НЕ ВЫ

На правах рукописи

КАЛИНКИН Александр Вячеславович

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ПРИ ДИСКРЕТНЫХ СОСТОЯНИЯХ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Калинкин

Москва 2003

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана.

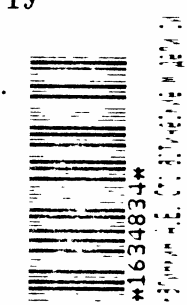
Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Морозов А.Н.
доктор физико-математических наук,
профессор Печинкин А.В.
доктор физико-математических наук,
профессор Формалев В.Ф.

Ведущая организация: механико-математический факультет
МГУ им. М.В. Ломоносова

Защита диссертации состоится «26» ноября 2003 г. в 11 час. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу: 107005 Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан «7» октября 2003 г.



Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н., профессор Волков И.К.

Подписано к печати 09.10.03 Объем 2 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 141.т

Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертационной работе рассматриваются стохастические модели систем с взаимодействием в виде марковских процессов рождения и гибели при дискретном множестве состояний N^n, $N = \{0,1,2,\ldots\}$, и непрерывным временем t, $t \in [0,\infty)$. Точка фазового пространства $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in N^n$ интерпретируется как такое состояние системы, в котором имеется совокупность частиц $S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \ldots + \alpha_n T_n$, состоящая из α_1 частиц типа T_1, ..., α_n частиц типа T_n; переход случайного процесса в другое состояние — результат взаимодействия одного из комплексов частиц S_{ε^i}, $\varepsilon^i \in A$, где $A = \{\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^l\} \subset N^n$ — данное множество. Результат взаимодействия комплекса частиц не зависит от наличия других частиц в системе; множество A задает схему взаимодействий (кинетическую схему). Такие модели являются подклассом дискретных систем со стохастическим характером эволюции, определяемым случайными процессами взаимодействия элементов системы между собой и с окружающей средой. В литературе по математическому моделированию для отдельных элементов в системах этого подкласса используется название "частица", что обусловлено спецификой элементов таких систем и процессов их взаимодействия. При различии физической природы, происхождения и масштабов систем взаимодействующих элементов, существенным является то, что определяемые для исследования этих систем математические модели основаны на понятиях и результатах теории вероятностей и теории случайных процессов. Рассматриваемые модели являются однородными во времени марковскими процессами с конечным или счетным множеством состояний, важным свойством которых является то, что их поведение определяется инфинитезимальными характеристиками и начальным распределением. Основополагающий вклад в разработку и анализ стохастических моделей систем взаимодействующих частиц внесли отечественные ученые А.Я. Хинчин, М.А. Леонтович, Н.Н. Боголюбов, А.Н. Колмогоров, Р.Л. Добрушин. Существенный вклад в развитие этого научного направления внесли зарубежные ученые М.С. Бартлетт,

Н.Т. Бейли, А.Т. Баруча–Рид, Т.Е. Харрис, И. Пригожин, Ж. Гани, Н.Г. Ван Кампен и др.

Данная выше интерпретация марковских процессов на N^n показывает, что рассматриваемые в диссертации модели систем при дискретных состояниях могут описывать широкий класс реальных систем взаимодействующих элементов, в которых одни элементы системы превращаются в другие элементы в результате взаимодействия нескольких существующих в данный момент. М.А. Леонтович [1] дал модель стохастической системы с попарно сталкивающимися частицами в виде марковского процесса на фазовом пространстве всех n-мерных векторов с целыми неотрицательными компонентами и указал на связь между такой моделью бимолекулярной химической реакции и детерминированным описанием кинетики такой реакции — законом действующих масс (см. также [2], гл. 8, "Приложения в химии"). Близкие к модели [1] марковские процессы на N^2 изучались в [3] как модели кинетики цепной реакции рождения нейтронов с учетом ядер тяжелых элементов. В [4], [5] методы теории случайных процессов с дискретными состояниями применялись к исследованию неравновесных пространственно-однородных

---

[1] Леонтович М.А. Основные уравнения кинетической теории газов с точки зрения теории случайных процессов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1935. – Т. 5, № 3–4. – С. 211–231.

[2] Баруча–Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 512 с.

[3] Дорогов В.И., Чистяков В.П. Вероятностные модели превращения частиц. – М.: Наука, 1988. – 112 с.

[4] Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. – М.: Высшая школа, 1990. – 376 с.

[5] Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979.

[6] Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.

[7] Математические методы в теории надежности. / Г.Д. Карташов, О.И. Тескин, О.А. Бархатова, С.М. Швартин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1982. – 32 с.

стохастических моделей физико-химических процессов в многокомпонентном разреженном газе. Марковские процессы рождения и гибели на N и N^2 рассматриваются в связи с применениями в теории массового обслуживания [6] и в теории надежности [7]. Б.А. Севастьянов [8] определил модели ветвящихся процессов с взаимодействием — класс марковских процессов на N^n, который обобщил ряд рассматриваемых ранее стохастических моделей систем с взаимодействием при дискретных состояниях. Определение модели [8] является строгим с точки зрения теории случайных процессов (определено вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$) и в нем соблюдены феноменологические законы кинетики и ряд положений статистической физики.

Аналитический метод исследования марковских моделей систем с взаимодействием при дискретных состояниях сводится к рассмотрению первой и второй систем дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей марковских процессов. Число случаев, для которых удается найти явное решение уравнений Колмогорова для процессов со счетным множеством состояний, невелико; известные решения относятся к процессам рождения и гибели на N: процесс простой гибели, процесс чистого рождения, процесс рождения и гибели пуассоновского типа (выражения для переходных вероятностей содержат бесселевы функции), процесс рождения и гибели линейного типа и некоторые модификации указанных процессов. Данные в [1) – 8)] и другие примеры применения аналитического метода при рассмотрении моделей систем с взаимодействием характеризуются использованием многомерной производящей функции для записи второго уравнения в виде уравнения в частных производных (линейное уравнение).

Детально исследованным классом марковских моделей на N^n являются ветвящиеся процессы с невзаимодействующими частицами [9], ког-

---

[8] Севастьянов Б.А., Калинкин А.В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 264, № 2. – С. 306–308.

[9] Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 436 с.

да второе уравнение для производящей функции переходных вероятностей есть уравнение в частных производных первого порядка. Из независимости эволюций частиц следуют нелинейные свойства переходных вероятностей и нелинейное уравнение для одночастичной производящей функции переходных вероятностей, полученные А.Н. Колмогоровым и Н.А. Дмитриевым [10], и ставшие основой применения аналитических методов для моделей систем без взаимодействия. Уравнение работы [10] относится к виду кинетических уравнений для одночастичной функции распределения [11]. В статистической физике для систем взаимодействующих частиц принято описание с помощью цепочки функциональных уравнений для многочастичных функций распределения [12]; таким цепочкам уравнений и уравнениям для одночастичных функций распределения в моделях неравновесных физико-химических процессов с непрерывным фазовым пространством и их математической теории посвящена обширная литература, см. [11]. В диссертации показано, что первая система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей является цепочкой уравнений в случае марковской модели системы с взаимодействием. Таким образом, из [10] и [12] следует задача выявления нелинейных свойств и вывода нелинейных уравнений для таких стохастических моделей. Для решения данной проблемы строятся точные замкнутые решения первого и второго линейных уравнений для переходных вероятностей.

Второе уравнение Колмогорова, как уравнение в частных производных порядка выше первого, рассматривалось в [1), 3), 5), 8)] и др. Для

---

[10] Колмогоров А.Н., Дмитриев Н.А. Ветвящиеся случайные процессы // Доклады АН СССР. – 1947. – Т. 56, № 1. – С. 7–10.

[11] Петрина Д.Я., Герасименко В.И., Малышев П.В. Математические основы классической статистической механики. – Киев: Наукова думка, 1981. – 261 с.

[12] Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 120 с.

[13] Letessier J., Valent G. Some exact solutions of the Kolmogorov boundary value problem // Approx. Theory Appl. – 1988. – V. 4, n. 2. – P. 97–117.

ряда моделей систем с взаимодействием решение нестационарных или стационарных уравнений приводит к выражениям для производящих функций искомых вероятностей состояний в виде рядов по специальным функциям. Г. Валэн и Ж. Летесье (см. обзор [13]) и др.) методом разделения переменных получили решения второго уравнения в виде рядов по гипергеометрическим функциям для некоторых процессов рождения и гибели квадратичного, кубического и биквадратичного типов. Основные аналитические трудности связаны с суммированием этих рядов, приведением решений такого вида к замкнутой интегральной форме.

Замкнутые решения уравнений Колмогорова дают возможность простого вывода тех или иных асимптотических свойств и предельных теорем для вероятностных моделей систем с дискретными состояниями; примеры рассмотрения таких свойств даны в диссертации. При использовании марковских процессов в качестве стохастических моделей, как правило, возникает и требует решения общая для математического моделирования проблема оценки влияния на характеристики моделей точности значений задаваемых параметров модели. Проблема получения точных решений уравнений Колмогорова для рассматриваемых моделей систем с взаимодействием является актуальной, и ее решение не только представляет теоретический интерес, но и имеет практическое значение для исследования дискретных стохастических систем методами математического моделирования при использовании в качестве моделей марковских процессов.

Цель работы. Проблемой, на решение которой направлена диссертация, является разработка фундаментальных основ математического моделирования стохастических систем с взаимодействием с помощью марковских процессов с дискретным множеством состояний и построение новых методов решения возникающих задач на основе первого и второго дифференциальных уравнений для переходных вероятностей. Даны примеры применения аналитических и численных методов при рассмотрении реальных схем превращения частиц для различных физических, химических, биологических, а также технических объектов.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. Впервые предложен систематический подход к рассмотрению

марковских моделей систем с взаимодействием при дискретных состояниях на основе понятия схемы взаимодействий.

Основные результаты диссертации. Объектами исследования в диссертационной работе являются конкретные схемы взаимодействий. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Построена общая стохастическая модель системы с взаимодействием при дискретных состояниях, включающая в себя ряд моделей, рассматривавшихся ранее. Для частных случаев дана классификация на основе рассмотрения специальных классов марковских процессов с множеством состояний N^n.

2. Найдены формы записи дифференциальных уравнений Колмогорова для производящих функций переходных вероятностей для различных классов марковских моделей систем с взаимодействием.

3. Предложен метод экспоненциальной производящей функции для решения стационарной первой системы уравнений. Даны примеры применения метода для нахождения финальных вероятностей в моделях систем с парными взаимодействиями частиц одного или разных типов.

4. Предложен способ построения замкнутых решений первого и второго нестационарных уравнений для марковских процессов рождения и гибели квадратичного, пуассоновского, полиномиального и других типов. Метод применен к модели системы с парными взаимодействиями частиц одного типа и ее обобщению с частицами финального типа.

5. Получены точные решения первого и второго уравнений для марковских моделей на N^n, являющиеся новыми и обобщающие известные решения. Выявлены нелинейные свойства марковских моделей систем с взаимодействием.

6. Изложен способ численного моделирования на ЭВМ марковских систем с взаимодействием на примере процесса "хищник-жертва" при дискретных состояниях и проведено исследование этой модели.

7. Проведен анализ марковских моделей с взаимодействием при дискретных состояниях как стохастических систем взаимодействующих частиц статистической физики.

Методы исследования. В диссертации применялись методы теории вероятностей, теории марковских процессов с непрерывным временем,

теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Использовался аппарат специальных функций: ортогональные многочлены; бесселевы функции; гипергеометрические функции; эллиптические функции. Также применялись современные технологии вычислительного эксперимента на ЭВМ.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Решены задачи, имеющие значение для разработки новых математических методов моделирования и теории стохастических систем. Предложенные в диссертации аналитические методы решения уравнений Колмогорова могут найти применение в общей теории случайных процессов.

Практическая значимость результатов состоит в возможности их использования для исследования различных вероятностных моделей реальных систем с взаимодействием, когда в качестве моделей используются конечные и счетные однородные марковские процессы с непрерывным временем. Примеры систем с взаимодействием, моделями которых являются марковские процессы, часто встречаются в физике, химии, биологии, теории массового обслуживания и теории надежности. Результаты диссертации представляют интерес для исследований в таких областях теории неравновесных процессов и физико-химической кинетики, как взаимосвязь стохастического и кинетического описаний эволюций разреженного газа, свойства кинетических уравнений, схемы и константы скорости химических реакций. Методы, применяемые в диссертации, могут быть использованы при изучении более сложных моделей случайных систем с взаимодействием.

В основу диссертации положены результаты научных исследований, выполненных автором в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана. Часть изложенных в диссертации результатов получена автором в качестве соисполнителя научно-исследовательских работ по темам, включенным в план НИР МГТУ им. Н.Э. Баумана:

— НИР § 4.1/2000 "Стохастический анализ многомерных моделей функционирования сложных систем в теории надежности и массовом обслуживании";

— НИР № 4/2001 "Разработка теории и методов математического моделирования при анализе функционирования и устойчивости континуальных и дискретных систем";

— НИР № 5 – 2/2002 "Разработка методов стохастического оценивания показателей надежности и финансовых рисков при функционировании сложных систем по разнородным данным".

Материалы диссертации используются в учебном процессе: автором в МГТУ им. Н.Э. Баумана с 1998/1999 учебного года читается обязательный семестровый курс "Дополнительные главы теории случайных процессов" для студентов специальности "Прикладная математика" факультета "Фундаментальные науки".

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Третьей (Туапсе, 1996 г.), Четвертой (Уфа, 1997 г.), Пятой (Йошкар-Ола, 1998 г.), Седьмой (Сочи, 2000 г.), Восьмой (Йошкар-Ола, 2001 г.) Всероссийских школах-коллоквиумах по стохастическим методам, XIX Международном (Вологда, 1998 г.) семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей, Первой и Второй (Москва, 2001 г. и 2003 г.) Всероссийских конференциях "Необратимые процессы в природе и технике", Втором (Самара, 2001 г.) Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных семинанарах в МГТУ им. Н.Э. Баумана, на физическом, химическом и механико-математическом факультетах МГУ им. М.В. Ломоносова, в Математическом институте РАН, в Институте проблем передачи информации РАН и ВНИИ атомного энергетического машиностроения.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 15 статей, 15 тезисов докладов и учебно-методическое пособие [14].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разделенных на пункты, и выводов. При ссылке на пункт слева добавляется номер главы. В диссертации список литературы из 152

[14] Калинкин А.В. Случайные процессы в естествознании: Дискретное фазовое пространство. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 40 с.

наименований. Текст изложен на 232 страницах, включая 42 рисунка и таблицу. Приложение на 23 страницах содержит текст программного комплекса.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность работы, сформулирована ее цель и определены научная новизна и практическая ценность работы. Кратко изложены основные результаты выполненной работы.

В первой главе приведены определения специальных классов марковских процессов со счетным множеством состояний и непрерывным временем, интерпретируемых как модели систем с взаимодействием при дискретном фазовом пространстве. Получены первое и второе уравнения для производящих функций переходных вероятностей рассматриваемых марковских моделей.

В 1.1 дан обзор используемых далее результатов теории марковских процессов. Пусть $N^n = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_i = 0, 1, 2, \ldots,\ i = 1, \ldots, n\}$ — множество всех n-мерных векторов с неотрицательными целочисленными компонентами. Множество M составляют однородные во времени марковские процессы $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)),\ t \in [0, \infty)$, на фазовом пространстве N^n. Обозначим переходные вероятности $P_{\alpha\beta}(t) = P\{\xi(t) = \beta \,|\, \xi(0) = \alpha\},\ \alpha, \beta \in N^n$. Марковский процесс задается плотностями переходных вероятностей $a_{\alpha\beta} = (dP_{\alpha\beta}(t)/dt)|_{t=0+}$ (инфинитезимальные характеристики). Выполнены обычные при рассмотрении таких процессов условия, при которых переходные вероятности удовлетворяют первой (обратной) системе дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} P_{\gamma\beta}(t), \quad \alpha \in N^n,$$

и второй (прямой) системе дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей

$$\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_{\gamma} P_{\alpha\gamma}(t)\, a_{\gamma\beta}, \quad \beta \in N^n;$$

начальные условия $P_{\alpha\alpha}(0) = 1$, $P_{\alpha\beta}(0) = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

В 1.2 даны необходимые сведения о многомерных производящих функциях.

В 1.3 определено множество марковских процессов с взаимодействием M_1. Пусть фиксировано конечное множество векторов $A = \{\varepsilon^i = (\varepsilon_1^i, \ldots, \varepsilon_n^i) \in N^n,\ i = 1, \ldots, l\}$. Каждому вектору $\varepsilon^i \in A$ сопоставим распределение вероятностей на N^n, $\{p_\gamma^i \geqslant 0,\ \sum_\gamma p_\gamma^i = 1,\ p_{\varepsilon^i}^i = 0\}$, и набор чисел $\{\varphi_\alpha^i \geqslant 0,\ \alpha \in N^n;\ \varphi_\alpha^i = 0,$ если при некотором $k\ \alpha_k < \varepsilon_k^i\}$. Для процесса из множества M_1 полагаем плотности переходных вероятностей равными $a_{\alpha\alpha} = -\sum_{i=1}^l \varphi_\alpha^i,\ a_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^l \varphi_\alpha^i p_{\beta-\alpha+\varepsilon^i}^i,\ \alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta \in N^n$. Таким образом, характеристики $a_{\alpha\beta}$ процесса из множества M_1 определяются набором $\varepsilon^1, \{p_\gamma^1\}, \{\varphi_\alpha^1\}, \ldots, \varepsilon^l, \{p_\gamma^l\}, \{\varphi_\alpha^l\}$. Показано, что для процессов из M_1 вторую систему уравнений можно записать в компактном виде, используя многомерные производящие функции ($s = (s_1, \ldots, s_n)$, $s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \ldots s_n^{\alpha_n}$, $\sum_{\alpha \in N^n}$ обозначается $\sum_\alpha$)

$$F_\alpha(t; s) = \sum_\beta P_{\alpha\beta}(t) s^\beta; \quad h_i(s) = \sum_\gamma p_\gamma^i s^\gamma, \quad i = 1, \ldots, l; \quad |s| \leqslant 1.$$

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^l \big(h_i(s) - s^{\varepsilon^i}\big) D_i(F_\alpha(t; s)), \quad F_\alpha(0; s) = s^\alpha, \qquad (1)$$

где D_i — оператор обобщенной производной, определенный на аналитических в окрестности нуля функциях, $D_i\Big(\sum_\beta a_\beta s^\beta\Big) = \sum_{\beta \geqslant \varepsilon^i} a_\beta \varphi_\beta^i s^{\beta - \varepsilon^i}$, $i = 1, \ldots, l$.

Марковский процесс $\xi(t)$ из множества M_1 есть модель системы взаимодействующих частиц n типов $T_1, \ldots, T_n$. Событие $\{\xi(t) = \alpha\}$ можно интерпретировать как такое состояние системы, в котором в момент времени t имеется совокупность S_α частиц, состоящая из α_1 частиц типа T_1, ..., α_n частиц типа T_n: $S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \ldots + \alpha_n T_n$. Зададим l комплексов взаимодействия частиц S_{ε^i}, соответствующих векторам $\varepsilon^i \in A$. Через случайное время τ_α^i, $P\{\tau_\alpha^i \leqslant t\} = 1 - e^{-\varphi_\alpha^i t}$, происходит взаимодействие комплекса частиц S_{ε^i}. В этот момент из α_1 частиц типа T_1 выбирается ε_1^i частиц, ..., из α_n частиц типа T_n выбирается ε_n^i частиц, и этот комплекс частиц S_{ε^i} с распределением

вероятностей $\{p_\gamma^i\}$ заменяется совокупностью S_γ новых частиц. Система из состояния S_α, соответствующему вектору α, переходит в состояние $S_{\alpha-\varepsilon^i+\gamma}$, соответствующее вектору $\alpha-\varepsilon^i+\gamma$, и далее аналогичная эволюция системы частиц. В состоянии S_α система находится случайное время τ_α, пока не произойдет какое-либо из l взаимодействий, то есть $\tau_\alpha=\min(\tau_\alpha^1,\ldots,\tau_\alpha^l)$. Предполагается, что случайные величины $\tau_\alpha^1,\ldots,\tau_\alpha^l$ независимы. Тогда $P\{\tau_\alpha\leqslant t\}=1-e^{-(\varphi_\alpha^1+\ldots+\varphi_\alpha^l)t}$ и вероятность, что произошло взаимодействие комплекса частиц S_{ε^i}, при условии, что взаимодействие произошло, равна[6] $\varphi_\alpha^i(\sum_{i=1}^l\varphi_\alpha^i)^{-1}$. Возможные превращения частиц в такой системе представляют схемой взаимодействий:

$$\begin{cases} \varepsilon_1^1T_1+\varepsilon_2^1T_2+\ldots+\varepsilon_n^1T_n \;\to\; \gamma_1^1T_1+\gamma_2^1T_2+\ldots+\gamma_n^1T_n;\\ \quad\ldots\\ \varepsilon_1^iT_1+\varepsilon_2^iT_2+\ldots+\varepsilon_n^iT_n \;\to\; \gamma_1^iT_1+\gamma_2^iT_2+\ldots+\gamma_n^iT_n;\\ \quad\ldots\\ \varepsilon_1^lT_1+\varepsilon_2^lT_2+\ldots+\varepsilon_n^lT_n \;\to\; \gamma_1^lT_1+\gamma_2^lT_2+\ldots+\gamma_n^lT_n, \end{cases} \tag{2}$$

где случайный вектор $\gamma^i=(\gamma_1^i,\gamma_2^i,\ldots,\gamma_n^i)$ имеет распределение $\{p_\gamma^i\}$, $i=1,\ldots,l$.

В 1.4 рассматривается основной класс стохастических моделей, исследуемых в диссертации — класс марковских процессов B_2[8]. Плотности переходных вероятностей $a_{\alpha\beta}$ ветвящегося процесса с взаимодействием выбраны таким образом, что оператор обобщенной производной в уравнении (1) совпадает с частной производной.

Т е о р е м а 1.1. Производящая функция переходных вероятностей $F_\alpha(t;s)$ ветвящегося процесса с взаимодействием при любом $\alpha\in N^n$ удовлетворяет при $|s|\leqslant 1$ линейному дифференциальному уравнению в частных производных ($\lambda_i>0$, $i=1,\ldots,n$)

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t}=\sum_{i=1}^l\lambda_i\bigl(h_i(s)-s^{\varepsilon^i}\bigr)\frac{\partial^{\varepsilon^i}F_\alpha(t;s)}{\partial s^{\varepsilon^i}},\quad F_\alpha(0;s)=s^\alpha. \tag{3}$$

Для свертки первой системы уравнений вводятся экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей ($z=(z_1,\ldots,z_n)$, $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\ldots z_n^{\alpha_n}$, $\alpha!=\alpha_1!\ldots\alpha_n!$)

$$G_\beta(t;z)=\sum_\alpha\frac{z^\alpha}{\alpha!}P_{\alpha\beta}(t)$$

и линейные операторы с постоянными коэффициентами

$$h_i\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big) = \sum_{\gamma} p_{\gamma}^{i} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial z^{\gamma}}, \quad i = 1, \ldots, l; \quad \frac{\partial^{\gamma}}{\partial z^{\gamma}} = \frac{\partial^{\gamma_1 + \ldots + \gamma_n}}{\partial z_1^{\gamma_1} \ldots \partial z_n^{\gamma_n}}.$$

Т е о р е м а 1.2. Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей $G_\beta(t; z)$ ветвящегося процесса с взаимодействием при любом $\beta \in N^n$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial G_\beta(t; z)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i z^{\varepsilon^i} \Big(h_i\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big) - \frac{\partial^{\varepsilon^i}}{\partial z^{\varepsilon^i}}\Big) G_\beta(t; z), \quad G_\beta(0; z) = \frac{z^\beta}{\beta!}.$$

В 1.5 кратко изложены положения теории ветвящихся процессов [9]. Класс марковских процессов B_1 выделяется из класса B_2 условиями $|\varepsilon^i| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, l$. Пусть для определенности $A = \{\varepsilon^1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \varepsilon^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \varepsilon^l = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)\}$. Второе уравнение (3) получает вид уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \big(h_i(s) - s_i\big) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_i}, \quad F_\alpha(0; s) = s^\alpha;$$

его решение обладает свойством

$$F_\alpha(t; s) = F_{\varepsilon^1}^{\alpha_1}(t; s) F_{\varepsilon^2}^{\alpha_2}(t; s) \ldots F_{\varepsilon^l}^{\alpha_l}(t; s) s_{l+1}^{\alpha_{l+1}} \ldots s_n^{\alpha_n}, \quad \alpha \in N^n. \qquad (4)$$

Свойство ветвления (4) — основное свойство, выделяющее из марковских процессов класс ветвящихся процессов — состоит в том, что если событие $\{\xi(t) = \alpha\}$ интерпретировать как наличие системы частиц S_α, то частицы, существующие в момент времени t_1, в любой следующий момент $t_1 + t$, $t > 0$, эволюционируют и порождают новые частицы независимо друг от друга. Из (4) следует система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial F_{\varepsilon^i}(t; s)}{\partial t} = \lambda_i \big(h_i(F_{\varepsilon^1}(t; s), \ldots, F_{\varepsilon^l}(t; s), s_{l+1}, \ldots, s_n) - F_{\varepsilon^i}(t; s)\big), \qquad (5)$$

$i = 1, \ldots, l$; с начальными условиями $F_{\varepsilon^1}(0; s) = s_1, \ldots, F_{\varepsilon^l}(0; s) = s_l$. Нелинейное свойство (4) и система нелинейных уравнений (5) определили возможность аналитического исследования моделей класса B_1 [9].

В заключение главы обсуждается соотношение $M \supset M_1 \supset B_2 \supset B_1$, где M — множество всех марковских процессов на N^n, множество M_1 описано в 1.3, B_2 — класс ветвящихся процессов с взаимодействием, B_1 — класс ветвящихся процессов. Результаты главы 1 показывают возможность переноса аналитических методов исследования марковских моделей класса B_1 на стохастические модели других классов, при этом важной задачей является выявление аналога нелинейного свойства переходных вероятностей (4) для стохастических моделей с взаимодействием.

Стохастические модели систем с взаимодействием как частные случаи марковских процессов на N^n определялись в большом числе работ, посвященных конкретным задачам физической кинетики, химической кинетики, динамике популяций в экологических системах, в теории массового обслуживания, в теории надежности и др., что объясняется наглядностью фазового пространства N^n. Во второй главе дается обзор ряда результатов для различных схем взаимодействий. Принципы и методы моделирования систем с взаимодействием марковскими процессами при дискретных состояниях рассматриваются на примерах моделирования физических, химических и биологических систем.

В 2.1 дается вывод первого и второго уравнений для производящих функций переходных вероятностей процесса рождения и гибели, "вложенная цепь Маркова" которого является случайным блужданием, и приведены известные явные решения этих уравнений. Приведены результаты об асимптотическом поведении среднего числа частиц в процессах рождения и гибели линейного, степенного и пуассоновского типов. Такие вероятностные модели из множества M_1 описывают, соответственно, экспоненциальный, степенной и линейный рост числа "активных" частиц на начальной стадии ядерной цепной реакции [3)].

В 2.2 рассматриваются стохастические модели химических реакций. Схему взаимодействий вида (2) называют кинетической схемой химической реакции, отдельная строка соответствует элементарному акту реакции [15)].

[15)] Эмануэль Н.М., Кнорре Д.Г. Курс химической кинетики. – М.: Высшая школа, 1974. – 400 с.

Схемой (2) может быть учтено как образование финального продукта в реакции, так и поступление реагентов в систему извне.

Выбор характеристик $a_{\alpha\beta}$ для моделей классов B_1, B_2 определен детерминированными законами формальной кинетики. Процессы из класса B_1 служат моделями мономолекулярных химических реакций, процессы из класса B_2 служат моделями бимолекулярных реакций. Приводятся основные дифференциальные уравнения формальной кинетики — для реакций $T_1 \to T_2$ и $T_1 + T_2 \to T_3$, и соответствующие им модели из B_1 и B_2. В первом случае закон кинетики соблюдается как точный для среднего числа частиц, во втором случае уравнение закона действующих масс соблюдается как приближенное для среднего числа частиц, при большом начальном числе частиц; полагают $\alpha = (n\alpha_1, n\alpha_2, n\alpha_3)$ и $n \to \infty$ (предельный переход соответствует принятому в статистической физике термодинамическому предельному переходу [11]). Впервые с точки зрения указанного предельного перехода была рассмотрена в [1] марковская система с парными взаимодействиями $T_i + T_j \to T_k + T_l$, $i,j,k,l = 1,\ldots,n$. В 2.2 приведены уравнения формальной кинетики для других бимолекулярных схем и соответствующие им марковские модели. Моделями самых разнообразных реакций могут служить процессы из множества M_1. Используемое при построении рассматриваемых в диссертации моделей систем с взаимодействием марковское свойство не всегда выполнено для реальных физических систем. Подробное описание физических требований, при которых допустимо представление химической реакции как марковского процесса, дано в [4].

В 2.3 изложены результаты статистического моделирования системы с двумя типами частиц T_1, T_2 и схемой взаимодействий:

$$T_1 + T_2 \to 2T_1; \quad T_1 \to 0; \quad T_2 \to 2T_2.$$

В работах по динамике популяций частицы типа T_1 интерпретируются как "хищники", частицы типа T_2 как "жертвы". Второе уравнение имеет вид ($\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\rho > 0$):

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = \lambda(s_1^2 - s_1 s_2)\frac{\partial^2 F_\alpha(t;s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \mu(1 - s_1)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_1} + \rho(s_2^2 - s_2)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_2}, \quad F_\alpha(0;s) = s^\alpha.$$

Для моделирования на ЭВМ создан программный комплекс (см. приложение к диссертации), использовалось данное в 1.3 конструктивное описание модели при помощи случайного времени $\tau_{(\alpha_1,\alpha_2)}$ нахождения марковского процесса в состоянии (α_1, α_2). Статистическими экспериментами приближенно определена область значений параметров λ, μ, ρ, когда стохастические реализации рассматриваемого процесса устойчиво имеют колебательный вид, что характерно для детерминированного описания экологической системы "хищник-жертва". Стохастические модели с взаимодействием частиц при дискретных состояниях, совпадающие с рассматриваемыми в диссертации, изучались через численный эксперимент в работах [16], [17], где исследовались реальные явления.

В 2.4 изложены результаты работ [1] и [18]: для некоторых моделей систем с взаимодействием из классов B_1, B_2 стационарное распределение при $t \to \infty$ совпадает с принятыми в равновесной статистической физике каноническими распределениями. Для нахождения предельного стационарного распределения вероятностей решается стационарное второе уравнение (3). В частности, модель $0 \to T$; $T \to 0$ интерпретируется как марковская система массового обслуживания $M/M/\infty$ [6] с пуассоновским распределением числа занятых приборов в стационарном режиме работы. В 2.5 приведены результаты [19] о распределении числа финальных частиц типа T_2 в модели $\varepsilon_1 T_1 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$, где $\varepsilon_1 = 2, 3, \ldots$.

---

[16] Шематович В.И. Нестационарное статистическое моделирование столкновительных физико-химических процессов в разреженном газе: Автореф. дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. – М.: ВЦ АН, 1980. – 16 с.

[17] Перцев Н.В. Математическое моделирование динамики взаимодействующих популяций с ограниченным временем жизни индивидуумов: Автореф. дисс. . . . докт. физ.-матем. наук. – Новосибирск: ВЦ СО АН, 1999. – 24 с.

[18] Калинкин А.В. Стационарное распределение системы взаимодействующих частиц с дискретными состояниями // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 268, № 6. – С. 1362–1364.

В третьей главе для моделей с парными взаимодействиями построены точные решения стационарного первого уравнения Колмогорова. Предельное поведение реальных физических, химических, биологических систем взаимодействующих частиц очень разнообразно. Для марковских моделей при дискретных состояниях предельное поведение при $t \to \infty$ определяется классификацией состояний соответствующего марковского процесса. Основные случаи — когда случайный процесс попадает в поглощающее состояние (дальнейшее взаимодействия невозможны и система частиц навсегда остается в таком состоянии) или уходит на бесконечность и когда процесс приходит к стационарному положению. Для нахождения финальных вероятностей (вероятностей вырождения процесса в поглощающих состояниях) решается стационарная первая система дифференциальных уравнений Колмогорова. Рассматриваемые в главе 3 стохастические модели определялись в работах по динамике экологических систем: процессы рождения в популяциях с одним или двумя полами и процессы эпидемии. Изложен предложенный диссертантом [19)] метод нахождения финальных вероятностей для систем с взаимодействием путем решения уравнения в частных производных для экспоненциальной (двойной) производящей функции. Получены интегральные представления финальных вероятностей для схем с парными взаимодействиями.

В 3.1 получено первое стационарное уравнение для экспоненциальной производящей функции предельных вероятностей марковских моделей класса B_2. Пусть $P_{\alpha\beta}(t)$ — переходные вероятности однородного марковского процесса на множестве N^n. В общей теории процессов со счетным множеством состояний показано, при выполнении условий 1.1, что существуют пределы $q_{\alpha\beta} = \lim_{t\to\infty} P_{\alpha\beta}(t)$, $\alpha, \beta \in N^n$. Предельные вероятности $q_{\alpha\beta}$ не обязательно составляют распределение вероятностей, $\sum_\beta q_{\alpha\beta} \leqslant 1$. Введем производящие функции

$$g_\beta(z) = \sum_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!} q_{\alpha\beta}, \quad \beta \in N^n.$$

[19)] Калинкин А.В. Финальные вероятности для ветвящегося случайного процесса с взаимодействием частиц // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 269, № 6. – С. 1309–1312.

Т е о р е м а 3.1. Экспоненциальная производящая функция предельных вероятностей $g_\beta(z)$ ветвящегося процесса с взаимодействием при любом $\beta \in N^n$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i z^{\varepsilon^i} \Big(h_i\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big) - \frac{\partial^{\varepsilon^i}}{\partial z^{\varepsilon^i}} \Big) g_\beta(z) = 0.$$

В 3.2 рассмотрен процесс ξ_t, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, с переходными вероятностями $P_{ij}(t)$, $i, j \in N$; схема взаимодействий в модели:

$$2T_1 \;\to\; k_2 T_1; \quad T_1 \;\to\; k_1 T_1.$$

Производящая функция $F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j$, $i \in N$ ($|s| \leqslant 1$), удовлетворяет второму уравнению ($\lambda > 0$, $\mu > 0$)

$$\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial t} = \lambda(h_2(s) - s^2) \frac{\partial^2 F_i(t;s)}{\partial s^2} + \mu(h_1(s) - s) \frac{\partial F_i(t;s)}{\partial s}, \qquad (6)$$

с начальным условием $F_i(0; s) = s^i$.

Состояние 0 является поглощающим. Получены выражения для вероятностей вырождения $q_{i0} = \lim_{t\to\infty} P_{i0}(t)$, $i \in N$, при дополнительных для каждого из комплексов взаимодействия частиц предположениях о распределении случайного числа потомков $\{p^2_{k_2},\ k_2 \in N\}$, $\{p^1_{k_1},\ k_1 \in N\}$. Экспоненциальная производящая функция вероятностей вырождения $g_0(z)$ удовлетворяет стационарному первому уравнению:

$$\Big[\lambda z \Big(h_2\Big(\frac{d}{dz}\Big) - \frac{d^2}{dz^2}\Big) + \mu\Big(h_1\Big(\frac{d}{dz}\Big) - \frac{d}{dz}\Big)\Big] g_0(z) = 0, \qquad (7)$$

при граничном условии $g_0(0) = 1$. Введем параметры критичности $a_2 = \lambda(h_2'(1) - 2)$, $a_1 = \mu(h_1'(1) - 1)$. Все возможные варианты значений этих параметров можно разделить на три случая: 1) $a_2 > 0$; 2) $a_2 = 0$, $a_1 > 0$; 3) $a_2 = 0$, $a_1 \leqslant 0$ или $a_2 < 0$. В случае 3) имеем $q_{i0} = 1$, $i \in N$. В 3.2 рассмотрен случай 1) при $h_1(s) = p_2^1 s^2 + p_0^1$, $h_2(s) = p_3^2 s^3 + p_1^2 s + p_0^2$; дифференциальное уравнение (7) получает вид уравнения Лапласа

$$\lambda p_3^2 z g_0'''(z) + (-\lambda z + \mu p_2^1) g_0''(z) + (\lambda p_1^2 z - \mu) g_0'(z) + (\lambda p_0^2 z + \mu p_0^1) g_0(z) = 0,$$

для которого точное решение найдено методом определенного интеграла. При сделанных предположениях имеем $h_2(s) - s^2 = p_3^2(s-1)(s-$

$q_2)(s-\widehat{q}_2)$. Из условий $a_2>0$ и $p_0^2+p_1^2>0$ следует $0<q_2<1$ и $-q_2<\widehat{q}_2\leqslant 0$.

Т е о р е м а 3.2. Пусть $h_1(s)=p_2^1s^2+p_0^1$, $h_2(s)=p_3^2s^3+p_1^2s+p_0^2$, причем $p_0^1+p_0^2>0$, $a_2>0$ и $p_0^2+p_1^2>0$. Положим

$$\alpha=\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{h_1(q_2)-q_2}{h_2'(q_2)-2q_2},\quad \beta=\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{h_1(\widehat{q}_2)-\widehat{q}_2}{h_2'(\widehat{q}_2)-2\widehat{q}_2},$$

и пусть $\alpha>0$. Вероятности вырождения для модели ξ_t равны:

$$q_{i0}=\frac{1}{A}\int_{\widehat{q}_2}^{q_2}\frac{u^i(q_2-u)^{\alpha-1}(u-\widehat{q}_2)^{\beta-1}}{p_3^2(1-u)}du,\quad i\in N,$$

где константа A определяется условием $q_{00}=1$,

$$A=\int_{\widehat{q}_2}^{q_2}\frac{(q_2-u)^{\alpha-1}(u-\widehat{q}_2)^{\beta-1}}{p_3^2(1-u)}du.$$

Известно, что для случая $\lambda=0$, $\mu>0$: $q_{i0}=q_1^i$, $i\in N$, где q_1 — ближайший к нулю неотрицательный корень уравнения [9] $h_1(s)-s=0$; а для случая $\lambda>0$, $\mu=0$ ($p_0^2>0$): $q_{i0}\sim C_0q_2^i$, $i\to\infty$, где $C_0>0$ и q_2 — ближайший к нулю неотрицательный корень уравнения [8] $h_2(s)-s^2=0$. Для модели теоремы 3.2 при $i\to\infty$ получено

$$q_{i0}\sim C\cdot\frac{q_2^i}{i^\alpha},\quad C=\frac{1}{1-c}\cdot\frac{q_2^\alpha}{(q_2-\widehat{q}_2)^\alpha}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)F(1,\beta;\alpha+\beta;c)},$$

где $c=(q_2-\widehat{q}_2)/(1-\widehat{q}_2)<1$; $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, $F(\alpha,\beta;\gamma;c)$ — гипергеометрическая функция.

В 3.3 рассмотрена модель со схемой взаимодействий

$$T_1+T_2\ \to\ \gamma_1T_1+\gamma_2T_2.$$

Получены интегральные представления для финальных вероятностей процесса. Состояние $(\alpha_1,\alpha_2)\in N^2$ рассматриваемого марковского процесса $\xi(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t))$, $t\in[0,\infty)$, с переходными вероятностями $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)$, можно интерпретировать, например, как наличие совокупности из α_1 особей мужского рода и α_2 особей женского рода. Через случайное время происходит взаимодействие разнополых особей с появлением случайного числа γ_1 потомков мужского рода и γ_2 потомков женского рода с распределением вероятностей $\{p_{\gamma_1\gamma_2},\ (\gamma_1,\gamma_2)\in N^2,\ p_{11}=0\}$. Процесс переходит в состояние $(\alpha_1+\gamma_1-1,\alpha_2+\gamma_2-1)$; далее аналогичная эволюция. Производящая функция переходных вероятностей

$(|s_1| \leqslant 1,\ |s_2| \leqslant 1)$

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t;s_1,s_2)=\sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)s_1^{\beta_1}s_2^{\beta_2};\ h(s_1,s_2)=\sum_{\gamma_1,\gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1\gamma_2}s_1^{\gamma_1}s_2^{\gamma_2},$$

удовлетворяет второму уравнению

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t}=\lambda(h(s_1,s_2)-s_1s_2)\frac{\partial^2 F_\alpha(t;s)}{\partial s_1\partial s_2},\quad F_\alpha(0;s)=s^\alpha.$$

Экспоненциальная производящая функция вероятностей вырождения $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}=\lim_{t\to\infty}P_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)$ (поглощающее состояние $(0,\gamma_2)$ — остались особи одного рода),

$$g_{(0,\gamma_2)}(z_1,z_2)=\sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty}\frac{z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!}q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)},\quad \gamma_2=1,2,\ldots.$$

удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$\Big[h\Big(\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2}\Big)-\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}\Big)\Big]g_{(0,\gamma_2)}(z_1,z_2)=0, \tag{8}$$

с граничными условиями $g_{(0,\gamma_2)}(0,z_2)=z_2^{\gamma_2}/\gamma_2!$, $g_{(0,\gamma_2)}(z_1,0)=0$. Для линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами (8) характеристическим уравнением является уравнение

$$h(s_1,s_2)-s_1s_2=0. \tag{9}$$

Пусть ω и ω' — положительные числа. Положим $h=\exp\{-\pi\omega'/\omega\}$, $z=\exp\{\pi iu/(2\omega)\}$. Определим эллиптическую функцию $f_\gamma(u)$ равенством (периодами функции являются 4ω, $2i\omega'$)

$$f_\gamma(u)=\Big(\frac{\pi i}{\omega}\Big)^\gamma\Big\{\frac{1}{(z-z^{-1})^\gamma}+\sum_{r=1}^{\infty}\Big(\frac{h^rz^{-1}}{1-h^{2r}z^{-2}}\Big)^\gamma+\sum_{r=1}^{\infty}\Big(\frac{-h^rz}{1-h^{2r}z^2}\Big)^\gamma\Big\}.$$

Т е о р е м а 3.3. Пусть $h(s_1,s_2)=p_{20}s_1^2+p_{02}s_2^2+p_{00}$. Положим

$$C=\frac{1-\sqrt{1-4p_{20}p_{02}}}{1+\sqrt{1-4p_{20}p_{02}}},\quad C_0=\frac{p_{20}p_{00}}{1-4p_{20}p_{02}};$$

$f_{\gamma_2}(u)$ — эллиптическая функция с $\omega=\pi\sqrt{C_0}$, $\omega'=-\sqrt{C_0}\ln C$; $T=\{u=x+iy, 0\leqslant x\leqslant 4\omega, y=-\omega'\}$ — ориентированный по возрастанию x отрезок. Финальные вероятности равны

$$q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}=\frac{1}{2\pi i}\int_T s_1^{\alpha_1}\big(e^{\pi iu/(2\omega)}\big)s_2^{\alpha_2}\big(e^{\pi iu/(2\omega)}\big)\frac{(-1)^{\gamma_2}}{-\gamma_2}df_{\gamma_2}(u),$$

$(\alpha_1, \alpha_2) \in N^2$, $\gamma_2 = 1, 2, \ldots$, где функции

$$s_1(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p_{20}p_{02}}}{2p_{20}} i\sqrt{C_0}\Big(z - \frac{1}{Cz}\Big), \quad s_2(z) = i\sqrt{C_0}\Big(z - \frac{1}{z}\Big),$$

являются униформизацией римановой поверхности (9).

Модель исследована путем построения точного замкнутого решения задачи Дарбу-Пикара (заданы граничные условия на нехарактеристических кривых) для уравнения гиперболического типа (8); незамкнутое решение найдено методом Римана. В 3.3 получены аналогичные по структуре интегральные представления для $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ в случаях $h(s_1, s_2) = h_0(s_1) + s_2 h_1(s_1)$, $h(s_1, s_2) = h_0(s_2) + s_1 h_1(s_2)$, где $h_0(s)$, $h_1(s)$ — положительные производящие функции. В [20] методом Винера-Хопфа найдено выражение для $q_{(0,\gamma_2)}^{(1,\alpha_2)}$ в симметричном случае $h(s_1, s_2) = p_{01}s_1^2 s_2 + p_{10}s_1 s_2^2 + p_{10}s_1 + p_{01}s_2$ в связи с применениями в теории массового обслуживания.

В 3.4 рассмотрена модель с двумя типами частиц T_1, T_2 и двумя комплексами взаимодействия $\varepsilon^1 = (1, 0)$, $\varepsilon^2 = (1, 1)$. На множестве состояний N^2 рассматривается марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)$, второе уравнение для которого имеет вид ($\mu > 0$)

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \big(h_2(s_1, s_2) - s_1 s_2\big)\frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \mu\big(h_1(s_1, s_2) - s_1\big)\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1},$$

с начальным условием $F_\alpha(0; s) = s^\alpha$.

Событие $\{\xi(t) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$ интерпретируется как наличие совокупности из α_1 частиц типа T_1 и α_2 частиц типа T_2. В работах по стохастическим моделям процессов распространения эпидемии частицы типа T_1 интерпретируются как больные особи, частицы типа T_2 как особи, восприимчивые к инфекционному заболеванию [21]. В [3] частицы типа

---

[20] Громак Ю.И., Малышев В.А. Вероятность попадания в конечное множество при блуждании в квадранте с поглощением на границе // Междунар. конференция по теории вероятностей и математической статистике: Тезисы докладов. – Вильнюс, 1973. – С. 185–186.

[21] Эпидемии процесс // Математическая энциклопедия. Т. 5. – М.: Советская энциклопедия, 1985. – Кол. 1008.

T_1 интерпретируются как ядра тяжелых элементов, частицы типа T_2 как нейтроны.

Состояния $(0,0),\dots,(0,\gamma_2),\dots$ являются поглощающими. Для финальных вероятностей $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$, $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \lim_{t\to\infty} P_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)$, вводим двойную производящую функцию ($|s| \leqslant 1$)

$$\Phi(z_1,z_2;s) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!} f_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s);\ f_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s) = \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} s^{\gamma_2}.$$

Стационарное первое уравнение записывается в виде

$$\Big[z_2\Big(h_2\Big(\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2}\Big) - \frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}\Big) + \mu\Big(h_1\Big(\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2}\Big) - \frac{\partial}{\partial z_1}\Big)\Big]\Phi = 0. \quad (10)$$

Интегральное представление для финальных вероятностей найдено для схемы взаимодействий:

$$T_1 + T_2 \ \to\ T_1; \quad T_1 \ \to\ 0,$$

— когда $h_1(s_1,s_2) = 1$, $h_2(s_1,s_2) = s_1$ и уравнение (10) получает вид

$$z_2\Phi_{z_1z_2} + (\mu - z_2)\Phi_{z_1} - \mu\Phi = 0. \quad (11)$$

Для линейного гиперболического уравнения (11) решается задача Гурса: заданы граничные условия на характеристиках $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, $\Phi(0,z_2;s) = e^{z_2 s}$, $\Phi(z_1,0;s) = e^{z_1}$. Найдена функция Римана для уравнения с непостоянными коэффициентами (11), применение метода Римана приводит к выражению для $\Phi(z_1,z_2;s)$.

Т е о р е м а 3.4. Производящая функция финальных вероятностей в случае $h_1(s_1,s_2) = 1$, $h_2(s_1,s_2) = s_1$ равна ($\mu > 0$, $\alpha_1 \neq 0$)

$$f_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s) = \frac{1}{(\alpha_1-1)!}\int_0^{\infty} x^{\alpha_1-1}(1 - e^{-x/\mu} + s\,e^{-x/\mu})^{\alpha_2} e^{-x} dx. \quad (12)$$

Обозначим $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ число финальных частиц типа T_2, которые останутся после того, как процесс эпидемии остановится, т. е. не останется частиц типа T_1. Случайная величина $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ имеет распределение $\{q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)},\ \gamma_2 = 0,\dots,\alpha_2\}$, которое определяется производящей функцией (12). Методом характеристических функций получена предельная теорема для числа финальных частиц.

Т е о р е м а 3.5. Пусть выполнены условия теоремы 3.4. Положим $x \in [0,1]$. Тогда

$$\lim_{\alpha_2\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\frac{\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\alpha_2} \leqslant x\Big\} = \frac{1}{(\alpha_1-1)!}\int_{-\mu\ln x}^{\infty} y^{\alpha_1-1}e^{-y}\,dy.$$

В математической теории эпидемий [22)] утверждения о числе оставшимися здоровыми особях относят к "пороговым теоремам". В 3.4 дается решение уравнения (10) в случае модели эпидемии $h_1(s_1, s_2) = 1$, $h_2(s_1, s_2) = p_{10}^2 s_1 + p_{01}^2 s_2 + p_{00}^2$.

В четвертой главе для стохастических моделей с парными взаимодействиями найдены точные решения нестационарных уравнений Колмогорова.

В 4.1 изложена такая схема вывода нелинейного свойства ветвления и нелинейного уравнения для одночастичной производящей функции переходных вероятностей модели [9)] ветвящегося процесса с независимыми частицами $T \to kT$, которую удалось обобщить на случай модели парных взаимодействий $2T \to kT$.

В 4.2 рассматривается система $2T \to kT$: марковский процесс на множестве $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, с переходными вероятностями $P_{ij}(t)$, $i, j \in N$, $t \in [0, \infty)$, производящая функция $F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j$, $i \in N$, удовлетворяет второму уравнению ($|s| \leqslant 1$)

$$\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial t} = \lambda(h(s) - s^2)\frac{\partial^2 F_i(t;s)}{\partial s^2}, \quad F_i(0;s) = s^i. \tag{13}$$

В случае процесса гибели квадратичного типа, когда $h(s) = p_0 + p_1 s$, построено замкнутое решение такого параболического уравнения путем одновременного рассмотрения первого и второго уравнений Колмогорова; использован метод разделения переменных и теоремы сложения теории специальных функций. Существование имеющего вероятностный смысл решения задачи Коши (13) следует из существования решения второй системы дифференциальных уравнений для переходных вероятностей; о единственности решения см. 1.1.

Т е о р е м а 4.1. Для марковской модели на множестве состояний N со схемой взаимодействий $2T \to kT$, $k = 0, 1$, производящая функция переходных вероятностей имеет вид ($\omega^2 = -1$),

$$F_i(t;s) = \frac{e^{\lambda t/4}}{2\sqrt{2\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/(\lambda t)} \Big[\int_{\cos 2v}^{1} \frac{1}{\sqrt{y - \cos 2v}} \times \Big(\frac{1}{2\pi\omega} \int_T \varphi^i(x, y; s)\, dx \Big)\, dy \Big]_v' dv, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

[22)] Bailey N.T.J. The mathematical theory of infections diseases. – London: Griffin, 1975.

где $T = \{x = \omega u,\ \pi/2 \leqslant u \leqslant 5\pi/2\}$ — ориентированный по возрастанию u отрезок на комплексной плоскости; с линейной по переменной s функцией

$$\varphi(x,y;s) = \frac{-\frac{1}{2}(p_0\sqrt{1-y^2}e^x + p_1(1-y) + \sqrt{1-y^2}e^{-x}) + s}{\frac{1}{2}(\sqrt{1-y^2}e^x + 2y - \sqrt{1-y^2}e^{-x})}.$$

Получено нелинейное уравнение для одночастичной производящей функции $\varphi(x,y;s)$ условных переходных вероятностей — уравнение в частных производных первого порядка

$$(h(s)-s^2)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\Big)^2 - (h(\varphi)-\varphi^2) = (1+p_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{15}$$

где $h(s) = p_0 + p_1 s$. Найдено замкнутое решение уравнения (13) в случае процесса рождения квадратичного типа, когда $h(s) = s^3$.

Т е о р е м а 4.2. Для марковской модели на множестве состояний N со схемой взаимодействий $2T \to 3T$ производящая функция переходных вероятностей имеет вид ($F_0(t;s) = 1$),

$$\begin{aligned} F_i(t;s) = \frac{e^{\lambda t/4}}{2\sqrt{2\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/(\lambda t)} \Big[\int_{\cos 2v}^{1} \frac{1}{\sqrt{y-\cos 2v}} \\ \times \Big(\frac{1}{2\pi\omega}\int_T s\,\varphi^{i-1}(x,y;s)\,dx\Big)\,dy\Big]_v' dv, \quad i = 1,2,\dots, \end{aligned} \tag{16}$$

где отрезок T определен в теореме 4.1; с дробно-линейной по переменной s функцией

$$\varphi(x,y;s) = \frac{s\,\frac{1}{2}(\sqrt{1-y^2}e^x + 2y - \sqrt{1-y^2}e^{-x})}{1 - s\,\frac{1}{2}(-\sqrt{1-y^2}e^x + 1 - y)}.$$

Уравнение для функции $\varphi(x,y;s)$, в случае $h(s) = s^3$:

$$(h(s)-s^2)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\Big)^2 - (h(\varphi)-\varphi^2) = \varphi^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{17}$$

В 4.2 также приведено замкнутое решение уравнения (13) в случае $h(s) = s^4/2 + 1/2$ и получено уравнение вида (15), (17). Нелинейное свойство (14), (16) для переходных вероятностей моделей квадратичного типа рассмотрено с точки зрения метода функции Грина для уравнений в частных производных параболического типа.

В 4.3 для модели с множеством состояний N^2 и схемой взаимодействий $2T_1 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$, $\gamma_1 = 0,1$, получено аналогичное (14) интегральное представление для производящей функции переходных вероятностей и соответствующее нелинейное уравнение. Этот процесс является

моделью бимолекулярной химической реакции, протекающей с выходом финального продукта T_2. Также рассмотрена схема $2T_1 \to 3T_1 + \gamma_2 T_2$.

В 4.4 приведены замкнутые решения второго уравнения для моделей с двумя комплексами взаимодействия $2T \to k_2 T$, $T \to k_1 T$ (уравнение (6)) в критическом случае, когда $h_2'(1) = 2$ (среднее число частиц, появляющихся при парных взаимодействиях, равно двум); получено аналогичное (15) и (17) нелинейное уравнение, исследовано асимптотическое поведение таких моделей. Для критического случая найдены среднее число частиц и дисперсия.

Примененные в главах 3 и 4 методы решения дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных) в случае уравнений Колмогорова дают, как правило, представление для производящих функций искомых вероятностей в виде рядов по специальным функциям. В диссертации такие ряды суммированы к интегральным представлениям для производящих функций и подъинтегральные выражения преобразованы к имеющим вероятностный смысл виду.

В пятой главе показано, что определение и уравнения рассматриваемых стохастических моделей систем с взаимодействием при дискретных состояниях связаны с положениями неравновесной статистической физики. Результаты главы 4 являются базовыми при анализе этих связей с точки зрения следующего набора понятий: одночастичные и многочастичные функции распределения; цепочка уравнений; симметрия функций распределения; условия независимости и определение взаимодействия через условия независимости; фазовое пространство траекторий; кинетическое уравнение для одночастичной функции распределения.

В 5.1 установлено, что первая система дифференциальных уравнений Колмогорова для стохастической модели с взаимодействием из множества M_1 записывается в виде цепочки уравнений

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{l} \varphi_\alpha^i \Big(- F_\alpha(t;s) + \sum_\gamma p_\gamma^i F_{\alpha-\varepsilon^i+\gamma}(t;s) \Big), \ \alpha \in N^n. \qquad (18)$$

Многомерная производящая функция переходных вероятностей $F_\alpha(t;s)$ представляет собой свертку α-частичной функции распределения $\{P_{\alpha\beta}(t),\ \beta \in N^n\}$.

В статистической физике при рассмотрении систем взаимодействующих частиц применяют [11] i-частичные функции распределения $F_i(t; x_1, \ldots, x_i)$, которыми описывают расположение i частиц одного типа на фазовом пространстве $(-\infty, \infty)$ в момент времени t, $t \in [0, \infty)$. В работе [12] при общих предположениях получена цепочка уравнений для таких функций распределения

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} = \Phi_i(x_1, \ldots, x_i; F_i) + \widetilde{\Phi}_{i+1}(x_1, \ldots, x_{i+1}; F_{i+1}),\ i = 1, 2, \ldots,$$

где $\Phi_i(x_1, \ldots, x_i; F_i)$, $\widetilde{\Phi}_{i+1}(x_1, \ldots, x_{i+1}; F_{i+1})$ — некоторые взаимосвязанные функционалы. В [12] указано на основной интерес к одночастичной функции распределения. Считается, что одночастичная функция распределения $F_1(t, x_1)$ удовлетворяет кинетическому уравнению, которое имеет вид

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = A(x_1; F_1), \tag{19}$$

где $A(x_1; F_1)$ — некоторый функционал.

Наличие цепочки уравнений (18) для марковской модели системы с взаимодействием при дискретных состояниях позволяет ставить задачу о выводе уравнения вида (19) для такой модели.

В 5.2 рассматривается применимость теоремы Финетти-Хинчина [23] о симметрии к выводу кинетического уравнения для одночастичной функции распределения и анализируются условия, при выполнении которых математическое моделирование неравновесных состояний систем взаимодействующих частиц может быть сведено к рассмотрению кинетического уравнения.

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i$ называются симметрично зависимыми (переставляемыми), если все $i!$ перестановок последовательности $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i)$ имеют одинаковое совместное распределение.

Т е о р е м а 5.1 [23]. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство, $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_i(\omega), \ldots$ — бесконечная последовательность симметрично зависимых случайных величин. Положим $F(x_1, x_2, \ldots, x_i) =$

[23] Хинчин А.Я. О классах эквивалентных событий // Доклады АН СССР. – 1952. – Т. 85, № 4. – С. 713–714.

$P\{\xi_1 \leqslant x_1, \xi_2 \leqslant x_2, \ldots, \xi_i \leqslant x_i\}$. Тогда существует случайная величина $\theta(\omega)$ такая, что если положить $P\{\xi_1 \leqslant x|\theta = y\} = \varphi(x|y)$, $P\{\theta \leqslant x\} = H(x)$, то справедливо соотношение $(i = 1, 2, \ldots)$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1|y)\varphi(x_2|y)\ldots\varphi(x_i|y)\, dH(y). \qquad (20)$$

Симметричными функциями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_i$ являются [12)] рассмотренные в 5.1 i-частичные функции $F_i(t; x_1, x_2, \ldots, x_i)$, поскольку микрочастицы одного типа неразличимы. Применительно к i-частичным функциям распределения интегральное представление (20) получает вид $(i = 1, 2, \ldots)$

$$F_i(t; x_1, x_2, \ldots, x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1|y)\varphi(x_2|y)\ldots\varphi(x_i|y)\, dH(t; y),$$

и задача вывода кинетического уравнения сводится к поиску осредняющей меры $H(t; y)$ и выводу уравнения для одночастичной условной функции распределения $\varphi(x|y)$. При этом определение рассматриваемой модели должно быть основано на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и выяснение характера взаимосвязей между частицами сводится к предположениям о независимости тех или иных событий друг от друга.

Множество M_1 марковских моделей систем с взаимодействием выделяется из множества M всех марковских процессов на N^n условием независимости: результат взаимодействия комплекса частиц S_{ε^i}, $\varepsilon^i \in A$, не зависит от наличия других частиц [1)] (такое условие используется в кинетическом уравнении Больцмана [1)]).

В 5.3 дан способ реализации свойств симметрии α-частичных функций распределения для вывода кинетических уравнений рассматриваемых в диссертации марковских моделей. При математическом моделировании системы взаимодействующих частиц можно построить пространство элементарных событий, состоящее из описания эволюций каждой отдельной частицы, существовавшей в системе (пространство траекторий частиц), и соответствующую вероятностную меру (меру на траекториях частиц) — обозначим это вероятностное пространство $(\Omega^{\mathrm{tr}}, \mathcal{A}^{\mathrm{tr}}, P^{\mathrm{tr}})$. Преобразуем фазовое пространство траекторий частиц к множеству деревьев следующим образом: результат взаимодействия

любого комплекса частиц приписываем одной частице из этого комплекса. Тогда получаем для каждой из начальных частиц случайное число частиц-потомков и в силу неразличимости частиц одного типа можно предполагать, то эти случайные величины переставляемы (симметрично зависимы). Применение теоремы 5.1 приводит к интегральному представлению для производящей функции:

$$F_\alpha(t;s) = \int_{\{\omega\in\Omega^{\mathrm{tr}}\}} \varphi_1^{\alpha_1}(\omega;s)\varphi_2^{\alpha_2}(\omega;s)\dots\varphi_n^{\alpha_n}(\omega;s)H(t;d\omega),\ \alpha\in N^n \quad (21)$$

(обобщение нелинейного свойства (4)).

Для модели системы с парными взаимодействиями частиц одного типа нелинейное свойство (21) для производящей функции $F_i(t;s)$ выявлено аналитическим методом в главе 4, где построены замкнутые решения второго уравнения Колмогорова. В 4.2 найдены осредняющая мера и кинетическое уравнение (15) для одночастичной производящей функции $\varphi(x,y;s)$ условных переходных вероятностей в случае бимолекулярной реакции $2T \to kT$, $k = 0,1$, и аналогичное нелинейное уравнение первого порядка (17) для функции $\varphi(x,y;s)$ в случае схемы взаимодействий $2T \to 3T$. Проблема вывода кинетического (нелинейного) уравнения для марковских моделей систем с взаимодействием разрешима через построение точных решений в виде интегрального представления (21) линейных первого и второго уравнений для конкретных моделей из разных классов.

В 5.4 получены нелинейное свойство переходных вероятностей (21) для процесса гибели и процесса рождения пуассоновского типа. В 5.5 поставлен ряд задач, решение которых определяет возможности дальнейшего исследования стохастических моделей систем с взаимодействием при дискретных состояниях.

В заключительном разделе сформулированы результаты работы и перечислены примененные в диссертации методы построения точных решений уравнений Колмогорова.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В диссертации разработаны новые математические методы моделирования стохастических систем с взаимодействием. С единых позиций поставлены, обоснованы и исследованы стохастические модели физических, химических, биологических, а также технических объектов, связанных понятиями дискретного фазового пространства и схемы взаимодействий.

1. Введены общие стохастические модели систем с превращениями и взаимодействиями частиц типов $T_1, \ldots, T_n$, задаваемые схемой взаимодействий. Такие модели с дискретными состояниями есть частные случаи однородных марковских процессов со счетным множеством состояний и непрерывным временем. Предложена классификация моделей на основе рассмотрения специальных классов марковских процессов на N^n. В полном и систематическом виде изложены возможности записи в виде уравнений в частных производных первой и второй систем дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей с помощью многомерных производящих функций и оператора обобщенной производной. Каждому классу рассматриваемых моделей соответствует определенный вид таких уравнений в частных производных.

2. Получено уравнение для экспоненциальной производящей функции финальных вероятностей — стационарное первое уравнение и построены его точные решения для моделей систем с парными взаимодействиями.

а). Найдено интегральное представление для вероятностей вырождения в модели со схемой взаимодействий $2T \to k_2 T$, $T \to k_1 T$. Исследованы асимптотические свойства вероятностей вырождения.

б). Рассмотрена модель системы с взаимодействием частиц разных типов $T_1 + T_2 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$, при частных предположениях о случайном векторе (γ_1, γ_2). В случае $\gamma_1 + \gamma_2 \leqslant 2$ интегральное представление для финальных вероятностей найдено применением метода Римана для гиперболических уравнений.

в). Исследована марковская модель эпидемии со схемой $T_1 + T_2 \to T_1$, $T_1 \to 0$. Методом Римана найдено интегральное представление для

финальных вероятностей и установлена предельная теорема для числа финальных частиц.

3. Изложен способ построения точных замкнутых решений первого и второго уравнений Колмогорова для процессов рождения и гибели квадратичного типа. Метод применим к стохастическим моделям рождения и гибели других типов.

а). Для бимолекулярной реакции со схемой взаимодействий $2T \to kT$, $k = 0, 1$, построено интегральное представление решения уравнений модели — уравнений в частных производных параболического типа. Получено нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для подъинтегральной функции условных переходных вероятностей. Для модели со схемой $2T \to 3T$ дан вывод аналогичного уравнения.

б). Для моделей систем с финальным типом, схемы взаимодействий $2T_1 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$, $\gamma_1 = 0, 1$, и $2T_1 \to 3T_1 + \gamma_2 T_2$, найдены замкнутые решения линейных уравнений Колмогорова и соответствующие нелинейные уравнения.

в). Приведены интегральные представления решений второго уравнения для моделей систем с двумя комплексами взаимодействия $2T \to k_2 T$, $T \to k_1 T$ в критическом случае и соответствующие нелинейные уравнения. Рассмотрены асимптотические свойства таких моделей.

г). Построены незамкнутые решения нестационарных уравнений Колмогорова для некоторых других одномерных и двухмерных процессов гибели квадратичного типа.

4. Выявлено нелинейное свойство переходных вероятностей марковских моделей систем с взаимодействием при дискретных состояниях путем построения точных решений первого и второго уравнений. Это свойство интерпретируется как условная независимость рождения и гибели отдельных эволюционирующих частиц друг от друга и обобщает свойство ветвления переходных вероятностей процессов с невзаимодействующими частицами. Тем самым, на стохастические модели систем с взаимодействием могут быть перенесены методы исследования стохастических моделей с независимыми частицами.

5. Получена цепочка уравнений для α-частичных функций распределения рассматриваемых стохастических моделей с взаимодействием. Принцип тождественности частиц и теорема Финетти-Хинчина о симметрии применены к выводу кинетического уравнения путем преобразования фазового пространства траекторий частиц для системы с взаимодействием к множеству деревьев. Получены осредняющая мера и уравнение для условных переходных вероятностей для моделей систем с парными взаимодействиями.

6. Изложен способ статистического моделирования на ЭВМ стохастических систем с взаимодействием на примере процесса "хищник-жертва" и проведено исследование реализаций этого процесса. Предложенный способ численного моделирования может быть применен к общей стохастической модели с взаимодействем при дискретных состояниях с произвольным числом типов частиц и комплексов взаимодействия.

7. Данные в диссертации методы построения решений уравнений Колмогорова и найденные решения дают основу применения аналитических и численных методов к исследованию стохастических моделей систем с взаимодействием при дискретных состояниях.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Калинкин А.В. Свойство ветвления для процесса чистой гибели // Третья Всеросс. школа-коллоквиум по стохастическим методам: Тезисы докладов. – М.: Научное изд-во ТВП, 1996. – С. 62–63.

2. Калинкин А.В. Двуполая проблема // Обозрение прикладной и промышленной математики. Вероятность и статистика. – 1997. – Т. 4, № 3. – С. 348–349.

3. Калинкин А.В. Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии // Теория вероятностей и ее применения. – 1998. – Т. 43, № 4. – С. 773–780.

4. Калинкин А.В. Естественная структура множества марковских процессов // Обозрение прикладной и промышленной математики. Вероятность и статистика. – 1998. – Т. 5, № 2. – С. 222–223.

5. Калинкин А.В. Структура множества марковских процессов // Вестник РУДН. Прикладная математика и информатика. – 1998, № 1. – С. 93–103.

6. Kalinkin A., Valent G. Exact solution of the linear Kolmogorov equations for a quadratic death process // Обозрение прикладной и промышленной математики. Вероятность и статистика. – 1998. – Т. 5, № 2. – С. 304–305.

7. Калинкин А.В. Проблема точных решений уравнений Колмогорова для марковских процессов с дискретными состояниями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. – 1999, № 1. – С. 14–24.

8. Калинкин А.В. О нелинейных уравнениях для специальных классов марковских процессов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. – 1999, № 2. – С. 59–70.

9. Демидов С.А., Калинкин А.В., Стрыгина Л.А. Ветвящийся процесс со схемой взаимодействий частиц вида "хищник-жертва" // Обозрение прикладной и промышленной математики. Вероятность и статистика. – 1999. – Т. 6, № 1. – С. 137–138.

10. Калинкин А.В. Свойство ветвления для процесса гибели пуассоновского типа // Теория вероятностей и ее применения. – 1999. – Т. 44, № 1. – С. 177–178.

11. Калинкин А.В. Ветвящийся процесс с взаимодействием частиц // Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – С. 104.

12. Калинкин А.В. О работах советских математиков по основаниям физической статистики 30–40-х гг. // Обозрение прикладной и промышленной математики. Вероятность и статистика. – 1999. – Т. 6, № 1. – С. 148–150.

13. Калинкин А.В. Неравновесная статистическая физика и случайные процессы: принцип тождественности частиц // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. – 2000, № 1. – С. 38–48.

14. Калинкин А.В. Уравнения процесса гибели и размножения и оператор Гельфонда-Леонтьева обобщенной производной // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2000. – Т. 7, № 1. – С. 106–107.

15. Калинкин А.В. Теорема Финетти-Хинчина о симметрии в неравновесной статистической физике // Доклады РАН. – 2000. – Т. 370, № 4. – С. 457–460.

16. Калинкин А.В. Третье уравнение Колмогорова для ветвящегося процесса с взаимодействием частиц // Доклады РАН. – 2000. – Т. 371, № 2. – С. 159–162.

17. Калинкин А.В. Метод экспоненциальной производящей функции для случайных блужданий в четверти плоскости // Доклады РАН. – 2000. – Т. 375, № 5. – С. 583–587.

18. Калинкин А.В. Является ли пуассоновский процесс ветвящимся процессом? // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2000. – Т. 7, № 2. – С. 355–356.

19. Kalinkin A.V. Branching property for a Poisson-type death process // J. Math. Sci. (New York) – 2000. – V. 99, n. 3. – P. 1261–1266.

20. Калинкин А.В. Асимптотика вероятности продолжения для одного критического ветвящегося процесса с парными взаимодействиями частиц // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2000. – Т. 7, № 2. – С. 493.

21. Калинкин А.В. Преобразование фазового пространства траекторий для системы взаимодействующих частиц к множеству деревьев // Необратимые процессы в природе и технике: Тезисы докладов Всероссийской конференции. – М., 2001. – С. 176.

22. Калинкин А.В. Точные решения уравнений Колмогорова для критического ветвящегося процесса с двумя комплексами взаимодействия частиц // Успехи математических наук. – 2001. – Т. 56, № 3. – С. 173–174.

23. Калинкин А.В. Курс теории марковских процессов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2001. – Т. 8, № 1. – С. 198–200.

24. Калинкин А.В. Уравнения марковского процесса, уравнения формальной кинетики и уравнения движения твердого тела около неподвижной точки // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2001. – Т. 8, № 1. – С. 200–201.

25. Kalinkin A.V. Markov's model of the two-sex population // Dynamics of non-homogeneous systems. Proceedings of ISA RAS (Moscow: Editorial URSS). – 2001. – V. 4. – P. 75–81.

26. Калинкин А.В. О вероятности вырождения ветвящегося процесса с двумя комплексами взаимодействия частиц // Теория вероятностей и ее применения. – 2001. – Т. 46, № 2. – С. 376–381.

27. Калинкин А.В. Третье уравнение для ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $2T_1 \to \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$, $\gamma_1 = 0, 1$ // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2001. – Т. 8, № 2. – С. 766–767.

28. Калинкин А.В. Вероятность остановки на границе случайного блуждания в четверти плоскости и ветвящийся процесс с взаимодействием частиц // Теория вероятностей и ее применения. – 2002. – Т. 47, № 3. – С. 452–474.

29. Калинкин А.В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // Успехи математических наук. – 2002. – Т. 57, № 2. – С. 23–84.

30. Калинкин А.В. Решение уравнений Колмогорова для вероятностной модели бимолекулярной реакции // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2003. – Т. 10, № 1. – С. 167–168.