

АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ ДУБЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ С ПРИОРИТЕТНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Ю.Е. Обжерин¹

objsev@mail.ru

С.М. Сидоров²

xaevec@mail.ru

¹ СевГУ, Севастополь, Российская Федерация

² РТУ МИРЭА, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Увеличение числа элементов системы и усложнение выполняемых ими функций приводит к необходимости разработки соответствующих математических моделей надежности. Отказ одного элемента системы может привести к серьезным последствиям и нарушению работоспособности всей системы. В связи с этим при построении математических моделей такой элемент необходимо рассматривать как приоритетный. Надежность систем с приоритетным элементом должна быть обеспечена в первую очередь для поддержания функционирования системы и минимизации последствий отказа элемента. В инженерной практике это достигается дублированием приоритетного элемента, например, в насосных станциях, радиоэлектронике, электроэнергетике, где резервным элементом являются возобновляемые источники энергии, дизельные генераторы, накопители энергии и др. Приведена математическая модель дублированной системы с приоритетным элементом. На основе теории полумарковских процессов с фазовым пространством состояний общего вида определены стационарные характеристики надежности системы. Построена полумарковская модель системы с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний, что позволило получить результаты в более общем виде. При построении модели предположено, что случайные параметры, описывающие времена безотказной работы и восстановления элементов дублированной системы, имеют функции распределения общего вида. С помощью метода последовательных приближений найдено стационарное распределение вложенной цепи Маркова, которое

Ключевые слова

Дублированная восстанавливаемая система, приоритетный элемент, ненагруженный резерв, полумарковская модель, стационарные характеристики надежности

используется для определения стационарных характеристик надежности системы. Приведен пример использования полученных формул в инженерных расчетах

Поступила 06.10.2025

Принята 12.01.2026

© Автор(ы), 2026

Введение. Обеспечение требуемого уровня надежности технической системы и его повышение в настоящее время продолжают оставаться актуальными научными и практическими задачами. С постоянным развитием технических систем увеличивается число элементов, усложняются выполняемые ими функции, и как следствие, возникает необходимость разработки математических моделей надежности технической системы. К серьезным последствиям и отказу системы в целом может привести нарушение работоспособности даже одного элемента системы. В связи с этим при построении математических моделей такой элемент рассматривается как приоритетный. Надежность систем с приоритетным элементом должна быть обеспечена в первую очередь для минимизации последствий в случае его отказа. В инженерной практике методом решения такой задачи является дублирование, которое используется в информационных [1, 2], энергетических [3–5], промышленных [6, 7] и других системах. В дублированных системах (ДС) в качестве приоритетного элемента рассматривается элемент, выполняющий основную функцию.

Первыми работами, посвященными моделированию и анализу надежности восстанавливаемых ДС, являются [8–10]. Восстанавливаемая двухэлементная система холодного резервирования с приоритетным первым элементом в использовании и обслуживании исследована в [11, 12], система горячего резервирования с приоритетным первым элементом в использовании — в [13] в предположении об экспоненциальном распределении времени безотказной работы и восстановления двух элементов системы, что значительно сужает область применения. Параллельная система двух неидентичных элементов изучена в [14], приоритет в обслуживании отдан первому элементу в предположении о распределении Эрланга порядка m для времени безотказной работы первого элемента и о непрерывном распределении общего вида для времени безотказной работы второго элемента и восстановления обоих элементов. Подобная система приведена в [15] с допущением, что время безотказной работы и восстановления двух элементов системы имеет распределение Вейбулла. Сравнение характеристик надежности и эффективности двухэлементных систем холодного и горячего резервирования выполнено в [16]. Двухэлементная система с приоритетным элементом, для которой среднее время безотказной работы вычисляется приближенно, исследована в [17] при условии, что распределение

вероятности времени работы и восстановления может быть аппроксимировано как смешанное распределение Эрланга.

В результате анализа [1, 3, 4, 6, 11–17] выявлено, что в большинстве работ, посвященных моделированию ДС с приоритетным элементом, приведены следующие предположения:

- об экспоненциальных законах распределения времени безотказной работы и времени восстановления элементов системы, что существенно упрощает математическую составляющую исследования, но в то же время не всегда оправдано на практике;

- об определенном распределении (Вейбулла, Эрланга и т. п.) времени безотказной работы и времени восстановления элементов.

Практический пример ДС с приоритетным элементом приведен в [6]. Рассмотрена система электроснабжения больницы, в которой основное электроснабжение приоритетное в использовании, а дополнительные источники питания (накопители, генераторы и др.) резервные.

Дублированная система с приоритетным элементом применяется в электроэнергетике, где в качестве резервного элемента используют возобновляемые источники энергии, дизель-генераторы, накопители энергии; в информационных технологиях, где в качестве резервного элемента используют дублирующие резервные серверы или компоненты и т. д. Особенностью таких систем является то, что после восстановления основной элемент сразу включается в работу (выполняет основную функцию), а резервный элемент мгновенно отключается и начинает восстанавливаться. Такая стратегия функционирования приводит к усложнению математической модели, поскольку появляется связь между элементами системы.

В настоящее время ДС продолжают привлекать интерес ученых благодаря своей относительно простой структуре и большому числу аспектов функционирования, требующих изучения.

Цель настоящей работы — разработать полумарковскую модель ДС с приоритетным элементом в использовании и определить ее стационарные характеристики надежности, используя теорию полумарковских процессов с фазовым пространством состояний общего вида [18–20].

Описание рассматриваемой системы и принятые допущения. Рассмотрим ДС S , состоящую из двух разнородных элементов: основного (приоритетного) K_1 и резервного K_2 , который находится в холодном (ненагруженном) резерве. Модель построена в следующих предположениях.

1. В момент времени $t = 0$ элемент K_1 начинает работать, в то время как элемент K_2 находится в холодном резерве; в начальный момент времени оба элемента новые.

2. Элемент K_2 мгновенно включается в работу (если не находится на восстановлении) в момент отказа элемента K_1 ; система функционирует за счет резервного элемента.

3. Как только элемент K_1 восстановится, он мгновенно начинает работать; если в этот момент элемент K_2 работал, то он отключается и полностью восстанавливается к следующему включению; после восстановления оба элемента считаются «как новые».

4. Если оба элемента восстановятся, то наступает отказ ДС S : отказ продолжается до тех пор, пока любой из элементов не восстановится, причем после восстановления элемент мгновенно начинает работать. Восстановление элементов предполагается неограниченным, т. е. есть два восстанавливающих устройства и после восстановления элементы полностью восстанавливают свои первоначальные характеристики.

5. Случайные величины α_1, α_2 задают время безотказной работы элементов K_1 и K_2 ; предполагается, что они имеют функции распределения $F_1(t) = P(\alpha_1 \leq t)$, $F_2(t) = P(\alpha_2 \leq t)$ и плотности распределения $f_1(t)$, $f_2(t)$.

6. Случайные величины β_1, β_2 задают время восстановления элементов K_1 и K_2 ; для них также предполагается существование функций распределения $G_1(t) = P(\beta_1 \leq t)$, $G_2(t) = P(\beta_2 \leq t)$ и плотности распределения $g_1(t)$, $g_2(t)$.

7. Случайные величины $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ предполагаются независимыми; $M\alpha_i = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_i(x)dx < \infty$, $M\beta_i = \int_{-\infty}^{+\infty} xg_i(x)dx < \infty$, $i = \overline{1, 2}$.

Для описания эволюции ДС S используем полумарковский процесс (ПМП) $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством [21–23]. Множество E полумарковских состояний системы имеет вид

$$E = \{1, 01, 12, 110x, 201x, 100x, 200x, 212x\}.$$

Здесь 1 задает начальное состояние работы системы: основной элемент начинает работать, в то время как резервный элемент отключен; 01 — начало восстановления основного элемента после отказа и мгновенное включение резервного элемента в работу; 12 — начало работы основного элемента после восстановления и мгновенное отключение резервного элемента; 110x (201x) соответствует началу работы основного (резервного) элемента после восстановления, в то время как резервный (основной) элемент находится на восстановлении при условии, что до момента его

восстановления осталось время $x \geq 0$; $100x$ ($200x$) — начало восстановления основного (резервного) элемента после отказа, в то время как резервный (основной) элемент находится на восстановлении при условии, что до момента его восстановления осталось время $x \geq 0$; $212x$ — отключение резервного элемента после восстановления, в то время как основной элемент продолжает работу при условии, что до момента его отказа осталось время $x \geq 0$.

Схема временной диаграммы функционирования ДС S приведена на рис. 1, граф ее переходов — на рис. 2.

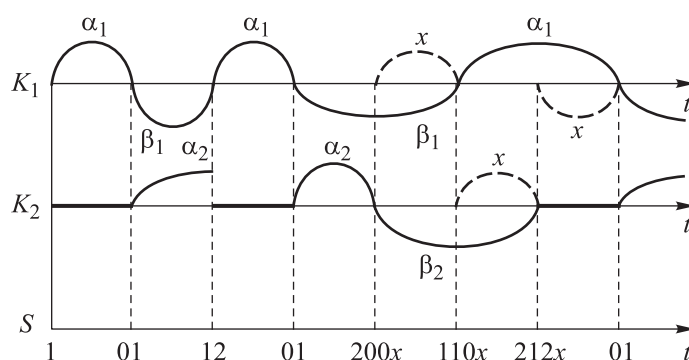


Рис. 1. Схема временной диаграммы функционирования ДС S

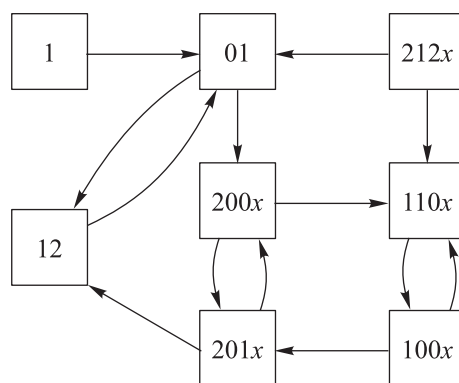


Рис. 2. Граф переходов ДС S

Определим вероятности и плотности вероятностей переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n; n \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} p_{110x}^{212y} &= f_1(x+y), \quad y > 0; & p_{110x}^{100y} &= f_1(x-y), \quad 0 < y < x; \\ p_{201x}^{200y} &= f_2(x-y), \quad 0 < y < x; & p_{201x}^{12} &= \bar{F}_2(x); \\ p_{100x}^{201y} &= g_1(x+y), \quad y > 0; & p_{100x}^{110y} &= g_1(x-y), \quad 0 < y < x; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
p_{200x}^{110y} &= g_2(x+y), \quad y > 0; & p_{200x}^{201y} &= g_2(x-y), \quad 0 < y < x; \\
p_{01}^{200y} &= \int_0^\infty g_1(y+t) f_2(t) dt, \quad y > 0; & P_{01}^{12} &= \int_0^\infty \bar{F}_2(t) g_1(t) dt; \\
P_{212x}^{01} &= 1; \quad P_1^{01} = 1; \quad P_{12}^{01} = 1; & \bar{F}_2(t) &= 1 - F_2(t).
\end{aligned} \tag{1}$$

Нетрудно найти время пребывания на переходах ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$, например, $\theta_{01}^{12} = \beta_1$, $\theta_{201x}^{12} = x$, $\theta_{100x}^{110y} = x - y$, $x > y$.

Таким образом, задан процесс марковского восстановления $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$, следовательно, и соответствующий ему ПМП $\xi(t)$, описывающий функционирование ДС S.

Определение стационарного распределения ВЦМ. Чтобы найти стационарные характеристики надежности системы, необходимо знать стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$.

Пусть $\rho(1)$, $\rho(01)$, $\rho(12)$ — значения стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ на состояниях 1, 01, 12 соответственно, предположим, что существуют стационарные плотности $\rho(110x)$, $\rho(201x)$, $\rho(100x)$, $\rho(200x)$, $\rho(212x)$, отметим, что $\rho(1) = 0$.

Введем следующие обозначения: $\rho_0 = \rho(01)$, $\varphi_1(x) = \rho(110x)$, $\varphi_2(x) = \rho(201x)$, $\varphi_3(x) = \rho(100x)$, $\varphi_4(x) = \rho(200x)$, $\varphi_5(x) = \rho(212x)$.

Используя (1), составим систему интегральных уравнений для определения стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$:

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \rho(12) + \int_0^\infty \varphi_5(x) dx; \\
\rho(12) &= \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_2(t) g_1(t) dt + \int_0^\infty \varphi_2(x) \bar{F}_2(x) dx; \\
\varphi_1(x) &= \int_x^\infty \varphi_3(y) g_1(y-x) dy + \int_0^\infty \varphi_4(y) g_2(x+y) dy; \\
\varphi_2(x) &= \int_x^\infty \varphi_4(y) g_2(y-x) dy + \int_0^\infty \varphi_3(y) g_1(x+y) dy; \\
\varphi_3(x) &= \int_x^\infty \varphi_1(y) f_1(y-x) dy; \\
\varphi_4(x) &= \int_x^\infty \varphi_2(y) f_2(y-x) dy + \rho_0 \int_0^\infty g_1(x+t) f_2(t) dt;
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_5(x) &= \int_0^{\infty} \varphi_1(y) f_1(x+y) dy; \\
\rho_0 + \rho(12) &+ \int_0^{\infty} \varphi_1(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi_2(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi_3(x) dx + \\
&+ \int_0^{\infty} \varphi_4(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi_5(x) dx = 1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Последнее уравнение в системе (2) — это условие нормировки.

Перейдем к решению системы (2), используя метод последовательных приближений [24], введем интегральные операторы:

$$\begin{aligned}
A_{f_1}\varphi &= \int_x^{\infty} f_1(y-x)\varphi(y)dy; \quad A_{f_2}\varphi = \int_x^{\infty} f_2(y-x)\varphi(y)dy; \\
\bar{A}_{f_1}\varphi &= \int_0^{\infty} f_1(x+y)\varphi(y)dy; \\
A_{g_1}\varphi &= \int_x^{\infty} g_1(y-x)\varphi(y)dy; \quad A_{g_2}\varphi = \int_x^{\infty} g_2(y-x)\varphi(y)dy; \\
\bar{A}_{g_1}\varphi &= \int_0^{\infty} g_1(x+y)\varphi(y)dy; \quad \bar{A}_{g_2}\varphi = \int_0^{\infty} g_2(x+y)\varphi(y)dy,
\end{aligned}$$

тогда систему уравнений (2) запишем в виде

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \rho(12) + \int_0^{\infty} \varphi_5(x) dx; \\
\rho(12) &= \rho_0 \int_0^{\infty} \bar{F}_2(t) g_1(t) dt + \int_0^{\infty} \varphi_2(x) \bar{F}_2(x) dx; \\
\varphi_1 &= A_{g_1}\varphi_3 + \bar{A}_{g_2}\varphi_4; \\
\varphi_2 &= A_g\varphi_4 + \bar{A}_{g_1}\varphi_3; \\
\varphi_3 &= A_{f_1}\varphi_1; \\
\varphi_4 &= A_{f_2}\varphi_2 + \rho_0 \bar{A}_{g_1}f_2; \\
\varphi_5 &= \bar{A}\varphi_1; \\
\rho_0 + \rho(12) &+ \int_0^{\infty} \varphi_1(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi_2(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi_3(x) dx + \\
&+ \int_0^{\infty} \varphi_4(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi_5(x) dx = 1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя третье уравнение системы (3) в пятое, получаем

$$\varphi_3 = (A_{f_1} A_{g_1}) \varphi_3 + (A_{f_1} \bar{A}_{g_2}) \varphi_4. \quad (4)$$

Введем оператор

$$A_{f_1, g_1} \varphi = (A_{f_1} A_{g_1}) \varphi = \int_x^\infty (f_1 g_1)(z - x) \varphi(z) dz,$$

тогда (4) представим в виде

$$\varphi_3 = A_{f_1, g_1} \varphi_3 + (A_{f_1} \bar{A}_{g_2}) \varphi_4,$$

откуда

$$\begin{aligned} (I - A_{f_1, g_1}) \varphi_3 &= (A_{f_1} \bar{A}_{g_2}) \varphi_4; \\ \varphi_3 &= (I - A_{f_1, g_1})^{-1} (A_{f_1} \bar{A}_{g_2}) \varphi_4; \end{aligned} \quad (5)$$

$$(I - A_{f_1, g_1})^{-1} \varphi = I + \sum_{n=1}^{\infty} A_{f_1, g_1}^n \varphi = I + \int_x^\infty h^{(1)}(y - x) \varphi(y) dy,$$

$$\text{где } A_{f_1, g_1}^n \varphi = \int_x^\infty (f_1 g_1)^{(n)}(y - x) \varphi(y) dy, \quad h^{(1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_1 g_1)^{(n)}(x) \quad —$$

плотность функции 1-восстановлений [1].

Введем интегральный оператор Γ_1 :

$$\Gamma_1 \varphi = (I - A_{f_1, g_1})^{-1} (A_{f_1} \bar{A}_{g_2}) \varphi = \int_0^\infty \gamma_1(x, y) \varphi(y) dy,$$

где

$$\gamma_1(x, y) = \int_0^\infty g_2(x + y + t) f_1(t) dt + \int_0^\infty h^{(1)}(s) ds \int_0^y g_2(x + y + s + t) f_1(t) dt.$$

Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$\varphi_3 = \Gamma_1 \varphi_4. \quad (6)$$

Подставляя четвертое уравнение системы (3) в шестое, получаем

$$\varphi_4 = (A_{f_2} A_{g_2}) \varphi_4 + (A_{f_2} \bar{A}_{g_1}) \varphi_3 + \rho_0 \bar{A}_{g_1} f_2. \quad (7)$$

Введем оператор

$$A_{f_2, g_2} \varphi = (A_{f_2} A_{g_2}) \varphi = \int_x^\infty (f_2 g_2)(z - x) \varphi(z) dz,$$

уравнение (7) запишем в виде

$$\varphi_4 = A_{f_2, g_2} \varphi_4 + (A_{f_2} \bar{A}_{g_1}) \varphi_3 + \rho_0 \bar{A}_{g_1} f_2,$$

откуда

$$(I - A_{f_2, g_2}) \varphi_4 = (A_{f_2} \bar{A}_{g_1}) \varphi_3 + \rho_0 \bar{A}_{g_1} f_2;$$

$$\varphi_4 = (I - A_{f_2, g_2})^{-1} (A_{f_2} \bar{A}_{g_1}) \varphi_3 + \rho_0 (I - A_{f_2, g_2})^{-1} (\bar{A}_{g_1} f_2); \quad (8)$$

$$(I - A_{f_2, g_2})^{-1} \varphi = I + \sum_{n=1}^{\infty} A_{f_2, g_2}^n \varphi = I + \int_x^{\infty} h^{(2)}(y-x) \varphi(y) dy,$$

где $A_{f_2, g_2}^n \varphi = \int_x^{\infty} (f_2 g_2)^{(n)}(y-x) \varphi(y) dy$, $h^{(2)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_2 g_2)^{(n)}(x)$ —

плотность функции 1-восстановлений [1].

Введем интегральный оператор Γ_2 :

$$\Gamma_2 \varphi = (I - A_{f_2, g_2})^{-1} (A_{f_2} \bar{A}_{g_1}) \varphi = \int_0^{\infty} \gamma_2(x, y) \varphi(y) dy,$$

где

$$\gamma_2(x, y) = \int_0^{\infty} g_1(x + y + t) f_2(t) dt + \int_0^{\infty} h^{(2)}(s) ds \int_0^y g_1(x + y + s + t) f_2(t) dt.$$

Тогда уравнение (8) запишется в виде

$$\varphi_4 = \Gamma_2 \varphi_3 + \rho_0 (I - A_{f_2, g_2})^{-1} (\bar{A}_{g_1} f_2).$$

Преобразовав выражение $(I - A_{f_2, g_2})^{-1} (\bar{A}_{g_1} f_2)$, получим

$$\begin{aligned} (I - A_{f_2, g_2})^{-1} (\bar{A}_{g_1} f_2) &= \int_0^{\infty} g_1(x + y) f_2(y) dy + \\ &+ \int_0^{\infty} h^{(2)}(y) dy \int_0^{\infty} g_1(x + y + t) f_2(t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно, можно представить уравнение (8) в виде

$$\varphi_4 = \Gamma_2 \varphi_3 + \rho_0 \int_0^{\infty} g_1(x + y) f_2(y) dy + \rho_0 \int_0^{\infty} h^{(2)}(y) dy \int_0^{\infty} g_1(x + y + t) f_2(t) dt. \quad (9)$$

Подставляя (6) в (9), получаем

$$\varphi_4 = (\Gamma_2 \Gamma_1) \varphi_4 + \rho_0 \int_0^{\infty} g_1(x+y) f_2(y) dy + \rho_0 \int_0^{\infty} h^{(2)}(y) dy \int_0^{\infty} g_1(x+y+t) f_2(t) dt.$$

Введем оператор

$$K \varphi = (\Gamma_2 \Gamma_1) \varphi = \int_0^{\infty} k(x, y) \varphi(y) dy,$$

где $k(x, y) = \int_0^{\infty} \gamma_2(x, t) \gamma_1(t, y) dt$, тогда

$$\varphi_4 = K \varphi_4 + \rho_0 \int_0^{\infty} g_1(x+y) f_2(y) dy + \rho_0 \int_0^{\infty} h^{(2)}(y) dy \int_0^{\infty} g_1(x+y+t) f_2(t) dt;$$

$$(I - K) \varphi_4 + \rho_0 \int_0^{\infty} g_1(x+y) f_2(y) dy + \rho_0 \int_0^{\infty} h^{(2)}(y) dy \int_0^{\infty} g_1(x+y+t) f_2(t) dt;$$

$$\begin{aligned} \varphi_4 = & \rho_0 (I - K)^{-1} \left(\int_0^{\infty} g_1(x+y) f_2(y) dy \right) + \\ & + \rho_0 (I - K)^{-1} \left(\int_0^{\infty} h^{(2)}(y) dy \int_0^{\infty} g_1(x+y+t) f_2(t) dt \right); \end{aligned}$$

$$(I - K)^{-1} \varphi = I + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \varphi = I + \int_x^{\infty} \pi(x, y) \varphi(y) dy,$$

функция $\pi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} k^{(n)}(x, y)$, где $k^{(n)}(x, y) = \int_0^{\infty} k(x, \tau) k^{(n-1)}(\tau, y) d\tau$,

причем $k^{(1)}(x, y) = k(x, y)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_4(x) = & \rho_0 \left(\int_0^{\infty} g_1(x+y) f_2(y) dy + \int_0^{\infty} h^{(2)}(y) dy \int_0^{\infty} g_1(x+y+t) f_2(t) dt + \right. \\ & \left. + \int_0^{\infty} \pi(x, y) dy \int_0^{\infty} g_1(y+t) f_2(t) dt + \int_0^{\infty} \pi(x, y) dy \int_0^{\infty} h^{(2)}(s) ds \int_0^{\infty} g_1(y+s+t) f_2(t) dt \right). \end{aligned}$$

Введем функцию $\psi(x)$, которая будет использоваться для определения стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$:

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} g_1(x+y) f_2(y) dy + \int_0^{\infty} h^{(2)}(y) dy \int_0^{\infty} g_1(x+y+t) f_2(t) dt +$$

$$+ \int_0^{\infty} \pi(x, y) dy \int_0^{\infty} g_1(y+t) f_2(t) dt + \int_0^{\infty} \pi(x, y) dy \int_0^{\infty} h^{(2)}(s) ds \int_0^{\infty} g_1(y+s+t) f_2(t) dt. \quad (10)$$

Используя (10), (6) и систему уравнений (3), найдем стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} \rho(12) &= \rho_0 \left(\int_0^{\infty} \bar{F}_2(t) g_1(t) dt + \int_0^{\infty} \bar{F}_2(x) dx \int_0^{\infty} g_2(y) \psi(x+y) dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \bar{F}_2(x) dx \int_0^{\infty} g_1(x+y) dy \int_0^{\infty} \gamma_1(y, t) \psi(t) dt \right); \\ \rho(110x) &= \varphi_1(x) = \rho_0 \left(\int_0^{\infty} g_1(y) dy \int_0^{\infty} \gamma_1(x+y, t) \psi(t) dt + \int_0^{\infty} g_2(x+y) \psi(y) dy \right); \\ \rho(201x) &= \varphi_2(x) = \rho_0 \left(\int_0^{\infty} g_2(y) \psi(x+y) dy + \int_0^{\infty} g_1(x+y) dy \int_0^{\infty} \gamma_1(y, t) \psi(t) dt \right); \\ \rho(100x) &= \varphi_3(x) = \rho_0 \int_0^{\infty} \gamma_1(x, y) \psi(y) dy; \\ \rho(200x) &= \varphi_4(x) = \rho_0 \psi(x); \\ \rho(212x) &= \varphi_5(x) = \rho_0 \left(\int_0^{\infty} f_1(x+y) dy \int_0^{\infty} g_1(s) ds \int_0^{\infty} \gamma_1(y+s, t) \psi(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} f_1(x+y) dy \int_0^{\infty} g_2(y+t) \psi(t) dt \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\rho_0 = \rho(01)$ определим из условия нормировки.

Отметим, что из первого уравнения системы (3) следует равенство

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \bar{F}_2(t) g_1(t) dt + \int_0^{\infty} \bar{F}_2(x) dx \int_0^{\infty} g_2(y) \psi(x+y) dy + \\ &\quad + \int_0^{\infty} \bar{F}_2(x) dx \int_0^{\infty} g_1(x+y) dy \int_0^{\infty} \gamma_1(y, t) \psi(t) dt + \\ &\quad + \int_0^{\infty} \bar{F}_1(y) dy \int_0^{\infty} g_1(s) ds \int_0^{\infty} \gamma_1(y+s, t) \psi(t) dt + \int_0^{\infty} \bar{F}_1(y) dy \int_0^{\infty} g_2(y+t) \psi(t) dt = 1, \end{aligned} \quad (12)$$

которое будет использоваться при определении стационарных характеристик системы.

Определение стационарных характеристик надежности. Найдем средние значения времени пребывания в состояниях, которые определяются формулами:

$$\theta_1 = \alpha_1; \theta_{01} = \beta_1 \wedge \alpha_2; \theta_{12} = \alpha_1; \theta_{110x} = \alpha_1 \wedge x; \theta_{201x} = \alpha_2 \wedge x;$$

$$\theta_{100x} = \beta_1 \wedge x; \theta_{200x} = \beta_2 \wedge x; \theta_{212x} = x,$$

где $\wedge$ — знак минимума.

Следовательно,

$$M\theta_1 = M\alpha_1; M\theta_{01} = M(\beta_1 \wedge \alpha_2) = \int_0^\infty \bar{G}_1(t)\bar{F}_2(t)dt; M\theta_{12} = M\alpha_1;$$

$$M\theta_{110x} = M(\alpha_1 \wedge x) = \int_0^x \bar{F}_1(t)dt; M\theta_{201x} = M(\alpha_2 \wedge x) = \int_0^x \bar{F}_2(t)dt; \quad (13)$$

$$M\theta_{100x} = M(\beta_1 \wedge x) = \int_0^x \bar{G}_1(t)dt; M\theta_{200x} = M(\beta_2 \wedge x) = \int_0^x \bar{G}_2(t)dt;$$

$$M\theta_{212x} = x.$$

Представим множество состояний системы E в виде

$$E = E_+ \cup E_-,$$

где $E_+ = \{1, 01, 12, 110x, 201x, 212x\}$ — множество работоспособных состояний системы; $E_- = \{100x, 200x\}$ — множество неработоспособных состояний.

Для определения среднего стационарного времени безотказной работы T_+ , среднего стационарного времени восстановления T_- и стационарного коэффициента готовности K_Γ используем формулы [19, 21, 22]:

$$T_+ = \frac{\int_{E_+} m(e)\rho(de)}{\int_{E_+} P(e, E_-)\rho(de)}; \quad T_- = \frac{\int_{E_-} m(e)\rho(de)}{\int_{E_+} P(e, E_-)\rho(de)}; \quad (14)$$

$$K_\Gamma = \frac{\int_{E_+} m(e)\rho(de)}{\int_E m(e)\rho(de)} = \frac{T_+}{T_+ + T_-},$$

где $m(e)$ — среднее время пребывания ПМП $\xi(t)$ в состоянии $e \in E$; $\rho(de)$ — стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$; $P(e, E_-)$ — вероятность перехода ВЦМ в E_- .

Запишем выражения, входящие в (14). Используя (12), (13), получаем

$$\begin{aligned}
 & \int_{E_+} m(e) \rho(de) = \\
 & = \rho_0 \left[M\alpha_1 \left(\int_0^\infty \overline{F}_2(t) g_1(t) dt + \int_0^\infty \overline{G}_2(t) \psi(t) dt + \int_0^\infty \overline{F}_2(x) dx \int_0^\infty g_2(y) \psi(x+y) dy + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \int_0^\infty \psi(t) dt \int_0^\infty g_1(s) ds \int_0^\infty \gamma_1(y+s, t) dt + \int_0^\infty \overline{F}_2(x) dx \int_0^\infty g_1(x+y) dy \int_0^\infty \gamma_1(y, t) \psi(t) dt \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^\infty \overline{G}_1(t) \overline{F}_2(t) dt + \int_0^\infty \overline{F}_2(t) dt \int_0^\infty \overline{G}_2(y) \psi(t+y) dy + \int_0^\infty \overline{F}_2(x) dx \int_0^\infty \overline{G}_1(x+y) dy \int_0^\infty \gamma_1(y, t) \psi(t) dt \right]; \\
 & \int_{E_-} m(e) \rho(de) = \rho_0 \left(\int_0^\infty dx \int_0^\infty \gamma_1(x, y) \psi(y) dy \int_0^x \overline{G}_1(t) dt + \int_0^\infty \psi(x) dx \int_0^x \overline{G}_2(t) dt \right) = \\
 & = \rho_0 \left(\int_0^\infty \overline{G}_2(t) dt \int_t^\infty \psi(x) dx + \int_0^\infty \overline{G}_1(t) dt \int_t^\infty \psi(y) dy \int_t^\infty \gamma_1(x, y) dx \right); \\
 & \int_{E_+} P(e, E_-) \rho(de) = \rho_0 \left(\int_0^\infty \overline{G}_1(t) f_2(t) dt + \int_0^\infty \overline{F}_2(x) dx \int_0^\infty g_2(y) \psi(x+y) dy + \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^\infty \overline{F}_2(x) dx \int_0^\infty g_1(x+y) dy \int_0^\infty \gamma_1(y, t) \psi(t) dt + \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^\infty \overline{F}_1(x) dx \int_0^\infty g_1(y) dy \int_0^\infty \gamma_1(x+y, t) \psi(t) dt + \int_0^\infty \overline{F}_1(x) dx \int_0^\infty g_2(x+y) \psi(y) dy \right).
 \end{aligned}$$

Из равенства (12) получим

$$\int_{E_+} P(e, E_-) \rho(de) = \rho_0 \left(\int_0^\infty \psi(y) dy + \int_0^\infty \psi(t) dt \int_0^\infty \gamma_1(y, t) dy \right).$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}
 & T_+ = \\
 & = \frac{M\alpha_1 A + \int_0^\infty \overline{G}_1(t) \overline{F}_2(t) dt + \int_0^\infty \overline{F}_2(t) dt \int_0^\infty \overline{G}_2(y) \psi(t+y) dy + \int_0^\infty \overline{F}_2(x) dx \int_0^\infty \overline{G}_1(x+y) dy \int_0^\infty \gamma_1(y, t) \psi(t) dt}{\int_0^\infty \psi(y) dy + \int_0^\infty \psi(t) dt \int_0^\infty \gamma_1(y, t) dy}; \\
 & T_- = \frac{\int_0^\infty \overline{G}_2(t) dt \int_t^\infty \psi(x) dx + \int_0^\infty \overline{G}_1(t) dt \int_t^\infty \psi(y) dy \int_t^\infty \gamma_1(x, y) dx}{\int_0^\infty \psi(y) dy + \int_0^\infty \psi(t) dt \int_0^\infty \gamma_1(y, t) dy}, \tag{15}
 \end{aligned}$$

где

$$A = \int_0^{\infty} \overline{F_2}(t) g_1(t) dt + \int_0^{\infty} \overline{G_2}(t) \psi(t) dt + \\ + \int_0^{\infty} \overline{F_2}(x) dx \int_0^{\infty} g_2(y) \psi(x+y) dy + \int_0^{\infty} \psi(y) dy \int_0^{\infty} g_1(s) ds \int_0^{\infty} \gamma_1(y+s, t) dt + \\ + \int_0^{\infty} \overline{F_2}(x) dx \int_0^{\infty} g_1(x+y) dy \int_0^{\infty} \gamma_1(y, t) \psi(t) dt.$$

Обсуждение полученных результатов. Основная трудность применения формул (15) состоит в нахождении резольвенты $\pi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} k^{(n)}(x, y)$. Решение этой задачи проще в случаях, когда ядро $k(x, y)$

является вырожденным [25], т. е. если ядро $k(x, y)$ можно представить в виде $k(x, y) = P(x)Q(y)$ (ядро $k(x, y)$ является вырожденным) и функции $P(x)$, $Q(y)$ удовлетворяют условию

$$\int_0^{\infty} Q(\tau)P(\tau)d\tau = q < 1, \text{ то } \pi(x, y) = \frac{1}{1-q} P(x)Q(y). \quad (16)$$

Пример. Пусть время безотказной работы и восстановления элементов K_1 и K_2 описывается случайными величинами, имеющими экспоненциальные распределения с плотностями $f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}$, $\lambda_i > 0$; $g_i(t) = \mu_i e^{-\mu_i t}$, $\mu_i > 0$, при $t \geq 0$, $i = 1, 2$.

В этом случае

$$h^{(1)}(x) = \frac{\lambda_1 \mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} [1 - e^{-(\lambda_1 + \mu_1)x}]; \quad h^{(2)}(x) = \frac{\lambda_2 \mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} [1 - e^{-(\lambda_2 + \mu_2)x}]; \\ \gamma_1(x, y) = \frac{\lambda_1(\mu_1 + \mu_2)}{\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2} e^{-\mu_2(x+y)}; \quad \gamma_2(x, y) = \frac{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2)}{\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2} e^{-\mu_1(x+y)}; \\ k(x, y) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\mu_1 + \mu_2)}{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)} e^{-\mu_1 x} e^{-\mu_2 y}.$$

Ядро $k(x, y)$ является вырожденным, для определения резольвенты $\pi(x, y)$ можно применить условие (16). Тогда получим

$$\pi(x, y) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2} e^{-\mu_1 x} e^{-\mu_2 y}; \\ \psi(x) = \frac{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2} e^{-\mu_1 x}. \quad (17)$$

В этом случае стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\rho(12) &= \rho_0 \frac{\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2}; \\ \rho(110x) &= \varphi_1(x) = \rho_0 \frac{(\lambda_1 + \mu_2)\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2} e^{-\mu_2 x}; \\ \rho(201x) &= \varphi_2(x) = \rho_0 \frac{(\lambda_1 + \mu_2)\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2} e^{-\mu_1 x}; \\ \rho(100x) &= \varphi_3(x) = \rho_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2} e^{-\mu_2 x}; \\ \rho(200x) &= \varphi_4(x) = \rho_0 \frac{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2} e^{-\mu_1 x}; \\ \rho(212x) &= \varphi_5(x) = \rho_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2} e^{-\lambda_1 x},\end{aligned}$$

константа $\rho_0 = \rho(01)$ находится из условия нормировки.

Найдем характеристики надежности T_+ , T_- , K_T . Используя (14), (17), определяем

$$\begin{aligned}\int_{E_+} m(e)\rho(de) &= \rho_0 \frac{\mu_1 \mu_2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) + \lambda_1 \mu_2 (\lambda_1 + \mu_2) + \lambda_1 \mu_1 (\lambda_2 + \mu_2)}{\lambda_1 \mu_1 \mu_2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)}; \\ \int_{E_-} m(e)\rho(de) &= \rho_0 \frac{\lambda_2 (\lambda_1 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)}; \\ \int_{E_+} P(e, E_-)\rho(de) &= \rho_0 \frac{\lambda_2 (\lambda_1 + \mu_2) (\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)}.\end{aligned}$$

Получаем следующие выражения для стационарных характеристик надежности:

$$T_+ = \frac{\mu_1 \mu_2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) + \lambda_1 \mu_2 (\lambda_1 + \mu_2) + \lambda_1 \mu_1 (\lambda_2 + \mu_2)}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \mu_2) (\mu_1 + \mu_2)}; \quad (18)$$

$$T_- = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned}K_T &= \\ &= \frac{\mu_1 \mu_2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) + \lambda_1 \mu_2 (\lambda_1 + \mu_2) + \lambda_1 \mu_1 (\lambda_2 + \mu_2)}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \mu_2) + \mu_1 \mu_2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) + \lambda_1 \mu_2 (\lambda_1 + \mu_2) + \lambda_1 \mu_1 (\lambda_2 + \mu_2)}.\end{aligned} \quad (20)$$

В таблице приведены результаты расчетов стационарных характеристик надежности T_+ , K_r по формулам (18), (20) при разных λ .

1. Расчет выполнен при $\lambda_2 = 0,02$, т. е. среднее время безотказной работы резервного элемента $M\alpha_2 = 50$ ч; $\mu_2 = 0,1$, т. е. среднее время восстановления резервного элемента $M\beta_2 = 10$ ч; $\mu_1 = 0,025$, т. е. среднее время восстановления приоритетного элемента $M\beta_1 = 40$ ч; значение параметра λ_1 изменяется так, чтобы среднее время безотказной работы приоритетного элемента изменялось от 200 до 700 ч с шагом 50 ч (11 шагов).

2. Расчет выполнен при $\lambda_1 = 0,005$, т. е. среднее время безотказной работы приоритетного элемента $M\alpha_1 = 200$ ч; $\mu_1 = \mu_2 = 0,1$, т. е. среднее время восстановления приоритетного и резервного элементов $M\beta_2 = 10$ ч. Значение параметра λ_2 изменяется так, чтобы среднее время безотказной работы резервного элемента варьировалось от 40 до 140 ч с шагом 10 ч (11 шагов).

**Значения стационарных характеристик надежности T_+ , K_r
в зависимости от среднего времени безотказной работы
приоритетного и резервного элементов**

Номер шага	T_+ , ч	K_r	T_+ , ч	K_r
	при $\lambda_2 = 0,02$		при $\lambda_1 = 0,005$	
1	337,14	0,97682	920	0,99460
2	409,71	0,98085	1125	0,99558
3	482,26	0,98368	1330	0,99625
4	554,79	0,98579	1535	0,99675
5	627,32	0,98741	1740	0,99714
6	699,84	0,98870	1945	0,99744
7	772,35	0,98975	2150	0,99768
8	844,87	0,99062	2355	0,99788
9	917,38	0,99136	2560	0,99805
10	989,87	0,99198	2765	0,99820
11	1062,39	0,99253	2970	0,99832

Формулы (18)–(20) позволяют подбирать параметры среднего времени безотказной работы и восстановления приоритетного и резервного элементов так, чтобы система достигала требуемых значений стационарных характеристик надежности.

Заключение. Использование ПМП с фазовым пространством состояний общего вида приводит к наиболее общим моделям в теории надежности, поскольку включает в себя в качестве частных случаев марковские про-

цессы и процессы восстановления. Разработанная ПМП позволила снять ограничения, зачастую накладываемые при моделировании ДС с приоритетным элементом на конкретные виды распределения времени безотказной работы и времени восстановления элементов. Для предложенной модели найдено стационарное распределение ВЦМ, которое позволило получить аналитические выражения для стационарного коэффициента готовности, среднего стационарного времени восстановления и среднего стационарного времени безотказной работы системы. Результаты исследования применимы для различных технических систем и позволяют решать оптимизационные задачи выбора параметров элементов системы.

Дальнейшие исследования связаны с определением и приближенным вычислением нестационарных и стационарных характеристик надежности рассматриваемой системы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Beichelt F, Tittmann P. Reliability and maintenance — networks and systems. Mathematical models. New York, CRC Press, 2012.
- [2] Obzherin Y.E., Sidorov S.M., Nikitin M.M. Reliability of the information system with intermediate storage devices. In: *Distributed computer and communication networks*. Cham, Springer, 2018, pp. 432–444. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-99447-5_37
- [3] Руденко Ю.Н., Ушаков И.А. Надежность систем энергетики. Новосибирск, Наука, 1989.
- [4] Pham H. Handbook of reliability engineering. London, Springer, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1007/b97414>
- [5] Obzherin Yu.E., Sidorov S.M., Nikitin M.M. Analysis of reliability of systems with component-wise storages. *E3S Web Conf.*, 2018, vol. 58, art. 02024. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20185802024>
- [6] Grabski F. Semi-Markov processes. Amsterdam, Elsevier Science, 2014.
- [7] Cui L., Jiang W., Wang M. Reliability analysis for warm standby systems with two different spare areas. In: *Reliability analysis and maintenance optimization of complex systems*. Cham, Springer, 2025, pp. 45–63. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-70288-4_4
- [8] Gaver D.P. Failure time for a redundant repairable system of two dissimilar elements. *IEEE Trans. Reliab.*, 1964, vol. R-13, no. 1, pp. 14–22. DOI: <https://doi.org/10.1109/TR.1964.5218240>
- [9] Гнеденко Б.В. О ненагруженном дублировании. *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*, 1964, № 4, с. 3–12.
- [10] Гнеденко Б.В. О дублировании с восстановлением. *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*, 1964, № 5, с. 111–118.

- [11] Zhang Y.L., Wang G.J. A deteriorating cold standby repairable system with priority in use. *Eur. J. Oper. Res.*, 2007, vol. 183, no. 1, pp. 278–295.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.09.075>
- [12] Leung K.F., Zhang Y.L., Lai K.K. Analysis for a two-dissimilar-component cold standby repairable system with repair priority. *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, 2011, vol. 96, no. 11, pp. 1542–1551. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ress.2011.06.004>
- [13] Yuan L., Meng X.Y. Reliability analysis of a warm standby repairable system with priority in use. *Appl. Math. Model.*, 2011, vol. 35, no. 9, pp. 4295–4303.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.03.002>
- [14] Li W., Shi D. Reliability analysis of a two-unit parallel system with “preemptive priority” rule. *Microelectron. Reliab.*, 1993, vol. 33, no. 10, pp. 1447–1453.
DOI: [https://doi.org/10.1016/0026-2714\(93\)90098-J](https://doi.org/10.1016/0026-2714(93)90098-J)
- [15] Pundir P.S., Patawa R., Gupta P.K. Stochastic outlook of two non-identical unit parallel system with priority in repair. *Cogent Math. Stat.*, 2018, vol. 5, no. 1, art. 1467208.
DOI: <https://doi.org/10.1080/25742558.2018.1467208>
- [16] Malhotra R., Alamri F.S., Khalifa H.A.E-W. Novel analysis between two-unit hot and cold standby redundant systems with varied demand. *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 6, art. 1220. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym15061220>
- [17] Takemoto Y., Arizono I. A study of MTTF in two-unit standby redundant system with priority under limited information about failure and repair times. *Proc. Inst. Mech. Eng. O*, 2016, vol. 230, no. 1, pp. 67–74.
DOI: <https://doi.org/10.1177/1748006X15584235>
- [18] Cinlar E. On semi-Markov processes on arbitrary spaces. *Proc. Camb. Philos. Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1969, vol. 66, no. 2, pp. 381–392.
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004100045096>
- [19] Корольук В.С., Турбин А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев, Наукова Думка, 1982.
- [20] Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic models of systems. Dordrecht, Springer, 1999.
- [21] Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.М. и др. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. Кишинев, Штиинца, 1991.
- [22] Obzherin Yu.E., Boyko E.G. Semi-Markov models. London, Academic Press, 2015.
- [23] Обжерин Ю.Е., Сидоров С.М. Полумарковские модели двухфазных асинхронных линий с накопителем. *Прикладная информатика*, 2025, т. 20, № 1, с. 28–47.
DOI: <https://doi.org/10.37791/2687-0649-2025-20-1-28-47>
- [24] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., Наука, 1984.
- [25] Polyanin P., Manzhirov A.V. Handbook of integral equations. New York, CRC Press, 2008.

Обжерин Юрий Евгеньевич — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика» СевГУ (Российская Федерация, 299053, Севастополь, Университетская ул., д. 33).

Сидоров Станислав Михайлович — канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики РТУ МИРЭА (Российская Федерация, 119454, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Обжерин Ю.Е., Сидоров С.М. Анализ надежности дублированной системы с приоритетным элементом. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2026, № 2 (155), с. 58–79. EDN: CMQZLG

**DUPLICATED SYSTEM RELIABILITY ANALYSIS
WITH A PRIORITY ELEMENT**

Yu.E. Obzherin¹

objsev@mail.ru

S.M. Sidorov²

xaevec@mail.ru

¹ Sevastopol State University, Sevastopol, Russian Federation

² RTU MIREA, Moscow, Russian Federation

Abstract

The increase in the number of system elements and the constant complication of their functions leads to the need to develop appropriate mathematical models of reliability. The failure of a single system element can have serious consequences and lead to the failure of the entire system, so it is important to consider this element as a priority when building mathematical models. The reliability of systems with a priority element should be ensured primarily to maintain the system's functionality and minimize the impact of element failure. In engineering practice, this is achieved by duplicating the priority element, which is used in pumping stations, radio electronics, and the electric power engineering, where the backup element is renewable energy sources, diesel generators, energy storage systems, etc. The article presents a mathematical model of a duplicated system with a priority element. Based on the theory of semi-Markov processes with a phase space of states, the stationary reliability characteristics of the system are determined. A semi-Markov model with a discrete-continuous phase space of states is constructed,

Keywords

Duplicated repairable system, priority element, unloaded reserve, semi-Markov model, stationary reliability characteristics

which allowed us to obtain results in a more general form. When constructing the model, it was assumed that random variables describing the failure-free operation and restoration times of all elements of the duplicated system have probability distribution functions of a general type. Using the method of successive approximations, the stationary distribution of the embedded Markov chain is found, which is used to determine the system stationary reliability characteristics. An example of using the obtained formulas in engineering calculations is provided

Received 06.10.2025

Accepted 12.01.2026

© Author(s), 2026

REFERENCES

- [1] Beichelt F., Tittmann P. Reliability and maintenance — networks and systems. Mathematical models. New York, CRC Press, 2012.
- [2] Obzherin Y.E., Sidorov S.M., Nikitin M.M. Reliability of the information system with intermediate storage devices. In: *Distributed computer and communication networks*. Cham, Springer, 2018, pp. 432–444. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-99447-5_37
- [3] Rudenko Yu.N., Ushakov I.A. Nadezhnost sistem energetiki [Reliability of energy systems]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1989.
- [4] Pham H. Handbook of reliability engineering. London, Springer, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1007/b97414>
- [5] Obzherin Yu.E., Sidorov S.M., Nikitin M.M. Analysis of reliability of systems with component-wise storages. *E3S Web Conf.*, 2018, vol. 58, art. 02024. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20185802024>
- [6] Grabski F. Semi-Markov processes. Amsterdam, Elsevier Science, 2014.
- [7] Cui L., Jiang W., Wang M. Reliability analysis for warm standby systems with two different spare areas. In: *Reliability analysis and maintenance optimization of complex systems*. Cham, Springer, 2025, pp. 45–63. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-70288-4_4
- [8] Gaver D.P. Failure time for a redundant repairable system of two dissimilar elements. *IEEE Trans. Reliab.*, 1964, vol. R-13, no. 1, pp. 14–22. DOI: <https://doi.org/10.1109/TR.1964.5218240>
- [9] Gnedenko B.V. On spare duplication. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1964, no. 4, pp. 3–12 (in Russ.).
- [10] Gnedenko B.V. On duplication with restoration. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1964, no. 5, pp. 111–118 (in Russ.).
- [11] Zhang Y.L., Wang G.J. A deteriorating cold standby repairable system with priority in use. *Eur. J. Oper. Res.*, 2007, vol. 183, no. 1, pp. 278–295. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.09.075>

- [12] Leung K.F., Zhang Y.L., Lai K.K. Analysis for a two-dissimilar-component cold standby repairable system with repair priority. *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, 2011, vol. 96, no. 11, pp. 1542–1551. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.res.2011.06.004>
- [13] Yuan L., Meng X.Y. Reliability analysis of a warm standby repairable system with priority in use. *Appl. Math. Model.*, 2011, vol. 35, no. 9, pp. 4295–4303. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.03.002>
- [14] Li W., Shi D. Reliability analysis of a two-unit parallel system with “preemptive priority” rule. *Microelectron. Reliab.*, 1993, vol. 33, no. 10, pp. 1447–1453. DOI: [https://doi.org/10.1016/0026-2714\(93\)90098-J](https://doi.org/10.1016/0026-2714(93)90098-J)
- [15] Pundir P.S., Patawa R., Gupta P.K. Stochastic outlook of two non-identical unit parallel system with priority in repair. *Cogent Math. Stat.*, 2018, vol. 5, no. 1, art. 1467208. DOI: <https://doi.org/10.1080/25742558.2018.1467208>
- [16] Malhotra R., Alamri F.S., Khalifa H.A.E-W. Novel analysis between two-unit hot and cold standby redundant systems with varied demand. *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 6, art. 1220. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym15061220>
- [17] Takemoto Y., Arizono I. A study of MTTF in two-unit standby redundant system with priority under limited information about failure and repair times. *Proc. Inst. Mech. Eng. O*, 2016, vol. 230, no. 1, pp. 67–74. DOI: <https://doi.org/10.1177/1748006X15584235>
- [18] Cinlar E. On semi-Markov processes on arbitrary spaces. *Proc. Camb. Philos. Math. Soc.*, 1969, vol. 66, no. 2, pp. 381–392. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004100045096>
- [19] Korolyuk V.S., Turbin A.F. Protsessy markovskogo vosstanovleniya v zadachakh nadezhnosti sistem [Markovian restoration processes in the problems of system reliability]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1982.
- [20] Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic models of systems. Dordrecht, Springer, 1999.
- [21] Korlat A.N., Kuznetsov V.N., Novikov M.M., et al. Polumarkovskie modeli vosstanavlivaemykh sistem i sistem massovogo obsluzhivaniya [Semi-Markov models of recoverable systems and queuing systems]. Kishinev, Shtiintsa Publ., 1991.
- [22] Obzherin Yu.E., Boyko E.G. Semi-Markov models. London, Academic Press, 2015.
- [23] Obzherin Yu.E., Sidorov S.M. Semi-Markov models of two-phase asynchronous lines with storage. *Prikladnaya informatika* [Journal of Applied Informatics], 2025, vol. 20, no. 1, pp. 28–47 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.37791/2687-0649-2025-20-1-28-47>
- [24] Kantorovich L.V., Akilov G.P. Funktsionalnyy analiz [Functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1984.
- [25] Polyanin P., Manzhirov A.V. Handbook of integral equations. New York, CRC Press, 2008.

Obzherin Yu.E. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Higher Mathematics, Sevastopol State University (Universitetskaya ul. 33, Sevastopol, 299053 Russian Federation).

Sidorov S.M. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, RTU MIREA (Vernadskogo prospekt 78, Moscow, 119454 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Obzherin Yu.E., Sidorov S.M. Duplicated system reliability analysis with a priority element. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2026, no. 2 (155), pp. 58–79 (in Russ.). EDN: CMQZLG