

ср

На правах рукописи  
УДК 519.224+530.145+621.382

**БОГДАНОВ ЮРИЙ ИВАНОВИЧ**

**МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
В ЗАДАЧАХ КВАНТОВОЙ ИНФОРМАТИКИ И  
МИКРОЭЛЕКТРОНИКИ**

**Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ**

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук**

**Москва 2004**

42.25  
621.381.530.145  
621.38

Работа выполнена в ОАО «Ангстрем», Москва, Россия

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук,  
профессор Крянев Александр Витальевич

Доктор физико-математических наук  
Виницкий Сергей Ильич

Доктор физико-математических наук  
Молотков Сергей Николаевич

Ведущая организация: Физико-технологический институт РАН

Защита состоится “22” октября 2004 г. в 19<sup>00</sup>  
на заседании диссертационного совета Д720.001.04 в Лаборатории  
информационных технологий Объединенного института ядерных  
исследований, г. Дубна, Московская область

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ

Автореферат разослан “23” июня 2004 г.

Ученый секретарь диссертационного совета  
кандидат физико-математических наук

Иваз З.М. Иванченко

НИИ ЯДР ИИЭ ВИАУ



1667410

Богданов Ю. И. Многопарамет

сер. кон.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы

Квантовая информатика представляет собой новую, быстро развивающуюся область науки и технологии, основанную на использовании квантовых систем для реализации принципиально новых методов передачи сообщений и вычислений (квантовые каналы связи, квантовая криптография, квантовый компьютер).

На пути создания эффективных систем обработки квантовой информации стоит ряд трудных проблем, среди которых одна из основных – это «хрупкость» и «неуловимость» квантового состояния-основного объекта квантовой физики и соответственно квантовой информатики.

Квантовое состояние характеризуется так называемым вектором состояния, который представляет собой комплексный вектор в абстрактном гильбертовом пространстве, описывающий амплитуды вероятностей наблюдения соответствующих базисных состояний.

Вектор состояния является носителем информации принципиально отличным от соответствующих классических аналогов. Важная отличительная черта квантовых систем по сравнению с классическими – это принципиальная необходимость *статистического* описания их поведения. Измерение, проводимое над индивидуальным квантовым объектом, приводит к разрушению его квантового состояния (редукция волновой функции). Это обстоятельство приводит к необходимости статистического (ансамблевого) подхода: каждый акт измерения сопровождается разрушением квантового состояния микрообъекта, однако у экспериментатора в распоряжении имеется не единичный объект, а ансамбль.

Квантовый регистр, включающий  $n$  квантовых битов (кубитов) описывается вектором состояния, содержащим  $2^n$  комплексных чисел. Со статистической точки зрения это означает, что контроль квантовой системы сводится к многопараметрической задаче восстановления состояния квантового статистического ансамбля по измерениям, проводимым на отдельных его представителях.

С практической точки зрения многопараметрическая задача восстановления квантовых состояний играет важную роль при реализации всех трех основных взаимосвязанных задач, с которыми сталкивается разработчик квантовых информационных систем:

генерация квантовых систем в определенных квантовых состояниях; их преобразование в процессе передачи по квантовому каналу связи или в процессе квантовых вычислений; считывание (измерение) выходного состояния системы. Умение восстанавливать квантовые состояния обеспечивает базу для решения таких задач как юстировка квантовых информационных систем, контроль точности и стабильности их работы, обнаружение постороннего вмешательства в систему и др.

Многopараметрическое статистическое оценивание квантовых состояний, безусловно, представляет интерес также и с фундаментальной точки зрения, поскольку дает инструмент для анализа таких базовых понятий квантовой теории как статистический характер ее предсказаний, принцип суперпозиции, принцип дополнительности Н. Бора и др.

В то же время, развитие многopараметрических статистических моделей актуально и для задач традиционной микроэлектроники. Здесь многopараметрические статистические модели служат следующим основным целям: статистический контроль качества технологического процесса производства интегральных микросхем, оценка уровня технологии на основе статистических данных, сравнительная оценка различных конструктивно-технологических решений; прогнозирование характеристик вновь разрабатываемых изделий; оптимизация экономической деятельности полупроводникового производства. Во всех случаях многopараметрические статистические модели позволяют либо рассмотреть с единых позиций имеющиеся в производстве данные по изделиям, отличающимся степенью интеграции, правилами проектирования и технологическим маршрутом изготовления, либо позволяют сделать прогноз на будущее: как изменения в технологии или номенклатуре изделий повлияют на технико-экономические показатели полупроводникового производства.

### Цель диссертационной работы

Целью диссертационной работы было развитие многopараметрических статистических моделей в приложении к задачам квантовой информатики и микроэлектроники. Для достижения указанной цели были решены следующие основные задачи:

- Построение многопараметрических статистических моделей, допускающих устойчивое восстановление параметров по наблюдениям (обратная задача статистики). Развитие метода корневой оценки плотности как базовой модели такого рода. Изучение статистических свойств получаемых оценок. Разработка и исследование итерационного алгоритма решения многопараметрического уравнения правдоподобия.
- Развитие методологии статистического анализа взаимно-дополнительных квантовых измерений (в смысле принципа дополненности Н. Бора). Развитие метода решения уравнения правдоподобия и исследование точности получаемых статистических оценок. Приложение развитого подхода к компьютерному моделированию координатных, импульсных и поляризационных (спиновых) квантовых измерений.
- Развитие корневого метода восстановления квантовых состояний на основе анализа амплитуд взаимно-дополнительных квантовых процессов (при этом квадраты модулей амплитуд взаимно-дополнительных квантовых процессов задают интенсивности генерации событий, непосредственно регистрирующихся в физическом эксперименте). Приложение корневого амплитудного подхода к задачам восстановления квантовых состояний бифотонного поля- кутритов. Разработка формализма аппаратных матриц, позволяющих связать амплитуды квантовых процессов с компонентами восстанавливаемого вектора состояния в рамках определенного протокола измерений. Проведение статистического анализа экспериментов с бифотонным полем, выполненных в Московском государственном университете на кафедре квантовой электроники.
- Развитие теории статистических флуктуаций оценки вектора состояния квантовой системы, позволяющей выявлять инструментальные погрешности на фоне фундаментальных статистических флуктуаций. Приложение развитой теории к анализу экспериментальных данных с кутритами.
- Разработка алгоритма восстановления матрицы плотности смешанного состояния (разделение смеси). Апробация развитого алгоритма посредством статистического компьютерного моделирования.

- Разработка метода корневого статистического квантования. Выявление связи между корневой статистической моделью и аппаратом квантовой механики.
- Развитие новой модели факторного анализа многомерных статистических данных. Эта модель направлена на выявление скрытых технологических факторов на основе минимизации новой введенной характеристики – энтропии факторной модели (являющейся аналогом меры запутанности (entanglement) в квантовой информатике). Приложение разработанной модели к анализу многомерных данных электрофизического тестового контроля ОАО «Ангстрем».
- Разработка многопараметрического обобщения распределения Вейбулла с целью решения задачи восстановления функции надежности по результатам испытаний в микроэлектронике.
- Развитие формализма многоуровневых иерархических цепочек компаунд- распределений как основы для наиболее общих статистических моделей для управления дефектностью и выходом годных в микроэлектронике. Разработка новых методик построения контрольных карт для задач микроэлектроники на основе методов дисперсионного анализа и метода бутстреп.

### Научная новизна

1. Предложен новый, обладающий оптимальными асимптотическими свойствами, метод восстановления плотности распределения по экспериментальным данным - корневая оценка плотности. Метод основан на представлении плотности вероятности как квадрата модуля некоторой функции (называемой пси-функцией по аналогии с квантовой механикой) с последующей оценкой коэффициентов разложения с помощью принципа максимального правдоподобия.
2. Разработан итерационный алгоритм решения уравнения правдоподобия для корневой оценки плотности, исследована устойчивость получаемого решения и скорость сходимости к нему, введен специальный итерационный параметр, оптимальное значение которого выбирается на основе максиминной стратегии.
3. Исследованы статистические свойства корневых оценок плотности. Развита универсальная (не зависящая от базиса разложения) теория точности корневых оценок, вычислены

соответствующие матрица информации Фишера и матрица ковариаций оценок. Предложен универсальный критерий хи-квадрат для проверки гипотезы о соответствии выборочного вектора состояния генеральному, а также аналогичный критерий для проверки однородности двух выборок. Введена новая статистическая характеристика - доверительный конус, дающий гарантированную оценку для направления неизвестного вектора состояния.

4. Предложен и развит метод корневой оценки квантовых состояний, основанный на статистическом анализе взаимно- дополнительных измерений (в смысле принципа дополненности Н. Бора). Проведено обобщение принципа максимального правдоподобия и уравнения правдоподобия с целью анализа экспериментов в квантовой механике. Рассмотрены оценки квантовых состояний по результатам координатных, импульсных и поляризационных (спиновых) измерений.
5. Развита корневой метод восстановления квантовых состояний на основе анализа амплитуд взаимно- дополнительных квантовых процессов. Рассмотрен способ компактного представления квантовых процессов, фигурирующих в протоколах измерений, посредством введения аппаратных матриц, позволяющих связать амплитуды квантовых процессов с компонентами восстанавливаемого вектора состояния. Предложены процедуры восстановления вектора состояния квантовой системы в рамках метода наименьших квадратов и метода максимального правдоподобия.
6. Развита процедура приложения корневого амплитудного подхода к задачам восстановления квантовых состояний бифотонного поля-кутритов. На основе проведенного статистического анализа экспериментов с бифотонным полем доказана возможность восстановления квантового состояния кутритов с высокой точностью.
7. Развита теория статистических флуктуаций оценки вектора состояния квантовой системы. Сформулирован конструктивный критерий хи- квадрат для оценки возможного уровня статистических флуктуаций оцениваемого вектора состояния квантовой системы. Введена новая статистическая характеристика – мера информационного согласия оцениваемого вектора состояния с его теоретическим значением.

8. Введено понятие объема когерентности как параметра, характеризующего качество статистических данных квантового эксперимента (чем выше объем когерентности, тем выше качество эксперимента). Объем когерентности характеризует общее количество наблюдений (число зарегистрированных событий), ниже которого превалируют статистические погрешности (имеющие фундаментальный характер), а выше – инструментальные ошибки (имеющие технический характер и связанные с неточностями и нестабильностями в установках параметров протокола измерений).
9. Выявлена связь между корневой статистической моделью и аппаратом квантовой механики. Предложена процедура корневого статистического квантования, дающая рецепт для перехода от классического описания к квантовому на основе корневого разложения плотности вероятности и требования выполнения в среднем законов классической механики.
10. Разработана новая модель факторного анализа многомерных статистических данных в приложении к задачам микроэлектроники. Введена новая характеристика – энтропия факторной модели, являющаяся мерой неопределенности (запутанности) скрытых технологических факторов по отношению к наблюдаемым параметрам. Предложен способ выявления оптимальной структуры технологической модели на основе минимизации ее факторной энтропии.
11. Разработано многопараметрическое обобщение распределения Вейбулла, направленное на более полное и точное по сравнению с имеющимися методами решение задачи восстановления функции надежности по результатам испытаний.
12. Разработаны многопараметрические иерархические статистические модели контроля качественных и количественных параметров в микроэлектронике с учетом естественной для полупроводникового производства иерархии невоспроизводимости контролируемых параметров: от одной области к другой внутри полупроводниковой пластины, от пластины к пластине в партии, от партии к партии и т.п.

Достоверность полученных результатов определяется тем, что разработанные многопараметрические статистические модели квантовой информатики и микроэлектроники были построены на

основе строгих, апробированных методов прикладной математики и квантовой теории. Результаты аналитических исследований подтверждаются результатами численного математического моделирования и хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований и данными полупроводникового производства.

### Практическая ценность работы

Разработанные для задач квантовой информатики методы и подходы имеют практическую ценность при проведении фундаментальных и прикладных исследований, связанных с изучением состояний квантовых систем и управлением ими.

Разработанные методы анализа квантовых систем имеют практическое значение в задачах контроля качества, стабильности и надежности систем обработки квантовой информации, в том числе для решения таких задач как юстировка квантовых информационных систем, контроль точности и стабильности их работы, обнаружение постороннего вмешательства в систему и др.

Разработанные для задач микроэлектроники методы и подходы имеют практическую ценность для систем качества предприятий полупроводниковой промышленности в задачах статистического контроля качества технологического процесса производства интегральных микросхем, оценки качества, надежности и уровня технологии на основе статистических данных, сравнительной оценки различных конструктивно-технологических решений, прогнозирования характеристик вновь разрабатываемых изделий, оптимизации технико-экономической деятельности полупроводникового производства и др.

В стандарт отрасли ОСТ 11 14.1011- 99 “Микросхемы интегральные. Система и методы статистического контроля и регулирования технологического процесса” включены методики, связанные с многопараметрической иерархической статистической моделью контроля параметров в микроэлектронике: методика “Статистическое регулирование технологического процесса с учетом иерархической структуры технологических характеристик полупроводникового производства” и “Метод сравнительного анализа режимов с учетом иерархической структуры технологических характеристик”.

В стандарт ОАО “Ангстрем” СТП ШИ 9000.20.03-03 “Статистические методики контроля качества и надежности изделий микроэлектроники” включены методики, связанные с многопараметрической иерархической статистической моделью, многопараметрическим обобщением распределения Вейбулла и непараметрическим оцениванием плотности. Разработанные методы анализа и контроля в задачах микроэлектроники составляют основу системы статистического управления технологическим процессом, используется для анализа результатов технологических проб и служат для составления ежемесячных и ежеквартальных отчетов в рамках системы качества ОАО «Ангстрем».

Акты о внедрении и использовании результатов диссертационной работы прилагаются.

#### Положения, выносимые на защиту

1. Корневая оценка плотности, основанная на представлении плотности вероятности как квадрата модуля некоторой функции (называемой пси-функцией по аналогии с квантовой механикой) представляет собой новый, обладающий оптимальными асимптотическими свойствами, метод восстановления плотности распределения по экспериментальным данным. Пси-функция представляется в виде разложения по ортонормированному базису с оценкой коэффициентов разложения методом максимального правдоподобия. Корневой подход приводит к радикальному упрощению структуры информационной матрицы Фишера и матрицы ковариации оценок, делая их независимыми от базиса, позволяет обеспечить заведомую положительную определенность плотности и представить результаты в наиболее простом и универсальном виде. Являясь асимптотически эффективным, метод позволяет восстановить состояния с точностью близкой к принципиально достижимой. Основные конструкции теории (векторы состояния, матрицы информации, матрицы ковариаций и пр.) оказываются инвариантными геометрическими объектами в гильбертовом пространстве.
2. Уравнение правдоподобия в методе корневой оценки плотности имеет простую квазилинейную структуру и допускает построение эффективной, быстросходящейся итерационной процедуры в случае многопараметрических задач. Оптимальное значение

итерационного параметра целесообразно выбирать на основе максиминной стратегии.

3. В рамках корневой оценки плотности развит критерий хи – квадрат для проверки гипотезы о соответствии выборочного вектора состояния генеральному, а также аналогичный критерий для проверки однородности двух выборок. Введение новой статистической характеристики – доверительного конуса обеспечивает гарантированную оценку для направления неизвестного вектора состояния.
4. Корневой подход к анализу результатов экспериментов над микрообъектами дает естественное средство для решения обратной задачи квантовой механики, связанной с восстановлением пси- функции по результатам взаимно дополнительных (по Н. Бору) экспериментов. На основе соответствующего обобщения принципа максимального правдоподобия получены уравнения правдоподобия для оценки векторов состояний различных квантовых систем по совокупности взаимно дополнительных экспериментов. Глобальная калибровочная инвариантность и инвариантность относительно сдвига во времени приводят соответственно к ограничениям на норму и энергию квантовых систем. Учет ограничения на энергию ведет к подавлению высокочастотных шумов в восстанавливаемом векторе состояния.
5. Интенсивности генерации событий, непосредственно регистрируемых в физическом эксперименте, представлены как квадраты модулей амплитуд взаимно дополнительных квантовых процессов. Совокупность квантовых процессов, образующих протокол измерений, компактно представлена посредством развитого в работе формализма аппаратных матриц, позволяющих связать амплитуды квантовых процессов с компонентами восстанавливаемого вектора состояния. Метод наименьших квадратов и метод максимального правдоподобия обеспечивают эффективные средства для формулировки процедур восстановления вектора состояния квантовой системы.
6. На основе развитого подхода предложена процедура восстановления квантовых состояний трехуровневых оптических систем, реализованных на частотно и пространственно вырожденном бифотонном поле. Корневой подход к оценке квантового состояния и измерения моментов четвертого порядка

по полю обеспечивают возможность восстановления исходной волновой функции бифотонов (кутритов). Статистический анализ экспериментальных данных позволил доказать, что квантовые состояния кутритов могут быть восстановлены с высокой точностью.

7. Развита в работе теория статистических флуктуаций оценки вектора состояния квантовой системы позволяет получить конструктивный критерий хи- квадрат для оценки возможного уровня статистических флуктуаций оцениваемого вектора состояния квантовой системы и ввести новую статистическую характеристику, описывающую меру информационного согласия оцениваемого вектора состояния с его теоретическим значением.
8. Точность восстановления квантовых состояний определяется конкуренцией между статистическими флуктуациями и инструментальными погрешностями в реализации протокола измерения. Для малых объемов выборок превалируют статистические флуктуации, в то время как для больших объемов выборок – инструментальные погрешности. Инструментальные погрешности приводят к насыщению меры точности восстановления квантового состояния (fidelity) на уровне ниже, чем единица (для проведенных экспериментов с бифотонами этот уровень оказался равен 0.995-0.9998). Сравнение результатов восстановления квантовых состояний с фундаментальным статистическим уровнем точности служит основой для решения таких задач как математическое моделирование работы установки на этапе ее проектирования, юстировка установки, контроль стабильности работы, обнаружение постороннего вмешательства в квантовую систему и т.д.
9. Выявлена связь между корневым разложением плотности вероятности и квантовой теорией. Предложена процедура корневого статистического квантования, позволяющая из всех статистических моделей, обеспечивающих выполнение в среднем законов классической механики, выделить системы, описываемые квантовой механикой.
10. Введение новой характеристики – энтропии факторной модели, являющейся мерой неопределенности (запутанности) скрытых технологических факторов по отношению к наблюдаемым параметрам, обеспечивает основу для разработки новой модели факторного анализа многомерных статистических данных и ее

приложений к задачам микроэлектроники. Ортогональное вращение факторов позволяет выявить наиболее простую структуру многомерных данных, отвечающую скрытым от непосредственного измерения технологическим факторам и соответствующую минимуму энтропии факторной модели. Приложение разработанной модели к анализу многомерных электрофизических данных тестового контроля ОАО «Ангстрем» позволило дать физико-технологическую интерпретацию факторов исследуемого полупроводникового производства.

11. Разработанная модель многопараметрического обобщения распределения Вейбулла является эффективным средством решения задачи восстановления функции надежности по результатам испытаний в микроэлектронике, обеспечивающим большую полноту и точность анализа по сравнению с одно- и двухпараметрическими моделями.
12. Развитие в работе многопараметрические иерархические статистические модели обеспечивают эффективные средства контроля качественных и количественных параметров в микроэлектронике с учетом естественной для полупроводникового производства структуры данных. Формализм многоуровневых иерархических компаунд-распределений позволяет сформулировать наиболее общие статистические модели для управления дефектностью и выходом годных в микроэлектронике. Благодаря использованию метода производящих функций, основные результаты удастся представить в компактном аналитическом виде. В качестве частных (одноуровневых) случаев выступают известные в литературе обобщенное отрицательное биномиальное распределение и распределение Пойа. Основанное на интенсивном использовании компьютерного моделирования иерархическое обобщение метода бутстреп расширяет перечень доступных для контроля параметров полупроводникового производства по сравнению с возможностями аналитических моделей.

#### Апробация работы

Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

Всероссийская научно-техническая конференция “Электроника и информатика”. Москва. Зеленоград, МИЭТ, 15-17 ноября 1995.

52-я Научная Сессия, Посвященная Дню Радио. Москва. 21-22 мая 1997.

Всероссийская научно-техническая конференция “Электроника и информатика - 97”. Москва. Зеленоград. 25-26 ноября 1997 г.

Всероссийская научно-техническая конференция “Микро- и наноэлектроника 98”. Москва- Звенигород. Липки. Апрель 1999.

Седьмая всероссийская межвузовская научно-техническая конференция “Микроэлектроника и информатика - 2000”. Москва. Зеленоград. 17-18 апреля 2000 г.

Первый всероссийский симпозиум «Стратегическое планирование и развитие предприятий». Москва. ЦЭМИ. 11 - 12 апреля 2000 г.

Международная конференция "Идентификация систем и задачи управления". Москва. Институт проблем управления. 26-28 сентября 2000 г.

Седьмая международная научно-техническая конференция “Актуальные проблемы твердотельной электроники и микроэлектроники”. Дивноморское. Россия. 17–22 сентября 2000.

Всероссийская научно – техническая дистанционная конференция “Электроника”. Москва. Зеленоград. 19 – 30 ноября 2001 г.

Восьмая международная научно-техническая конференция “Актуальные проблемы твердотельной электроники и микроэлектроники”. Дивноморское. Россия. 14–19 сентября 2002.

Четвертая международная научно-техническая конференция «Электроника и информатика – 2002». Зеленоград. МИЭТ. 19-21 ноября 2002.

Международная конференция “Физика и контроль”. Санкт-Петербург. 20-22 августа 2003.

Международная конференция “Микро- и наноэлектроника – 2003” (МНЭ-2003). Москва- Звенигород. 6-10 октября 2003.

Вторая азиатско-тихоокеанская конференция по квантовой информатике. Сингапур. Национальный университет Сингапура. 15-19 декабря 2003.

### Публикации

Основные результаты исследования, проведенного соискателем, изложены в 46 печатных источниках.

### Авторский вклад

Все изложенные в диссертации результаты получены автором лично, либо при его определяющем участии в постановке задач и их решении.

### Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения, содержит 33 рисунка, 8 таблиц и список литературы из 239 наименований. Полный объем диссертации составляет 292 страницы.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулирована основная цель работы, раскрыта структура диссертации и приведены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе развивается метод корневой оценки плотности распределения.

Предложенный подход основан на «симбиозе» математического аппарата квантовой механики с принципом максимального правдоподобия Фишера с целью получения многопараметрических асимптотически эффективных оценок плотности, обладающих наиболее простыми (и фундаментальными) статистическими свойствами. Новый метод основан на представлении плотности вероятности как квадрата модуля некоторой функции (называемой пси-функцией по аналогии с квантовой механикой). Пси – функция представляется в виде разложения по ортонормированному набору функций. Коэффициенты разложения оцениваются методом максимального правдоподобия.

В разделе 1.1 представлен литературный обзор задачи восстановления статистических распределений.

В разделе 1.2 рассмотрен корневой подход к оцениванию плотности, получено уравнение правдоподобия и рассмотрены вычислительные аспекты его решения.

Введение пси - функции как математического объекта статистического анализа данных означает, что вместо плотности распределения рассматривается «квадратный корень из нее», т.е.:

$$p(x) = |\psi(x)|^2 \quad (1)$$

Предполагается, что пси – функция зависит от  $S$  неизвестных параметров  $c_0, c_1, \dots, c_{s-1}$ , которые являются коэффициентами разложения по некоторому набору ортонормированных базисных функций:

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{s-1} c_i \varphi_i(x) \quad (2)$$

Метод максимального правдоподобия заключается в том, что в качестве «наиболее правдоподобных» оценок неизвестных параметров  $c_0, c_1, \dots, c_{s-1}$  берутся значения, при которых функция правдоподобия и ее логарифм становятся максимальными.

$$\ln L = \sum_{k=1}^n \ln p(x_k | c) \rightarrow \max \quad (3)$$

Здесь  $x_1, \dots, x_n$  – выборка объема  $n$ .

Условие экстремума логарифмического правдоподобия с учетом условия нормировки приводит к следующему уравнению правдоподобия (здесь предполагается, что базисные функции  $\varphi_i(x)$  и вектор состояния  $C$  действительны):

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\varphi_i(x_k)}{\sum_{j=0}^{s-1} c_j \varphi_j(x_k)} \right) = c_i \quad i = 0, 1, \dots, s-1 \quad (4)$$

Уравнение правдоподобия (4) имеет простую квазилинейную структуру и допускает построение эффективной, быстросходящейся итерационной процедуры, пригодной в случае многопараметрических задач (например, когда число оцениваемых параметров достигает многих десятков и даже сотен). Этим рассматриваемая задача выгодно отличается от других известных задач, решаемых методом максимального правдоподобия, когда с увеличением числа оцениваемых параметров сложность численного исследования быстро возрастает, а устойчивость алгоритмов резко падает.

Для построения итерационной процедуры удобно переписать уравнение правдоподобия (4) в виде:

$$\alpha c_i + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\varphi_i(x_k)}{\sum_{j=0}^{s-1} c_j \varphi_j(x_k)} \right) = c_i \quad (5)$$

Здесь введен итерационный параметр  $0 < \alpha < 1$ , который, очевидно, никоим образом не меняет самого уравнения, но, как оказывается, существенно влияет на устойчивость и скорость сходимости итерационной процедуры.

Итерационную процедуру (переход от  $r$ -го к  $r+1$ -му приближению) можно представить в виде:

$$c_i^{r+1} = \alpha \cdot c_i^r + (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\varphi_i(x_k)}{\sum_{j=0}^{s-1} c_j^r \varphi_j(x_k)} \right) \quad (6)$$

Фундаментальным условием, гарантирующим сходимость итерационной процедуры, как известно, является требование того, чтобы соответствующее отображение было сжимающим (в соответствии с принципом сжатых отображений и теоремой о неподвижной точке).

Условие того, что отображение является сжимающим, заключается в требовании положительной определенности некоторой, полученной в работе, матрицы сжатия. В качестве характеристики сжатия целесообразно рассматривать минимальное собственное значение  $\lambda_{\min}$  матрицы сжатия. Собственная функция, отвечающая  $\lambda_{\min}$  соответствует возмущению, которое является «самым невыгодным» с точки зрения сходимости. Параметр  $\lambda_{\min}$  является характеристикой гарантированного сжатия, поскольку на каждом шаге квадрат расстояния между точным и приближенным решениями уменьшается не менее, чем на  $\lambda_{\min} \cdot 100\%$ .

В качестве оптимального значения итерационного параметра  $\alpha$  предложено выбирать то, при котором  $\lambda_{\min}$  является максимальным (максиминный критерий).

Пример анализа сходимости итерационной процедуры представлен на Рис.1. Искомая зависимость  $\lambda_{\min}(\alpha)$  дается сплошной кривой, представлено также число итераций, за которое при различных  $\alpha$  реально достигалось некоторое одно и тоже решение с заданной точностью, а также аппроксимация числа итераций

1667410

аналитической зависимостью, полученной в работе (пунктирная линия).

Из проведенного в работе анализа и результатов численного моделирования следует, что итерационная процедура становится неустойчивой при малых значениях итерационного параметра  $\alpha$ , когда минимальное собственное значение  $\lambda_{\min}$  матрицы сжатия отрицательно ( $\lambda_{\min} < 0$ ). Критическое значение  $\alpha_c$  итерационного параметра, соответствующее условию  $\lambda_{\min}(\alpha_c) = 0$ , есть порог стабильности (итерационная процедура нестабильна ниже порога и стабильна выше него).



Рис.1. Зависимость минимального собственного значения матрицы сжатия (левая шкала) и числа итераций (правая шкала) от итерационного параметра.

Полученные в работе аналитические выражения для порога стабильности и оптимума итерационной процедуры подтверждаются результатами численных расчетов.

В разделе 1.3 исследованы статистические свойства корневых оценок.

Асимптотические свойства оценок изучены с использованием информационной матрицы Фишера. В случае разложения (2) информационная матрица  $I_{ij}$  имеет порядок  $(s-1) \times (s-1)$  и выражается в следующем простом виде (здесь  $n$  - объем выборки):

$$I_{ij} = 4n \left( \delta_{ij} + \frac{c_i c_j}{c_0^2} \right), \text{ где } c_0 = \sqrt{1 - (c_1^2 + \dots + c_{s-1}^2)} \quad (7)$$

Важной особенностью выражения (7) является его универсальность (независимость от выбора базисных функций). Оказывается, что этим свойством обладает только корневая оценка плотности (т.е. оценка, задающая параметризацию плотности в виде (1)).

Корневая оценка является асимптотически эффективной. Компоненты матрицы ковариаций оценок имеют следующий универсальный вид:

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{4n} (\delta_{ij} - c_i c_j) \quad i, j = 0, 1, \dots, s-1 \quad (8)$$

Полученные в работе результаты относительно асимптотических статистических свойств восстановленного методом максимального правдоподобия вектора состояния могут быть резюмированы следующим образом. Восстановленный ( $S$ - мерный) вектор состояния отличается от истинного тем, что зашумлен посредством случайного вектора ошибки, расположенного в пространстве, ортогональном истинному вектору состояния. Компоненты вектора ошибки (всего  $s-1$  компонента) есть асимптотически нормальные независимые случайные величины с одной и той же дисперсией  $\frac{1}{4n}$ . В указанном  $s-1$ - мерном подпространстве вектор ошибки имеет изотропное направление и его квадрат длины есть, соответственно, случайная величина  $\frac{\chi_{s-1}^2}{4n}$ , где  $\chi_{s-1}^2$  - случайная величина, имеющая хи – квадрат распределение с  $s-1$  степенью свободы.

Введена новая статистическая характеристика- доверительный конус (взамен традиционного доверительного интервала). Доверительный конус преследует цель покрыть с заданной доверительной вероятностью направление неизвестного вектора состояния. Сформулирован критерий хи- квадрат для проверки гипотезы о соответствии выборочного вектора состояния генеральному, а также аналогичный критерий для оценки статистической значимости отличий между выборками. Рассматриваемые критерии обобщают соответствующие традиционные критерии.

Результаты аналитических исследований проиллюстрированы численными примерами, полученными методом статистических испытаний.

Раздел 1.4 посвящен вопросам численного моделирования корневых оценок плотности. Рассмотрен вопрос об оптимальном выборе числа гармоник в корневом разложении. Приведены примеры численного моделирования с использованием в качестве базисного набора функций Чебышева – Эрмита. Методом Монте-Карло продемонстрировано преимущество корневых оценок по сравнению с традиционными ядерными и проекционными оценками.

В разделе 1.5 рассматривается применение формализма матрицы плотности к задачам статистического анализа данных. Показано, что при объединении больших однородных выборок, для каждой из которых уже имеется оценка вектора состояния, нет необходимости возвращаться к исходным данным и заново решать уравнение правдоподобия для объединенной совокупности. Достаточно просто найти первую главную компоненту объединенной матрицы плотности. Эта компонента и будет уточненной по совокупности выборок оценкой вектора состояния статистического ансамбля. Такая оценка является асимптотически эффективной и не проигрывает в среднем оценке по исходным данным.

В разделе 1.6 сформулированы основные выводы по результатам главы 1.

Во второй главе описываются разработанные методы статистического восстановления квантовых состояний по результатам совокупности взаимно дополнительных измерений.

Исходно пси – функция определена как такая комплексная функция, квадрат модуля которой дает искомую плотность распределения вероятностей. С этой точки зрения любая пси-функция может быть определена только с точностью до произвольного фазового множителя  $\exp(iS(x))$ , в частности, пси-функция может быть выбрана действительной. В то же время, с физической точки зрения, фаза пси-функции совсем не является «лишней». Пси-функция становится полноправной комплексной величиной при анализе взаимно дополнительных (по Н. Бору) экспериментов с микрообъектами.

В рассматриваемой главе на основе корневого подхода проведено обобщение принципа максимального правдоподобия и получены уравнения правдоподобия для анализа экспериментов в квантовой механике. Рассмотрена оценка квантовых состояний по результатам координатных, импульсных и поляризационных (спиновых) измерений.

Развит корневой метод восстановления квантовых состояния на основе анализа амплитуд взаимно- дополнительных квантовых процессов. Рассмотрен способ компактного представления квантовых процессов, фигурирующих в протоколах измерений, посредством введения аппаратных матриц, позволяющих связать амплитуды квантовых процессов с компонентами восстанавливаемого вектора состояния. Предложены процедуры восстановления вектора состояния квантовой системы в рамках метода наименьших квадратов и метода максимального правдоподобия.

Развита теория статистических флуктуаций оценки вектора состояния квантовой системы. Сформулирован конструктивный критерий хи- квадрат для оценки возможного уровня статистических флуктуаций оцениваемого вектора состояния квантовой системы. Введена новая статистическая характеристика- мера информационного согласия оцениваемого вектора состояния с его теоретическим значением.

Рассмотрено приложение корневого амплитудного подхода к задачам восстановления квантовых состояний бифотонного поля (кутритов). На основе проведенного статистического анализа экспериментов с бифотонным полем доказана возможность восстановления квантового состояния кутритов с высокой точностью. Рассмотрено относительное влияние статистических флуктуаций и инструментальных погрешностей на результаты экспериментов.

В разделе 2.1 рассмотрено восстановление квантового состояния на основе взаимно- дополнительных координатных и импульсных измерений.

Согласно квантовой механике, экспериментальное изучение статистического ансамбля в координатном пространстве неизбежно является неполным и должно быть дополнено изучением того же статистического ансамбля в другом (канонически сопряженном- импульсном) пространстве. Причем, измерения параметров ансамбля в канонически сопряженных пространствах не могут быть реализованы одновременно в одной и той же экспериментальной установке.

Согласно соотношению неопределенностей В. Гейзенберга, двумерная плотность в фазовом пространстве  $P(x, p)$  физически бессодержательна, так как координаты и импульсы микрообъекта не могут быть определены одновременно. Координатное  $P(x)$  и импульсное  $\tilde{P}(p)$  распределения должны изучаться отдельно во

взаимно дополнительных экспериментах и затем сводиться воедино посредством введения пси – функции.

Координатная и импульсная пси – функции связаны между собой посредством преобразования Фурье (здесь  $\hbar = 1$ ):

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\psi}(p) \exp(ipx) dp \quad (9)$$

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(x) \exp(-ipx) dx \quad (10)$$

Пусть экспериментально наблюдаются данные соответственно в координатном и импульсном пространстве. Требуется по ним восстановить неизвестную пси – функцию  $\psi(x)$  или  $\tilde{\psi}(p)$ . Соответствующая задача является обратной статистической задачей квантовой механики.

Рассмотрено обобщение принципа максимального правдоподобия и уравнения правдоподобия в приложении к задаче восстановления вектора состояния квантового статистического ансамбля на основе экспериментальных данных, получаемых во взаимно дополнительных экспериментах.

Функция правдоподобия для совокупности измерений в координатном и импульсном пространствах определяется следующим произведением:

$$L(x, p|c) = \prod_{i=1}^n P(x_i|c) \prod_{j=1}^m \tilde{P}(p_j|c) \quad (11)$$

Здесь  $P(x_i|c)$  и  $\tilde{P}(p_j|c)$  – плотности во взаимно дополнительных экспериментах, соответствующие одному и тому же вектору состояния  $c$ . Предполагается, что в координатном пространстве проведено  $n$ , а в импульсном  $m$  измерений.

Принцип максимального правдоподобия совместно с условием нормировки приводит к следующему уравнению правдоподобия:

$$\frac{1}{n+m} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_i^*(x_k)}{\sum_{j=1}^n c_j^* \varphi_j^*(x_k)} + \sum_{l=1}^m \frac{\tilde{\varphi}_i^*(p_l)}{\sum_{j=1}^m c_j^* \tilde{\varphi}_j^*(p_l)} \right) = c_i \quad (12)$$

Здесь  $\tilde{\varphi}_i(p)$  – образ Фурье от функции  $\varphi_i(x)$

Важным с физической точки зрения примером взаимно дополнительных измерений являются дифракционные картины (для фотонов, электронов или любых других частиц) соответственно в прожекторной зоне (непосредственно за дифракционным отверстием)

и зоне Фраунгофера (на большом удалении от дифракционного отверстия). Распределение интенсивности в прожекторной зоне соответствует координатному распределению вероятностей, а распределение интенсивности в зоне Фраунгофера – импульсному распределению. Восстановленная на основе этих двух распределений пси-функция описывает волновое поле (амплитуду и фазу) непосредственно на дифракционном отверстии. Динамика пси-функции, описываемая уравнением Шредингера для частиц или параболическим уравнением Леонтовича для света, позволяет восстановить общую дифракционную картину (в частности, дифракцию Френеля).

Для частицы, двигающейся в ограниченной области под действием заданного потенциала (например, для электрона в атоме) координатное распределение есть распределение «электронного облака», импульсное же распределение регистрируется в таком мысленном эксперименте, когда внезапно прекращается действие потенциала на частицу и она по инерции улетает на бесконечность.

Распределения координат частицы, взятые в различные моменты времени, также представляют собой совокупность взаимно дополнительных распределений.

Для квантовых вычислений измерение состояния квантового регистра соответствует измерению в координатном пространстве, а измерение состояния регистра после проведения дискретного преобразования Фурье – измерениям в импульсном пространстве. Квантовый регистр, содержащий  $n$  кубитов, может находиться в  $2^n$  состояниях и, соответственно, столько же комплексных параметров в разложении требуется оценить. Таким образом, для восстановления пси-функции, о которой отсутствует какая-либо априорная информация, требуется экспоненциально большое число измерений над идентичными регистрами.

Рассмотрены статистические свойства восстановленного методом максимального правдоподобия вектора состояния. Сформулирован критерий хи-квадрат, дающий меру близости к единице скалярного произведения восстановленного и истинного векторов состояния. Показано, что результаты аналитических исследований хорошо согласуются с результатами численного статистического моделирования.

В разделе 2.2 рассмотрено применение корневого подхода к восстановлению спиновых состояний. Для поляризационных

(спиновых) измерений взаимно дополнительные эксперименты соответствуют измерениям поляризации (проекция момента импульса) на различные направления в пространстве (в качестве таких взаимно- дополнительных экспериментов в простейшем случае можно, например, взять измерения спина на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ ). Основное внимание уделено изучению ансамбля частиц со спином  $1/2$ . Кратко рассмотрен также и общий случай частиц с произвольным спином. Результаты исследований проиллюстрированы численным примером.

В разделе 2.3 рассмотрено восстановление квантовых состояний бифотонных полей (кутритов)

Экспериментальное изучение квантовых состояний сводится к изучению амплитуд взаимно дополнительных квантовых процессов, задаваемых матричными элементами  $S$ - оператора (например, при фиксированном входном состоянии  $|i\rangle$  для различных выходных состояний  $|j\rangle$ ).

$$M_j = \langle j|S|i\rangle \quad (13)$$

Квадрат модуля амплитуды процесса задает интенсивность генерации событий.

$$\lambda_j = M_j^* M_j \quad (14)$$

Интенсивность генерации событий  $\lambda_j$  представляет собой основную доступную для измерений величину ( $\lambda_j$  измеряется в единицах частоты (Гц)). Множество величин  $\lambda_j$  при различных  $j$  есть совокупность интенсивностей взаимно дополнительных пуассоновских процессов.

Хотя амплитуды квантовых процессов не могут быть измерены непосредственно, они представляют большой интерес как величины, описывающие фундаментальные закономерности в квантовой физике. Из принципа суперпозиции следует, что амплитуды линейно связаны с компонентами изучаемого вектора состояния. Цель квантовой томографии (статистической обратной задачи квантовой теории) заключается в восстановлении амплитуд и векторов состояний, которые скрыты от непосредственного наблюдения.

Линейное преобразование вектора состояния  $s$  в амплитуды процессов  $M$  задается некоторой матрицей  $X$ . Совокупность всех

изучаемых амплитуд процессов выражается одним матричным уравнением

$$Xc = M \quad (15)$$

Введенная в работе матрица  $X$  названа аппаратной (инструментальной) матрицей совокупности взаимно дополнительных измерений по аналогии с обычной аппаратной функцией. Матрица  $X$  определяется протоколом (планом) эксперимента, т.е. известна *a priori* (до проведения измерений). Число строк матрицы  $X$  равно числу строк протокола эксперимента (числу изучаемых квантовых процессов), а число ее столбцов определяется размерностью гильбертова пространства, в котором задан восстанавливаемый вектор состояния. В работе приводятся конкретные примеры расчетов амплитуд квантовых процессов и аппаратных матриц в приложении к задаче статистического восстановления квантовых состояний бифотонных полей (кутритов).

Функция правдоподобия совокупности взаимно дополнительных процессов определяется произведением пуассоновских вероятностей:

$$L = \prod_i \frac{(\lambda_i t_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda_i t_i}, \quad (16)$$

где  $k_i$  - число событий, наблюдавшееся в  $i$ -ом процессе за время экспозиции  $t_i$ ,  $\lambda_i$  - неизвестные теоретические интенсивности генерации событий.

Введем также матрицы, элементы которых определяются следующими формулами

$$I_{js} = \sum_i t_i X_{ij}^* X_{is} \quad (17)$$

$$J_{js} = \sum_i \frac{k_i}{\lambda_i} X_{ij}^* X_{is} \quad (18)$$

Матрица  $I$  определяется протоколом эксперимента и, таким образом, известна априори. Она совпадает с эрмитовой матрицей информации Фишера. Напротив, матрица  $J$  определяется результатами эксперимента  $k_i$ , а также неизвестными интенсивностями рождения событий  $\lambda_i$ .

Посредством введенных матриц уравнение правдоподобия может быть представлено в следующем компактном виде:

$$I^{-1}Jc = c \quad (19)$$

Это нелинейное уравнение, поскольку  $\lambda_i$  зависят от неизвестного вектора состояния  $c$ . Имея простую квазилинейную структуру, полученное уравнение легко решается методом итераций.

Оператор  $I^{-1}J$  можно назвать квазиединичным. Отметим, что как единичный он действует только на один единственный вектор в гильбертовом пространстве, а именно на вектор, дающий решение (19) и представляющий собой максимально правдоподобную оценку вектора состояния. Условие существования матрицы  $I^{-1}$  есть условие, накладываемое на исходный протокол эксперимента.

Общепотребительной мерой соответствия между теоретическим  $c^{(0)}$  и восстановленным  $c$  векторами состояния является параметр согласия (fidelity)  $F$ , определяемый формулой:

$$F = \frac{|\langle c^{(0)} | c \rangle|^2}{\langle c^{(0)} | c^{(0)} \rangle \langle c | c \rangle} \quad (20)$$

Проведенный в работе статистический анализ экспериментов с бифотонными полями позволил доказать возможность восстановления квантовых состояний оптических трехуровневых систем (кутритов) с точностью  $F = 0,995 - 0,9998$  (всего было проведено более 20 экспериментов). Полученная в экспериментах точность оценивания существенно выше точности, достигнутой в других работах по квантовой томографии.

Точность восстановления  $F$  зависит от объема статистики, набранной в эксперименте, как это показано в примере на рис.2, который иллюстрирует точность восстановления некоторого квантового состояния, достигнутую в эксперименте, в сравнении с теоретическим диапазоном. Нижняя и верхняя границы теоретического диапазона есть соответственно 5% и 95% квантили статистического распределения, посчитанные методом статистических испытаний. Экспериментальные данные представлены средними значениями и стандартными отклонениями, посчитанными по 10 экспериментальным реализациям. Как это ясно видно из рисунка, экспериментально наблюдаемая точность восстановления для относительно малых объемов выборки полностью лежит внутри теоретического диапазона и выходит за него в случае больших объемов выборки.

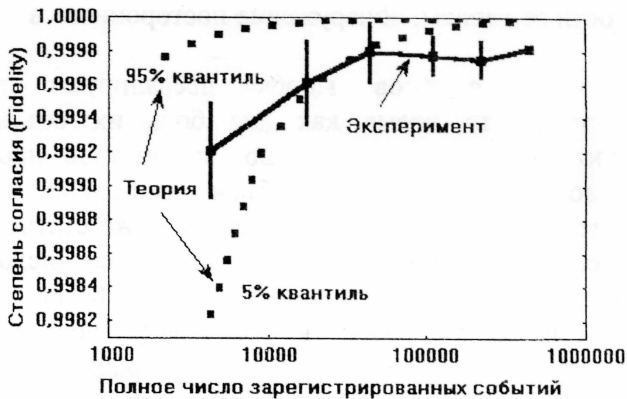


Рис.2. Степень согласия (fidelity) между теоретическим и восстановленным векторами состояния в зависимости от объема экспериментальных наблюдений.

Такое поведение параметра точности обусловлено существованием двух различных типов ошибок, возникающих при восстановлении квантовых состояний. Эти ошибки названы соответственно статистическими и аппаратными (инструментальными) погрешностями. Ошибки первого типа (статистические) обусловлены конечным числом представителей квантового ансамбля, подвергнутых измерениям. По мере роста времени наблюдения, под действием измерений разрушаются квантовые состояния все большего и большего числа представителей ансамбля, соответственно извлекается все больше и больше информации о квантовом состоянии (при этом статистическая погрешность становится все меньше и меньше). Таким образом, статистические погрешности носят фундаментальный квантовый характер. Ошибки второго типа- инструментальные погрешности (такие как погрешности углов установок и параметров поляризационных приборов, нестабильность работы лазера, детекторов и др.), в сущности, носят классический характер; они обусловлены неполнотой знаний исследователя: более точная информация существует, в принципе, просто она недоступна экспериментатору.

Сравнение результатов восстановления с фундаментальным статистическим уровнем точности может служить основой для решения таких задач, как юстировка установки, контроль

стабильности ее работы, обнаружение постороннего вмешательства и др.

Для малых объемов выборки превалируют статистические погрешности, в то время как для больших объемов выборки доминируют погрешности установок параметров протокола и их нестабильность. Чем выше объем выборки, при котором инструментальные погрешности остаются ниже статистических, тем выше качество эксперимента. Соответствующее число наблюдений может быть названо “объемом когерентности”. Количественно объем когерентности можно оценить как точку пересечения кривой экспериментальной точности  $F$  с нижней границей теоретического диапазона. В нашем случае это значение соответствует наблюдению приблизительно 25000 – 30000 событий. Начиная ориентировочно с этой точки, параметр точности  $F$  выходит на насыщение, поскольку дальнейший рост объема наблюдений не ведет к увеличению точности оценивания квантового состояния.

В разделе 2.4 рассмотрены статистические флуктуации оценки вектора состояния. Соответствующие флуктуации в нормально функционирующей квантовой информационной должны находиться в определенных пределах, соответствующих статистической теории. Развитие такой теории и составляло цель рассматриваемого раздела.

Практическое значение задачи учета статистических флуктуаций квантовых состояний связано с развитием методов оценки и контроля точности и стабильности работы квантовых информационных систем, а также методов обнаружения постороннего вмешательства в систему (атаки Евы на квантовый канал связи между Алисой и Бобом).

Оценка ненормированного вектора состояния  $c$ , полученная на основе метода максимального правдоподобия, отличается от точного вектора состояния  $c^{(0)}$  на малую случайную величину  $\delta c = c^{(0)} - c$ . Статистические свойства флуктуаций, задаваемых вектором  $\delta c$ , рассмотрены на основе разложения функции логарифмического правдоподобия вблизи стационарной точки. Основным результатом раздела является полученный информационный критерий хи-квадрат, которым определяется общий уровень возможных статистических флуктуаций в квантовой информационной системе.

В разделе 2.5 рассмотрен вопрос о восстановлении смешанных состояний. Предложен соответствующий (квази- байесовский) алгоритм разделения смеси, основанный на многократном

применении алгоритма восстановления чистых состояний. Поясним квази- байесовский алгоритм разделения смеси на примере восстановления двух- компонентного смешанного состояния кутритов. Формальное обобщение на случай произвольного числа компонент не представляет сложностей. Сущность метода заключается в следующем. Полное число событий, наблюдавшееся в каждом квантовом процессе, делится между двумя компонентами пропорционально их интенсивностям.

$$k_v^{(1)} = k_v \frac{\lambda_v^{(1)}}{\lambda_v^{(1)} + \lambda_v^{(2)}}, \quad k_v^{(2)} = k_v \frac{\lambda_v^{(2)}}{\lambda_v^{(1)} + \lambda_v^{(2)}}, \quad v = 1, 2, \dots, v_{\max} \quad (21)$$

Здесь  $v_{\max}$  - полное число процессов,  $\lambda_v^{(1)}$  и  $\lambda_v^{(2)}$  - оценки интенсивностей процессов на данном шаге итерационной процедуры.

Пусть имеется разложение смеси на две компоненты на определенном шаге итерационной процедуры:

$$k_v = k_v^{(1)} + k_v^{(2)} \quad (22)$$

Далее, для каждой компоненты в соответствии с описанным ранее методом восстановления чистых состояний получим оценки вектора состояния, амплитуд и интенсивностей. В соответствии с вновь полученными оценками интенсивностей, разделим снова полное число событий в каждом процессе пропорционально интенсивностям компонент (таким образом получим следующую итерацию) и т.д. В результате итерационный процесс сходится к некоторым (ненормированным) векторам состояния компонент  $c^{(1)}$  и  $c^{(2)}$ . Результатом выполнения всего алгоритма является оценка матрицы плотности смеси:

$$\rho = c^{(1)} c^{(1)\dagger} + c^{(2)} c^{(2)\dagger} \quad (23)$$

$$\rho \rightarrow \frac{\rho}{\text{Tr}(\rho)} \quad (24)$$

Последняя формула выражает нормировку следа матрицы плотности на единицу. Важное свойство рассматриваемого алгоритма, как показывают численные расчеты, заключается в том, что независимо от выбора нулевого приближения для компонент смеси, результирующая матрица плотности  $\rho$  всегда одна и та же (в пределах малых флуктуаций численных расчетов). При этом, конечно, компоненты  $c^{(1)}$  и  $c^{(2)}$  каждый раз различны (при случайном выборе нулевого приближения).

Предложенный алгоритм проиллюстрирован численным примером.

В разделе 2.6 рассмотрена предложенная в работе процедура корневого статистического квантования.

Важное значение для реализации корневого подхода имеет адекватный выбор базисных функций разложения. В классической задаче восстановления плотности распределения базис корневого разложения может быть произвольным. Другими словами, в классической задаче объективно отсутствует какой-либо выделенный набор функций или состояний. Иначе обстоит дело в случае постановки статистической задачи в квантовой механике. Здесь естественный выделенный базис для разложения задают стационарные решения уравнения Шредингера, что с точки зрения квантовой теории совершенно естественно.

Интересно, однако, то, что между корневым характером разложения плотности и квантовой механикой существует определенная внутренняя связь. Раскрытию этой связи и посвящен рассматриваемый раздел. Оказывается, что требование корневого характера разложения плотности распределения может рассматриваться как некоторое условие квантования (рецепт, позволяющий преобразовать классическую механику в квантовую).

Корневое статистическое квантование основано на следующей схеме. Переход от динамических к статистическим закономерностям в механике предполагает, что вместо строго детерминированных координат  $\vec{x}$  рассматривается некоторая плотность  $P(x)$ . При корневом подходе считается, что рассматриваемая плотность допускает корневое разложение (которое, как было видно из результатов главы 1, является выделенным по отношению к любым другим разложениям). Далее, со статистической точки зрения естественно предположить, что законы классической механики остаются справедливыми только в среднем. Оказывается, что требование корневого характера разложения совместно с требованием выполнения в среднем законов классической механики, позволяют из всех возможных статистических механических моделей выделить квантовую механику.

Во избежание недоразумений отметим, что речь не идет о выводе квантовой механики из классической на основе каких-либо статистических соображений. Предметом рассмотрения является процедура (рецепт) для перехода от классического описания к

квантовому. Корневое статистическое квантование представляет собой определенную альтернативу другим известным методам квантования, таким как метод канонического квантования Дирака, который связан с формальным введением нового алгебраического объекта – квантовых скобок Пуассона взамен классическим и метод квантования Фейнмана с помощью интегралов по траекториям.

В разделе 2.7, имеющим характер литературного обзора, обсуждается взаимосвязь, которая существует между математической задачей минимизации энергии в вариационном принципе квантовой механики и задачей минимизации информации Фишера (точнее так называемой информации Фишера относительно параметра сдвига). Эта взаимосвязь используется в некоторых модельных задачах статистического анализа данных.

В разделе 2.8, также имеющем характер литературного обзора, кратко обсуждается история возникновения понятия квантового состояния и методов квантовой томографии.

В разделе 2.9 сформулированы основные выводы по результатам главы 2.

Третья глава посвящена развитию многопараметрических статистических моделей в приложении к задачам микроэлектроники.

В разделе 3.1 рассмотрена предложенная в работе новая модель факторного анализа многомерных статистических данных. Модель направлена на выявление скрытых технологических факторов на основе минимизации новой введенной характеристики – энтропии факторной модели (являющейся аналогом меры запутанности (entanglement) в квантовой информатике). В качестве приложения разработанной модели рассматривается анализ многомерных данных электрофизического тестового контроля ОАО «Ангстрем».

Старый подход к анализу данных основан на том, что каждый измеряемый параметр контролируется отдельно от других. Такой подход игнорирует существенные связи между параметрами, поэтому часто приводит к неудовлетворительным результатам. В условиях, когда параметры коррелируют между собой, нецелесообразно контролировать каждый из них в отдельности. Целесообразнее на основе большого числа измеряемых параметров выработать небольшое число скрытых от непосредственного наблюдения обобщенных показателей (факторов), характеризующих рассматриваемую технологическую систему или процесс.

Предложенное в работе понятие энтропии факторной модели  $S$  определяется на основе матрицы факторных нагрузок  $L$  в соответствии с формулой:

$$S = - \sum_{i,j} L_{ij}^2 \cdot \log(L_{ij}^2) \quad (25)$$

По своей формальной записи выражение (25) аналогично энтропии Больцмана – Шеннона. В тоже время, введенная энтропия факторной модели не является энтропией в строгом смысле этого понятия, поскольку квадраты элементов матрицы факторных нагрузок  $L$  не являются вероятностями, хотя и могут интерпретироваться как некоторые веса (сумма этих весов равна единице для каждой строки матрицы  $L$ ). По своему смыслу энтропия факторной модели аналогична мере запутанности (entanglement) квантовых состояний, введенной в работах Беннетта и др. Чем меньше энтропия факторной модели, тем определеннее взаимосвязь между скрытыми (латентными) факторами и измеряемыми переменными. Наиболее простая структура данных, соответствующая минимуму энтропии факторной модели, обеспечивается путем ортогонального вращения факторов в факторном пространстве. Принцип минимума энтропии является своего рода “бритвой Оккама”, позволяющей из всех возможных моделей выбрать модель с наиболее простой структурой. Минимизация энтропии позволяет получить факторы, допускающие наглядную физико-технологическую интерпретацию.

Применение разработанной модели к анализу данных электрофизического тестового контроля ОАО «Ангстрем» позволило выявить основные физико- технологические факторы исследуемого производства и дать их интерпретацию.

В разделе 3.2 рассмотрено предложенное в работе многопараметрическое обобщение распределения Вейбулла в приложении к задачам анализа результатов испытаний в микроэлектронике.

Традиционный анализ надежности с использованием распределения Вейбулла основан на свойстве этого распределения превращаться в прямую линию в некоторых координатах (координатах Вейбулла).

Как показывает практика, распределение Вейбулла не всегда достаточно точно описывает экспериментальные данные. В частности, это может проявляться в том, что зависимость, возникающая в координатах Вейбулла, явно отклоняется от линейной. Для этого случая в работе развито соответствующее естественное обобщение - многопараметрическое распределение Вейбулла. Соответствующая функция распределения имеет вид:

$$F = 1 - \exp(-\exp(W(x))), \quad (26)$$

где параметр Вейбулла  $W(x)$  является произвольной неубывающей функцией своего аргумента (в качестве переменной  $x$  выступает логарифм времени до отказа элемента при испытании). В частном случае линейной зависимости формула (26) превращается в обычное распределение Вейбулла.

Предложенный метод основан на оценивании функции  $W(x)$  по экспериментальным данным путем построения той или иной регрессионной зависимости в координатах Вейбулла. Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что при строгом построении регрессионной зависимости необходимо учитывать, что выборочные параметры Вейбулла имеют неоднородную дисперсию и, кроме того, коррелируют между собой.

Результаты проведенных аналитических исследований проиллюстрированы анализом реальных экспериментальных данных, полученных в рамках внедрения разработанной методики в практику ОАО «Ангстрем».

Важная особенность полупроводникового производства связана с иерархической структурой контролируемых параметров качества, обусловленной неоднородностью физико-технологических параметров между различными областями внутри полупроводниковой пластины, между различными пластинами в партии, между партиями и т.д. С целью адекватного учета структуры данных в микроэлектронике, в работе развит иерархический подход к построению многопараметрических моделей контроля качественных (раздел 3.3) и количественных (раздел 3.4) параметров технологического процесса производства интегральных микросхем.

В разделе 3.3 предложен общий подход к построению многоуровневых иерархических компаунд - распределений дефектности в микроэлектронике. В качестве частных (одноуровневых) случаев выступают известные в литературе отрицательное биномиальное распределение и распределение Пуассона.

На основе метода производящих функций построена теория и изучены свойства компаунд - распределений, образующих иерархические цепочки. В качестве технологических приложений рассмотрены иерархические цепочки для плотностей распределения и средних значений выхода годных, предложен метод контроля технологических потерь и развит байесовский подход к оценке уровня дефектности.

Неадекватность обычного распределения Пуассона связана с тем обстоятельством, что дефекты, приводящие к потере годных микросхем, не распределены внутри пластины равномерно, а скорее образуют некоторые кластеры. Суть обобщения распределения Пуассона, связанного с введением компаунд - распределений, заключается в том, что теперь параметр плотности дефектности «лямбда» распределения Пуассона перестает быть фиксированной константой, а становится некоторой случайной величиной, имеющей то или иное распределение. Модель, основанная на компаунд – распределении Пуассона, является частным (предельным) случаем модели, основанной на биномиальном компаунд – распределении (распределении Пойа). Многопараметрические статистические модели, основанные на концепции компаунд - распределений, могут быть применены как на этапе разработки и проектирования, так и на этапах производства и оценки готовой продукции.

В работе введены и изучены два новых класса многопараметрических дискретных распределений: биномиальные и пуассоновские компаунд- распределения. Теория многоуровневых компаунд – распределений наглядно представлена на языке производящих функций. Пуассоновские компаунд- распределения возникают как предельный случай формул для биномиальных компаунд- распределений, если на каждом уровне иерархии вероятность дефекта и коэффициент кластеризации устремляются к нулю ( $p_r \rightarrow 0$ ,  $g_r \rightarrow 0$ ), а объем выборки к бесконечности ( $n \rightarrow \infty$ ), таким образом, чтобы их произведения оставались конечными числами ( $np_r \rightarrow \lambda_r = const$ ;  $ng_r \rightarrow \lambda_r / a_r = const$ ). В случае микроэлектроники это приближение выполняется очень хорошо, поскольку микросхемы часто содержат многие миллионы элементов ( $n \geq 10^6$ ), а вероятности дефектности, соответственно, отдельных элементов не превышают миллионных долей от единицы  $p_r \leq 10^{-6}$ .

Для логарифмов производящих функций пуассоновских распределений на нулевом уровне и двух первых уровнях иерархии имеют место следующие соотношения:

$$\ln G_0(z|n, p_0) = -np_0(1-z) \quad (27)$$

$$\ln G_1(z|n, g_1, p_1) = -\frac{p_1 n}{g_1 n} \ln(1 + g_1 n(1-z)) \quad (28)$$

$$\ln G_2(z|n, g_1, g_2, p_2) = -\frac{p_2 n}{g_2 n} \ln\left(1 + \frac{g_2 n}{g_1 n} \ln(1 + g_1 n(1-z))\right) \quad (29)$$

В представленных формулах мы пишем, например  $\frac{p_1 n}{g_1 n}$  вместо  $\frac{p_1}{g_1}$  для того, чтобы наглядно показать, что малые (уровни дефектности и коэффициенты кластеризации) и большие (объем выборки) в математическом смысле величины входят в окончательные формулы только в виде произведений.

В общем случае цепочка производящих функций может быть определена рекуррентным способом:

$$\ln G_r = -p_r n \cdot L_r, \quad (30)$$

$$\text{где } L_{r+1} = \frac{\ln(1 + g_{r+1} n L_r)}{g_{r+1} n}, \quad L_0 = (1-z) \quad (31)$$

Каждый уровень иерархии представлен своим коэффициентом кластеризации, что же касается дефектности, то ее представляет один общий параметр – дефектность самого высокого уровня, которая, в свою очередь, представляет собой дефектность, усредненную по всем уровням (поэтому значок  $r$  при дефектности можно опускать  $p_r = p$ ).

В разделе 3.4 рассмотрено приложение многоуровневой иерархической статистической модели к контролю количественных параметров в микроэлектронике. На основе методов дисперсионного анализа предложен иерархический метод построения контрольных карт и развито его обобщение на основе метода компьютерного бутстреп-моделирования.

Практика показала, что разработанные модели хорошо согласуются с данными реального полупроводникового производства.

В разделе 3.5 сформулированы основные выводы по результатам главы 3.

## ОБЩИЕ ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

1. Разработан новый метод – корневой подход к восстановлению плотности распределения по экспериментальным данным. Корневая оценка плотности основана на представлении плотности вероятности как квадрата модуля некоторой функции (называемой пси-функцией по аналогии с квантовой механикой). Пси-функция представляется в виде разложения по ортонормированному базису с оценкой коэффициентов разложения методом максимального правдоподобия. Будучи асимптотически эффективным, метод обеспечивает высокую точность оценивания параметров, близкую к принципиально достижимой.
2. Показано, что уравнение правдоподобия в методе корневой оценки плотности допускает построение удобной в вычислительном отношении быстросходящейся итерационной процедуры. Преимущества нового подхода раскрываются при решении многопараметрических задач. Устойчивость и наилучшая сходимость предложенной процедуры обеспечиваются путем введения специального итерационного параметра, оптимальное значение которого выбирается на основе максиминной стратегии.
3. В рамках корневого подхода оцениваемые параметры имеют простые и универсальные статистические свойства, обусловленные независимостью матрицы информации Фишера и матрицы ковариаций оценок от базисных функций разложения. Универсальные статистические свойства корневых оценок выражаются в виде критериев  $\chi^2$  – квадрат для проверки гипотез о соответствии выборочного вектора состояния генеральному, а также для проверки однородности выборок. Традиционный критерий  $\chi^2$  – квадрат представляет собой частный предельный случай корневого критерия. Новая статистическая характеристика – доверительный конус дает гарантированную оценку для направления неизвестного вектора состояния. Справедливость развитой теории подтверждается результатами численного моделирования.
4. Корневой подход дает естественное средство для решения обратной статистической задачи квантовой механики, связанной с восстановлением пси-функции по результатам взаимно

дополнительных (в смысле принципа дополнительности Н. Бора) экспериментов. На основе соответствующего обобщения принципа максимального правдоподобия получены уравнения правдоподобия для оценивания векторов состояний широкого класса квантовых систем по совокупности взаимно дополнительных экспериментов, связанных с координатными, импульсными и поляризационными (спиновыми) измерениями.

5. Корневой подход к анализу взаимно- дополнительных квантовых процессов основан на представлении интенсивностей генерации событий, непосредственно регистрируемых в физическом эксперименте, как квадратов модулей их амплитуд. Формализм аппаратных матриц обеспечивает компактную запись для совокупности квантовых процессов, образующих протокол измерений, и эффективный способ для формулировки процедур восстановления вектора состояния квантовой системы.
6. Предложен и реализован метод статистического восстановления квантовых состояний трехуровневых оптических систем (кутритов), основанных на частотно и пространственно вырожденном бифотонном поле. Статистический анализ экспериментальных данных позволяет доказать, что квантовые состояния кутритов могут быть восстановлены с высокой точностью.
7. Сформулирован конструктивный критерий хи- квадрат для количественной оценки возможного уровня статистических флуктуаций неизвестного вектора состояния квантовой системы. Введена новая статистическая характеристика – мера информационного согласия оцениваемого вектора состояния с его теоретическим значением.
8. Показано, что погрешности, возникающие при восстановлении квантовых состояний могут быть двух видов: статистические и инструментальные. Статистические флуктуации ограничивают точность восстановления квантовых состояний при объемах наблюдений, малых по сравнению с объемом когерентности. Напротив, при больших объемах наблюдений, точность восстановления квантовых состояний ограничивается инструментальными погрешностями. Инструментальные погрешности приводят к насыщению меры точности

восстановления квантового состояния (fidelity) на уровне ниже, чем единица.

9. Разложение пси- функции по стационарным решением уравнения Шредингера есть естественное следствие процедуры корневого статистического квантования. Показано, что предложенное в работе корневое статистическое квантование позволяет из всех статистических моделей, обеспечивающих выполнение в среднем законов классической механики, выделить системы, описываемые квантовой механикой.
10. Предложена новая модель факторного анализа многомерных статистических данных и развито ее применение к задачам микроэлектроники. Новый подход основан на введение энтропии факторной модели, являющейся мерой неопределенности (запутанности) скрытых технологических факторов по отношению к наблюдаемым параметрам. Поиск минимума энтропии факторной модели посредством ортогонального вращения факторов позволяет выявить наиболее естественную физико- технологическую структуру многомерных данных.
11. Разработана новая многопараметрическая модель анализа результатов испытаний электронных изделий, основанная на восстановлении характеристик надежности путем построения регрессионных зависимостей в координатах Вейбулла. Разработанный подход обеспечивает большую гибкость и полноту анализа по сравнению с одно- и двухпараметрическими моделями.
12. Учет естественной для полупроводникового производства иерархии невоспроизводимости контролируемых параметров от одной области к другой внутри полупроводниковой пластины, от пластины к пластине в партии, от партии к партии и т.п. дает основу для разработки многопараметрических иерархических статистических моделей контроля качественных и количественных параметров в микроэлектронике. Метод бутстреп с учетом иерархической структуры данных позволяет сделать контроль параметров полупроводникового производства более адекватным и точным по сравнению с возможностями аналитических моделей.

Опубликованные работы по теме диссертации

1. *Богданов Ю. И.* Основные понятия классической и квантовой статистики: корневой подход // Оптика и спектроскопия. 2004. Т.96. №5. С.735-746.
2. *Богданов Ю.И., Кривицкий Л.А., Кулик С.П.* Статистическое восстановление квантовых состояний оптических трехуровневых систем // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 78. вып.6. С.804-809.
3. *Богданов Ю.И.* Метод максимального правдоподобия и корневая оценка плотности распределения// Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2004. №3. С.51-60.
4. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А., Дихунян В.Л.* Статистические модели управления дефектностью и выходом годных в микроэлектронике // Микроэлектроника. 2003. Т.32. №1. С.62-76.
5. *Богданов Ю.И.* Основная задача статистического анализа данных: корневой подход. М. МИЭТ.2002.96 с.; *Bogdanov Yu. I.* Fundamental Problem of Statistical Data Analysis: Root Approach. M. MIEE. 2002. 84 p.; *Bogdanov Yu. I.* Statistical Inverse Problem// LANL Report physics/0211109. 2002. 39 p.
6. *Bogdanov Yu. I.* Quantum Mechanical View of Mathematical Statistics// LANL Report quant-ph/0303013. 2003. 26 p.
7. *Bogdanov Yu. I.* Root Estimator of Quantum States // LANL Report quant-ph/0303014. 2003. 26p.
8. *Bogdanov Yu. I.* Quantum States Estimation: Root Approach // Proceedings of SPIE. 2004. V.5401. P.741-750. The International Conference "Micro- and nanoelectronics – 2003" (ICMNE-2003). Edited by K.A. Valiev, A.A. Orlikovsky; LANL Report quant-ph/0310011. 2003. 10 p.
9. *Bogdanov Yu. I.* Statistical Inverse Problem: Root Approach // 2nd Asia-Pacific Workshop on Quantum Information Science, Singapore, National University of Singapore, 15-19 December 2003; LANL Report quant-ph/0312042. 2003. 17 p.
10. *Bogdanov Yu.I., Kulik S.P., Tey M.K. et al.* Statistical Reconstruction of Qutrits // 2nd Asia-Pacific Workshop on Quantum Information Science, Singapore, National University of Singapore, 15-19 December 2003; LANL Report quant-ph/0312054. 2003. 22 p.
11. *Bogdanov Yu. I.* Root Estimator of States // 2003 International Conference "Physics and Control" Proceedings. P. 808-813. Edited by A.L. Fradkov, A.N. Churilov. August 20-22. 2003. Saint Petersburg. Russia.

12. *Bogdanov Yu.I., Bogdanova N.A., Rudnev A.V.* Multilevel Clustering Fault Model for IC Manufacture. // Proceedings of SPIE. 2004. V.5401. P.683-692. The International Conference "Micro- and nanoelectronics – 2003" (ICMNE-2003). Edited by K.A. Valiev, A.A. Orlikovsky; LANL Report physics/0310012. 2003. 10 p.
13. *Богданов Ю.И., Руднев А.В.* Методика статистического приемочного контроля качества в полупроводниковом производстве. // Надежность. 2003. № 3. с. 38–42.
14. *Богданов Ю.И* Корневая оценка плотности// Тезисы доклада на IV международной научно-технической конференции «Электроника и информатика – 2002». Зеленоград. МИЭТ. 19-21 ноября 2002. Т.1. С.23-24.
15. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А., Руднев А.В.* Анализ дефектности в микроэлектронике с использованием кластерных моделей // Тезисы доклада на IV международной научно-технической конференции «Электроника и информатика – 2002». Зеленоград. МИЭТ. 19-21 ноября 2002. Т.1. С.25-26
16. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А., Романов А.А., Руднев А.В.* Многоуровневые кластерные модели для дефектности и выхода годных в микроэлектронике // Труды восьмой международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы твердотельной электроники и микроэлектроники". Часть1. с.67-69. Дивноморское. Россия. 14–19 сентября 2002.
17. *Богданов Ю.И., Руднев А.В.* Математическое моделирование в рамках кластерных моделей для дефектности и выхода годных в микроэлектронике // Труды восьмой международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы твердотельной электроники и микроэлектроники". Часть1. с.70-72. Дивноморское. Россия. 14–19 сентября 2002.
18. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А., Земцовский С.И.* Статистический анализ времени безотказной работы электронных изделий в координатах Вейбулла // Труды восьмой международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы твердотельной электроники и микроэлектроники". Часть1. с.73-75. Дивноморское. Россия. 14–19 сентября 2002.
19. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А., Дихунян В.Л.* Распределение выхода годных с учетом неоднородного кластерного дефектообразования // Тезисы докладов на всероссийской научно –

- технической дистанционной конференции “Электроника”. Зеленоград, 19 – 30 ноября 2001 г., с. 121 – 122.
20. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А., Дихунян В.Л., Романов А.А.* Статистический контроль потока партий в полупроводниковом производстве // Тезисы докладов на всероссийской научно – технической дистанционной конференции “Электроника”. Зеленоград, 19 – 30 ноября 2001 г., с. 140 – 141.
  21. *Богданов Ю.И., Дихунян В.Л., Земцовский С.И.* Основные элементы системы статистического управления технологическим процессом в полупроводниковом производстве // Тезисы докладов на всероссийской научно – технической дистанционной конференции “Электроника”. Зеленоград, 19 – 30 ноября 2001 г., с. 142 – 143.
  22. *Богданов Ю.И., Дихунян В.Л.* Роль статистических методов в системе качества полупроводникового производства // Тезисы докладов на всероссийской научно – технической дистанционной конференции “Электроника”. Зеленоград, 19 – 30 ноября 2001 г., с. 144 – 145.
  23. *Богданов Ю.И., Дихунян В.Л., Руднев А.В.* Приемочный контроль качества в полупроводниковом производстве // Тезисы докладов на всероссийской научно – технической дистанционной конференции “Электроника”. Зеленоград, 19 – 30 ноября 2001 г., с. 146 – 147.
  24. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А.* Статистическое управление технологическим процессом (методическое пособие) // Серия «Все о качестве. Отечественные разработки». Выпуск 6. 60 с. М. НТК «Трек». 2001 г.
  25. *Богданов Ю.И., Минаев В.В., Руднев А.В.* Прогнозирование выхода годных и контроль технологических потерь в полупроводниковом производстве. // Известия вузов. Сер. электроника. 2001. №3. с.52-57.
  26. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А.* Статистическое моделирование классических динамических систем на квантовом компьютере. // Труды седьмой международной научно-технической конференции “Актуальные проблемы твердотельной электроники и микроэлектроники”. Дивноморское. Россия. 17–22 сентября 2000. часть2. с.6 - 9.
  27. *Богданов Ю.И., Минаев В.В., Руднев А.В.* Статистический контроль выхода годной продукции и технологических потерь в

- полупроводниковом производстве. // Труды седьмой международной научно-технической конференции “Актуальные проблемы твердотельной электроники и микроэлектроники”. Дивноморское. Россия. 17–22 сентября 2000. часть 1. с.74–76.
28. *Богданов Ю.И., Минаев В.В., Куварзин Н.А., Романов А.А.* Управление выходом годных и экономическая эффективность полупроводникового производства // Экономика качества. Серия «Все о качестве. Отечественные разработки». Выпуск 4. с. 28-33. М. НТК «Трек». 2001 г.
  29. *Богданов Ю.И., Минаев В.В., Руднев А.В.* Анализ выхода годных изделий и контроль технологических потерь в полупроводниковом производстве // Первый всероссийский симпозиум «Стратегическое планирование и развитие предприятий». Москва. ЦЭМИ. 11 - 12 апреля 2000 г. Тезисы докладов и сообщений (под ред. проф. Г.Б. Клейера). с.19-21.
  30. *Богданов Ю.И., Минаев В.В., Руднев А.В.* Анализ сравнительных экспериментов и оценка экономической эффективности полупроводникового производства // Седьмая всероссийская межвузовская научно-техническая конференция “Микроэлектроника и информатика - 2000”. Зеленоград 17-18 апреля 2000 г. Тезисы докладов. С. 9.
  31. ОСТ 1114.1011-99 Стандарт отрасли. Микросхемы интегральные. Система и методы статистического контроля и регулирования технологического процесса // *Богданов Ю.И., Дорошевич К.К., Иванов А.В.* и др. М. ЦНИИ 22. 1999. 78 с.
  32. *Богданов Ю.И.* Влияние кластеризации дефектов на выход годных в рамках модели биномиального компаунд- распределения. // Всероссийская научно-техническая конференция “Микро- и нанoeлектроника 98”. Тезисы докладов. Том 2. Звенигород, 1998. Доклад Р3-53. 2с.
  33. *Богданов Ю.И., Романов А.А.* Контроль дефектности и управление выходом годных в полупроводниковом производстве. // Всероссийская научно-техническая конференция “Микро- и нанoeлектроника 98”. Тезисы докладов. Том 2. Звенигород, 1998. Доклад Р3-51. 2с.
  34. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А.* Влияние кластеризации дефектов на эффективность кода Хемминга. // Всероссийская научно-техническая конференция “Микро- и нанoeлектроника 98”. Тезисы докладов. Том 2. Звенигород, 1998. Доклад Р3-52. 2с.

35. *Богданов Ю.И.* Информация Фишера и непараметрическая аппроксимация плотности распределения // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1998. т. 64. N 7. с. 54-60.
36. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А.* Контроль неплоскостности полупроводниковых пластин в субмикронной технологии // Микроэлектроника. 1998. Т.27. N1. с.28-34.
37. *Богданов Ю.И., Краюшкин В.М.* Статистическое управление технологическим процессом в полупроводниковом производстве. // Всероссийская научно-техническая конференция "Электроника и информатика - 97". Зеленоград 25-26 ноября 1997 г. Тезисы докладов. Часть 1. с.136-137.
38. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А.,* Статистическое управление технологическими процессами в микроэлектронике с интенсивным использованием компьютерных технологий. // Всероссийская научно-техническая конференция "Электроника и информатика - 97". Зеленоград 25-26 ноября 1997 г. Тезисы докладов. Часть 1. с.138-139.
39. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А.* Обеспечение субмикронной точности контроля неплоскостности полупроводниковых пластин. // 52-я Научная Сессия, Посвященная Дню Радио. Москва. 21-22 мая 1997. Тезисы докладов. Часть 1. с. 66.
40. *Богданов Ю.И., Елиферов В.Г.* Анализ резко выделяющихся наблюдений в данных электрофизического тестового контроля. // 52-я Научная Сессия, Посвященная Дню Радио. Москва. 21-22 мая 1997. Тезисы докладов. Часть 1. с. 67.
41. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А.* Бутстреп, структура данных и управление технологическими процессами в микроэлектронике. // Микроэлектроника. 1997. Т.26. №3. С. 183-187.
42. *Богданов Ю.И., Романов А.А.* О выявлении скрытых технологических факторов на основе минимизации энтропии. // Микроэлектроника. 1997. Т.26. №3. С. 176-182.
43. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А.* Непараметрический дисперсионный анализ и контроль за состоянием измерительного оборудования в микроэлектронном производстве //Тезисы доклада на Всероссийской научно-технической конференции "Электроника и информатика". Москва. Зеленоград, МИЭТ, 15-17 ноября 1995. с. 254-255.

44. *Богданов Ю.И.* Анализ вариаций и построение контрольных карт в микроэлектронике. // Микроэлектроника. 1995. Т.24. №6. С.435-446.
45. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А., Земцовский С.И.* Статистическое моделирование и анализ данных по времязависимому пробоя тонких диэлектрических слоев.// Радиотехника и электроника. 1995. Т. №12. С.1874-1882.
46. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А., Земцовский С.И. и др.* Статистическое исследование времени до пробоя подзатворного диэлектрика в условиях электрического стресса. // Микроэлектроника. 1994. Т.23. №1. С.75-85.

Отпечатано в ООО «Компания Спутник+»  
ПД № 1-00007 от 25.09.2000 г.  
Подписано в печать 25.06.04  
Тираж 100 экз. Усл. п.л. 2,75  
**Печать авторефератов (095) 730-47-74,  
778-45-60 (сотовый)**