На правах рукописи

ВЛАСОВ Павел Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ЭКРАНИРОВАННОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



Москва – 2003

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. Волков И.К.

Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., проф. Формалёв В.Ф.,
к.ф.-м.н., с.н.с. Ермолаев Б.С.

Ведущая организация: Московская государственная академия
тонкой химической технологии
им. М.В. Ломоносова

У1661306
Власов П.А.
Математическое моделирование процессов
«18» февраля
го совета
ском
я Ба
ке М
выркин Г.Н.
У1661306
ВОЗВРАТИТЕ КНИГУ НЕ ПОЗЖЕ
обозначенного здесь срока
Б-ка МГТУ им. Н.Э. Баумана
1661306
Власов П.А. Математическое

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Исследованиям специфических особенностей процессов формирования температурных полей в двухслойных областях, моделируемых полупространством с покрытием конечной толщины, под воздействием высокотемпературной внешней среды посвящены многочисленные публикации как теоретического, так и прикладного характера. В значительной степени это обусловлено тем, что при выполнении определенных условий система "полупространство – покрытие" может быть использована при разработке и оптимизации тепловой защиты конструкций с использованием методов математического моделирования.

Несмотря на явный прогресс, исследования в этой области вряд ли можно считать завершенными. Достаточно заметить, что до последнего времени не было известно решение задачи о нахождении температурного поля полупространства с покрытием конечной толщины, пригодного для проведения параметрического анализа, даже при самых жестких допущениях (идеальность теплового контакта в системе "полупространство – покрытие", изотропность, постоянство коэффициента теплоотдачи, постоянство начальной температуры изучаемой системы и температуры внешней среды).

К задачам, требующим проведения дополнительных исследований, следует отнести и задачу об определении температурного поля полупространства с покрытием при реализации нестационарных режимов теплообмена с высокотемпературной внешней средой, приводящих в временно́му изменению коэффициента теплоотдачи. Эффект временно́го изменения коэффициента теплоотдачи может быть обусловлен термодеструкцией материала покрытия.

Термодеструкция поверхностных слоев материала, находящегося под воздействием высокотемпературной внешней среды, в сочетании с уносом массы может сопровождаться движением его границы по заданному закону и образованием на ней покрытия пленочного типа. Учет этих эффектов при изучении специфических особенностей процессов формирования температурных полей в рассматриваемой системе приводит к так называемой обобщенной задаче математической теории теплопроводности.

МГТУ
им. Н. Э. Баумана
БИБЛИОТЕКА

Эффективное решение перечисленных задач, которые являются объектами проведенных исследований, предполагает разработку иерархии математических моделей для описания изучаемого процесса и определение условий применимости каждой из них.

Цель и задачи исследования. Цель проведенных исследований – изучение характерных особенностей процесса формирования температурного поля в экранированном полупространстве при реализации различных режимов высокотемпературного нагрева внешней средой и известных законах движения его границы.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих основных задач.

1. Получение аналитических представлений решения задачи об определении температурного поля изотропного полупространства с теплозащитным покрытием при наличии идеального теплового контакта между ними и теплообменом с внешней средой по закону Ньютона с постоянным коэффициентом теплоотдачи.

2. Проведение параметрического анализа процесса формирования температурного поля в изучаемой системе с целью установления его характерных особенностей.

3. Разработка иерархии математических моделей для описания процесса формирования температурного поля в изотропном полупространстве с покрытием и определение области возможного применения для каждой из этих моделей.

4. Математическая постановка задачи об определении температурного поля изотропного полупространства с "термически тонким" покрытием в импульсных режимах теплообмена с внешней средой и разработка аналитического метода ее решения, позволяющего проводить параметрический анализ изучаемого процесса.

5. Разработка аналитических и численно-аналитических методов исследования процесса формирования температурного поля экранированного полупространства с подвижной границей в нестационарных условиях теплообмена с внешней средой.

6. Проведение параметрического анализа установившейся температуры наиболее нагретой точки изотропного полупространства с покрытием, находящегося под воздействием внешней среды и осесимметричного теплового потока с интенсивностью гауссовского типа, функционирующего в импульсно периодическом режиме.

Методы исследования. Для решения задач, возникших в ходе выполнения диссертационной работы, использовались различные

классы математических методов: методы математической физики и математической теории теплопроводности; методы интегральных преобразований и теории функций комплексного переменного; методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального и матричного анализа; численные методы решения и анализа интегральных уравнений.

Достоверность и обоснованность полученных результатов гарантируется строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов, полученных с использованием различных методов и вычислительных экспериментов. Сформулированные в работе допущения обоснованы как путем их содержательного анализа, так и методами математического моделирования. Результаты диссертационной работы согласуются с результатами, полученными ранее другими авторами и другими методами в частных и предельных случаях.

Научная новизна.

Разработана иерархия математических моделей для описания процесса формирования температурного поля в экранированном полупространстве при высокотемпературном нагреве внешней средой и определены достаточные условия применимости каждой из них.

В аналитически замкнутом виде найдены и теоретически обоснованы решения смешанных задач для уравнений в частных производных параболического типа и их систем, соответствующих разработанным математическим моделям иерархии, и с их использованием исследовано влияние определяющих параметров на процесс формирования изучаемого температурного поля.

С использованием разработанной иерархии моделей, а также предложенных аналитических и численных методов их реализации исследованы специфические особенности процессов формирования температурного поля полупространства с теплозащитным покрытием при различных режимах высокотемпературного нагрева внешней средой как при фиксированном положении его границы, так и при ее движении по заданному закону. Доказана теоретическая возможность реализации режимов термостатирования подвижной границы.

Определено множество допустимых значений вектора определяющих параметров рассматриваемой системы "полупространство – теплозащитное покрытие", находящейся под воздействием внешней

среды и осесимметричного теплового потока с интенсивностью гауссовского типа, функционирующего в импульсно периодическом режиме, при которых установившаяся температура наиболее нагретой точки полупространства не превосходит заданного значения.

Практическая ценность. Результаты диссертационной работы могут быть использованы для исследования и прогнозирования теплового состояния конструкций при реализации различных режимов высокотемпературного нагрева внешней средой, необходимых для разработки эффективных методов теплозащиты.

На защиту выносятся следующие положения:

– аналитические представления решения задачи об определении температурного поля полупространства с покрытием при наличии идеального теплового контакта между ними и теплообменом с внешней средой по закону Ньютона с постоянным коэффициентом теплоотдачи;

– иерархия математических моделей для описания процесса формирования температурного поля в полупространстве с теплозащитным покрытием;

– аналитический метод и результаты исследования особенностей процесса формирования температурного поля в полупространстве с термически тонким покрытием в импульсных режимах теплообмена с внешней средой, приводящих к кусочно-постоянным зависимостям коэффициента теплоотдачи от времени;

– методы и результаты исследования влияния подвижности границы на температурное поле экранированного полупространства;

– результаты параметрического анализа полученного решения задачи об определении установившейся температуры наиболее нагретой точки экранированного полупространства, находящегося под воздействием внешней среды и осесимметричного теплового потока с интенсивностью гауссовского типа, функционирующего в импульсно периодическом режиме, а также достаточные условия непревышения этой температурой заданного значения.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались в МГТУ им. Н.Э. Баумана на Всероссийской конференции "Прикладные проблемы механики ракетно-космических систем", посвященной 40-летию со дня основания кафедры "Аэрокосмические системы" (декабрь 2000 г.) и на Всероссийской конфе-

ренции "Необратимые процессы в природе и технике" (январь 2001 г.); в Санкт-Петербургском государственном техническом университете на XIII Школе-семинаре молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева "Физические основы экспериментального и математического моделирования процессов газодинамики и тепломассопереноса в энергетических установках" (май 2001 г.).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в 5-ти научных статьях [1, 4–7] и 2-х тезисах докладов [2,3].

Личный вклад соискателя. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Диссертация изложена на 152 страницах, содержит 18 иллюстраций и 1 таблицу. Библиография включает 138 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

Первая глава посвящена математическому моделированию процесса формирования температурного поля изотропного полупространства с теплозащитным покрытием при высокотемпературном нагреве внешней средой. Предположения о наличии идеального теплового контакта в системе “полупространство – покрытие”, постоянстве коэффициента теплоотдачи, изотропности покрытия и постоянстве как начальной температуры T_0 изучаемой системы, так и темпе-

ратуры T_c окружающей среды приводят к следующей математической модели изучаемого процесса:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}, \qquad \xi>0, \quad \mathrm{Fo}>0;\\
&\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = a^2\frac{\partial^2\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}, \quad -h<\xi<0, \quad \mathrm{Fo}>0;\\
&\theta(\xi,0)=0;\\
&\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=-h+0} = \mathrm{Bi}\left[\theta(-h+0,\mathrm{Fo})-1\right];\\
&\theta(0+0,\mathrm{Fo})=\theta(0-0,\mathrm{Fo}); \quad \left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0+0} = \Lambda\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0-0};\\
&\theta(\xi,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}>0}\in L^2[-h,+\infty),
\end{aligned} \tag{1}$$

где последнее условие означает, что при каждом фиксированном $\mathrm{Fo}>0$ функция $\theta(\xi,\mathrm{Fo})$ интегрируема с квадратом по пространственной переменной $\xi\in[-h,+\infty)$;

$$\xi=\frac{z}{z_*}, \quad \mathrm{Fo}=\frac{æ t}{z_*^2}, \quad \theta=\frac{T-T_0}{T_c-T_0}, \quad a^2=\frac{æ_п}{æ}, \quad \Lambda=\frac{\lambda_п}{\lambda}, \quad \mathrm{Bi}=\frac{\alpha}{\lambda_п}z_*, \quad h=\frac{l_п}{z_*},$$

z – пространственное переменное, t – время, T – температура, λ – коэффициент теплопроводности, $æ$ – коэффициент температуропроводности, $l_п$ – толщина покрытия, α – коэффициент теплоотдачи, z_* – выбранная единица масштаба, индекс "п" относится к теплофизическим характеристикам покрытия.

Математическая модель (1) является базовой и представляет собой смешанную задачу для системы уравнений параболического типа. Ее решение, представленное в аналитически замкнутом виде, известно лишь для частных случаев, когда при $\xi=-h+0$ заданы граничные условия первого или второго рода.

С использованием интегрального преобразования Лапласа по временно́му переменному Fo было найдено изображение $u(\xi,s)$ решения задачи (1). Оно зависит от положительных параметров

$$A\triangleq a\,\mathrm{Bi}, \quad B\triangleq a/\Lambda, \quad D\triangleq h/a$$

и не допускает непосредственное обращение с использованием таблиц "изображение–оригинал". Для преодоления возникших трудно-

стей были использованы два подхода, первый из которых связан с использованием стандартной техники вычисления интеграла Мелллина, что привело к представлению искомого решения в виде несобственного интеграла I-го рода, зависящего от параметров. Второй подход основан на разложении изображения $u(\xi,s)$ в равномерно сходящийся функциональный ряд и последующем переходе к оригиналу с использованием различных теорем операционного исчисления. Этот подход позволил представить решение задачи (1) в виде равномерно сходящегося функционального ряда. Для обоснования корректности использования преобразования Лапласа в работе сформулированы и доказаны две леммы.

Полученные аналитические представления решения задачи (1) позволили провести параметрический анализ процесса формирования температурного поля в экранированном полупространстве. Установлено, что характерные особенности изучаемого процесса значимо зависят от параметра $H=(B-1)/(B+1)$, увеличение значения которого ассоциируется со снижением интенсивности теплообмена между высокотемпературной внешней средой и термоизолируемой областью (см. рис. 1, 2). Доказано, что специфика асимптотического поведения температуры на границе экранированного полупространства полностью определяется значением критерия Био, толщиной теплозащитного покрытия и отношением коэффициентов температуропроводности материалов покрытия и полупространства.

Вторая глава посвящена разработке иерархии математических моделей для описания процесса формирования температурного поля в полупространстве с теплозащитным покрытием и определению достаточных условий применимости каждой из них.

Практическое использование полученных выше различных форм представления решения задачи (1) для исследования температурного поля в системе "полупространство – покрытие" связано со значительными вычислительными затратами. Поэтому естественной необходимостью является переход от "точной модели" (1) к ее упрощенным аналогам.

Если ввести в рассмотрение среднеинтегральную по толщине покрытия температуру

$$\langle\theta(\mathrm{Fo})\rangle=\frac{1}{h}\int_{-h}^{0}\theta(\xi,\mathrm{Fo})\,d\xi$$

и воспользоваться следующими допущениями:

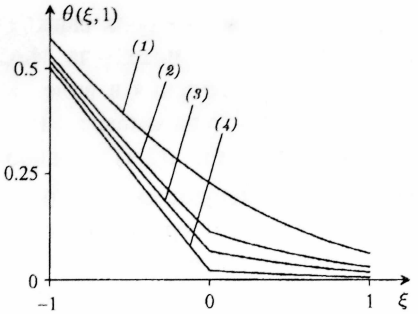


Рис. 1. Температурный профиль в системе "полупространство–теплозащитное покрытие" при различных значениях параметра H :
$H = 0$ *(1)*; $H = 0.5$ *(2)*;
$H = 0.7$ *(3)*; $H = 0.9$ *(4)*

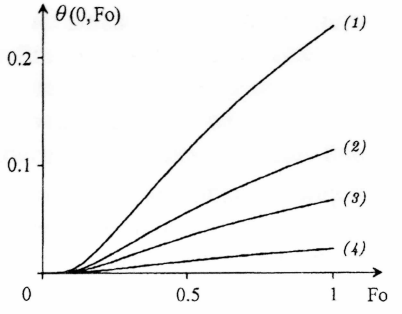


Рис. 2. Временна́я зависимость температуры контактной границы $\xi = 0$ при различных значениях параметра H :
$H = 0$ *(1)*; $H = 0.5$ *(2)*;
$H = 0.7$ *(3)*; $H = 0.9$ *(4)*

1) температура границ покрытия равна его среднеинтегральной температуре, т.е.

$$\theta(-h+0, \mathrm{Fo}) = \theta(0-0, \mathrm{Fo}) = \langle\theta(\mathrm{Fo})\rangle;$$

2) теплообмен в системе "полупространство – среднеинтегральная температура покрытия" происходит по закону Ньютона с неизвестным параметром α^*, т.е.

$$\left.\frac{\partial\theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0+0} = \alpha^*\left[\theta(0+0, \mathrm{Fo}) - \langle\theta(\mathrm{Fo})\rangle\right],$$

то возможно преобразование "точной модели" (1) к более простой "уточненной модели сосредоточенная емкость":

$$\frac{\partial\theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}, \qquad \mathrm{Fo} > 0, \quad \xi > 0;$$

$$\theta(\xi, 0) = 0;$$

$$\frac{d}{d\,\mathrm{Fo}}\langle\theta(\mathrm{Fo})\rangle = \frac{a^2}{h}\left\{\Lambda^{-1}\left.\frac{\partial\theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0+0} - \mathrm{Bi}\left[\langle\theta(\mathrm{Fo})\rangle - 1\right]\right\}; \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0+0} = \alpha^*\left[\theta(0+0, \mathrm{Fo}) - \langle\theta(\mathrm{Fo})\rangle\right];$$

$$\theta(\xi, \mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}>0} \in L^2[0, +\infty).$$

Значение параметра α^*, обеспечивающее наименьшее максимальное отклонение решения задачи (2) от решения задачи (1), было найдено с помощью вычислительного эксперимента.

Дальнейшее упрощение "точной модели" (1) реализовано путем принятия допущения о том, что температура границ покрытия равна не только его среднеинтегральной температуре, но и температуре границы экранируемого полупространства, т.е.

$$\theta(-h+0,\mathrm{Fo}) = \theta(0-0,\mathrm{Fo}) = \theta(0+0,\mathrm{Fo}) = \langle\theta(\mathrm{Fo})\rangle,$$

что позволило заменить "точную модель" (1) моделью "сосредоточенная емкость":

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}, \qquad \mathrm{Fo}>0, \quad \xi>0;\\
&\theta(\xi,0)=0;\\
&\Lambda^{-1}\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0+0} = \mathrm{Bi}\left[\theta(0+0,\mathrm{Fo})-1\right] + \varepsilon\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\xi=0+0};\\
&\theta(\xi,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}>0} \in L^2[0,+\infty),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\varepsilon \triangleq h/a^2$.

Непосредственный анализ модели (3) позволяет выдвинуть гипотезу о том, что при выполнении условия

$$\varepsilon\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\xi=0+0} \ll 1$$

допустимо использование еще более простой "усеченной модели сосредоточенная емкость", которая при $\varepsilon = 0$ формально совпадает с моделью (3).

С использованием интегрального преобразования Лапласа по временно́му переменному Fo были найдены аналитические представления решений задач (2), (3), соответствующих упрощенным моделям, и теоретически обоснована их корректность. Непосредственный анализ полученных результатов позволил сделать вывод о том, что температурное поле в полупространстве $\xi \geq 0$ полностью определяется значением вектора параметров $\Pi \triangleq [A,B,D]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$. Идентификация допустимых множеств изменения вектора Π, гарантирующих заданную точность результатов, полученных с помощью упрощенных моделей, проводилась с использованием аналитических методов и вычислительного эксперимента.

В **третьей главе** изучен процесс формирования температурного поля полупространства с термически тонким покрытием в импульсных режимах теплообмена с внешней средой, приводящих к кусочно-постоянным законам изменения $\mathrm{Bi} = \mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})$.

В качестве объекта исследований использовалась модель "сосредоточенная емкость":

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}, \qquad \mathrm{Fo}>0, \quad \xi>0;\\
&\theta(\xi,0)=0;\\
&\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0+0} = \gamma^{-1}\beta(\mathrm{Fo})\left[\theta(0+0,\mathrm{Fo})-1\right] + \gamma^{-1}\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\xi=0+0};\\
&\theta(\xi,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}>0} \in L^2[0,+\infty),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $\gamma \triangleq a^2(\Lambda h)^{-1}$,

$$
\beta(\mathrm{Fo}) \triangleq a^2 h^{-1}\,\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo}) \equiv \sum_{k=0}^{N}\beta_k\left\{J\left(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}^{(k)}\right)-J\left(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}^{(k+1)}\right)\right\},
$$

$$
0=\mathrm{Fo}^{(0)}<\mathrm{Fo}^{(1)}<\ldots<\mathrm{Fo}^{(N)}<\mathrm{Fo}^{(N+1)}=+\infty, \quad N\in\{0,1,\ldots\}.
$$

Здесь N, $\{\beta_k\}_{k=0}^{N}$, $\left\{\mathrm{Fo}^{(k)}\right\}_{k=0}^{N}$ – известные постоянные, а $J(\mathrm{Fo})$ – единичная функция (функция Хевисайда). Для нахождения аналитического решения задачи (4), удобного для проведения параметрического анализа, был разработан специальный метод.

Результаты вычислительных экспериментов, частично представленные на рис. 3, и параметрический анализ полученного аналитического решения задачи (4) указывают на то, что *(а)* улучшение условий теплообмена с внешней средой сопровождается резким возрастанием температуры на границе экранированного полупространства, а их ухудшение – образованием зоны релаксации, продолжительность которой определяется как длительностью предыдущей фазы, так и модулем приращения коэффициента теплоотдачи; *(б)* асимптотика (при $\mathrm{Fo}\to+\infty$) изучаемой температуры не зависит от реализуемого импульсного режима теплообмена с внешней средой и определяется лишь значением коэффициента теплоотдачи его последней фазы.

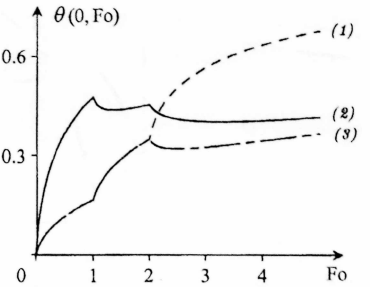


Рис. 3. Зависимость температуры границы $\xi = 0$ полупространства от числа Фурье Fo в импульсном режиме теплообмена с внешней средой при $N = 2$, $\gamma = 5$ и различных значениях параметров β_0, β_1, β_2:
$\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 2,\ \beta_2 = 4$ *(1)*; $\beta_0 = 4,\ \beta_1 = 2,\ \beta_2 = 1$ *(2)*;
$\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 2,\ \beta_2 = 1$ *(3)*

В **четвертой главе** с использованием моделей "сосредоточенная емкость" и "усеченной модели сосредоточенная емкость":

$$\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}, \qquad \mathrm{Fo} > 0, \quad \xi > l(\mathrm{Fo});$$

$$\theta(\xi,0) = 0;$$

$$\Lambda^{-1}\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=l(\mathrm{Fo})+0} = \mathrm{Bi}\left[\theta(l(\mathrm{Fo})+0,\mathrm{Fo})-1\right] + \varepsilon\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\xi=l(\mathrm{Fo})+0}; \qquad (5)$$

$$\theta(\xi,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}>0} \in L^2[l(\mathrm{Fo}),+\infty)$$

исследованы процессы формирования температурного поля в изотропном полупространстве с покрытием пленочного типа, граница которого движется по заданному закону $l = l(\mathrm{Fo})$, при реализации различных режимов теплообмена с внешней средой. При этом были приняты допущения о том, что $l(\mathrm{Fo})$ – неубывающая неотрицательная функция, дифференцируемая хотя бы в обобщенном смысле, $l(0) = 0$, а функция $\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})$ удовлетворяет стандартным требованиям существования и единственности решения задачи (5).

На первом этапе исследований рассматривался случай равномерного движения границы при постоянном коэффициенте теплоотдачи. При $l'(\mathrm{Fo}) \equiv V_0 = \mathrm{const}$ и $\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo}) \equiv \mathrm{Bi} = \mathrm{const}$ было найдено аналитическое представление решения задачи (5) и проведен его параметрический анализ. Установлено, что увеличение скорости V_0 движения границы приводит к снижению асимптотического значения

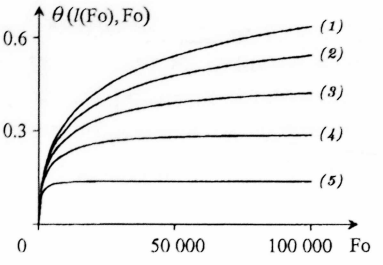


Рис. 4. Влияние скорости V_0 движения покрытия на температуру границы $\xi = l(\mathrm{Fo})$ полупространства при $A = 0.02$, $B = 50$, $D = 0.01$:
$V_0 = 0$ *(1)*; $V_0 = 0.002$ *(2)*;
$V_0 = 0.005$ *(3)*; $V_0 = 0.01$ *(4)*;
$V_0 = 0.025$ *(5)*

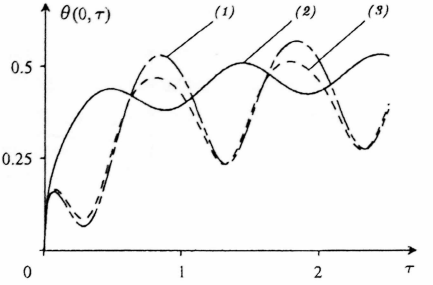


Рис. 5. Температура границы $x = 0$ полупространства при реализации различных режимов теплообмена с внешней средой и различных законах движения покрытия:
$\mathrm{Bi}^*(\tau) = 1 - \sin(2\pi\tau)$, $l'(\tau) \equiv 1$ *(1)*;
$\mathrm{Bi}^*(\tau) \equiv 1$, $l'(\tau) = 1 - \sin(2\pi\tau)$ *(2)*;
$\mathrm{Bi}^*(\tau) = l'(\tau) = 1 - \sin(2\pi\tau)$ *(3)*

температуры в каждой точке полупространства и сокращению времени протекания переходных процессов (см. рис. 4), но характер влияния определяющих параметров используемой модели на процесс формирования изучаемого температурного поля не зависит от V_0.

На следующем этапе была доказана теоретическая возможность реализации режима термостатирования (постоянное значение температуры) движущейся границы полупространства с покрытием пленочного типа.

Изучение процесса формирования температурного поля экранированного полупространства с движущейся по произвольному закону границей и нестационарных условиях теплообмена с внешней средой, приводящих к временно́й зависимости $\mathrm{Bi} = \mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})$, проводилось с использованием "усеченной модели сосредоточенная емкость" (5) при $\varepsilon = 0$.

После перехода в подвижную систему координат $x = \xi - l(\mathrm{Fo})$, $\tau = \mathrm{Fo}$ и использования косинус- и синус-преобразований Фурье по пространственному переменному, решение рассматриваемой задачи удалось представить в виде

$$\theta(x,\tau) = \int_0^l K(\tau,\eta,x)\,\theta(0,\tau)\,d\eta + \int_0^l \Psi(\tau,\eta,x)\,\mathrm{Bi}^*(\eta)\,d\eta, \qquad x \ge 0, \tau \ge 0,$$

где $K(\tau,\eta,x)$ и $\Psi(\tau,\eta,x)$ суть известные функции, а $\theta(0,\tau)$ – решение интегрального уравнения Вольтерра II рода:

$$\theta(0,\tau)=\int_0^{\tau}\frac{1}{\sqrt{\pi(\tau-\eta)}}\left\{\frac{l(\tau)-l(\eta)}{2(\tau-\eta)}-\mathrm{Bi}^{*}(\eta)-l'(\eta)\right\}\exp\left(-\frac{[l(\tau)-l(\eta)]^2}{4(\tau-\eta)}\right)\times$$
$$\times\,\theta(0,\eta)\,d\eta+\int_0^{t}\frac{1}{\sqrt{\pi(\tau-\eta)}}\exp\left(-\frac{[l(\tau)-l(\eta)]^2}{4(\tau-\eta)}\right)\mathrm{Bi}^{*}(\eta)\,d\eta, \qquad (6)$$

ядро которого имеет слабую особенность и не является фредгольмовским. Удалось доказать, что в предположении кусочной непрерывности функций $l'(\tau)$ и $\mathrm{Bi}^{*}(\tau)$ на отрезке $[0;\tau_*]$, $\tau_*<\infty$, решение $\theta(0,\tau)$, $\tau\in[0;\tau_*]$, уравнения (6) существует и единственно в любом из функциональных пространств $C[0;\tau_*]$, $L^p[0;\tau_*]$, $p>2$. Для его нахождения был разработан численный алгоритм, использующий известные квадратурные формулы интерполяционного характера.

В результате анализа проведенных вычислительных экспериментов, частично представленных на рис. 5, установлена возможность управления температурным полем экранированного полупространства с границей, движущейся по заданному закону, путем программного регулирования условий теплообмена с внешней средой.

В **пятой главе** решена задача определения установившегося значения температуры наиболее нагретой точки экранированного полупространства, охлаждаемого внешней средой и находящегося под воздействием осесимметричного импульсно периодического теплового потока с интенсивностью гауссовского типа. В качестве объекта исследований использован двумерный аналог "точной модели" (1) в цилиндрической системе координат. Путем последовательного применения интегральных преобразований Ганкеля нулевого порядка и Лапласа по радиальному и временному переменным соответственно с последующим использованием предельной теоремы операционного исчисления было получено аналитическое выражение для определения установившейся температуры наиболее нагретой точки экранированного полупространства. Его анализ позволил установить монотонную зависимость температуры от определяющих параметров использованной модели и сформулировать достаточные условия, при выполнении которых эта температура не превосходит заданного значения.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

По результатам проведенных исследований могут быть сделаны следующие выводы.

1. Аналитические представления решения задачи об определении температурного поля экранированного полупространства, полученные при выполнении диссертационной работы с использованием "точной модели", позволяют проводить параметрический анализ изучаемого процесса.

2. Характерные особенности процесса формирования температурного поля в системе "полупространство-покрытие" значимо зависят от параметра H, увеличение значения которого ассоциируется со снижением интенсивности теплообмена между высокотемпературной внешней средой и термоизолируемой областью.

3. Специфика асимптотического поведения температуры на границе экранированного полупространства полностью определяется значением критерия Био и отношением коэффициентов теплопроводности материалов покрытия и полупространства.

4. Разработанная иерархия математических моделей для описания процесса формирования температурного поля экранированного полупространства, находящегося под воздействием высокотемпературной внешней среды, позволяет корректно и эффективно решать практически важные задачи.

5. Для нахождения решения задачи об определении эволюции температуры границы полупространства с "термически тонким" покрытием при реализации импульсных режимов теплообмена с внешней средой целесообразно использование аналитического метода, разработанного в ходе проведения настоящих исследований и позволяющего корректно и эффективно решать практически важные задачи.

6. Улучшение условий теплообмена с внешней средой сопровождается резким возрастанием температуры на границе экранированного полупространства, а их ухудшение – образованием зоны релаксации, длительность которой определяется как продолжительностью предыдущей фазы, так и модулем приращения коэффициента теплоотдачи.

7. Асимптотика температуры границы экранированного полупространства не зависит от реализуемого импульсного режима те-

плообмена с высокотемпературной внешней средой и определяется лишь значением коэффициента теплообмена его последней фазы.

8. На основании результатов параметрического анализа аналитических представлений решений соответствующих задач математической теории теплопроводности, полученных при выполнении диссертационной работы, и проведенных вычислительных экспериментов можно утверждать, что

(а) при образовании на границе изотропного полупространства покрытия пленочного типа и ее перемещении с постоянной скоростью V_0 увеличение скорости V_0 приводит к снижению асимптотического значения температуры в каждой точке полупространства и к сокращению времени протекания релаксационных процессов;

(б) характер влияния определяющих параметров модели на температурное поле изотропного полупространства при наличии на его границе, движущейся с постоянной скоростью V_0, покрытия пленочного типа не зависит от V_0;

(в) теоретически возможна реализация режимов термостатирования движущейся границы изотропного полупространства;

(г) управление температурным полем полупространства с границей, движущейся по заданному закону, может быть реализовано путем программного регулирования условий теплообмена с внешней средой.

9. Установившаяся температура наиболее нагретой точки экранированного полупространства, охлаждаемого внешней средой и находящегося под воздействием осесимметричного импульсно периодического теплового потока с интенсивностью гауссовского типа, монотонно зависит от определяющих параметров рассматриваемой системы. Выполнение достаточных условий, сформулированных в ходе выполнения диссертационной работы, гарантирует непревышение этой температурой наперед заданного порогового значения.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

1. Аттетков А.В., Власов П.А., Волков И.К. Формирование температурных полей в полупространстве с теплозащитным покрытием // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Машиностроение. — 2000. — №3. — С. 43 – 54.

2. Аттетков А.В., Власов П.А., Волков И.К. Математическое моделирование температурного поля в полупространстве с теплозащитным покрытием // Необратимые процессы в природе и технике: Тез. докл. Всероссийской конф. — М., 2001. — С. 76 – 77.

3. Аттетков А.В., Власов П.А., Волков И.К. Температурное поле в полупространства с многослойным теплозащитным покрытием // Прикладные проблемы механики ракетно-космических систем: Тез. докл. Всероссийской конф. — М., 2000. — С. 44.

4. Власов П.А. Математическое моделирование температурного поля в полупространстве с теплозащитным покрытием // Физические основы экспериментального и математического моделирования процессов газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках: Труды XIII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева. — М., 2001. — Т. 2. — С. 166 – 169.

5. Аттетков А.В., Власов П.А., Волков И.К. Температурное поле полупространства с термически тонким покрытием в импульсных режимах теплообмена с внешней средой // Инженерно-физический журнал. — 2001. — Т.74, №3. — С. 81 – 86.

6. Власов П.А. Математическое моделирование температурного поля в полупространстве с движущейся границей // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Машиностроение. — 2002. — №1. — С.122 – 127.

7. Аттетков А.В., Власов П.А., Волков И.К. Влияние подвижности границы на температурное поле полупространства в нестационарных режимах теплообмена с внешней средой // Инженерно-физический журнал. — 2002. — Т.75, № 6. — С. 172 – 178.

Подписано в печать 05.01.2004. Заказ № 1т.
Объем 1,0 п.л. Тираж 100 экз.

Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана