На правах рукописи

СОРОКИН ФЕДОР ДМИТРИЕВИЧ

РАЗРАБОТКА МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ И МЕТОДОВ РЕДУКЦИИ ПОЗИЦИОННЫХ ОШИБОК ТЕЛЕСКОПА ШМИДТА НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Специальность 01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Москва 2004

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете им. Н.Э.Баумана.

Официальные оппоненты: доктор технических наук
профессор Постнов В.А.

доктор технических наук
профессор Сарбаев Б.С.

доктор технических наук
профессор Шаргородский В.Д.

Ведущая организация: ОАО «НПО «Алмаз» »

19 " февраля 2004 года в 14 30

не Д212.141.03 при Московском
го тете им. Н.Э.Баумана по адресу:
10

У1661308
Сорокин Ф.Д.
Разработка механической модели формирования и методов редукции
У 1661308

ереные печатью, про
по

ВОЗВРАТИТЕ КНИГУ НЕ ПОЗЖЕ
обозначенного здесь срока

Б-ка МГТУ им. Н.Э. Баумана
1661308
Сорокин Ф.Д. Разработка ме

А.Ю.Карпачев

Тираж 100 экз.
. Н.Э.Баумана

502

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Важнейшими характеристиками небесных тел являются их положения и векторы скорости. Без этих данных нельзя судить о большинстве других характеристик небесных тел, например, об их массах, светимостях, принадлежности к определённым системам звёзд или галактик, определённым популяциям и т.д.

Сетка координат на небе задаётся списком координат небесных тел, положения которых определены с наивысшей возможной на данной ступени развития астрометрии точностью. Говорят, что эти небесные тела задают *фундаментальную систему*. В настоящее время фундаментальная система определена координатами приблизительно 600 квазаров, положения которых измерены методом длиннобазовой радиоинтерферометрии. Квазары – очень далёкие внегалактические источники радиоизлучения очень малых угловых размеров. В оптическом диапазоне фундаментальную систему представляют приблизительно 100 000 звёзд, астрометрические параметры которых измерены в ходе космического эксперимента HIPPARCOS (High Precision Parallaxes Collecting Satellite) в 1989-1992 гг. и с наивысшей возможной точностью привязаны к квазарам.

Все остальные астрометрические наблюдения имеют целью определение координат других небесных тел в этой стандартной системе координат. Такие наблюдения носят относительный характер. Другими словами, подходящими методами следует измерить положение определяемых объектов относительно фундаментальных в какой-либо произвольной системе координат и затем вычислением привести их к фудаментальной системе. На протяжении последнего столетия таким методом был фотографический метод.

Фотографирование в астрономии производится почти исключительно на стеклянные фотопластинки. Точность современных измерительных приборов достигает 1 мкм. При этом размер изображений точечных объектов, звёзд, в лучшем случае составляет 30-40 мкм (при хорошем качестве оптики и хороших атмосферных условиях). Размеры астрономических негативов колеблются в пределах от нескольких сантиметров до нескольких десятков сантиметров. При вычислении сферических координат по результатам измерений необходимо принять *редукционную модель* – правило, по которому измеренные прямоугольные координаты переводятся в сферические. Редукционная модель должна учитывать все факторы, изменяющие взаимное расположение изображений звёзд. Это и аберрации оптической системы, и ошибки измерительного прибора, и преломление света в атмосфере Земли (астрономическую рефракцию), и деформацию фотопластинки.

Методы учёта всех этих факторов, кроме деформации фотопластинки, хорошо известны. Учёт деформации фотопластинки – новая задача, возникшая в связи с перемещением интереса астрономов в сторону всё более и более слабых объектов.

В настоящее время большинство наиболее интересных объектов являются слабыми, часто слабее 20^m (двадцатой звёздной величины). Для регистрации слабых объектов проводились фотографические обзоры всего неба. Все современные обзоры сделаны с помощью телескопа Шмидта. Телескоп Шмидта – оптическая система, обеспечивающая большое поле зрения при высокой светосиле и высоком качестве изображения, что позволяет закончить обзор всего неба в разумные сроки (десять лет).

Вместе с тем телескоп Шмидта обладает существенным недостатком: его фокальная поверхность сферическая. Существует способ преодоления этого недостатка оптическим способом (линза Пиацци-Смита), но качество изображения при этом ухудшается. Другим способом, который, как правило, и применяется на практике, является деформация фотопластинки при фотографировании с целью придать ее поверхности сферическую форму. После фотографирования деформация снимается, и пластинка обрабатывается в приборе, предназначенном для плоских фотопластинок.

Определение точных координат требует учёта ошибок, связанных с деформацией фотопластинки во время фотографирования. До последнего времени точно учесть эти ошибки не удавалось. Поэтому телескоп Шмидта считался непригодным для точного определения астрометрических параметров небесных тел. С другой стороны, координаты слабых объектов приобретали всё большее значение.

Из сказанного выше ясно, что повышение точности определения координат звёзд по материалам фотографических обзоров, является актуальным для многих областей астрономии. Фотографические обзоры, выполненные на Паломарском и Англо-Австралийском телескопах Шмидта (Паломарские обзоры POSS1, POSS2) имеют общемировое значение. С оригинальных фотопластинок Паломарских обзоров сделано около 100 копий, которые распространены во все ведущие мировые астрономические центры. Очевидно, что и ошибки обзоров, а также методы их коррекции имеют общемировое значение.

Таким образом, решение казалось бы частной задачи учёта деформации фотопластинки в телескопе Шмидта, которой посвящена настоящая работа, на самом деле представляет собой ***решение проблемы*** превращения телескопа Шмидта в полноценный астрометрический инструмент.

Цели работы состоят:

- в выявлении и описании методами механики деформируемого твердого тела механизмов возникновения сложной картины

погрешностей фотографических обзоров, выполненных на базе телескопа Шмидта;

- в разработке высокоточных методов расчета позиционных ошибок телескопа Шмидта, позволяющих учитывать влияние механических и оптических явлений на формирование погрешности;

- в разработке методов корректировки систематических ошибок Паломарских (и других) обзоров звездного неба на базе полученных теоретических результатов с учетом конкретных особенностей конструкции телескопов в различные эпохи наблюдений.

Основные задачи, рассмотренные в работе.

Достижение целей, поставленных в предыдущем пункте, достигается решением ряда задач.

1. Анализ структуры поля погрешностей обзоров звездного неба, выполненных на базе телескопа Шмидта, и выявление как механических, так и оптических причин возникновения позиционных ошибок;

2. Разработка новых высокоточных методов и алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния фотопластинки, основанных на нелинейных уравнениях теории оснащенных упругих поверхностей;

3. Теоретический анализ и выявление основных закономерностей процессов формирования позиционных ошибок телескопа Шмидта с использованием разработанных расчетных методов в зависимости от конкретных особенностей его оптико - механической системы;

4. Разработка высокоточных методов редукции наблюдений, полученных на базе телескопа Шмидта, использующих построенный математический аппарат, программно – алгоритмическое обеспечение и результаты теоретического анализа процессов формирования позиционных ошибок.

Научная новизна заключается в том, что впервые на основе разработанных методов расчета перемещений фотопластинки, использующих нелинейную теорию оболочек повышенной точности (теорию оснащенных упругих поверхностей), построена математическая модель формирования погрешностей, отражающая все основные источники указанного явления, имеющие механическую природу. О механических причинах позиционных ошибок телескопа Шмидта было известно еще с 50-х годов прошлого века, однако построить механическую модель деформации фотопластинки требуемой точности до сих пор не удавалось. С использованием разработанной модели впервые выявлены и количественно описаны закономерности формирования сложной картины погрешностей фотографических обзоров, выполненных на базе телескопа Шмидта.

Нелинейные уравнения оснащенных упругих поверхностей, точно учитывающие конечные повороты, во всех известных работах

рассматривались исключительно с теоретических позиций и никогда не применялись для решения практических задач. Это объясняется сложным тензорным характером уравнений и отсутствием готового программно-алгоритмического обеспечения для работы с этими уравнениями. В настоящей работе впервые уравнения оснащенных упругих поверхностей приведены к виду пригодному для применения численного метода (метода установления) и осуществлено их численное решение.

Для работы с тензорными уравнениями теории оснащенных упругих поверхностей разработано новое программное обеспечение, позволяющее обрабатывать векторы и тензоры, принадлежащие поверхности, как замкнутые единицы информации без перехода к проекциям и компонентам. Следует отметить, что ни одна из общедоступных компьютерных систем математических вычислений, в частности MathCad, Maple, Mathematica такими возможностями не обладает.

Заметное влияние особенностей оптики телескопа (виньетирование, экранирование светового потока кассетой) на формирование позиционных ошибок до настоящей работы в литературе не обсуждалось, так как та часть позиционных ошибок, которая обусловлена влиянием оптики, была скрыта более значительной частью, вызванной упругими деформациями фотопластинки. До настоящей работы оценка влияния оптики на позиционные ошибки была затруднена также из-за отсутствия точных координат деформированной поверхности фотопластинки, на которой строится дифракционное изображение звезды. Таким образом, новые данные о координатах такой поверхности, впервые полученные в диссертации, весьма важны для оптики и создают надежную базу полного описания позиционных ошибок телескопа Шмидта.

Достоверность полученных результатов подтверждается

- применением фундаментальных положений (законов) механики деформируемого твердого тела;
- проверкой уравнений тензорной теории конечных поворотов на известных примерах из динамики твердого тела и механики стержней;
- проверкой уравнений теории оснащенных упругих поверхностей на примере осесимметричного изгиба оболочек вращения при больших перемещениях;
- сопоставлением решений одних и тех же задач (контактных и других) различными численными методами, использующими различные математические подходы, - методом конечных элементов в вариационной формулировке и методом установления (фиктивной вязкости) для системы нелинейных дифференциальных тензорных уравнений;
- практически полным совпадением наблюдаемого распределения позиционных ошибок, зафиксированного в Паломарских обзорах с аналогичным распределением, найденным теоретически с

использованием численных методов при решении контактной задачи для фотопластинки, прижатой рамкой к сфере (расхождение не превышает 3-4%);

- тщательным тестированием используемого программного обеспечения, а именно конечноэлементного комплекса ENERGY, специально разработанного для решения нестандартных задач, и систем преобразования математических структур с тензорными данными численного характера Tensalg и аналитического характера Tensors;

- положительным опытом использования разработанных методов, численных и аналитических результатов в практике редукции наблюдений, полученных на базе телескопа Шмидта.

Практическая ценность диссертационной работы заключается в том, что предлагаемые модели и методы позволяют впервые практически решить проблему превращения телескопа Шмидта в точный астрометрический инструмент. Шмидтовские обзоры все еще остаются единственным источником высокоточных (в смысле фотографической астрометрии) положений и собственных движений сотен миллионов слабых объектов, и это положение сохранится – во всяком случае, в отношении объектов в интервале 17-20х звездных величин еще 10-20 лет. Очень сложная картина погрешностей Паломарских обзоров, совершенно непривычная для классической фотографической астрометрии, не позволяла это сделать до настоящего времени.

Существующие методы астрометрической редукции Шмидтовских обзоров основываются на использовании полиномиальных моделей высоких порядков или на аппроксимации осредненных остаточных уклонений для опорных звезд (т.н. маски и фильтры). Оба подхода не отвечают на вопрос о причине сложных систематических ошибок, присущих Шмидтовским наблюдениям, и, кроме того, сами порождают дополнительные систематические ошибки, вызванные низким качеством изображений (как правило, довольно ярких) опорных звезд на Шмидтовских пластинках. Так, например, методы, основывающиеся на осреднении остаточных уклонений для опорных звезд, приводят к появлению так называемого уравнения блеска (зависимость координаты звезды от ее яркости).

Указанные попытки учета систематических ошибок нельзя признать удачными: они не прояснили природы ошибок и не смогли существенно повысить качество астрометрической редукции Шмидтовских наблюдений. В отличие от других методов редукции Шмидтовских обзоров, предлагаемый в работе метод учета систематических ошибок не опирается ни на полиномиальную редукцию высокого порядка, ни на остаточные уклонения для опорных звезд и, как следствие не приводит к появлению уравнения блеска. Более того, при точном приведении на видимое место в предлагаемом подходе можно ограничится простейшей редукционной

моделью, что позволяет использовать для редукции только слабые опорные звезды, отличающиеся высоким качеством изображения.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях, симпозиумах и семинарах:

- на Ломоносовских чтениях (МГУ им. М.В. Ломоносова, 1999);
- на 7-й Всероссийская научно-техническая конференция «Состояние проблемы измерений» (МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000);
- на научно – технической конференции, посвященной 170- летию МГТУ (МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000);
- на астрономической конференции (Казань, 2001);
- на научном семинаре кафедры «Оптика и лазерная техника» (МГТУ им. Н.Э. Баумана, РЛ-2, 2001);
- на конференции «Околоземная астрономия XXI века» (Звенигород, 2001);
- на научном семинаре астрометрического отделения Государственного Астрономического Института им. П.К.Штернберга (ГАИШ, 2002);
- на научном семинаре кафедры «Прикладная механика» МГТУ под руководством профессора В.А. Светлицкого (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002).

Публикации. Основное содержание работы опубликовано в 17 печатных работах (научных статьях, материалах конференций).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, общих выводов, списка литературы из 104 наименований и 3-х приложений с описанием конечно элементного комплекса ENERGY и методик численной обработки величин тензорного характера. Работа изложена на 267 страницах, содержит 94 рисунка и 11 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении отмечена актуальность темы диссертации, сформулированы конечная цель исследования и решаемые задачи, приведена научная новизна и практическая значимость исследования.

В первой главе изучено состояние рассматриваемой проблемы и проведен анализ работ, имеющих отношение как непосредственно к телескопу Шмидта, так и к нелинейным теориям оболочек и решению контактных задач для пластин и оболочек.

Приводится краткое описание конструкции телескопа Шмидта (рис. 1).

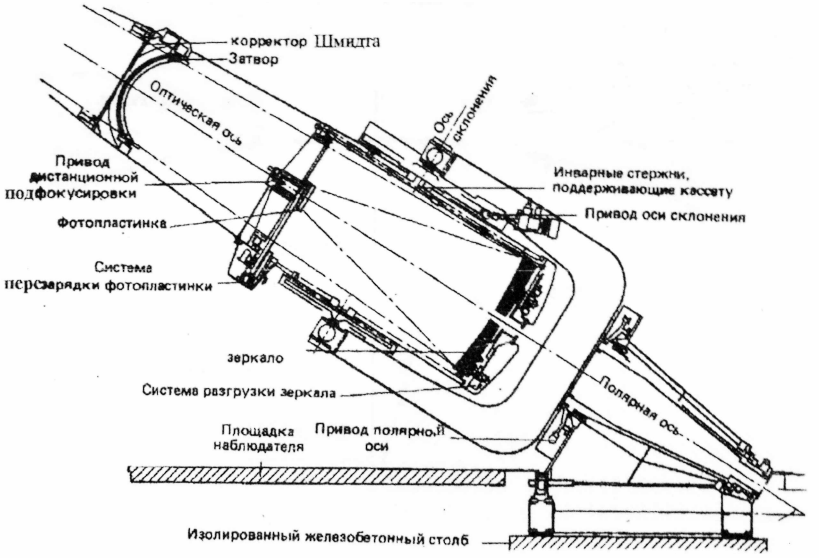

Рис. 1. Схема Англо-Австралийского и Паломарского телескопов Шмидта

Для исправления сферической аберрации в данной системе используется тонкая стеклянная асферическая пластинка сложной геометрии, расположенная в центре кривизны главного зеркала. Описываются преимущества оптической системы телескопа Шмидта перед телескопами других систем – очень большое поле (6.5°×6.5°), хорошее качество изображения и большая светосила. Благодаря этим особенностям телескоп Шмидта используется как основной инструмент получения фотографических обзоров звездного неба. С помощью телескопов Шмидта все небо уже покрыто фотопластинками несколько раз.

Недостатком телескопа является кривое поле – сферическая фокальная поверхность. Для придания фотоэмульсии сферической формы плоскую фотопластинку деформируют в специальной кассете, состоящей из двух деталей - сферического основания и квадратной рамки. Сферическое основание покрыто тонким слоем пластика для предотвращения прямого контакта металла и стекла.

Обсуждаются причины возникновения позиционных ошибок телескопа. Наибольший вклад в формирование погрешности вносит деформация фотопластинки. Размеры фотопластинки - квадрат 355×355мм при толщине 1мм. Перемещения фотопластинки превышают толщину более

чем в 10 раз (рис. 2), что влечет существенное растяжение-сжатие срединной поверхности.

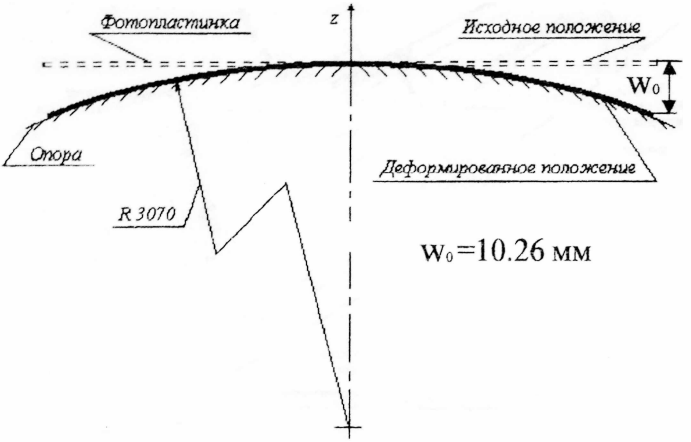

Рис. 2. Деформирование фотопластинки в кассете телескопа

Величина деформаций доходит до 0.001 что довольно много для материала фотопластинок - стекла. Это подтверждается разрушением значительной части фотопластинок (20-30%) в тестовом прессе – устройстве предварительного контроля фотопластинок.

Механизм возникновения искажений довольно несложен. Как известно из геометрии уложить плоскую поверхность на сферу без разрывов и складок невозможно, так как их гауссовы кривизны не совпадают. Поэтому помимо неизбежной деформации изгиба за счет увеличения кривизны при этой операции должны возникать деформации растяжения - сжатия в срединной поверхности пластинки и перемещения в касательной плоскости (рис. 3).

Представлен обзор методов редукции Шмидтовских наблюдений, в котором показано, что до недавнего времени основным инструментом построения редукционных моделей был метод наименьших квадратов. До 1999г. практически единственной работой, в которой возникновение позиционных ошибок телескопа объясняется с позиции теории пластин – оболочек была работа Shepherd W.B. The deformation of a photographic plate in a Schmidt camera // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1953. V.113. No.4. P.450-454.

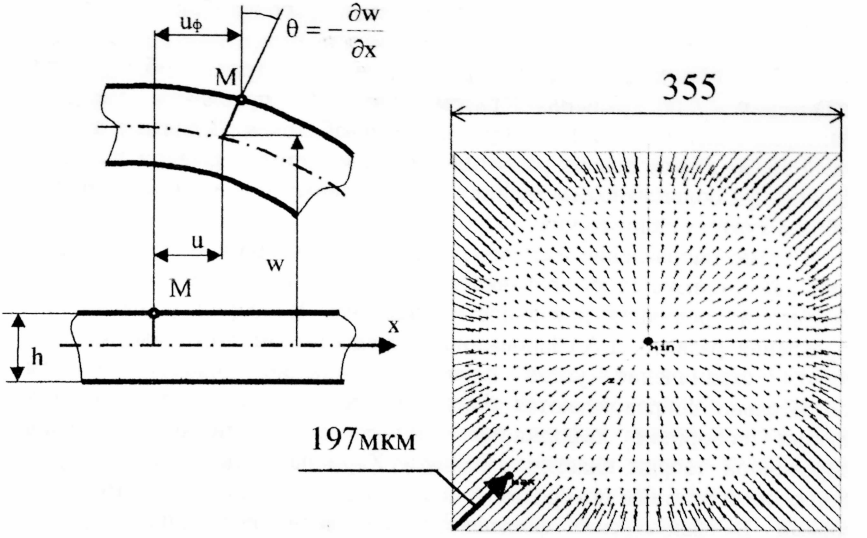

Рис. 3. Смещения точек фотоэмульсии при деформировании фотопластинки

В этой работе рассматривается круглая фотопластинка, прижатая к сфере, и выводится кубический полином для ошибок координат звезд, вызванных деформациями фотопластинки. Несмотря на очевидные недостатки – осесимметричный характер решения и наличие отрицательного контактного давления в периферийной области фотопластинки, решение Шеферда очень популярно у астрономов и применяется для обработки реальных квадратных фотопластинок. С 1953г. до 1999г. вышло только две работы Dieckvoss W. и Абеле М.К., Абеле Г.Э, написанные не механиками, а астрономами, в которых делаются попытки учесть деформации фотопластинки путем решения уравнений теории пластин.

Другие довольно многочисленные работы посвящены построению полиномиальных моделей различного порядка от различного количества переменных. Обзор таких подходов изложен в статье Morrison J.E., Smart R.L., Taff L.G. Do we need to model plates at all? // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1998. V.296. No.1. P.66-76. В этой статье показано, что указанные попытки учета систематических ошибок нельзя признать удачными: они не прояснили природы ошибок, породили дополнительные проблемы в форме “уравнения блеска” и не смогли существенно повысить качество астрометрической редукции Шмидтовских наблюдений. Во всех рассмотренных работах отсутствует количественный анализ наиболее

существенной причины возникновения позиционных ошибок телескопа – деформации фотопластинки во время экспозиции.

Таким образом, в астрометрии возникла острая необходимость привлечения для решения рассматриваемой проблемы методов, характерных для нелинейной теории пластин-оболочек. В связи с этим в первой главе дается анализ развития теории и методов расчета пластин-оболочек при больших перемещениях. В нелинейных теориях выделены два наиболее важных направления.

Первое направление, основоположниками, которого были Карман и Фепль характеризуется квадратичными нелинейностями в выражениях для деформаций срединной поверхности пластины. В теории оболочек это направление развито Л.А.Шаповаловым. Недостатком этого направления является ограничение углов поворота. Большие повороты совсем необязательно сопровождаются большими деформациями (при жестких больших поворотах деформаций нет совсем). Однако, уравнения квадратичной теории пластин Фепля - Кармана неиндифферентны по отношению к жестким поворотам и поэтому не могут быть геометрически точными. В Паломарских фотопластинках максимальные повороты не превосходят 5°, однако, с учетом необычно высоких требований к точности вычислений перемещений фотоэмульсии, такие повороты должны рассматриваться как большие. Количественный анализ показывает недостаточную точность квадратичного варианта нелинейной теории пластин для задач рассматриваемого типа. Перемещения точек фотоэмульсии в плане требуется находить с погрешностью 1мкм (цена деления измерительного прибора), в то время как вертикальные перемещения фотопластинки составляют 10000мкм, а горизонтальные 200мкм. То есть речь идет о погрешности в доли процента.

Второе направление нелинейной теории оболочек, которое принято называть "теорией оснащенных упругих поверхностей", не ограничивает величину поворотов. Уравнения этого направления не содержат никаких геометрических упрощений. Разумеется, переход от реальной оболочки к ее математической модели - оснащенной упругой поверхности и здесь выполняется на основе некоторых гипотез, но поведение математической модели описывается совершенно точными уравнениями. Отказ от упрощений оплачивается сложным тензорным характером разрешающей системы уравнений. Хотя перемещения и повороты считаются произвольными, но деформации в тонкостенной конструкции могут оставаться малыми, при этом уравнения состояния (связь напряжений и деформаций) принимаются линейными. Существует несколько вариантов уравнений теории оснащенных упругих поверхностей, которые отличаются лишь деталями. Общим недостатком всех вариантов является их непригодность к решению практических задач в связи со сложным

нелинейным характером уравнений и отсутствием программного обеспечения пригодного для решения тензорных уравнений.

В итоге результат анализа существующих нелинейных теорий пластин – оболочек и методик расчета тонкостенных конструкций можно сформулировать следующим образом: несмотря на обилие работ в данной области готовых инструментальных средств для расчета перемещений фотоэмульсии деформированных фотопластинок, учитывающих особенности проблемы, нет. Традиционный квадратичный вариант Фепля - Кармана недостаточно точен, а нелинейные тензорные уравнения теории оснащенных упругих поверхностей требуют существенной доработки для их численной реализации и разработки специального программного обеспечения.

Во второй главе разработана механическая модель фотопластинки, обеспечивающая требуемую точность вычисления смещений фотоэмульсии. Так как математический аппарат геометрически точной нелинейной теории оболочек – теории оснащенных упругих поверхностей, которая здесь принята за основу, довольно специфичен, то выводы формул приведены весьма подробно. Использована символика "прямого" тензорного исчисления, заимствованная из монографий А.И.Лурье и К.Ф.Черных.

В связи с тем, что повороты рассматриваются как большие, приведены известные и малоизвестные сведения из векторно-тензорной теории конечного поворота, в частности выражения для тензора поворота и его производной

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}\cos\theta + \mathbf{ee}(1-\cos\theta) + \mathbf{e}\times\mathbf{E}\sin\theta,$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \omega\times\mathbf{L},$$

$$\omega = \mathbf{B}\bullet\frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\theta}(\mathbf{E}\sin\theta + (\theta-\sin\theta)\mathbf{ee} + (1-\cos\theta)\mathbf{e}\times\mathbf{E}),$$

где $\mathbf{e} = \frac{\vartheta}{|\vartheta|}$ - орт оси поворота, $\theta = |\vartheta|$ - угол поворота, $\mathbf{E}$ - единичный тензор, $\mathbf{ee}$ -диадное произведение единичных ортов, $\mathbf{e}\times\mathbf{E}$ - кососимметричный тензор, вычисляемый как векторное произведение орта оси поворота и единичного тензора, $\mathbf{B}$ – тензор, сопровождающий поворот (название автора).

Удобства аппарата прямого тензорного исчисления проиллюстрированы двумя примерами из других разделов механики - приведены вариационные выводы известных уравнений движения твердого

тела с одной неподвижной точкой и уравнений больших перемещений гибкого стержня. В обоих случаях не потребовалось перехода к проекциям и компонентам, то есть выкладки производились в замкнутом виде. В случае гибкого стержня применялась техника получения геометрических соотношений и соотношений упругости на основе известных уравнений равновесия. Преобразование уравнений равновесия в геометрические уравнения выполнено вариационным путем. Техника вывода состоит в том, что из работ невязок уравнений равновесия на виртуальных перемещениях составлен функционал, который преобразуется по частям. Если знак вариации удается вынести за знак интеграла, то множители при силовых факторах оказываются искомыми выражениями для деформаций и компонент изменения кривизны.

Описанная выше техника применялась и для вывода общих нелинейных уравнений гибкой оболочки. Полученный результат оказался малопригодным для численных приложений в силу его излишней общности (полученный вариант отличается от известных вариантов теории оснащенных упругих поверхностей лишь деталями). С целью подготовить уравнения к применению численного метода они были значительно преобразованы. В результате получена цепочка формул, позволяющая по заданным перемещениям находить деформации и повороты, затем внутренние силы и моменты, и, наконец, распределенные нагрузки, удерживающие оболочку в равновесии при заданных перемещениях.

Разрешающая система уравнений имеет следующий вид.

Деформации и повороты

$\Lambda = \sqrt{\nabla \mathbf{r} \bullet (\nabla \mathbf{r})^{\mathrm{T}}}$ (тензор кратностей деформаций),

$\mathbf{L} = \left(\Lambda^{-1} \bullet \nabla \mathbf{r} + \mathbf{n}_0 \mathbf{n}\right)^{\mathrm{T}}$ (тензор поворота),

$\varepsilon = \Lambda - \mathbf{E}_0$ (тензор деформаций),

Изгибания поверхности

$æ = \frac{1}{2}\left(\nabla \vartheta \bullet \mathbf{B} \times \mathbf{n}_0 - \mathbf{n}_0 \times \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \bullet (\nabla \vartheta)^{\mathrm{T}}\right)$ (тензор изменения кривизны, тензор изгибаний),

Соотношения упругости

$\mathbf{T} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)}\left((1-\mu)\varepsilon + \mu \mathrm{Sp}(\varepsilon)\mathbf{E}_0 \right)$ (тензор мембранных усилий),

$\mathbf{M}_{sym} = D\left((1-\mu)\, æ + \mu \mathrm{Sp}(æ)\mathbf{E}_0 \right)$ (симметричный тензор моментов),

Тензор моментов

$$\mathbf{M} = (-\mathbf{M}_{sym} \times \mathbf{n}_0) \bullet \mathbf{L}^T \text{ (несимметричный (полный) тензор моментов),}$$

Тензор сил

$$\mathbf{Q} = \Lambda^{-1} \bullet (\nabla \bullet \mathbf{M}) \bullet \mathbf{L} \times \mathbf{n}_0 \text{ (вектор поперечных сил),}$$

$$\Psi = \frac{1}{\mathrm{Sp}(\Lambda)} (\nabla \bullet \mathbf{M}) \bullet \mathbf{L} \bullet \mathbf{n}_0 \text{ (поправка тензора сил),}$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{T} + \Psi \mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}_0 + \mathbf{Q}\mathbf{n}_0) \bullet \mathbf{L}^T \text{ (полный тензор сил),}$$

Распределенные нагрузки

$$\mathbf{q} = -\nabla \bullet \mathbf{P}.$$

Представленная система точно учитывает конечные повороты и предназначена для вычисления усилий, моментов и распределенных нагрузок по заданным перемещениям. Деформации, однако, считаются малыми, то есть вариант теории аналогичен уравнениям механики гибких стержней. Систему можно рассматривать как нелинейный дифференциальный оператор, восстанавливающий нагрузки по заданным перемещениям. Порядок системы 8й, как и должно быть в теориях Кирхгофовского типа (здесь поворот материального элемента совпадает с поворотом поверхности).

Некоторые детали вывода этой системы учтены впервые, в частности инвариантная поправка аналогичная поправке Балабуха-Новожилова (кососимметричная составляющая тензора сил с множителем ψ). В классической теории оболочек поправка Балабуха-Новожилова не является инвариантной и поэтому не может быть удобно представлена через тензоры. Кроме того, выражение тензора изгибаний **æ** через градиент поворота и тензор, сопровождающий поворот **B**, является совершенно новым и не встречается в таком виде ни в одной, известной автору, работе.

В представленной выше системе применяются весьма специфические операции на поверхности, для которых нет готовых реализаций ни в одном известном компьютерном математическом пакете, хотя тензоры, реализованы во многих пакетах, например, Maple или Reduce. В связи с этим для решения поставленной задачи разработано специальное программное обеспечение, нацеленное на обработку векторов и тензоров, связанных с поверхностью. Численные операции запрограммированы на языке Pascal, а аналитические на языках систем Mathematica и Reduce. Некоторые из них представлены в следующих таблицах

Алгебраические операции

Название	Сокращенное математич. обозначение	Расширенная индексная запись	Компьютерная процедура в Tensalg.pas
Скалярное произведение	$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$	$A_{ij}B_{jk}$	Scal(A,B)
Всекторное произведение	$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	$A_{ij}\varepsilon_{kim}B_{mn}$	Vect(A,B)
Диадное произведение	$\mathbf{AB}$	$A_{ij}B_{mn}$	Diad(A,B)
Двойное скалярное произведение	$\mathbf{A} \bullet\bullet \mathbf{B}$	$A_{ij}B_{ij}$	Biscal(A,B)
Универсальное произведение	$\mathbf{A} \circ\times \bullet \mathbf{B}$ $\mathbf{A} \bullet\times \mathbf{B}$	$A_{ijk}\varepsilon_{mjq}B_{pqk}$ $A_{ij}\varepsilon_{mjk}B_{ik}$	Univ(A,'dvs',B) Univ(A, 'sv' ,B)
След	$\mathrm{Sp}(\mathbf{A})$	A_{ii}	Sp(A)
Векторный инвариант	$\mathrm{Wh}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_{\times}$	$\varepsilon_{ijk}A_{jk}$	Wh(A)
Функция от тензора	$f(\mathbf{A})$	$\sum f_n \mathbf{A}^n$	Apply(f,A)
Тензор поворота	$\mathbf{L} = e^{\mathbf{E}\times\mathbf{a}}$	Exp(spin(a))	Versor(a)

Дифференциальные операции

Название	Математич. обозначение	Индексная Запись	Компьютерная процедура
Градиент на поверхности	$\nabla \mathbf{a}$	$\mathbf{s}_i \dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha_i}$	grad2(a,alf,bet)
Ротор на поверхности	$\nabla \times \mathbf{F}$	$\mathbf{s}_i \times \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha_i}$	rot2(F,alf,bet)
Дивергенция на поверхности	$\nabla \bullet \mathbf{F}$	$\mathbf{s}_i \bullet \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha_i}$	div2(F,alf,bet)

где $\mathbf{s}_1 = \dfrac{\mathbf{t}_{20} \times \mathbf{n}_0}{A_{10} \sin \chi_0}$, $\mathbf{s}_2 = \dfrac{\mathbf{n}_0 \times \mathbf{t}_{10}}{A_{20} \sin \chi_0}$ - векторы, построенные из ортов естественного трехгранника и параметров Ламе срединной поверхности в исходном состоянии.

Контроль разработанного программного обеспечения осуществляется целой системой тестов. Каждый тест, представляет собой векторное или тензорное тождество. Например, в качестве теста используется тождество $\nabla \times \mathbf{K}_0 = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{K}_0^2$, которое означает, что ротор тензора кривизны поверхности выражается через квадрат того же тензора. Таких тождеств при контроле проверяется несколько десятков.

Разработанное программное обеспечение позволило оценить точность традиционной квадратичной теории пластин Фепля-Кармана. В уравнения квадратичной теории были подставлены функции перемещений, характерные для Паломарских фотопластинок. По заданным перемещениям вычислены, соответствующие им распределенные нагрузки. Те же нагрузки вычислялись и по геометрически точным уравнениям оснащенных поверхностей. Сравнение показало, что касательные составляющие распределенных нагрузок, вычисленные по двум теориям весьма близки, а нормальные составляющие отличаются более чем на 13%, то есть весьма заметно при требованиях к точности, характерных для данной задачи. Как показало дальнейшее исследование, квадратичная теория пластин дает отрыв фотопластинки от сферы при решении контактной задачи с погрешностью более 10%, то есть того же уровня, что и отмеченное выше расхождение нормальных нагрузок. Таким образом, показано, что применение уравнений уточненной теории оболочек при решении рассматриваемой задачи является необходимым.

Несмотря на недостаточную точность уравнений квадратичной теории пластин они гораздо проще и дают хорошее приближение к окончательному решению. В связи с этим большинство задач в диссертации решаются в несколько этапов. Первоначальное приближение находится по квадратичной теории, а затем уточняется по геометрически точным уравнениям оснащенных поверхностей. Как правило, первоначальное приближение находится методом конечных элементов. Применяются специальные конечные элементы, в которых изначально выделено некоторое базовое состояние и ищутся малые поправки относительно него. Так как такие элементы обычно не предусматриваются в распространенных конечноэлементных системах, то решение производилось конечноэлементным комплексом ENERGY, разработанным автором специально для решения нестандартных задач. Основное отличие комплекса ENERGY от других состоит в упрощенной процедуре разработки конечного элемента. Для внедрения нового конечного элемента в ENERGY

нужно составить выражение (или процедуру) вычисления полной энергии элемента. Все остальные действия по формированию системы уравнений, ее решению и выводу результатов комплекс ENERGY выполняет автоматически. При формировании специальных конечных элементов пластины энергия разбивается на основную и дополнительную части. Основная часть соответствует базовому состоянию и не учитывается. Все выкладки производятся только с дополнительной частью. Такие конечные элементы с разделением энергии на большую и малую части позволяют на порядки снизить вычислительные затраты и повысить точность.

В третьей главе вопросы, затронутые в диссертации, рассмотрены в приложении к телескопу Шмидта с круглыми фотопластинками. Это объясняется следующими причинами:

1) Круглые фотопластинки, хотя и редко, но все же применяются в некоторых системах, в частности, в конструкции телескопа Шмидта CIDA (Centro de Investigaciones de Astronomía);

2) Классическое решение Шеферда, которое до недавнего времени было единственным общим результатом в рассматриваемой проблеме, построено для круглой фотопластинки;

3) Осесимметричная задача для круглой фотопластинки является одномерной и решается гораздо проще двумерной задачи для квадратной фотопластинки. Это позволяет довольно несложно оценить влияние на позиционные ошибки многих факторов, таких как отрыв фотопластинки от сферы, поперечные сдвиги, трение и т.п.

4) Так как осесимметричная задача допускает решение многими различными методами, то это предоставляет возможность тестирования и контроля нетрадиционных методов.

Основным содержанием главы является анализ классического решения Шеферда. Решение Шеферда, опубликованное еще в 1953 г., до настоящего времени было единственным общим результатом в изучаемой проблеме. Это решение настолько прочно вошло в астрономическую практику, что оно используется без всякого анализа и применяется как единственное средство редукции Шмидтовских наблюдений даже в компьютерных программах, распространяемых на международном уровне.

Шеферд рассмотрел круглую плоскую фотопластинку, полностью прижатую к сфере. Его решение было построено на следующих предположениях:

(1) Пластинка остается упругой и изотропной во время деформации.
(2) Пластинка контактирует со сферической опорой без зазоров по всей поверхности.
(3) Трение между пластинкой и сферической опорой отсутствует.
(4) На краю пластинки нет радиальных усилий.

Предсказываемое решением Шеферда угловое смещение положения звезды в радиальном направлении ε, вызванное деформацией, имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{1-\mu}{16}\gamma^2\lambda - \frac{1-3\mu}{48}\lambda^3$$

где μ - коэффициент Пуассона материала (в данном случае - стекла), из которого изготовлена пластинка, $\gamma \approx a/R$ - угловой радиус поля зрения (от центра пластинки до прижимного кольца) в радианах, a - радиус круглой пластинки, R - радиус сферы (равный фокусному расстоянию телескопа Шмидта), λ - угловое расстояние точки пластинки от центра, в радианах.

В диссертации приводится другой вывод этой поправки вариационным методом. При этом получается формула для радиальных перемещений точек срединной поверхности, отличная от решения Шеферда

$$u = \frac{1-\mu}{16}\frac{ra^2}{R^2} - \frac{3-\mu}{16}\frac{r^3}{R^2}$$

Как показывает анализ отличие этой формулы от решения Шеферда связано с практикой измерения расстояний в астрономии в угловых единицах. Шеферд неявно принимает за отсчетное состояние фотопластинки не исходное плоское состояние, а некоторое промежуточное положение, которое получится, если укладывать фотопластинку на сферу перемещая ее точки строго по нормали к сфере. Очевидно, что угловые координаты при этом остаются неизменными, чего нельзя сказать о радиальных перемещениях.

Как уже было сказано выше, формула, полученная Шефердом для круглой фотопластинки, продолжает широко использоваться в практике редукции наблюдений, зафиксированных на квадратных фотопластинках. Это можно объяснить традицией, а также тем, что формула Шеферда объясняет наиболее существенный дефект телескопа – так называемую кубическую дисторсию. Применение решения Шеферда на промежуточном этапе редукции наблюдений создает у астрономов ощущение выполненного долга и позволяет им утверждать, что упругие деформации учтены. Указанная практика неаккуратного использования поправки Шеферда должна быть подвергнута критике, по следующим причинам.

Кубическая дисторсия всегда учитывается в редукционных полиномиальных моделях, поэтому решение Шеферда, по сути, не вносит ничего нового. Численный эксперимент показывает, что редукция полным

кубическим полиномом, выполненная с учетом поправки Шеферда и без нее дает практически одинаковые результаты.

Решение Шеферда само по себе является неточным, так как из него следует "парадокс отрицательного давления". Как отмечает сам Шеферд, в периферийной области фотопластинки контакт невозможен, так как контактное давление, определяемое формулой

$$p = \frac{Eh}{8R^3}\left(a^2 - 2r^2\right)$$

становится отрицательным в области $r > a/\sqrt{2}$. Таким образом решение Шеферда становится возможным, только если к части пластинки приложить внешнее давление, причем переменной величины. Отсутствие такового неизбежно должно привести к неплотному прилегании части пластинки к сфере. Отставание пластинки от сферы равносильно укладыванию ее на поверхность отличную от сферы. Разумеется, изменение опорной поверхности неизбежно должно сказаться на всей картине перемещений точек фотоэмульсии, что и происходит на самом деле.

Для выяснения ошибки, которую вносит предположение Шеферда о двустороннем контакте, была решена контактная задача для фотопластинки прижатой к сфере только по контуру. Решение строилось различными способами и по теориям различной точности. При решении задачи по квадратичной теории пластин предполагалось наличие центральной зоны контакта и периферийной зоны отрыва, граница между которыми находилась итерациями. Контроль этого решения осуществлялся МКЭ с разделением решения на базовое (решение Шеферда) и малые поправки. Геометрически точные уравнения осесимметричного изгиба решались методом установления (метод фиктивной вязкости), в котором вместо уравнений равновесия рассматриваются уравнения вязкого движения

$$C_u \frac{\partial u}{\partial t} = -(q_1 \cos\vartheta + q_3 \sin\vartheta),$$

$$C_w \frac{\partial w}{\partial t} = -(-q_1 \sin\vartheta + q_3 \cos\vartheta)$$

За начальное состояние принималось решение Шеферда, затем на каждом шаге по времени определялись неуравновешенные распределенные нагрузки, которые указывают точкам фотопластинки направление движения в фиктивной вязкой среде. Если точка пытается проникнуть под сферу, то она удерживается на сфере в нормальном направлении, при этом никаких ограничений на движение в касательном направлении не накладывается.

Процесс останавливался, когда неуравновешенные нагрузки становились малыми. Таким способом была решена контактная задача.

Результаты показывают (рис. 4), что решение Шеферда в самом деле содержит существенную погрешность за счет того, что не учитывает отрыв фотопластинки от сферы. Если же его учесть, то касательное смещение фотоэмульсии будет отличаться от решения Шеферда на 3%. Для Паломарских фотопластинок при уровне касательных перемещений 200мкм, это составит около 6мкм, что намного больше погрешности измерений, которая составляет 1мкм.

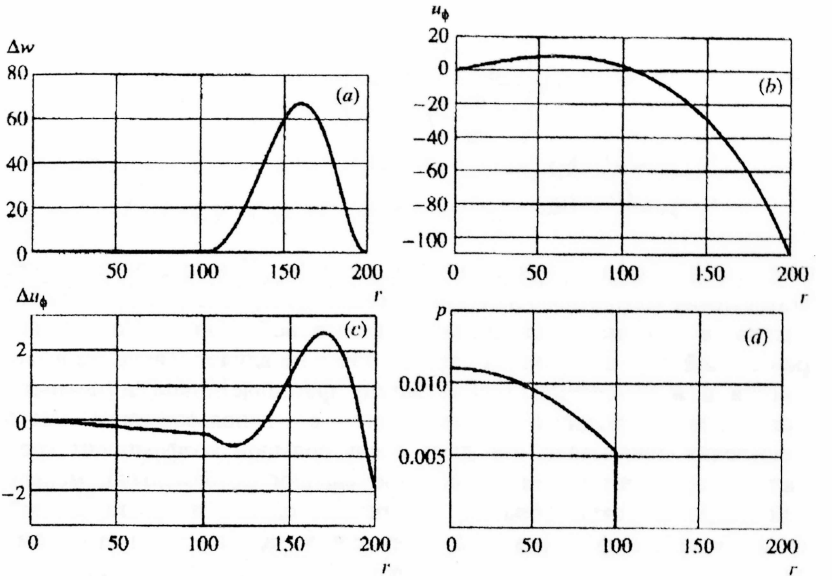

Рис. 4. Решение модифицированной задачи Шеферда с учетом отрыва фотопластинки от сферы (r - радиус, мм; $u_ф$,Δw – радиальное перемещение фотоэмульсии и отрыв от сферы, мкм; p – контактное давление, МПа; $Δu_ф$ – отклонение от поправки Шеферда, мкм)

Метод установления довольно редко применяется в расчетной практике в связи с его медленной сходимостью. Однако, как оказалось, этот метод весьма эффективен для рассматриваемых задач, так как здесь он применяется всего лишь для уточнения решений, найденных по более простым уравнениям. Так как уточненное решение очень мало отличается от приближенного, то требуется сравнительно мало итераций метода установления. Здесь он удобен еще и потому, что позволяет сравнительно

легко решать контактные задачи. Достаточно все лишь ограничивать движение точек фотопластинки по нормали к контактной поверхности.

Так как метод установления допускает нелинейности любой сложности, то он применялся еще и для оценки влияния различных факторов на точность решения. Оценивалось влияние поперечных сдвигов и трения между фотопластинкой и покрытием сферы. Как показано в известной монографии Григолюка Э.И. и Толкачева В.М. эти факторы могут оказать существенное влияние на распределение контактных усилий. Учет поперечных сдвигов был сведен к замене одного из геометрических соотношений на более сложное

$$\vartheta = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\dfrac{dw}{dr} - \gamma_{13}\cos\vartheta}{1 + \dfrac{du}{dr} - \gamma_{13}\sin\vartheta}\right),$$

$$\gamma_{13} = \frac{kQ}{Gh},$$

(гипотеза Кирхгофа получается при $\gamma_{13} = 0$). Как показали расчеты, распределение контактного давления, в самом деле, изменяется, но только в окрестности границы центральной контактной зоны. На величину перемещений учет поперечных сдвигов почти не влияет. Такие же выводы делаются и в отношении трения между фотопластинкой и покрытием сферы. Вычислительный эксперимент с использованием метода установления показывает, что даже очень большой коэффициент трения порядка 1 приводит к изменению перемещений фотоэмульсии меньшим долей микрона. Таким образом, поперечные сдвиги и трение являются несущественными факторами в контактных задачах рассматриваемого типа. Разумеется, и для квадратных фотопластинок Паломарских обзоров будут справедливы аналогичные оценки. То есть и при решении контактной задачи для квадратных фотопластинок трение и поперечные сдвиги можно не учитывать.

Четвертая глава посвящена изучению механизма формирования позиционных ошибок телескопа Шмидта для проектного положения фотопластинки в кассете телескопа, то есть при ее полном прилегании к сфере. Основное содержание главы состоит в построении **базового решения** и оценке его точности. Базовым решением названо приближенное аналитическое решение высокой точности, полученное методом Ритца для случая двустороннего контакта квадратной фотопластинки и сферы. Решение строилось по квадратичной теории пластин в тех же предположениях, что и у Шеферда. Минимизировался функционал мембранной энергии деформаций фотопластинки

$$U=\frac{Eh}{2(1-\mu^2)}\iint\left(\varepsilon_x{}^2+\varepsilon_y{}^2+2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y+\frac{1-\mu}{2}\gamma_{xy}{}^2\right)dxdy$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \qquad , \quad w=-\frac{x^2+y^2}{2R}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Функции, минимизирующие функционал, отыскивались в виде полиномов 7-го порядка, при записи которых учтена симметрия решения относительно координатных осей и диагоналей квадрата

$$u=C_1x+C_2xy^2+C_3x^3+C_4xy^4+C_5x^3y^2+C_6x^5+C_7xy^6+C_8x^3y^4+C_9x^5y^2+C_{10}x^7,$$
$$v=C_1y+C_2yx^2+C_3y^3+C_4yx^4+C_5y^3x^2+C_6y^5+C_7yx^6+C_8y^3x^4+C_9y^5x^2+C_{10}y^7.$$

Аналитические выражения для коэффициентов имеют следующий вид :

$$c_1=-\frac{1}{32}\frac{a^2(5576184-2838722\mu-2670505\mu^2-68182\mu^3+1225\mu^4)}{ZR^2},$$

$$c_2=\frac{7}{16}\frac{(650100-444408\mu-367537\mu^2-9018\mu^3-175\mu^4)}{ZR^2},$$

$$c_3=\frac{1}{96}\frac{(50360576+15569894\mu-4074959\mu^2-199490\mu^3+3675\mu^4)}{ZR^2},$$

$$c_4=\frac{35}{32}\frac{(353964+309372\mu+70451\mu^2+1752\mu^3-35\mu^4)}{Za^2R^2},$$

$$c_5=-\frac{35}{16}\frac{(110484-55420\mu-53891\mu^2-1208\mu^3+35\mu^4)}{Za^2R^2},$$

$$C_6 = -\frac{77}{16}\frac{(7026+19511\mu+7116\mu^2-221\mu^3)}{Za^2R^2},$$

$$C_7 = \frac{1001}{16}\frac{(226+357\mu+131\mu^2)}{Za^4R^2},$$

$$C_8 = -\frac{35}{32}\frac{(149672+225090\mu+77205\mu^2+1752\mu^3-35\mu^4)}{Za^4R^2},$$

$$C_9 = \frac{231}{16}\frac{(7026+10225\mu+3285\mu^2+86\mu^3)}{Za^4R^2},$$

$$C_{10} = -\frac{143}{16}\frac{(226+357\mu+131\mu^2)}{Za^4R^2},$$

где $Z = -2467724 - 1208496\mu - 28609\mu^2 + 450\mu^3$, R – радиус сферы, a – половина стороны фотопластинки, μ - коэффициент Пуассона стекла. Коэффициенты полиномов были найдены с помощью компьютерной аналитики (Maple) из системы алгебраических уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial C_i} = 0, \qquad (i = 1,2,...,10)$$

Аналитический характер решения делает его весьма удобным для приложений в астрометрии.

Вопрос о точности найденного решения выяснялся сравнением с МКЭ и уточненным решением, полученным методом установления по теории оснащенных упругих поверхностей. Учет конечных поворотов и влияния горизонтальных перемещений на вертикальные приводит к выводу о высоком качестве базового решения для фотопластинок Паломарских обзоров в случае двустороннего контакта фотопластинки со сферой. Если обеспечить полное прилегание фотопластинки к сфере, то погрешность полученного приближенного решения в полиномах не превосходит 0,64мкм.

Полученное решение сравнивалось с реально наблюдаемым искажением изображения на фотопластинках. Весьма наглядно удалось провести сопоставление не для полных, а для, так называемых, редуцированных перемещений. Редукция заключается в удалении из перемещений фотоэмульсии $u_\phi(x,y), v_\phi(x,y)$ полиномов третьего порядка, найденных методом наименьших квадратов. Редукция является обычной операцией при обработке фотопластинок и выполняется с целью уменьшения погрешностей.

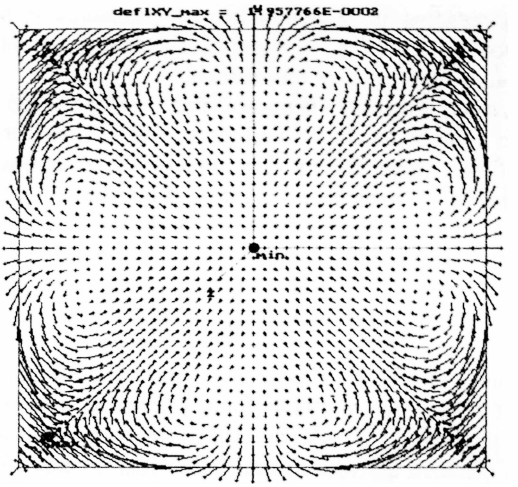

Рис. 5. Базовое решение (редукция полиномом 3го порядка)

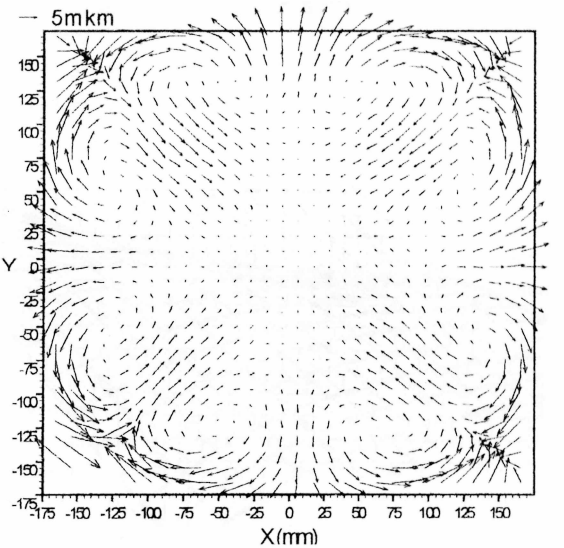

Рис. 6. Позиционные ошибки второго Паломарского обзора (редукция полиномом 3го порядка)

На рис. 5, 6 приведены поля перемещений реальных и рассчитанных по полиномам базового решения, редуцированных по одинаковой методике. Оба поля выглядят практически одинаково.

При создании второго Паломарского обзора конструкция кассеты телескопа была дополнена вакуумной системой, которая позволила снизить отклонения рабочей поверхности фотопластинки от сферы до 15мкм. Это создало условия идеально соответствующие предположениям, использованным при получении базового решения. Этим можно объяснить, то, что качество редукции, основанной на теоретических и численных результатах четвертой главы диссертации, намного выше для фотопластинок второго Паломарского обзора, чем для фотопластинок первого обзора.

Вакуумная система появилась на Паломарском и Англо-Австралийском телескопах в 1989г. Если вакуум не применять, то полный контакт фотопластинки и сферы обеспечить невозможно, так как в периферийной области фотопластинки при этом должно быть реализовано отрицательное контактное давление (рис. 7).

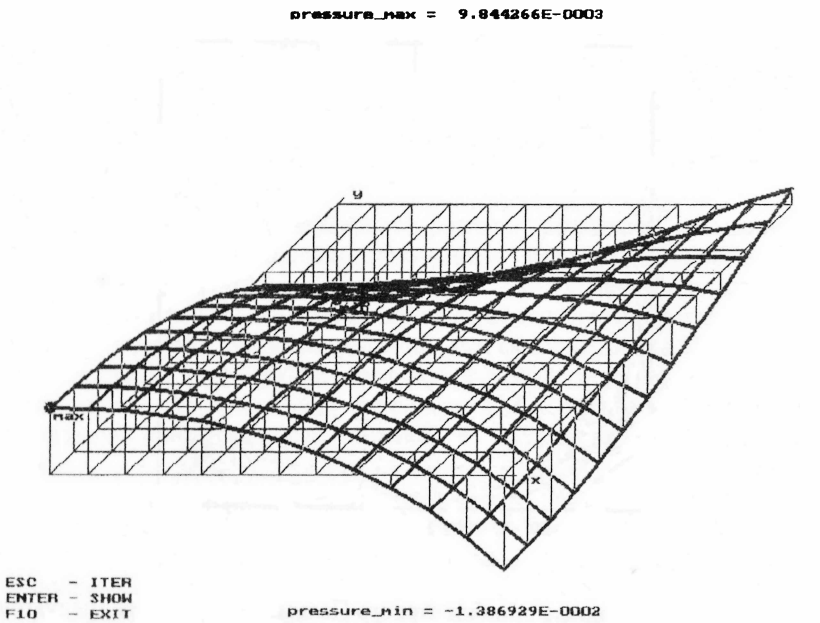

Рис. 7. Контактное давление базового решения, МПа

Это значит что, при обработке наблюдений для всех фотопластинок, отснятых на этих телескопах до 1989г. необходимо учитывать неизбежный отрыв нижней поверхности фотопластинки от сферы, то есть решать контактную задачу. На старых фотопластинках зафиксировано расположение звезд в прежние эпохи, причем массовую информацию о положениях слабых объектов можно найти только в Паломарских обзорах. В связи с этим значение решения с учетом отрыва фотопластинки от сферы возрастает, причем актуальность сохранится и в будущем, так как Паломарские обзоры, выполненные несколько десятков лет назад с течением времени становятся все более ценным источником информации о прежних эпохах.

В пятой главе решена контактная задача для Паломарских фотопластинок в реальных условиях их эксплуатации. Контакт считался односторонним, а фотопластинка прижатой к сфере только по контуру. Предварительно оценивалось влияние податливости деталей кассеты и упругого покрытия кассеты. Контактная задача решалась различными методами. Более грубое решение получалось МКЭ (комплекс ENERGY) с использованием разделения всех неизвестных на основные и дополнительные части, причем основные части соответствуют базовому решению. Перемещения четырехугольного конечного элемента задавались следующим образом

$$u=u_0(x,y)+u_1+u_2x+u_3y+u_4xy,$$

$$v=v_0(x,y)+v_1+v_2x+v_3y+v_4xy,$$

$$w=w_0(x,y)+w_1+w_2x+w_3y+w_4x^2+w_5xy+w_6y^2+$$

$$w_7x^3+w_8x^2y+w_9xy^2+w_{10}y^3+w_{11}xy^3+w_{12}yx^3,$$

где индексом “0” помечено решение, соответствующее полному прилеганию фотопластинки к сфере, которое уже определено выше (базовое решение). Энергия конечного элемента вычислялась в замкнутом виде с помощью компьютерной аналитики (Reduce), а часть энергии, соответствующая базовому решению опускалась. Такая технология построения конечного элемента на порядки снижает вычислительные затраты, так как ищутся только малые поправки к базовому решению.

Контактная задача решалась методом множителей Лагранжа, который является встроенной возможностью комплекса ENERGY. Фотопластинка удерживалась на сфере жесткими конечными элементами с двумя степенями свободы, имеющими смысл относительного вертикального перемещения и множителя Лагранжа. Полный потенциал такого элемента имеет вид

$$\Pi=\lambda(w-w_0)+C\frac{(w-w_0)^2}{2}$$

где λ – множитель Лагранжа, имеющий смысл реакции жесткой связи; $(w - w_0)$ - вертикальное перемещение фотопластинки относительно сферы; C – фиктивная жесткость, которая не влияет на решение, но улучшает свойства глобальной матрицы жесткости. Наличие слагаемого с фиктивной жесткостью не меняет энергии системы, так как следствием стационарности функционала по λ является уравнение жесткой связи $(w - w_0) = 0$.

Множители Лагранжа находятся вместе с другими неизвестными задачи при решении глобальной системы уравнений МКЭ. Для преодоления численных проблем приоритет множителей Лагранжа задавался меньшим, чем приоритет линейных и угловых перемещений. Это означает, что при решении системы алгебраических уравнений множители Лагранжа исключаются после всех других переменных, расположенных в данной точке пространства. Отрицательный знак множителя Лагранжа означает сжимающее усилие в жесткой связи. В этом случае на следующей итерации такая связь сохраняется. В противном случае связь снимается, и соответствующая точка становится свободной.

Если свободная точка после очередной итерации оказывается под сферой, то она принудительно перемещается на поверхность сферы и закрепляется жесткой связью с множителем Лагранжа. Итерационный процесс сходится за 5-10 итераций, на последующих итерациях конфигурация контактной зоны перестает меняться. В результате получается функция отрыва фотопластинки от сферы (рис. 8).

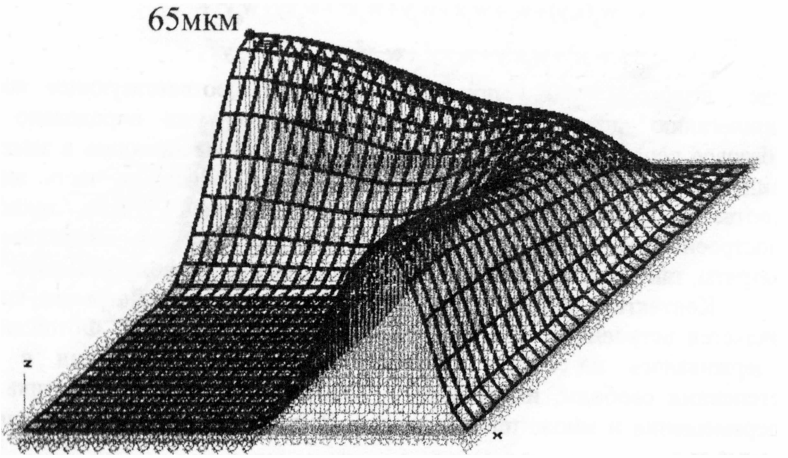

Рис. 8. Функция отрыва от сферы для четверти фотопластинки

Полученное решение уточняется методом установления сначала по уравнениям квадратичной теории пластин с весьма мелкой разбивкой

(четверть квадрата разбивается на 400×400 элементов), а затем по тензорным уравнениям теории оснащенных упругих поверхностей, полученным во 2-й главе диссертации.

Найденная конфигурация контактной зоны сопоставлялась с прямыми наблюдениями на экспериментальной модели. В эксперименте полимерная пластинка прижималась по краям большим количеством слоев нитей к стеклянной сфере. Между пластинкой и сферой помещалась контрастная вязкая малопрозрачная жидкость. Жидкость заполняла пространство между пластинкой и сферой под действием сил смачивания. Прозрачность слоя жидкости зависит от его толщины. Тонкие слои практически прозрачны, более толстые непрозрачны. В результате зона отрыва пластинки от стеклянной сферы становится хорошо заметной на просвет. Этот качественный эксперимент (в эксперименте не соблюдается механическое подобие с фотопластинками) подтверждает квадратные очертания контактной зоны и разрешает некоторые противоречия с результатами наблюдений.

Полученные распределения вертикальных и горизонтальных перемещений фотоэмульсии послужили основой принципиально нового метода редукции наблюдений, получаемых на базе телескопа Шмидта. Метод сводится к удалению из измеренных по фотопластинкам координат звезд поправок, рассчитанных по предложенной механической модели фотопластинки. Метод не требует построения редукционного полинома высокого порядка и, следовательно, привлечения большого количества опорных звезд. Для привязки фотопластинки к месту достаточно простейшей линейной редукционной модели Тернера, содержащей всего 6 неизвестных коэффициентов (в традиционных моделях их не меньше 20-ти). В связи с малым количеством редукционных параметров редукционная модель может строиться на малом количестве опорных звезд, в качестве которых могут быть выбраны слабые звезды хорошего качества изображения. Следствием этого является отсутствие в новом методе зависимости координат звезд от их яркости, то есть не возникает “уравнение блеска”. Отмеченные положительные стороны нового метода делают его весьма перспективным.

Оценка точности предлагаемого метода редукции может быть выполнена на основе следующих данных (ГАИШ)

Среднеквадратические величины остаточных ошибок, мкм

	традиционный метод	предлагаемый метод
Первый Паломарский обзор	3.48	1.60
Второй Паломарский обзор	3.18	0.91

Как видно из таблицы предлагаемый метод редукции, построенный на нелинейной теории изгиба фотопластинки, точнее традиционного в два раза для первого Паломарского обзора и в три с половиной раза для второго Паломарского обзора. Трудоемкость нового метода намного меньше, чем традиционного, так как он не требует определения большого количества коэффициентов редукционного полинома.

Весьма интересно распределение остаточных ошибок по полю фотопластинки (рис. 9,10). Максимальная абсолютная величина остаточных ошибок для фотопластинок первого Паломарского обзора составляет 8,4 мкм, для фотопластинок второго обзора 4,5мкм. Это составляет не более 3-4% от максимального смещения фотоэмульсии в плане 197мкм. Таким образом, удалось правильно объяснить 96-98% наблюдаемых ошибок телескопа Шмидта (при оценках по среднеквадратической ошибке еще больше). Векторные поля остаточных ошибок имеют много общего, несмотря на то, что обзоры, относящиеся к этим рисункам, разделяет несколько десятков лет.

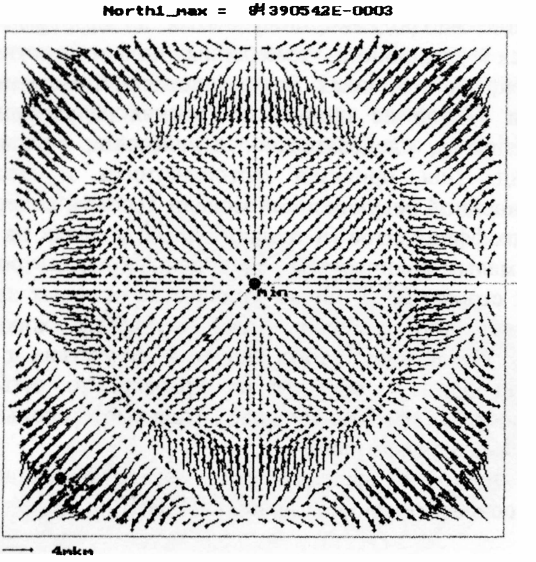

Рис. 9. Отклонения наблюдаемых позиционных ошибок от теоретического решения (первый Паломарский обзор, 50е годы), мм

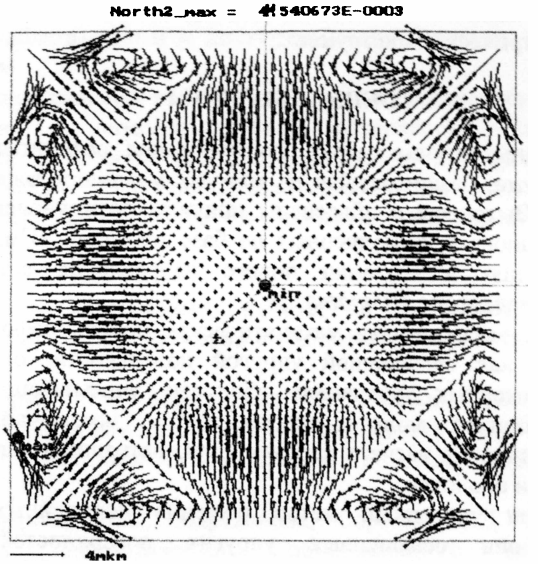

Рис. 10. Отклонения наблюдаемых позиционных ошибок от теоретического решения (второй Паломарский обзор, 90е годы), мм

За это время были внесены изменения не только в конструкцию кассеты (вакуум и тефлоновое покрытие кассеты), но и в оптику телескопа (коррекционная пластина заменена двойной с целью снижения хроматической аберрации).

Наиболее вероятной причиной малых остаточных ошибок, представленных на рис. 9,10 является влияние оптической системы телескопа. Насколько верно это предположение должны ответить специалисты – оптики, но на влияние оптической системы указывает хотя бы то, что фотопластинки, экспонированные в синих и красных лучах заметно отличаются. Различие положений звезд на них доходит почти до 2мкм, что составляет величину того же порядка, что и сами остаточные ошибки.

До недавнего времени векторные поля, представленные на рис. 9,10 даже невозможно было наблюдать, так как они были скрыты большими почти на 2 порядка ошибками, вызванными деформациями фотопластинки. Методы, разработанные в диссертации, не только позволяют наблюдать эти поля, но и предоставляют в распоряжение специалистов – оптиков координаты поверхности, на которой строится дифракционное изображение звезд, что создает перспективу полного объяснения наблюдаемых ошибок в

рамках оптико-механической модели и превращения телескопа Шмидта в точный астрометрический инструмент.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

1. Разработаны основы теории формирования позиционных ошибок телескопа Шмидта, базирующейся на методах механики деформируемого твердого тела. Выяснены и объяснены причины возникновения сложной картины погрешностей, выполненных на базе телескопа Шмидта. Сделан существенный шаг в создании нового направления астрометрии – ***астрометрии телескопа Шмидта***.

2. Построена высокоточная математическая модель деформированной фотопластинки, как оснащенной упругой поверхности, основанная на нелинейных тензорных уравнениях оболочек, учитывающих конечные повороты. Указанная модель обеспечивает чрезвычайно высокие требования к точности расчета перемещений, нетрадиционные для задач теории пластин и оболочек.

3. Предложен численный метод решения нелинейных тензорных уравнений теории оснащенных упругих поверхностей – метод установления. Метод установления оказался весьма эффективным для решения контактных задач при одностороннем контакте фотопластинки и опорной сферы.

4. Разработано программное обеспечение, специально предназначенное для решения нелинейных тензорных уравнений деформации фотопластинки. Разработаны библиотеки процедур, реализующих операции тензорной алгебры и тензорного анализа, характерные для теории оснащенных упругих поверхностей.

5. В рамках конечно-элементного комплекса ENERGY построены специальные конечные элементы пластин с разделением всех величин на основные и дополнительные части, позволяющие получать точность на порядок лучшую, чем с использованием традиционных конечных элементов.

6. Разработанные теоретические методы и результаты расчетов являются основой принципиально нового метода редукции Шмидтовских наблюдений. Новый метод редукции в 2-3 раза точнее традиционных методов, основанных на привлечении большого количества опорных звезд, существенно менее трудоемок и свободен от систематической ошибки, именуемой уравнением блеска. Практика редукции наблюдений в Государственном Астрономическом Институте им. П.К.Штернберга показала высокую эффективность метода.

7. Правильное объяснение большей части наблюдаемых позиционных ошибок (остаток составляет около 3% полной погрешности) механическими причинами позволяет практически решить задачу превращения телескопа

Шмидта в точный астрометрический инструмент. Остаточные погрешности становятся наблюдаемыми и доступными для изучения, что ранее было невозможным.

8. Найденное решение контактной задачи предоставляет в распоряжение специалистов - оптиков форму поверхности деформированной фотоэмульсии, на которой строится дифракционное изображение звезд. Это создает перспективу создания оптико-механической модели позиционных ошибок телескопа Шмидта и полного объяснения наблюдаемых погрешностей.

Основное содержание работы и описание используемых алгоритмов численных расчетов опубликовано в работах:

1. Бидерман В.Л., Мартьянова Г.В., Сорокин Ф.Д. Учет жесткости связующего и растяжимости арматуры при расчете оболочки вращения из композитного материала // Механика композитных материалов (Рига).- 1987.-№5. – С.825 – 832.

2. Бидерман В.Л., Мартьянова, Сорокин Ф.Д. Расчет боковой податливости пневматического резинокордного амортизатора с приближенным учетом растяжимости нитей корда // Изв. вузов Машиностроение. - 1989.- №8. – С.24-27.

3. Новый метод учета систематических ошибок телескопа Шмидта /К.В.Куимов, Ф.Д.Сорокин, А.В.Кузьмин, Н.Т.Барушева /Государственный астрономический институт им. П.К.Штернберга Московского Государственного Университета им. М.В.Ломоносова – М., 1999. - 12с., ил. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 15.06.99, № 1923-В99).

4. Высокоточная астрометрия с телескопом Шмидта /К.В.Куимов, Ф.Д.Сорокин, А.В.Кузьмин, Н.Т.Барушева // Астрон. ж. 2000. -Т. 77, № 7. - С. 540 -546.

5. Куимов К.В., Кузьмин А.В., Сорокин Ф.Д. Современные опорные каталоги для позиционных наблюдений тел солнечной системы //Околоземная астрономия XXI века. - М., 2001. – С.228-234.

6. Куимов К.В., Кузьмин А.В., Сорокин Ф.Д. Деформация круглой фотопластинки в телескопе Шмидта с учетом ее неплотного прилегания к сферической опоре // Изв. РАН. МТТ. -2002. - № 3. – С.150 - 155.

7. Сорокин Ф.Д. Влияние жесткости резины на деформации резинокордных оболочек с нерастяжимыми нитями // Изв. вузов. Машиностроение. - 1985.– №8. – С.3 – 6.

8. Сорокин Ф.Д., Податливость цилиндрического резинокордного упругого элемента при боковых нагрузках // Изв. вузов. Машиностроение. - 1987. -№5. – С.49 – 53.

9. Сорокин Ф.Д. Не требующая итераций методика построения

кривой зависимости критической силы сжатой стойки от параметра // Изв. вузов. Машиностроение. - 1990. - №10. – С.20 - 24.

10. Сорокин Ф.Д. Прямое тензорное представление уравнений больших перемещений гибкого стержня с использованием вектора конечного поворота. //Изв. РАН. МТТ. -1994. - № 1. -С.164-168.

11. Сорокин Ф.Д. Компьютерная тензорная алгебра в численных расчетах оболочек // 165 лет МГТУ им. Н.Э.Баумана: Труды Всероссийской научно-технической конференции. - М., 1995. - Ч. 2. - С.116.

12. Сорокин Ф.Д. Погрешности измерений координат небесных тел, вызванные деформацией фотопластинки в телескопе Шмидта // Состояние проблемы измерений: Труды 7-й Всероссийской научно-технической конференции. - М., 2000. – С. 25.

13. Сорокин Ф.Д. Расчет деформаций фотопластинки и деталей кассеты телескопа Шмидта // 170 лет МГТУ им. Н.Э.Баумана: Труды Всероссийской научно-технической конференции. - М., 2000. - Ч. 1. – С. 126.

14. Куимов К.В., Сорокин Ф.Д., Кузьмин А.В. Высокоточная астрометрия слабых объектов с телескопом Шмидта //Астрометрия, геодинамика и небесная механика на пороге XXI века: Труды Всероссийской конференции. – СПб., 2000. – С. 440-445.

15. Сорокин Ф.Д., Мильков А.В. Расчет деформаций фотопластинки в телескопе Шмидта с использованием элементов теории оснащенных упругих поверхностей // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Машиностроение. - 2001.-№1. – С.51-63.

16. New approach to the astrometric calibration of the Schmidt surveys /A.V.Kuzmin, K.V.Kuimov, F.D.Sorokin, N.T.Barusheva // Les Journees 1999 & IX Lohrmann-Kolloquium. - Paris, 2000. – P.346 – 354.

17. Precision astrometry with Schmidt Telescopes /A.V.Kuzmin, K.V.Kuimov, F.D.Sorokin, N.T.Barusheva //Astronomy Reports. – 2000. - V.44, No.7. - P.474 – 480.