s = 6,09$ (умеренное испарение). Кривые 1 – 4 соответствуют значениям $\alpha = 0, 0.25, 0.5$ и 1 . Видно, что течения при $\alpha = 1$ и 0 различаются качественно.

На рис. 2 представлена бегущая волна плотности в моменты времени $t = 1, 2, 3, 4$ и 5 для случая сильного испарения ($n_s \gg 1$) при $Q = 10$, $T_w = 2$, $n_s = 74$, $\alpha = 1$, $Kn = 0.01$. Увеличение Q существенно повышает давление насыщенного пара и ведет к более интенсивному испарению. Однако это количественная сторона вопроса. Качественное же отличие от умеренного испарения, иллюстрируемого рис. 1, состоит в появлении расширяющейся пристеночной зоны, отнюдь не совпадающей со слоем

Кнудсена, но имеющей масштаб течения. В этой зоне происходит расширение выделившегося пара подобно тому, как это имеет место при расширении в вакуум.

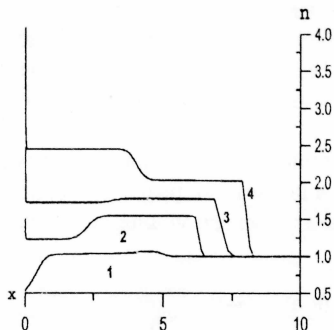


Рис. 1

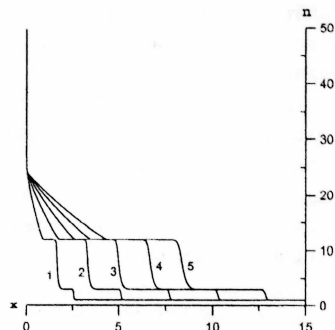


Рис. 2

Также получено, что скорость испарения слабо отклоняется от прямой пропорциональности коэффициенту испарения для всех режимов испарения.

Второй и третий разделы диссертационной работы посвящены моделированию двумерных течений разреженного газа. Как обычно в этих случаях, взамен полной функции распределения $f(x, y, \vec{\xi})$ вводятся две редуцированные функции распределения ϕ и ψ по формулам:

$$\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} f d\xi_z, \quad \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_z^2 f d\xi_z, \quad (6)$$

Уравнения для безразмерных функций ϕ и ψ имеют следующий вид :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \nu(\Phi - \phi), & \frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \nu(\Psi - \psi), \\ \Phi &= \Phi_m [1 + \frac{4}{5}(1 - \text{Pr}) S_\alpha c_\alpha (c_\beta c_\beta - 2)], & \Phi_m &= n(\pi T)^{-1} \exp(-c_\alpha c_\alpha), \\ \Psi &= \Psi_m [1 + \frac{4}{5}(1 - \text{Pr}) S_\alpha c_\alpha (c_\beta c_\beta - 1)], & \Psi_m &= \frac{1}{2} T \Phi_m \end{aligned} \quad (7)$$

Все необходимые макропараметры выражаются через функции ϕ и ψ :

$$\begin{aligned} n &= \int_{R^2} \phi d\xi_x d\xi_y, & nu_i &= \int_{R^2} \xi_i \phi d\xi_x d\xi_y, & E &= \int_{R^2} ((\xi_x^2 + \xi_y^2) \phi + \psi) d\xi_x d\xi_y, \\ q_i &= \frac{1}{2} \int_{R^2} (\xi_i - u_i) [((\xi_x - u_1)^2 + (\xi_y - u_2)^2) \phi + \psi] d\xi_x d\xi_y \end{aligned}$$

Во втором разделе диссертационной работы исследуются двухмерные стационарные течения разреженного газа для чисел Кнудсена $Kn \geq 1$. Для интегрирования кинетического уравнения применяется усовершенствованный вычислительный алгоритм с учетом разрывов функции распределения, состоящий из разностной схемы второго порядка точности с учетом разрывов функции распределения и нового метода вычисления интегралов по молекулярной скорости.

Общая схема вычислений метода стационарных итераций, применяемого для стационарных задач, описана в первом подразделе второго раздела. Неявная разностная схема для кинетического уравнения записывается в следующем виде

$$\xi_x \nabla_x^{ij} \phi^{(n)} + \xi_y \nabla_y^{ij} \phi^{(n)} = \nu_{ij}^{(n-1)} (\Phi_{ij}^{(n-1)} - \phi_{ij}^{(n)}) \quad (8)$$

Учет разрывов в разностной схеме производится выбором формул численного дифференцирования назад в операторах ∇_x^{ij} , ∇_y^{ij} таким образом, чтобы не дифференцировать через характеристики, несущие разрыв.

Новизна метода численного интегрирования по скорости состоит в учете разрывов функции распределения при использовании полярной системы координат

$$\xi_x = \xi_r \cos \epsilon, \quad \xi_y = \xi_r \sin \epsilon \quad (9)$$

Полярные координаты являются наиболее подходящими для учета разрывов в квадратурных формулах, поскольку в них разрывы распространяются вдоль лучей $\epsilon = \text{const}$, а по ξ_r функция распределения непрерывна. Макропараметры, представляющие собой двойные интегралы, сводятся к повторным, причем внутренним является интеграл по ξ_r , а внешним - по ϵ . Например, для числовой плотности имеем:

$$n = \int \phi d\xi_x d\xi_y = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{\infty} \xi_r \phi d\xi_r \right) d\epsilon$$

В силу непрерывности подынтегральной функции по ξ_r веса квадратурной формулы являются одинаковыми для всех точек (x_i, y_j) , стандартными весами формулы Гаусса. Веса квадратурной формулы по углу ϵ зависят от точки (x_i, y_j) . Как правило они совпадают со стандартными весами формулы Симпсона. Однако есть исключения, связанные с наличием разрывов у функции распределения. Если в заданную точку (x_i, y_j) рассчитываемого поля течения приходит один или два разрыва, то квадратурные формулы изменяются таким образом, чтобы явным образом

учесть наличие разрывов в весах квадратуры, а не проводить интегрирование сквозным способом. Применение такой учета разрывов в квадратурных формулах позволяет при одном и том же разбиении по ϵ получать значительно более точные результаты.

С помощью вышеупомянутого алгоритма построены численные решения двух задач: задачи о течении разреженного газа за задней кромкой полубесконечной гладкой пластины нулевой толщины и задачи обтекания тонкой пластины гиперзвуковым потоком разреженного газа под прямым углом атаки.

В первой задаче, рассмотренной во втором подразделе, изучается влияние разреженности на взаимодействие двух однородных сверхзвуковых потоков одноатомного газа, сходящихся с задней кромки пластины. При анализе результатов рассматривалось два основных варианта течения: слой смешения (течение без разворота потока за пластиной) и общий случай течения с разворотом потока.

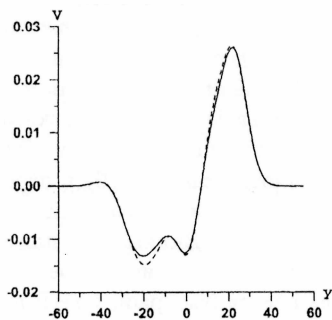


Рис. 3

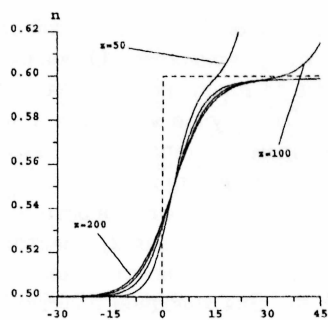


Рис. 4

Первое течение возникает при сходе с пластины потоков при $p_1 = p_2$, т.е. при условиях, соответствующих контактному тангенциальному разрыву. Рассчитывались течения, соответствующие чисто тангенциальному разрыву ($n_1 = n_2 = 1$, $T_1 = T_2 = 1$, $U_1 = 4$, $U_2 = 3$) и чисто контактному разрыву $U_1 = U_2 = 3$, $n_1 = 0.5n_2$, $T_1 = 2T_2$. При этом с расстояния 50 длин пробега от кромки пластины строилось решение усеченных уравнений Навье-Стокса с начальными условиями из кинетического расчета. На рис. 3 приведены профили поперечной составляющей скорости течения, соответствующие решениям кинетического уравнения и усеченных гидродинамических уравнений в поперечном сечении потока $x = 100$ для чисто тангенциального разрыва. Видно хорошее согласие расчетов.

В общем случае течения за кромкой пластины происходит поворот потока. По сравнению со случаем контактного разрыва уже в рамках

уравнений Эйлера появляются два новых элемента течения: волна разрежения в верхнем потоке газа и косой скачок уплотнения в нижнем потоке. Был проведен расчет течения для случая $n_1 = 1$, $n_2 = 0.5$, $T_1 = T_2 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 1.5$ в рамках модели Крука при $\mu = T$. Заметим сразу же, что вверх по потоку распространяется возмущение, которое быстро затухает на расстоянии 2-3 длины пробега.

Наиболее ярко молекулярный перенос проявляется в формировании скачка уплотнения. Обозначим через z координату вдоль луча ϑ_2 , соответствующему косому скачку из уравнений Эйлера, а через s — координату нормально косому скачку. Рис. 4 дает представление о формировании скачка уплотнения. Профили плотности на нем изображены в сечениях $z = 50; 100; 150; 200$. Видно, что о сформировавшемся скачке уплотнения речь может идти только начиная с $z = 100$.

Во второй задаче второго раздела рассчитывалось поперечное обтекание пластины гиперзвуковым потоком разреженного газа. Проведены расчеты до чисел Маха $M = 30$ включительно, рассматривались случаи теплоизолированной и холодной пластины при диффузном отражении молекул от поверхности. Основное внимание уделялось области донного вакуума за пластиной и ее зависимости от граничного условия на пластине. Эти случаи являются в некотором смысле противоположными и предельными по тепловому режиму поверхности и по характеру течения.

На рисунке 5 приведена зависимость плотности $n(-0,0)$ в передней точке торможения от скорости набегающего потока для горячей (кривая 1) и холодной (кривая 2) пластины для $Kn = 1$. Видим, что для горячей пластины плотность выходит на предельное значение равное 3.73 для $U_\infty \geq 15$. Для холодной пластины наблюдается быстрый, почти линейный рост плотности в передней критической точке с ростом U_∞ .



Рис. 5



Рис. 6

На рисунке 6 приведена зависимость плотности $n(+0, 0)$ в задней точке торможения от скорости набегающего потока для горячей (кривая 1) и холодной (кривая 2) пластины для $Kn = 1$. Видно, что для теплоизолированной пластины плотность в задней критической точке быстро падает с ростом U_∞ , в то время как для холодной пластины что при $U_\infty \geq 20$ имеет тенденцию к стабилизации. Можно ожидать, что дальнейшее углубление вакуума за пластиной невозможно.

Таким образом, течение около пластины существенным образом зависит от граничного условия на поверхности пластины. При этом формирование разрежения за пластиной определяется течением перед ней. В случае теплоизолированной поверхности пластина создаст высокоскоростной поток отраженных частиц, зона возмущения перед телом имеет значительную протяженность, а плотность газа перед телом невелика. В противоположность этому холодная поверхность отражает падающие на нее частицы с малой скоростью, зона возмущения локализуется около тела. Непосредственно у поверхности образуется тонкий слой газа относительно высокой плотности, который через кромки пластины перетекает в зону разрежения. Понятно, что в случае холодной пластины следует ожидать более высокой плотности за пластиной по сравнению с тем, что может быть для теплоизолированной пластины. Так, на рисунках 7 и 8 изображены линии равной плотности в теневой области за пластиной соответственно для теплоизолированной и холодной пластины при $U_\infty = 10$, $Kn = 1$. Видно, что структура течения как в том, так и в другом случае качественно близки, однако в случае холодной пластины плотность в области задней критической точки на порядок больше, чем для теплоизолированной пластины.

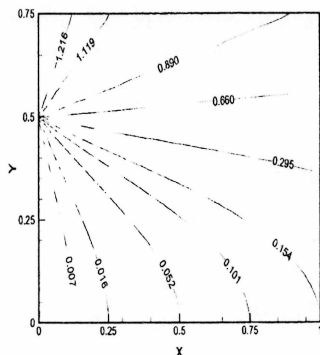


Рис. 7

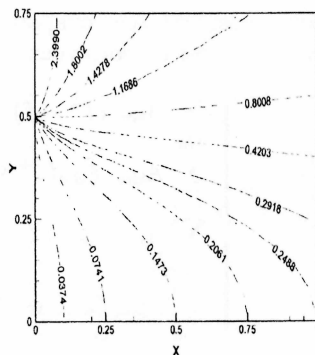


Рис. 8

В свободномолекулярном пределе плотность газа в области непосредственно за пластиной равна нулю. Однако эффект затекания в зону дон-

ного вакуума имеет место даже при очень больших числах Кнудсена. Расчеты показывают, что для холодной пластины и при числе $Kn=100$, но даже при $Kn=1000$ течение заметно отличается от свободномолекулярного.

Третий раздел диссертационной работы посвящен течениям с малыми числами Кнудсена. В первом подразделе предложен способ построения консервативных численных методов типа метода дискретных ординат для трехмерного нестационарного кинетического уравнения Больцмана с S-модельным интегралом столкновений. Численный метод дискретных ординат называется консервативным, если из него следуют разностные аналоги законов сохранения внутри расчетной области и граничных условий на границе тела. В диссертационной работе показано, что общепринятый метод дискретных ординат не является консервативным. Соответствующие сеточные уравнения сохранения будут содержать численный источник вида

$$\vec{\delta} = \nu \left[\sum_{klm} \left(\frac{1}{\xi^2} \right)_{klm} f_{klm}^+ A_{klm} - \int \left(\frac{1}{\xi^2} \right) f^+ d\vec{\xi} \right] \approx \frac{n}{Kn} (\Delta\xi)^r \quad (10)$$

где $\Delta\xi$ – максимальный из шагов интегрирования по молекулярной скорости, A_{klm} и r – веса и порядок квадратурной формулы. Из (10) видно, что при уменьшении числа Кнудсена $|\vec{\delta}|$ быстро растет как Kn^{-1} . Поэтому расчет течений при малых значениях числа Кнудсена затруднен.

Для построения консервативного метода в диссертационной работе предложено находить макропараметры газа из сеточных аналогов условий аппроксимации точного уравнения Больцмана модельным уравнением :

$$\begin{cases} \sum_{klm} A_{klm} (f^+ - f)_{klm} & = 0, \\ \sum_{klm} A_{klm} \vec{\xi}_{klm} (f^+ - f)_{klm} & = 0, \\ \sum_{klm} A_{klm} (\xi_{klm})^2 (f^+ - f)_{klm} & = 0, \\ \sum_{klm} A_{klm} \vec{\xi}_{klm} (\xi_{klm})^2 (f^+ - f)_{klm} & = -\frac{4}{3} q_i, \end{cases} \quad (11)$$

Для заданного узла пространственной сетки условия (11) представляют собой систему из восьми нелинейных уравнений, из которой определяются восемь макроскопических величин n , u_i , T и q_i . Для решения системы (11) используется метод Ньютона решения систем нелинейных

уравнений, При этом сеточные законы сохранения выполняются автоматически. Кроме того, последнее уравнение обеспечивает правильный переход к уравнениям Навье – Стокса при уменьшении числа Кнудсена.

Аналогичная процедура применяется для расчета граничных значений функции распределения. Соответствующие формулы могут быть найдены в тексте диссертационной работы.

Во втором подразделе второго раздела для двумерного нестационарного кинетического уравнения предложен полностью консервативный численный метод повышенного (до пятого) порядка аппроксимации по пространству. Метод состоит из консервативной процедуры расчета макропараметров газа, предложенной в этом разделе, и дивергентной квазимонотонной схемы WENO повышенного порядка аппроксимации, адаптированной к кинетическому уравнению.

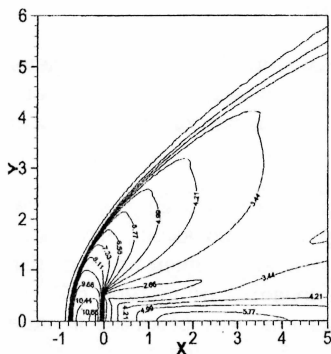


Рис. 9

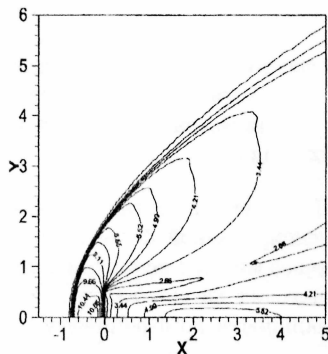


Рис. 10

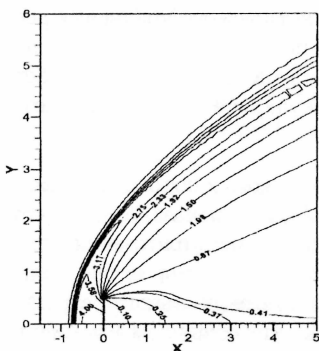


Рис. 11

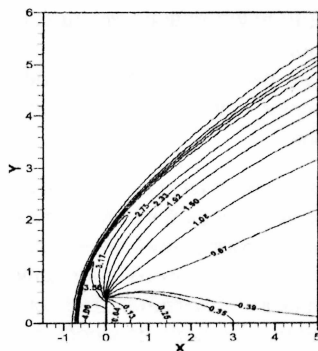


Рис. 12

В третьем подразделе с применением данного метода рассчитано перпендикулярное обтекание пластины для числа Кнудсена $Kn = 0,005$ и чисел Маха набегающего потока $M = 5, 10$. Для сравнения был также выполнен расчет обтекания по уравнениям Навье – Стокса для тех же параметров течения. Результаты расчетов показывают, что оба решения хорошо согласуются везде кроме зоны донного вакуума за пластиной. Так, на рисунках 9 – 10 представлены изотермы газа при обтекании холодной пластины для $U_\infty = 5$ по кинетическому расчету (левый рис.) и уравнениям Навье – Стокса (правый рис.) соответственно. На рисунках 11 – 12 представлены линии равной плотности газа при обтекании теплоизолированной пластины для $U_\infty = 10$ по кинетическому расчету (левый рис.) и уравнениям Навье – Стокса (правый рис.) соответственно. Хорошее согласие результатов расчетов по разным уравнениям свидетельствует о высокой общей точности счета.

ВЫВОДЫ

В диссертации для кинетического уравнения Больцмана с модельным оператором столкновений разработаны новые методы повышенной точности. С применением данных методов решен ряд одномерных и двухмерных задач.

1. Для задачи о нестационарном испарении с плоской поверхности конденсированной фазы в полупространство показано, что скорость уноса массы с испаряемой поверхности со течением времени быстро выходит на константу и слабо отклоняется от прямой пропорциональности коэффициенту испарения для всех режимов испарения. Однако при малых значениях коэффициента испарения либо сильном испарении течение газа всюду нестационарно.
2. Для двухмерного стационарного кинетического уравнения реализован численный алгоритм решения с полным учетом разрывов функции распределения. Процедура учета разрывов функции распределения при интегрировании по молекулярной скорости является новой.
3. В задаче о слое смещения двух сверхзвуковых потоков разреженного газа за задней кромкой гладкой пластины показано, что учет разреженности приводит к размыванию скачка уплотнения; при этом структура косого скачка формируется на некотором расстоянии от кромки пластины. Для контактного тангенциального разрыва учет молекулярного переноса приводит к существенным изменениям по сравнению с газодинамическим решением.

4. В задаче о поперечном обтекании пластины показано, что течение в зоне донного вакуума определяется граничным условием на пластине. В частности, плотность газа за холодной пластиной по крайней мере на порядок выше, чем за теплоизолированной пластиной. Для холодной пластины затекание газа в область за пластину имеет место даже для очень больших скоростей потока и чисел Кнудсена.
5. Для нестационарного трехмерного кинетического уравнения предложен новый метод построения полностью консервативных численных методов, который обеспечивает консервативность расчета для любых чисел Кнудсена и граничных условий диффузного отражения, а также правильную аппроксимацию вектора потока тепла.
6. Для двухмерного нестационарного модельного уравнения предложен численный алгоритм повышенного (от третьего и выше) порядка аппроксимации как по пространству, так и по времени.
7. Рассчитано поперечное обтекание пластины потоком разреженного газа для граничного условия теплоизолированной (числа Маха 5 и 10) и холодной (число Маха 5) пластины для числа Кнудсена $K_n = 5 \times 10^{-3}$. Исследовано влияние граничных условий на картину течения. Показано, что в целом кинетическое решение хорошо согласуется с решением уравнений Навье–Стокса везде кроме области донного вакуума за пластиной.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Титарев В.А., Шахов Е.М. Движение газа, возбуждаемое теплообменом с сильно нагретой стенкой. // Труды Второй Российской национальной конференции по теплообмену. В 8-ми т. – М., 1998. – Т. 2. – С. 248 – 251.
2. Титарев В.А. Движение газа, возбуждаемое теплообменом с сильно нагретой стенкой // Инженерные проблемы новой техники : Тезисы докладов Пятого Международного совещания-семинара. – М., 1998. – С. 144.
3. Титарев В.А., Шахов Е.М. Взаимодействие сверхзвуковых потоков разреженного газа за задней кромкой гладкой пластины // Современные проблемы аэрокосмической техники: Тезисы докладов II Всероссийской научно-технической конференции молодых ученых. – Жуковский, 1999. – С. 100 – 101.

4. Титарев В.А., Шахов Е.М. Слой смешения сверхзвуковых потоков разреженного газа за задней кромкой гладкой пластины // Математическое моделирование. – 1999. – Т 11, № 4. – С. 37-48.
5. Титарев В.А., Шахов Е.М. Гиперзвуковое поперечное обтекание пластины потоком разреженного газа // Вычислительная динамика разреженного газа. ВЦ РАН. М., – 2000. – С. 104-119.
6. Титарев В.А., Шахов Е.М. Сверхзвуковое течение разреженного газа за задней кромкой гладкой пластины // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40, № 3. – С. 483-494.
7. Титарев В.А. Поперечное обтекание пластины гиперзвуковым потоком разреженного газа // Современные проблемы аэрокосмической науки и техники: Тезисы докладов Междлвнаропной научно-технической конферений, 2000. – С. 87 – 89.

1634828

Титарев В.А.

8. Т
с
е
Т

1634828

ВОЗВРАТИТЕ КНИГУ НЕ ПОЗЖЕ
обозначенного здесь срока

9. Т
п
Р
—
10. Т
п
Н
С
