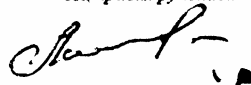


На правах рукописи



Люминарский Игорь Евгеньевич

**Разработка научных методов расчета нестационарного взаимодействия
тонкостенных элементов с жесткими односторонними связями
и математических моделей волновых передач**

Специальность 01.02.06 – динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Специальность 05.02.02 – машиноведение, системы приводов и детали машин

Автореферат

**диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук**

Москва 2009

Работа выполнена в Московском государственном индустриальном университете

Научный консультант:

доктор технических наук, профессор Клеников Сергей Сергеевич

Официальные оппоненты:

доктор технических наук

Асташев Владимир Константинович

доктор технических наук, профессор

Морозов Валентин Васильевич

доктор технических наук

у1893483

едор Дмитриевич

Ведущая орга

Люминарский И.Е.
Разработка научных методов
расчета нестационарного

тут теплотехники»

у 1893483

ВОЗВРАТИТЕ КНИГУ НЕ ПОЗЖЕ
обозначенного здесь срока

заседании

ственного

05, Москва, 2-я

484

СКОГ

ла.

НТБ ИГТУ им. Н.Э. Баумана



1893483

Люминарский И.Е. Разработка

Карпачев А.Ю.

181

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы. Системы с односторонними (неудерживающими) связями (О.С.) широко применяются при создании разнообразных технических систем. К ним относятся зубчатые механизмы, механизмы вибротехники, контактные системы, строительные конструкции и т.д. Учет одностороннего контакта зубчатых колес важен в расчетах волновых зубчатых передач.

В связи с широким применением в современной технике тонкостенных конструкций, сочетающих в себе высокую прочность и низкую металлоемкость, задачи расчета колебаний балок, пластин и оболочек, ограниченных односторонними связями, являются актуальными.

Волновые зубчатые передачи (ВЗП) в настоящее время нашли широкое применение в приводах опорно-поворотных устройств телескопов, робототехнике, в системах управления и т.п., так как имеют малую металлоемкость, компактность и, что особо важно, высокую кинематическую точность. Несмотря на большое количество исследований, посвященных кинематической точности ВЗП, до сих пор практически не изучена собственная кинематическая погрешность ВЗП, т.е. погрешность, обусловленная принципом работы и конструкцией передачи.

Настоящая работа посвящена разработке эффективных методов расчета упругих систем с большим количеством О.С. высокой жесткости и исследованию с их помощью стесненных колебаний балок и пластин с О.С. и кинематической погрешности волновых зубчатых передач.

Состояние вопроса.

Проблемой статического расчета упругих систем, ограниченных односторонними связями, занимались И.М. Рабинович, А.В. Перельмутер, В.Н. Гордеев, Н.А. Алфутов, С.С. Клеников, Н.А. Астрахан, Л.П. Портаев, Колесников Г.Н. и др. Для расчета таких систем применяются метод "попыток", шаговый метод последовательных нагружений, методы нелинейного программирования. Следует отметить, что использование готовых программ нелинейного программирования не всегда эффективно.

Расчету колебаний деформируемых механических систем, ограниченных О.С., посвящены работы В.А. Баженова, В.И. Гуляева, С.С. Кохманюка, Е.Г. Янютина, А.Н. Златина, А.Д. Кузнецова, В.А. Ковтуненко и др.

В работах В.А. Баженова рассмотрены вопросы вынужденных периодических колебаний стержневых, пластинчатых и оболочечных элементов конструкций, ограниченных О.С. или упругим основанием.

При расчете упругих тонкостенных элементов в этих работах использовались уравнения движения, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява. Дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее движение упругого тела методом Бубнова-Галеркина сводилось к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В.А. Баженов рассматривает колебания прямоугольной пластины с простейшими граничными условиями,

соответствующими шарнирному опиранию. Такие граничные условия позволяют представлять решение в виде тригонометрического ряда.

Для учета О.С. в дифференциальное уравнение вводилось слагаемое

$$0,5\delta(\bar{x}, x)k_s(1 - \text{sign}(w(x, t) - \Delta_0))|w(x, t) - \Delta_0|, \quad (1)$$

где $w(x, t)$ – функция прогибов; $\bar{x}$ – вектор координаты О.С.; k_s – жесткость О.С.; Δ_0 – зазор между связью и недеформированной пластиной; $\delta(\bar{x}, x)$ – функция Дирака.

Разрешающая система дифференциальных уравнений записывалась относительно приращений коэффициентов разложения в тригонометрический ряд. Решение системы дифференциальных уравнений проводилось методом конечных разностей.

В работах Кохманюка С.С. рассматривается решение задач контактного деформирования двух балок конечной длины, подверженных импульсным нагрузкам. Изложены решения задач о неустановившихся колебаниях балок и прямоугольных пластин на упругом одностороннем основании.

В перечисленных выше работах рассматриваются системы, в которых жесткость упругого тела и О.С. имеют близкие значения. Если же жесткость О.С. на несколько порядков выше жесткости упругой системы, то колебания системы может сопровождаться дребезгом (высокочастотными отрывами упругого тела от О.С.). Расчет таких систем по описанным выше методикам будет затруднен из-за больших затрат машинного времени.

Расчету колебаний упругой системы с одной или двумя жесткими ограничителями посвящены работы В.М. Бабицкого, В.Л. Крупенина, В.К. Асташева, И.И. Блехмана и др. Решения, приведенные в этих работах, основаны на применении метода гармонической линеаризации, метода осреднения и метода припасовывания решений. Трудоемкость отыскания решений аналитическими методами ограничивает возможность их применения для анализа сложных систем большой размерности. Такие системы исследуются численными методами.

Проблеме соударения твердых тел посвящены работы Г. Герца, С.П. Тимошенко, В. Гольдсмита, Н.А.Кильчевского, В.Л. Бидермана, А.Г. Горшкова и других авторов.

Упругой системой с большим числом О.С. является волновая зубчатая передача. Статическому расчету сил взаимодействия звеньев волновой передачи как упругой системы с О.С. посвящены работы Н.А. Ковалева, С.С. Кленикова, Н.И. Цейтлина и др. К настоящему времени многие ученые пришли к выводу о необходимости учета деформации звеньев нагруженной волновой передачи при исследовании ее кинематики. Однако, для расчета кинематической точности волновых передач, указанные выше работы не применялись.

Вопросу исследования точности работы волновой зубчатой передачи посвящены работы Е.Г. Гинзбурга, И.И. Васильевой, П.К. Попова,

И.Л. Смирновой, Г.А. Тимофеева, А.Ф. Фирсанова, Ф.И. Фурсяка, Л.С. Черновой, Л.О. Штриплинга и др.

Отличительной особенностью волновой зубчатой передачи является высокая многопарность зацепления. Несмотря на противоречивость количественных оценок, во всех работах отмечается, что многопарность зацепления ведет к значительному повышению кинематической точности волновой передачи. Однако, ввиду сложности расчетной схемы, при определении кинематической точности волновой передачи многопарность зацепления учитывалась приближенно, без расчета сил одностороннего взаимодействия её элементов.

Следует отметить, что в волновых зубчатых передачах имеется собственная кинематическая погрешность, обусловленная принципом работы передачи. Эта погрешность соответствует гипотетической конструкции с номинальными размерами. Разумеется, что такая конструкция не может быть реализована на практике и, следовательно, не может быть экспериментально исследована. Поэтому до настоящего времени собственная кинематическая погрешность волновой передачи из-за отсутствия адекватной математической модели практически не изучена.

Цель работы. В связи с вышеизложенным в данной работе поставлены следующие задачи:

- 1) провести сравнительную оценку эффективности различных методов статического расчета упругих систем с О.С. Количественное сравнение провести на примере расчета волновой зубчатой передачи как упругой системы с большим числом О.С.;
- 2) разработать эффективный метод статического расчета упругих систем с О.С.;
- 3) разработать метод расчета колебаний упругих систем с О.С., позволяющий эффективно решать задачи, в которых жесткость О.С. на несколько порядков выше жесткости упругой системы;
- 4) применить разработанный метод для расчета колебаний тонкостенных упругих элементов (балок, пластин) с О.С., выполненных в виде стержней с закругленными концами;
- 5) проанализировать сходимость решения;
- 6) оценить влияние инерции вращения и деформации поперечного сдвига сечений на реакции в О.С. и перемещения упругих элементов;
- 7) провести экспериментальные исследования с целью подтверждения предложенных методов расчета;
- 8) разработать пакет программ, который реализует предложенные в данной работе методы;
- 9) на основе предложенных методов разработать методики определения кинематической погрешности волновых зубчатых передач с кулачковым и электромагнитным генераторами волн. Исследовать кинематическую погрешность этих передач.

Диссертационная работа проводилась в рамках Республиканской научно-технической программы ГК ВШ «Волновые механические системы и приводы специального назначения».

Научная новизна состоит в следующем:

- 1) предложен метод статического расчета упругих систем с О.С. Он объединяет в себе положительные стороны метода «попыток» и шагового метода последовательных нагружений. Метод позволяет эффективно рассчитывать упругие системы с большим количеством О.С.;
- 2) разработан метод расчета колебаний упругих систем с неинерционными и инерционными О.С. Метод позволяет эффективно решать задачи с большим количеством О.С., жесткость которых на несколько порядков выше жесткости упругой системы. Метод основывается на теории соударения упругих систем, предложенной Тимошенко С.П. и получившей развитие в работах Бидермана В.Л.;
- 3) выявлен характер нестационарного взаимодействия балок и прямоугольных пластин с О.С., выполненными в виде стержней с закругленными концами. Это позволило выработать рекомендации по составлению математических моделей динамического взаимодействия тонкостенных элементов с О.С. большой жесткости;
- 4) на основе предложенных методов разработаны математические модели и методики для расчета кинематической погрешности волновых зубчатых передач с кулачковым и электромагнитным генераторами волн;
- 5) выявлены причины, вызывающие собственную кинематическую погрешность волновой зубчатой передачи. Получена количественная оценка этой погрешности.

Достоверность результатов работы основывается на строгом использовании математического аппарата для расчета рассматриваемых моделей, исследовании сходимости решения, сравнении решений, полученных разными методами, а также сравнением результатов расчетов с экспериментальными данными.

Практическая ценность.

1. Разработанные методы позволяют эффективно решать задачи статического и динамического взаимодействия упругих систем с односторонним контактом звеньев.
2. Предложенные методики расчета волновых зубчатых передач позволяют с высокой достоверностью определять жесткость и точность работы приводов с волной зубчатой передачей без проведения натурных испытаний.
3. Разработанные методы, методики, математические модели волновых зубчатых передач и программное обеспечение дополняют курсы дисциплин «Прикладная механика», «Теория механизмов и машин», «Детали машин».

Реализация работы.

Методы расчета упругих систем с О.С., разработанные в диссертационной работе, используются при решении задач контактной

жесткости в программном комплексе APM StructFEM Prof. Эти методы внедрены на АМО ЗИЛ при расчете контактного взаимодействия мембранных патронов для шлифования отверстия в шестернях коробки передач и раздаточной коробки с заготовками.

Предложенная в работе методика расчета волновых зубчатых передач внедрена в ЦНИИ автоматики и гидравлики для определения жесткости и точности спецгидропривода с волновой зубчатой передачей.

Разработанные в диссертационной работе методы и методики внедрены в учебный процесс Военно-воздушной академии имени Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина.

Апробация работы. Результаты работы докладывались:

- на семинаре кафедры прикладной механики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, 2003 г.

- на IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 22-28 августа 2006);

- на XV симпозиуме «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем», Москва-Звенигород, 2006 г.

- на VI Международной научно-практической конференции «Участие молодых ученых, инженеров и педагогов в разработке и реализации инновационных технологий», Москва, 20-24 ноября, 2006 г.

- на семинаре кафедры прикладной механики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, 2006 г.

Публикации: По теме диссертации опубликовано 20 работ. В том числе 1 монография и 10 публикаций в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав основного текста, приложения, напечатана на 361 страницах, содержит 106 иллюстраций, список литературы состоит из 194 наименований.

Содержание работы. Во введении обосновывается актуальность темы, приводится обзор литературы, формируются цели работы, кратко излагается содержание работы.

В первой главе «Методы расчета упругих систем с односторонними связями» проводится сравнение быстродействия различных методов статического расчета упругих систем с нелинейными односторонними связями. Предлагается новый метод статического расчета. Описываются методы расчета колебаний упругих систем с неинерционными и инерционными односторонними связями.

Для сравнения эффективности различных методов статического расчета нелинейных систем с О.С. рассматривается задача, в которой упругая система является линейной, а О.С. – нелинейными. Математически такая задача в форме метода сил формулируется следующим способом. Определить векторы реакций R и зазоров Δ в О.С., удовлетворяющих условиям:

$$CR + \lambda - \Delta = -\Delta_p ;$$

$$R_i \geq 0, \Delta_i \geq 0, R_i \cdot \Delta_i = 0, i = 1, \dots, L. \quad (2)$$

Здесь: C – матрица податливости упругой системы, освобожденной от О.С. (считается, что упругая система, освобожденная от О.С., является кинематически неизменяемой системой); λ – вектор упругих перемещений в О.С.; Δ_p – вектор зазоров (натягов) между О.С. и упругой системой, освобожденной от О.С. и нагруженной внешними силами; L – количество О.С..

Для расчета системы (2) можно использовать два подхода. В первом случае нелинейные О.С. линеаризуются и используются методы расчета линейных систем с линейными О.С. Во втором случае используются методы нелинейного программирования.

Расчет с помощью первого подхода проводится в следующем порядке:

- 1) нелинейные О.С. заменяются линейными;
- 2) в полученной линеаризованной системе с помощью одного из методов расчета линейных систем с линейными О.С. определяется очередное приближение вектора реакций в связях;
- 3) по найденному вектору реакций уточняются характеристики линеаризованных О.С.;
- 4) расчет заканчивается, если решения на двух последних итерациях совпадают с заданной точностью. В противном случае делается следующая итерация возвратом к пункту 2.

Сравнение методов проводится на примере статического расчета силового взаимодействия элементов волновой зубчатой передачи (рис.1). Общее количество О.С. (точек возможного контакта) между элементами волновой передачи в расчетной схеме принималось равным 1824.

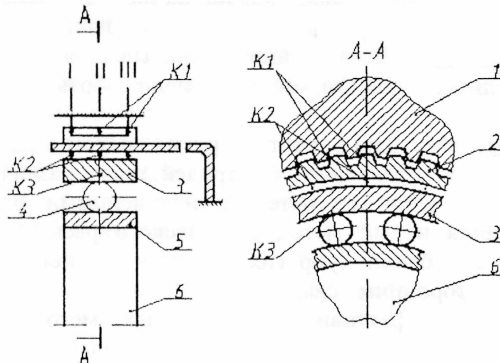


Рис. 1. Расчетная схема волновой передачи чашевидного типа:
1(2) – жесткое (гибкое) колесо; 3(5) – наружное (внутреннее) кольцо гибкого подшипника; 4 – тела качения; 6 – кулачок; I, II, III – расчетные сечения;
к1, к2, к3 – точки возможного контакта

Таблица

Сравнение эффективности методов статического расчета волновой передачи

Метод решения	Относительное время расчета t_i/t_1
1. Метод «попыток» с итерационным уточнением податливостей О.С.	1
2. Шаговый метод с итерационным уточнением податливостей О.С.	5
3. Метод продолжения решения по параметру	11
4. Метод квадратичного программирования, реализующий алгоритм Пауэлла, с итерационным уточнением податливостей О.С.	40
5. Метод штрафа	542
6. Метод проекционного градиента	1910
7. Метод приведенного градиента	1800

Как видно из таблицы, метод «попыток» является наиболее эффективным методом расчета упругих систем с нелинейными О.С. Его преимущество перед шаговым методом объясняется, в первую очередь, тем, что он позволяет делать каждую последующую итерацию, используя в качестве первого приближения зоны контакта, найденные на предыдущих итерациях. Однако при использовании метода «попыток» возможно заикливание решения. Сходимость метода «попыток» остается недоказанной.

Наименьшая эффективность шагового метода последовательных нагружений (см. табл.) связана с тем, что в начале решения нельзя произвольно задавать зоны контакта элементов и, следовательно, каждая последующая итерация не может использовать зоны контакта, полученные на предшествующей итерации.

В данной работе предлагается новый метод расчета линейных упругих систем с О.С., который объединяет в себе положительные качества метода «попыток» и шагового метода. Как и метод «попыток», предлагаемый метод начинается с произвольного задания зоны контакта. После нахождения векторов реакций и зазоров в системе (реакции и зазоры в системе соответствуют заданной зоне контакта) все связи делятся на «правильные» (удовлетворяющие условиям одностороннего контакта) и «ложные» (неудовлетворяющие условиям одностороннего контакта). Далее считается, что упругая система контактирует только с работающими «правильными» связями. Поиск истинной рабочей системы осуществляется путем избавления системы от «ложных» связей с помощью введения восстанавливающих сил. Восстанавливающие силы прикладываются к «ложным» О.С. и упругой системе в точках их возможного контакта. Нагружение системы восстано-

вливающими силами ведется по шагам с использованием процедуры линейного нормирования, предложенной Н.А. Алфутовым и С.С. Клениковым. Восстанавливающие силы увеличиваются от нуля до значения, при котором «ложная» связь перейдет в подмножество «правильных» связей. Расчет заканчивается в момент, когда последняя «ложная» связь перейдет в подмножество «правильных» связей.

В диссертации приведены полный алгоритм предложенного метода и программа для ЭВМ.

В данной работе рассматриваются следующие варианты нагружения упругой системы восстанавливающими силами.

1. Упругая система поочередно нагружается «восстанавливающими» силами. Очередная восстанавливающая сила прикладывается в «ложной» связи с наибольшей отрицательной реакцией. После того как все отрицательные реакции скомпенсированы, восстанавливающие силы поочередно прикладываются в точках с наибольшим отрицательным зазором.

2. Упругая система поочередно нагружается восстанавливающими силами. Очередная восстанавливающая сила прикладывается в точке с наибольшим отрицательным зазором. После того как все «ложные» связи с отрицательными зазорами будут устранены, восстанавливающие силы поочередно прикладываются в «ложных» связях с наибольшей отрицательной реакцией.

3. Упругая система нагружается восстанавливающими силами, приложенными сразу во всех «ложных» связях.

Предложенный метод значительно эффективнее шагового метода последовательных нагружений в случае, когда необходимо проводить большое количество расчетов, в которых зона контакта упругой системы с О.С. меняется незначительно. В отличие от метода «попыток» предложенный метод всегда сходится, т.к. обеспечивает монотонное убывание «ложных» связей.

Математическая модель колебаний линейной упругой системы с инерционными О.С. может быть описана системой уравнений

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^L d_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{R}_i(t); \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{L}}_i \hat{\mathbf{u}}_i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{R}_i(t), \quad i = 1, \dots, L; \quad (4)$$

$$R_i \geq 0; \quad R_i(t) \cdot \Delta_i(t) = 0 \quad i = 1, \dots, L; \quad (5)$$

$$\Delta_i(t) = d_i \cdot w(\mathbf{x}_i, t) + \hat{w}_i(\mathbf{x}, t) + \lambda(t) + \Delta_{0i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, L. \quad (6)$$

В этих уравнениях введены следующие обозначения: $\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{C}\mathbf{u}$; $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – линейные положительно определенные матричные операторы упругой системы; $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{w(\mathbf{x}, t), v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t)\}^T$ – вектор перемещений упругой системы; $\hat{\mathbf{L}}_i$ – линейный оператор i -ой связи;

$\hat{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t) = \{\hat{w}_i(\mathbf{x}, t), \hat{v}_{1i}(\mathbf{x}, t), \hat{v}_{2i}(\mathbf{x}, t)\}^T$ – вектор перемещений i -ой связи; $w(\mathbf{x}, t)$ – нормальные к поверхности перемещения упругой системы; $v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t)$ – перемещения упругой системы в плоскости перпендикулярной w ; $\hat{w}_i(\mathbf{x}, t)$ – нормальные к поверхности упругой системы перемещения i -ой связи (положительное направление $\hat{w}_i(\mathbf{x}, t)$ совпадает с направлением, в котором связь ограничивает перемещение упругой системы); $\hat{v}_{1i}(\mathbf{x}, t), \hat{v}_{2i}(\mathbf{x}, t)$ – перемещения i -ой связи в плоскости перпендикулярной $\hat{w}_i$; $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \{p_w(\mathbf{x}, t), p_{v1}(\mathbf{x}, t), p_{v2}(\mathbf{x}, t)\}^T$ – вектор внешней нагрузки; L – количество О.С.; $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ – функция Дирака; Δ_{0i} – зазор между i -ой связью и упругой системой в недеформированном состоянии; $\mathbf{R}_i(t) = \{R_i(t), 0, 0\}^T$; $\Delta_i(t), R_i(t)$ – функции зазора и реакции в i -ой связи; $\mathbf{x}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ – вектор, определяющий положение точки контакта упругой системы и i -ой односторонней связи; $d_i = -1$, если связь ограничивает перемещение упругой системы в положительном направлении действия внешней нагрузки $p_w(\mathbf{x}, t)$, в противном случае $d_i = 1$; $\lambda_i(t)$ – местное не инерционное перемещение в точке контакта упругой системы и i -ой связи.

В данной работе О.С. представляются стержнями с закругленными концами. Полное перемещение в О.С. складывается из инерционных перемещений $\hat{\mathbf{u}}_i$, определяемых одномерной теорией распределения упругих волн в стержнях, и местных неинерционных перемещений $\lambda_i(t)$, вычисляемых по формуле Герца. Линейный дифференциальный оператор таких О.С. имеет вид

$$\hat{\mathbf{L}}_i \hat{\mathbf{u}}_i = \{\hat{m}_i \frac{\partial^2 \hat{w}_i}{\partial t^2} - \hat{E}_i \hat{S}_i \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial x^2}, 0, 0\}^T, \quad (7)$$

где $\hat{m}_i, \hat{S}_i, \hat{E}_i$ – погонная масса, площадь поперечного сечения и модуль упругости i -ой О.С.

Уравнения (3)–(4) являются системой интегральных уравнений. Их решения можно представить в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^L d_i \int_0^t R_i(\tau) \mathbf{u}_{Gi}(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau; \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}_{0i}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t R_i(\tau) \hat{\mathbf{u}}_{Gi}(\mathbf{x}_i, t - \tau) d\tau.$$

В этих уравнениях введены следующие обозначения: $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ – решение однородного уравнения $\mathbf{L}\mathbf{u}_0 = 0$ с граничными и начальными условиями исходной задачи; $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t)$ – решение уравнения $\mathbf{L}\mathbf{u}_p = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ с граничными условиями исходной задачи и нулевыми начальными условиями; $\mathbf{u}_{Gi}(\mathbf{x}, t - \tau) = \{w_{Gi}, v_{1Gi}, v_{2Gi}\}^T$ – фундаментальное решение задачи Коши (функция Грина) от нормальной нагрузки, которое при $t > \tau \geq 0$ удовлетворяет

однородному уравнению $\mathbf{L}\mathbf{u}_{Gi} = 0$ с граничными условиями исходной задачи и полуоднородными начальными условиями вида $\mathbf{u}_{Gi} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{u}_{Gi}}{\partial t} = \delta_i$, при $t = \tau$, где $\delta_i = \{\delta_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), 0, 0\}^T$; $\hat{\mathbf{u}}_{0i}(\mathbf{x}, t)$ – решение однородного уравнения $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{u}}_{0i} = 0$ с граничными и начальными условиями исходной задачи; $\hat{\mathbf{u}}_{Gi}(\mathbf{x}, t - \tau) = \{\hat{\mathbf{w}}_{Gi}, 0, 0\}^T$ – функция Грина для i -ой связи.

В работе предлагается реакции в О.С. разлагать в ряд $R(\tau) = \sum_{\alpha=0}^m r_{\alpha} f_{\alpha}(\tau)$, где $f_{\alpha}(\tau)$ – финитные функции. В нашем случае применялись кусочно-линейные и кусочно-квадратичные финитные функции. Используя это разложение и выражения (3)–(6), получим следующую систему уравнений для момента времени $t_{\alpha} = \alpha \cdot \Delta t$:

$$(\mathbf{V} + \mathbf{Z} + \mathbf{\Lambda}^{\alpha})\mathbf{r}^{\alpha} - \Delta^{\alpha} = \mathbf{d}^{\alpha}; \quad (9)$$

$$R_i^{\alpha} \geq 0; \Delta_i^{\alpha} \geq 0; R_i^{\alpha} \cdot \Delta_i^{\alpha} = 0, \quad i=1, \dots, L, \quad (10)$$

где $\mathbf{d}^{\alpha} = -(\Delta_0 + \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} [\mathbf{K}^{\alpha\beta} + \mathbf{S}^{\alpha\beta}])\mathbf{r}^{\beta} + \mathbf{D}(\mathbf{w}_0^{\alpha} + \mathbf{w}_p^{\alpha}) + \hat{\mathbf{w}}_0^{\alpha}$; $\mathbf{K}^{\alpha\beta}$ – матрицы размерности $L \times L$, элементы которых определяются по формуле $K_{ij}^{\alpha\beta} =$

$d_i d_j \int_{t_{\beta-1}}^{t_{\beta+1}} f_{\beta}(\tau) w_{Gj}(\tau) d\tau$, $\mathbf{\Lambda}^{\alpha}$ – диагональная матрица, элементы

которой определяются по формуле $\delta_i^{\alpha} = \lambda_i^{\alpha} / R_i^{\alpha}$; $\mathbf{r}^{\alpha} = \{R_1^{\alpha}, \dots, R_L^{\alpha}\}^T$ – вектор реакций в О.С. в момент времени t_{α} ; Δ^{α} – вектор зазоров между упругой системой и односторонними связями в момент времени t_{α} ; $\mathbf{V} = \mathbf{K}^{\alpha\beta}|_{\alpha=\beta}$

$(V_{ij} = d_i d_j \int_{t_{\alpha-1}}^{t_{\alpha}} f_{\alpha}(\tau) w_{Gj}(\tau) d\tau)$; $\mathbf{D}$ – диагональная матрица,

элементами которой являются параметры d_i ; $\mathbf{w}_0^{\alpha} = \{w_0(\mathbf{x}_1, t_{\alpha}), \dots, w_0(\mathbf{x}_i, t_{\alpha}), \dots, w_0(\mathbf{x}_L, t_{\alpha})\}^T$ – вектор нормальных составляющих решений однородного

уравнения $\mathbf{L}\mathbf{u}_0 = 0$ в точках контакта упругой системы с О.С. в момент времени t_{α} ; $\mathbf{w}_p^{\alpha} = \{w_p(\mathbf{x}_1, t_{\alpha}), \dots, w_p(\mathbf{x}_i, t_{\alpha}), \dots, w_p(\mathbf{x}_L, t_{\alpha})\}^T$ – вектор

нормальных составляющих решений неоднородного уравнения $\mathbf{L}\mathbf{u}_p =$

$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ в точках контакта упругой системы с односторонними связями в момент времени t_{α} ; Δ_0 – вектор зазоров между недеформированной упругой

системой и О.С.; $\hat{\mathbf{w}}_0^{\alpha}$ – вектор нормальных составляющих решений однородных уравнений $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{u}}_{0i} = 0$ для О.С. в точках контакта О.С. и упругой

системы в момент времени t_{α} ; $\mathbf{S}^{\alpha\beta}$ – диагональные матрицы, элементы

которых определяются по формуле $S_{ii}^{\alpha\beta} = \int_{t_{\beta-1}}^{t_{\beta+1}} f_{\beta}(\tau) \hat{w}_{Gi}(\tau) d\tau$; $\mathbf{Z}$ –

диагональная матрица, элементы которой определяются по формуле $Z_{ii} = S_{ii}^{\alpha\alpha} = \int_{t_{\alpha-1}}^{t_{\alpha}} f_{\alpha}(\tau) \hat{w}_{Gi}(\tau) d\tau$.

Система (9)–(10) разрешима относительно векторов реакций $\mathbf{r}^{\alpha}$ и зазоров Δ^{α} , если известны векторы реакций $\mathbf{r}^{\beta}$ ($\beta = 0, 1, \dots, \alpha - 1$). Поэтому векторы $\mathbf{r}^{\alpha}$ и Δ^{α} определяются последовательно для $\alpha = 1, 2, \dots, m$. Векторы реакций и зазоров в начальный момент времени $\mathbf{r}^0$ и Δ^0 определяются из статического расчета в начальный момент времени.

Система (9)–(10) аналогична системе (2), поэтому ее можно решать методами, применяемыми для статического расчета упругих тел с О.С.

Если число узловых точек по времени (m) очень большое, то расчет будет невозможен из-за недопустимо большого объема памяти, необходимого для хранения матриц $K^{\alpha\beta}$. В связи с этим промежутки времени, на котором ищется решение, разбивается на интервалы. Переход от одного интервала к другому сопровождается переходом к новому отсчету времени. Каждый интервал начинается с времени $t_0 = 0$. При переходе от одного интервала времени к другому матрицы $K^{\alpha\beta}$ не изменяются.

При переходе на новый отсчет времени в конце каждого интервала необходимо пересчитывать решения w_0^α и $\hat{w}_{0i}^\alpha$. Выбор длины временного интервала осуществляется из условия обеспечения минимального времени расчета при допустимом для компьютера объеме оперативной памяти для хранения матриц влияния.

Предложенный метод позволил эффективно решать задачи колебаний упругих систем с О.С. высокой жесткости на большом промежутке времени. Метод основывается на теории соударения упругих систем, учитывающей местные деформации, предложенной Тимошенко С.П. и получившей развитие в работах Бидермана В.Л.

Во второй главе «Изгибные колебания балок с односторонними связями» исследуются колебания балок с О.С. с помощью метода, разработанного в первой главе. Изучена сходимость получаемого решения. Приводится сравнение расчетов с экспериментальными данными. Описана методика расчета, учитывающая инерцию вращения сечений балки и деформацию поперечного сдвига. Проводится анализ влияния этих факторов на реакции в О.С. и перемещения точек балки.

Дифференциальный оператор изгибных колебаний тонкой балки с учетом диссипации имеет вид

$$Lw = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(w + \beta \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] + \alpha m \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (11)$$

где EI, m – изгибная жесткость и погонная масса балки; α, β – параметры демпфирования.

Оператор (11) описывает упруго-вязкую модель демпфирования. Такая модель предполагает зависимость поглощающих свойств балки от частоты процесса ω_b . Однако экспериментально установлено, что рассеяние энергии не зависит от ω_b . Поэтому в расчетах обычно применяют эквивалентную упруго-вязкую модель, поглощающие свойства которой соответствуют реальному объекту. С этой целью вводится линеаризованный параметр диссипации $\beta = \psi / (2\pi\omega_b)$, где ψ – приведенный коэффициент поглощения, зависящий от материала, амплитуды и формы относительной деформации.

Эквивалентную упруго-вязкую модель можно применять при гармонических колебаниях.

При свободных колебаниях балки с О.С. возбуждаются полигармонические колебания с частотами, равными собственным частотам колебаний балки. Упруго-вязкую модель для таких колебаний использовать нельзя.

Введем следующие допущения: 1) динамическая модель колебаний балки квазилинейна, т.е. нелинейные факторы, связанные с диссипативными силами, пренебрежимо мало влияют на собственные формы колебаний; 2) диссипативные связи между собственными формами колебаний балки отсутствуют, т.е. не происходит перекачки энергии между различными собственными формами колебаний, обусловленной нелинейными диссипативными силами.

В этом случае для принятого уровня идеализации диссипативных свойств упругой системы для каждой собственной формы колебаний можно применить эквивалентную упруго-вязкую модель демпфирования.

Используя такую модель, можно получить линеаризованные параметры диссипации для каждой собственной формы. Для свободных колебаний $\beta_i = \psi_i / (2\pi\omega_i)$, где i – номер собственной формы колебаний. При установившихся вынужденных колебаниях $\beta_i = \psi_i / (2\pi\omega_b)$.

Методы, основанные на разложении решения по собственным формам колебаний, позволяют их применять при различных законах внутреннего трения (см. Бидерман В.Л., «Теория механических колебаний»). Для этого необходимо на основе экспериментальных данных задавать коэффициенты демпфирования каждой собственной формы колебаний. В данной работе параметры диссипации каждой гармонике определялись по формуле

$$\beta_i = \frac{\psi}{2\pi\omega_i^{2-s}\omega_b^{s-1}}, \quad (12)$$

где ψ , s – коэффициенты, которые уточняются экспериментально.

Такое представление параметров β_i дает лучшее совпадение результатов расчета с экспериментом. Если рассматриваются свободные колебания балки с О.С., то значение коэффициента s должно быть близко к единице. При установившихся вынужденных колебаниях балки с О.С. значение коэффициента s близко к двум.

Формула (12) используется при определении функций влияния $u_0(x, t)$, $u_p(x, t)$ и $u_{Gi}(x, t - \tau)$ для балки методом разложения решения по собственным формам колебаний.

В работе численно и экспериментально исследовались свободные колебания стальной балки с одной О.С. Параметры балки: $l = 0,27$ м; $b = 0,02$ м; $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м. Один конец балки заделан, а другой – свободен. Расстояние от заделки до О.С. $l_1 = 0,08$ м. О.С. представляет собой круглый стержень диаметром 0,01 м и длиной 0,035 м. Стержень на конце закруглен сферической поверхностью. Зазор между О.С. и недеформированной балкой $\Delta_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Начальное перемещение свободного конца балки принималось равным $w_0(l) = 0,03$ м. Это перемещение создавалось силой, приложенной к свободному концу балки.

По результатам расчетов и эксперимента процесс взаимодействия балки с О.С. происходит следующим образом. После того как балка подходит к О.С., происходит многократное касание и отрыв балки от О.С. с очень малым временем отрыва (дребезг). Такие отрывы будем называть кратковременными. Затем балка отходит от связи на время значительно большее, чем время кратковременных отрывов. Время, в течение которого происходит контакт балки и О.С. с множеством кратковременных отрывов в дальнейшем, будем называть временем взаимодействия. В процессе свободных колебаний происходит более 12 взаимодействий рассматриваемой балки с О.С. (рис. 2). В расчетах и эксперименте фиксировались кратковременные отрывы с временем отрыва $t_0 > 10^{-4}$ с.

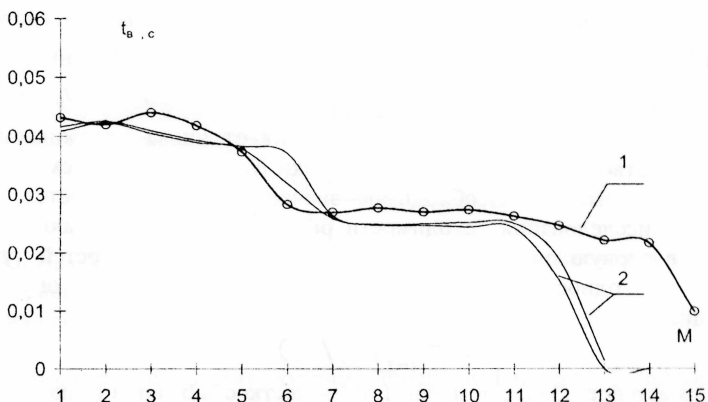


Рис. 2. Зависимость времени взаимодействия t_B от номера взаимодействия: 1 – расчет ($s = 1,15$, $\psi = \text{const} = 0,02$); 2 – нижняя и верхняя границы доверительного интервала ($p=95\%$) экспериментальной зависимости

На рис. 3 представлена расчетная зависимость числа кратковременных отрывов N_0 от параметра s . На рис. 4. представлены результаты экспериментальных исследований. Результаты приведены для первого взаимодействия балки с О.С.

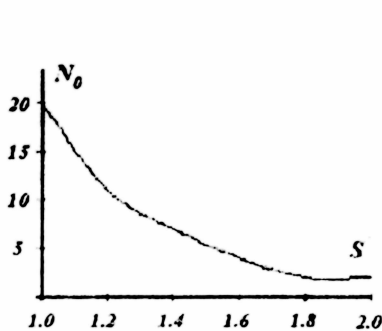


Рис.3. Расчетная зависимость числа кратковременных отрывов N_0 от параметра s ($\psi_i = 0,02$)

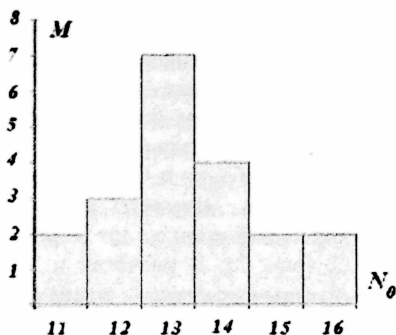


Рис. 4. Экспериментальная гистограмма: M – количество испытаний, в которых наблюдалось N_0 отрывов

Точность получаемого решения зависит от числа удерживаемых в решении собственных форм колебаний балки N и интервала времени между узловыми точками Δt . Необходимое значение N определяется путем численного исследования сходимости решения. Как показывают расчеты, выбор N в первую очередь зависит от соотношения жесткостей упругой системы и односторонних связей. Это соотношение оценивается коэффициентом

$$K = \max_{i=1,L} (k_i^c / k_i^b), \quad (13)$$

где k_i^c – жесткость О.С. с номером i ; k_i^b – жесткость балки в точке под О.С. с номером i .

Точность расчета определялась по силе взаимодействия балки с О.С. $R_N(t)$. Сходимость функционального ряда $R_N(t)$ оценивалась коэффициентом

$$\varepsilon_N = \frac{\int_0^T |R_N(t) - R_{N-1}(t)| dt}{\int_0^T |R_N(t)| dt} \cdot 100\%, \quad (14)$$

где $R_N(t)$, $R_{N-1}(t)$ – реакции в О.С., которые определялись при учете в решении N и $N-1$ членов ряда соответственно, T – время первого взаимодействия балки с О.С.

На рис. 5 представлена зависимость $\varepsilon_N(N)$ для различных значений коэффициента K .

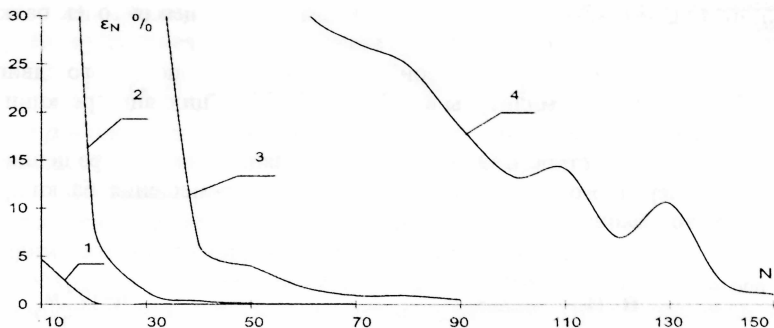


Рис. 5. Сходимость решения в зависимости от числа удерживаемых в решении членов ряда N : 1 – $K=10^2$; 2 – $K=10^3$; 3 – $K=10^4$; 4 – $K=10^5$

Относительная точность определения реакции в односторонней связи оценивалась также параметром

$$\varepsilon_t = \frac{\int_0^T |R_1(t) - R_{0,5}(t)| dt}{\int_0^T |R_1(t)| dt} \cdot 100\%, \quad (15)$$

где $R_1(t)$, $R_{0,5}(t)$ – реакции в О.С., определяемые при шаге между узловыми точками, равном Δt и $0,5\Delta t$ соответственно.

Анализируя точность определения $R(t)$, можно сделать следующие выводы:

1) если в расчете использовать кусочно-линейные финитные функции, то для обеспечения точности около 3 % шаг Δt можно определять по формуле

$$\Delta t = \frac{2\pi}{12\omega_{max}}, \quad (16)$$

где ω_{max} – максимальная собственная частота, используемая в решении;

2) расчет, в котором используются кусочно-постоянные финитные функции, даст точность около 3 %, если

$$\Delta t = \frac{2\pi}{150\omega_{max}}. \quad (17)$$

Балка с жесткими О.С. при колебаниях подвержена импульсным нагрузкам. В связи с этим было исследовано влияние деформации поперечного сдвига и инерции вращения сечений балки на ее колебания и реакции в О.С. В качестве уравнений, описывающих колебания балки, использовались уравнения С.П. Тимошенко.

По результатам расчетов можно сделать следующие выводы:

1. Если жесткость О.С. на несколько порядков выше жесткости балки, то при её свободных колебаниях инерция вращения сечений и деформация

поперечного сдвига влияют на реакции в О.С. и перемещения точек балки даже при малых значениях h/l .

2. Учет инерции вращения сечений и деформации поперечного сдвига приводит к уменьшению амплитуды высокочастотных осцилляций реакции в О.С.(рис. 6).

3. Увеличение жесткости О.С. повышает влияние инерции вращения и деформации поперечного сдвига на реакции в О.С. и перемещения балки при её свободных колебаниях.

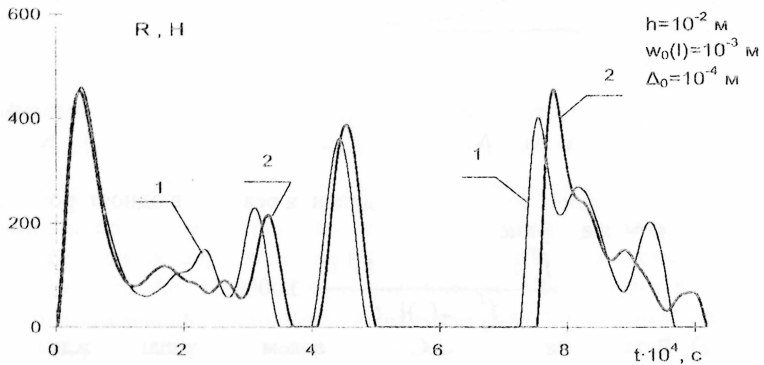


Рис. 6. Влияние инерции вращения сечений балки и деформации поперечного сдвига на реакцию в О.С.: 1 (2) – расчет без учета (с учетом) инерции вращения сечений и деформации поперечного сдвига

В главе также рассмотрены вынужденные колебания балки с пятью О.С.

Во третьей главе «Изгибные колебания прямоугольных пластин с односторонними связями» рассматриваются свободные и вынужденные колебания прямоугольных пластин с О.С. методом, изложенным в первой главе. Исследуется сходимость решения. Даны рекомендации по выбору метода расчета собственных форм и частот прямоугольных пластин для динамических задач с О.С. повышенной жесткости. Приведены методики расчета собственных форм колебаний прямоугольных пластин, учитывающие деформацию поперечного сдвига и инерцию вращения сечений пластины. Методики основаны на применении метода последовательных приближений и метода Ритца. На основе численных исследований проведен анализ влияния деформации поперечного сдвига и инерции вращения сечений на свободные колебания пластины с О.С. Полученные решения сравниваются с экспериментальными исследованиями.

Дифференциальный оператор изгибных колебаний тонких пластин с учетом упруго-вязкой диссипации представляется в виде

$$L(w(x, t)) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta D \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \nabla^2 w) + \alpha \rho h \frac{\partial w}{\partial t} + D \nabla^2 \nabla^2 w, \quad (18)$$

где ρ – плотность материала пластины; h – толщина пластины; D – изгибная жесткость пластины; α, β – параметры демпфирования.

Методы расчета колебаний упругих систем, основанные на разложении решения по собственным формам колебаний, позволяют их применять при различных законах внутреннего и внешнего трения. Для этого необходимо на основе экспериментальных данных задавать коэффициенты демпфирования собственных форм колебаний. При вычислении функций влияния пластины внутреннее трение учитывалось с помощью коэффициентов диссипации, определяемых по формуле (12).

Для анализа сходимости решения рассматривались свободные колебания стальной прямоугольной пластины с О.С. Размеры пластины: $a = 0,195$ м; $b = 0,15$ м. На вертикальных границах у пластины реализуются условия шарнирного опирания. Горизонтальные границы свободны. О.С. расположена посередине пластины и представляет собой цилиндрический стержень диаметром 0,01 м и длиной 0,036 м.

При свободных колебаниях пластина неоднократно взаимодействует с О.С. Ниже исследуется точность определения реакции О.С. при ее первом контакте с пластиной.

На рис. 7 показано влияние числа собственных форм колебаний пластины, учитываемых в решении (N), на реакцию О.С. Расчеты проводились для пластины толщиной $h = 1,25 \cdot 10^{-3}$ м. Зазор между О.С. и недеформированной пластиной $\Delta_0 = 10^{-4}$ м. Начальная деформация пластины обеспечивалась сосредоточенной силой, приложенной посередине пластины. При этом начальное перемещение точки приложения силы $w_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ м.

Анализируя рис. 7 можно отметить следующее. При числе форм $N \leq 100$ реакция вычисляется неверно. При удерживании в решении 400 собственных форм колебаний реакция имеет высокочастотную составляющую, которая не соответствует действительности. Эти высокочастотные колебания нагрузки уменьшаются с увеличением N . При $N = 800$ эти колебания незначительны и имеют место только в начале удара пластины об О.С.

Выбор числа N в зависимости от отношения h/a можно осуществлять по рис. 8. На этом рисунке представлена зависимость числа удерживаемых в решении собственных форм N от отношения h/a . Определение N по рис. 8 обеспечивает точность вычисления реакции в О.С. 1%.

1293483

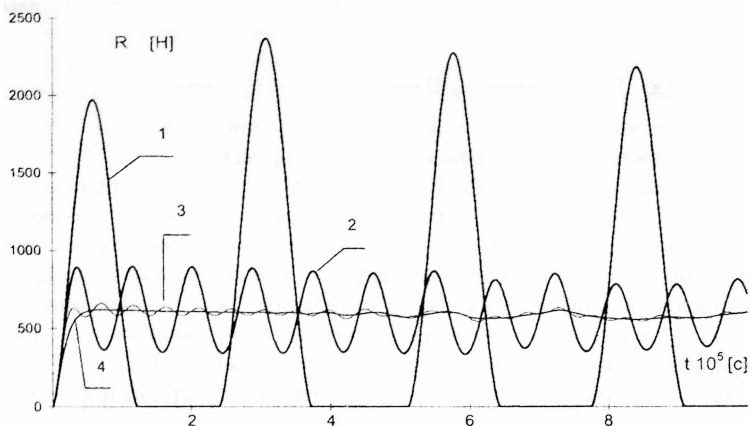


Рис. 7. Реакция в О.С. в начале первого взаимодействия:
1 – $N = 100$; 2 – $N = 400$; 3 – $N = 800$; 4 – $N = 3600$

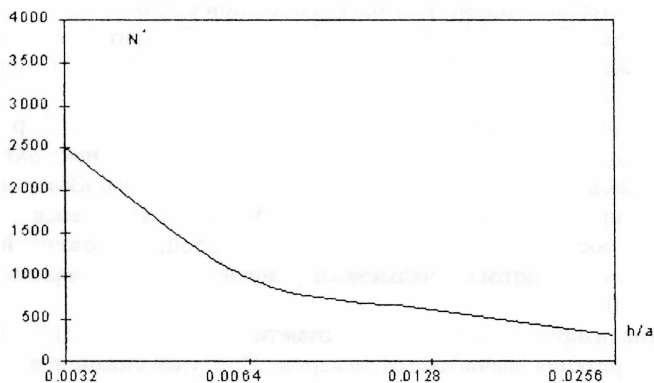


Рис. 8. Зависимость числа учитываемых в решении собственных форм от отношения h/a (точность определения реакции в О.С. 1%.)

Следует отметить, что задача определения перемещений в пластине при ее взаимодействии с О.С. требует учета значительно меньшего числа собственных форм, чем задача определения реакций в О.С.

Экспериментальные исследования проводились для стальной пластины размерами $a = 0,195$ м, $b = 0,148$ м, $h = 6 \cdot 10^{-4}$ м. Одна сторона с координатой $x = 0$ и размером a жестко заделана, остальные – свободны. В процессе испытаний пластина совершала свободные колебания. Движение пластины ограничивалось О.С., которая представляет собой цилиндрический

стержень диаметром 0,01 м и длиной 0,036 м. Стержень на конце закруглен сферической поверхностью. Начальная деформация создавалась сосредоточенной силой, приложенной в точке с координатами $x = 0,195$ м, $y = 0,074$ м. Начальное перемещение точки приложения силы $w_0 = 18 \cdot 10^{-3}$ м. Эксперименты проводились для различных зазоров ($\Delta_0 > 0$) и натягов ($\Delta_0 < 0$) между недеформированной пластиной и О.С.

По результатам экспериментов были построены графики зависимости времени взаимодействия пластины с О.С. от номера взаимодействия (рис. 9). Доверительный интервал экспериментальной зависимости вычислялся по критерию Стьюдента с вероятностью 95%.

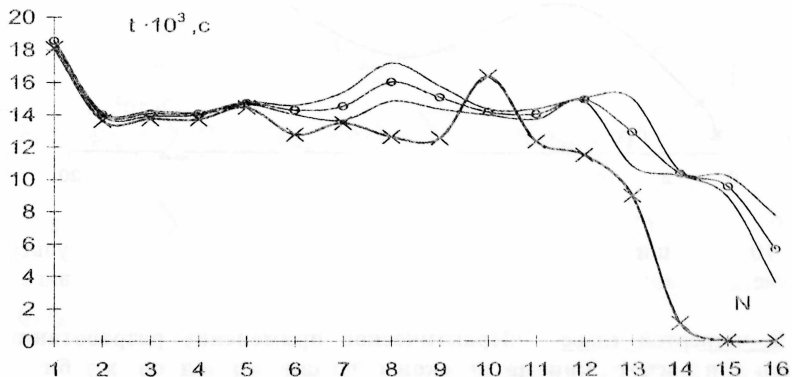


Рис. 9. Зависимость времени взаимодействия пластины с О.С. от номера взаимодействия N ($\Delta_0 = 10^{-3}$ м, $x_{oc} = 8 \cdot 10^{-2}$ м, $y_{oc} = 7,4 \cdot 10^{-2}$ м):

— $\times$ — расчетная зависимость; — — нижняя и верхняя границы доверительного интервала экспериментальной зависимости; — $\circ$ — математическое ожидание экспериментальной зависимости

При исследовании влияния инерции вращения и деформации поперечного сдвига на свободные колебания пластины и реакции в О.С. использовались уравнения, приведенные в работах Григолюка Э.И., Селезова И.Т. и Сагомояна А.Я. На рис. 10 представлено влияние этих факторов на реакцию в О.С. при различных значениях толщины пластины h (параметры системы указаны выше). Зазор между О.С. и недеформированной пластиной $\Delta_0 = 10^{-5}$ м. Начальная деформация пластины обеспечивалась силой, приложенной посередине пластины. Начальное перемещение точки приложения силы $w_0 = 10^{-3}$ м.

Как и следовало ожидать, с увеличением толщины пластины погрешность определения реакции О.С. увеличивается. Однако с увеличением толщины пластины от 5 до 10 мм погрешность уменьшается. Такое уменьшение погрешности можно объяснить следующим образом. С

увеличением толщины пластины высокочастотные составляющие реакции О.С. уменьшаются. При толщине $h = 10^{-2}$ м они практически отсутствуют. Исчезновение высокочастотных составляющих реакции сопровождается уменьшением влияния инерции вращения сечений и деформации поперечного сдвига на решение.

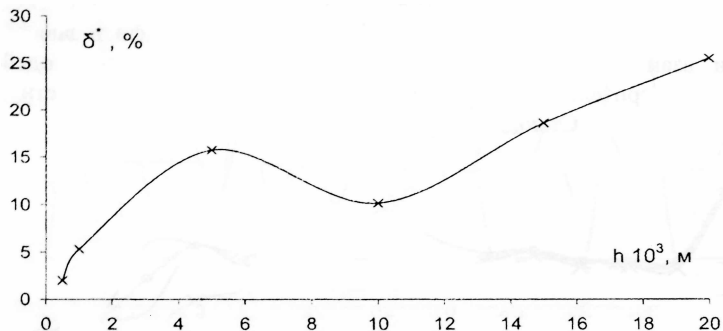


Рис. 10. Погрешность определения реакции в О.С., полученная в результате неучета инерции вращения сечений и деформации поперечного сдвига

В четвертой главе «Практическое применение разработанных методов для расчета кинематической погрешности волновых зубчатых передач как упругих систем с односторонними связями» предлагаются методики расчета кинематической погрешности (КП) волновых зубчатых передач (ВЗП) с кулачковым и электромагнитным генераторами волн. Численно исследуется кинематическая погрешность этих передач.

Расчет КП ВЗП с кулачковым генератором основан на расчете силового взаимодействия элементов ВЗП. Применяемая методика учитывает: возможность контакта каждой пары зубьев в двух зонах зацепления; возможность двухкромочного контакта зубьев; изменение положения точек контакта зубьев по их высоте; эвольвентный характер профиля зубьев; смещение положения кулачка и гибкого колеса относительно своих осей вращения; изгибные деформации валов гибкого колеса и кулачка.

Расчетная схема ВЗП представлена на рис. 1. Полное силовое взаимодействие упругих элементов ВЗП определяется вектором реакций

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{P}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^*\}^T, \quad (18)$$

где $\mathbf{P}$ – вектор сил взаимодействия тел качения с наружным кольцом гибкого подшипника; $\mathbf{F}$ – вектор сил взаимодействия наружного кольца гибкого подшипника с гибким колесом; $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^*$ – векторы сил взаимодействия зубьев гибкого и жесткого колес по рабочей и нерабочей кромкам, соответственно.

Разрешающая система уравнений для определения сил взаимодействия звеньев ВЗП, упругих смещений элементов ВЗП и зазоров в передаче представляется в виде

$$\Delta - \mathbf{C}\mathbf{R} - \lambda(\mathbf{R}) - \Delta^0(\Theta_G^H) - \mathbf{A}\mathbf{X} = 0; \quad (20)$$

$$R_i \geq 0, \quad \Delta_i \geq 0, \quad R_i \cdot \Delta_i = 0, \quad i = 1, \dots, L; \quad (21)$$

$$Q_k = 0 \text{ и } Q_k^* = 0, \text{ если } h_k < 0, \quad k = 1, \dots, Z_G; \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^N P_i \cos \varphi_{P_i} - c_k \Delta X_1 = 0; \quad - \sum_{i=1}^N P_i \sin \varphi_{P_i} + c_k \Delta Y_1 = 0; \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^N P_i \cos \varphi_{P_i} - \sum_{n=1}^{Z_G} F_n \cos \varphi_{F_n} = 0; \quad \sum_{i=1}^N P_i \sin \varphi_{P_i} - \sum_{n=1}^{Z_G} F_n \sin \varphi_{F_n} = 0; \quad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{Z_G} F_n \cos \varphi_{F_n} - \sum_{k=1}^{Z_G} Q_k \sin(\varphi_{G_k} - \alpha_k) - \sum_{k=1}^{Z_G} Q_k^* \sin(\varphi_{G_k} + \alpha_k^*) - c \Delta X_3 = 0 \quad (25)$$

$$\sum_{n=1}^{Z_G} F_n \sin \varphi_{F_n} - \sum_{k=1}^{Z_G} Q_k \cos(\varphi_{G_k} - \alpha_k) + \sum_{k=1}^{Z_G} Q_k^* \cos(\varphi_{G_k} + \alpha_k^*) - c \Delta Y_3 = 0 \quad (26)$$

$$\sum_{k=1}^{Z_G} Q_k r_k \cos \alpha_k - \sum_{k=1}^{Z_G} Q_k^* r_k^* \cos \alpha_k^* = M_B, \quad (27)$$

где $\mathbf{C}$ – матрица податливости ВЗП; Δ – вектор зазоров в ВЗП; $\mathbf{R}$ – вектор реакций в ВЗП; $\lambda(\mathbf{R}) = \{\lambda_P, 0, \lambda_Q, \lambda_Q^*\}^T$ – полный вектор контактных (местных) податливостей между элементами ВЗП; $\Delta^0(\Theta_G^H)$ – вектор зазоров (натягов) между недеформированными звеньями ВЗП; $\mathbf{X} = \{\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta X_2, \Delta Y_2, \Delta X_3, \Delta Y_3, \Theta_B^H\}$ – вектор смещений кулачка ($\Delta X_1, \Delta Y_1$), наружного кольца гибкого подшипника ($\Delta X_2, \Delta Y_2$), гибкого колеса ($\Delta X_3, \Delta Y_3$) относительно центра жесткого колеса и поворота жесткого колеса относительно кулачка (Θ_B^H); $\mathbf{A}$ – матрица, учитывающая влияние вектора $\mathbf{X}$ на зазоры между звеньями ВЗП; c_k – жесткость опоры кулачка; c – жесткость опоры гибкого колеса; M_B – момент на выходном валу; Θ_G^H – угол поворота гибкого колеса относительно кулачка; r_k, r_k^* – радиусы, на которых происходит контакт k -ой пары зубьев жесткого и гибкого колес по рабочей и нерабочей кромкам; α_k, α_k^* – профильные углы жесткого колеса на радиусах r_k, r_k^* ; $\varphi_{P_i}, \varphi_{F_n}, \varphi_{G_k}$ – угловые координаты точек возможного контакта звеньев передачи; N – число тел качения гибкого подшипника; Z_G – число зубьев гибкого колеса; L – общее число точек возможного контакта.

Уравнения (20–21) описывают волновую передачу как упругую систему с односторонними связями.

Выражение (22) отражает невозможность контакта зубьев, если нет захода зубьев ($h_k(w_k) < 0$), где w_k – радиальное перемещение k -го зуба гибкого колеса.

Уравнения (23–27) отражают условия равновесия кулачка, наружного кольца гибкого подшипника и гибкого колеса.

Зазоры по рабочей кромке между зубьями определяются на различных радиусах. На одном из радиусов зазор между k -ым зубом гибкого колеса и зубом жесткого колеса минимален. В дальнейшем считается, что на этом радиусе происходит контакт между двумя рассматриваемыми зубьями. Полученный таким путем радиус взаимодействия зубьев гибкого и жесткого колес по рабочей кромке в дальнейшем обозначается r_k . Аналогично определяются радиусы контакта зубьев по нерабочим кромкам зубьев r_k^* .

При определении КП ВЗП необходимо вычислять углы поворота выходного вала (ГК) при заданных углах поворота входного вала (кулачка). Эти углы определяются с помощью силового расчета, который выполняется при неподвижном кулачке. В этом случае зона зацепления при повороте звеньев ВЗП относительно кулачка меняется незначительно.

Порядок решения задачи следующий:

1. Задается угол поворота гибкого колеса Θ_G^H ;
2. Задается нулевое приближение величин $r_k, r_k^*, \alpha_k, \alpha_k^*, w_k$ ($k = 1, \dots, Z_G$) и вектора λ ;
3. Из системы (20 – 27) исключаются уравнения, отражающие совместность перемещений зубьев, в которых заход отсутствует;
4. Считая величины $r_k, r_k^*, \alpha_k, \alpha_k^*, w_k$ ($k = 1, \dots, Z_G$) постоянными, из сокращенной системы (20 – 27) определяется вектор неизвестных реакций $\mathbf{R}$, смещений $\mathbf{X}$ и зазоров Δ . Эта задача решается предложенным в первой главе методом, основанном на введении восстанавливающих сил;
5. Определяется новое приближение $r_k, r_k^*, \alpha_k, \alpha_k^*, w_k$ ($k = 1, \dots, Z_G$) и вектора λ ;
6. Итерационный процесс заканчивается, когда значения векторов неизвестных величин $\mathbf{R}$ и $\mathbf{X}$ с заданной точностью совпадают с их значениями на предыдущей итерации. В противном случае итерационный процесс повторяется с пункта 3.

Углы поворота гибкого и жесткого колес, полученные в результате силового расчета, обозначены с верхним индексом Н, который означает неподвижное звено. Углы поворота входного (кулачка) и выходного (ГК) звеньев относительно неподвижного звена (ЖК) определяются по формулам:

$$\Theta_G^B = \Theta_G^H - \Theta_B^H; \quad \Theta_H^B = -\Theta_B^H, \quad (28)$$

где Θ_B^H – угол поворота жесткого колеса относительно кулачка (определяется из силового расчета ВЗП); Θ_G^H – угол поворота гибкого колеса относительно кулачка (задается при силовом расчете).

Кинематическая погрешность определяется по формуле

$$F_{knn} = R_G \left(\Theta_G^B - \frac{\Theta_H^B}{\bar{U}} \right), \quad (29)$$

где R_G – радиус делительной окружности ведомого колеса (ГК); Θ_G^B – действительный угол поворота ведомого колеса; Θ_H^B – действительный угол поворота входного вала; $\bar{U}$ – среднее передаточное отношение ВЗП.

В данной работе выявлены две причины собственной КП ВЗП: – незвольвентный характер зацепления, обусловленный деформацией основной окружности гибкого колеса и кромочным контактом зубьев; – изменение деформации гибкого колеса из-за перекатывания тел качения гибкого подшипника относительно большой оси кулачка.

Как показывают расчеты, для ВЗП-80 с четным числом зубьев наибольшая собственная кинематическая погрешность передачи, вызванная незвольвентным характером зацепления, $F'_{ior} = 0,03 \div 0,01$ мкм. Для передачи с нечетным числом зубьев $F'_{ior} = 0,006 \div 0,001$ мкм. Колебания передаточного отношения ВЗП-80, вызванные незвольвентным характером зацепления, не превышают 1,5 % для передачи с четным числом зубьев и 0,75 % для передачи с нечетным числом зубьев.

Наибольшая кинематическая погрешность, вызванная перекатыванием тел качения, в зависимости от момента на выходном валу меняется в пределах $F'_{ior} = 0,8 \div 1,8$ мкм для передачи с четным числом тел качения. Для ВЗП-80 с нечетным числом тел качения $F'_{ior} = 0,05 \div 0,4$ мкм. Максимальное отклонение передаточного отношения при номинальном моменте 100 Н·м, вызванное перекатыванием тел качения, составило 8 % (для передачи с четным числом тел качения).

В работе рассматривается влияние погрешностей изготовления деталей на КП ВЗП. В расчетах учитываются только погрешности, влияющие на точность установки кулачка. Принимается, что погрешности деталей являются случайными величинами с равномерным и нормальным законами распределения. Исследуемая система является нелинейной. Поэтому расчет проводится методом статистических испытаний (Монте-Карло).

На рис. 11 представлена зависимость максимальной кинематической погрешности F'_{ior} ВЗП-80 от смещения центра кулачка e_H относительно центра жесткого колеса. Эта зависимость существенно нелинейная. Максимальная кинематическая погрешность до некоторого значения e_H увеличивается незначительно. Затем F'_{ior} резко возрастает.

Выявлено, что при больших значениях смещения кулачка e_H в некоторые моменты времени все зубья одной из двух полуолн выходят из контакта. Переход к одноволновому зацеплению сопровождается резким увеличением максимальной КП.

На рис. 12 показано влияние формы кулачка на кинематическую погрешность. Рассматривались три формы: 1 – $w(\varphi) = w_0 \cos 2\varphi$; 2 – форма

коль-ца, нагруженного 4-мя силами под углом β ; $3 - w(\varphi) = w_0 \cos 2\varphi - K \sin^2 2\varphi$.

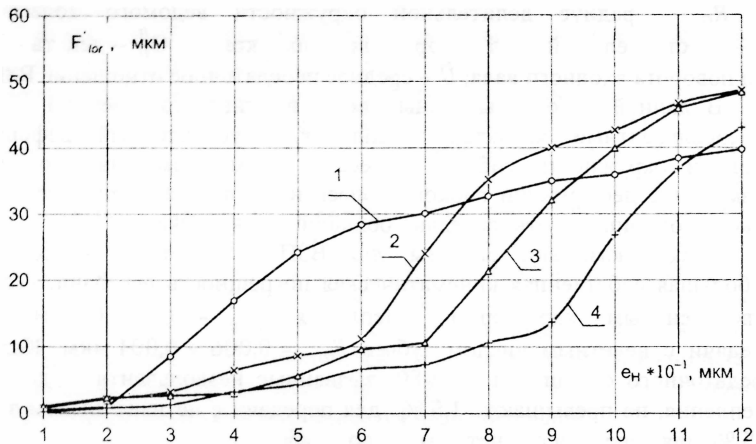


Рис. 11. Наибольшая кинематическая погрешность ВЗП-80:

1 – $M_B = 1 \text{ H} \cdot \text{м}$; 2 – $M_B = 10 \text{ H} \cdot \text{м}$; 3 – $M_B = 50 \text{ H} \cdot \text{м}$;
4 – $M_B = 100 \text{ H} \cdot \text{м}$;

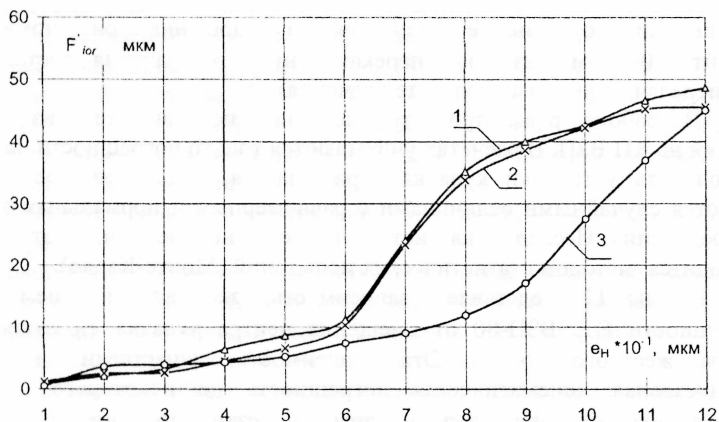


Рис. 12. Влияние формы кулачка на наибольшую кинематическую погрешность ВЗП-80 ($M_B = 10 \text{ H} \cdot \text{м}$): 1 – $w_0 = 0,48$, $K = 0$, 2 – $\beta = 25^\circ$;

3 – $w_0 = 0,48$, $K = 0,04$

Из рис. 12 видно, что применение кулачка с формой $w(\varphi) = w_0 \cos 2\varphi - K \sin^2 2\varphi$ значительно снижает наибольшую кинематическую погрешность ВЗП при смещении кулачка в пределах $70 \div 110 \text{ мкм}$.

На рис. 13 представлены результаты численного исследования влияния класса точности деталей на кинематическую точность передачи.

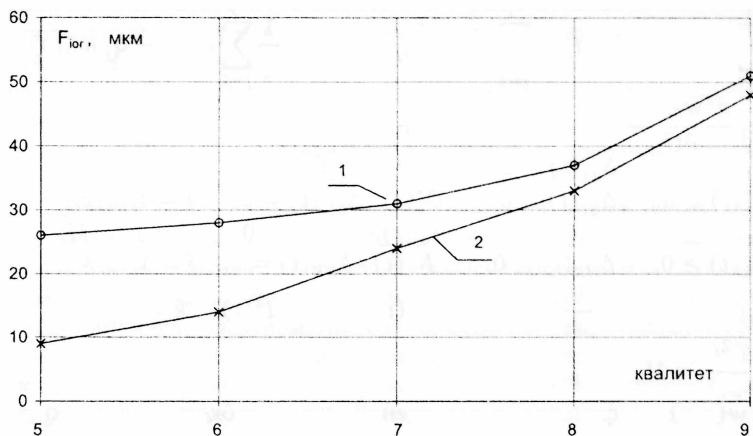


Рис. 13. Кинематическая погрешность ВЗП-80 (риск 0,27 %, $M_B = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$):
1 (2)– двигатель нормальной (повышенной) точности

В разделе 4.2 рассматривается КП торцевой ВЗП с электромагнитным генератором волн. Генератор состоит из электромагнитов равномерно расположенных по окружности (рис 14). Движение толкателей управляется электромагнитами. Напряжение на катушки подается таким образом, чтобы создавалась волна деформации в гибком колесе.

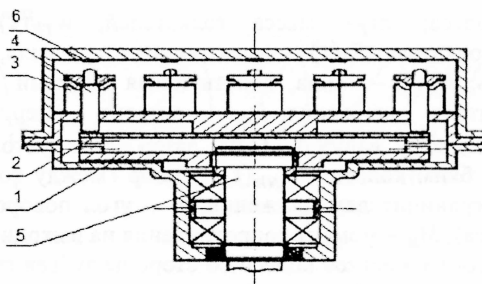


Рис. 14. Торцевая волновая зубчатая передача с электромагнитным генератором: 1 – жесткое колесо; 2 – гибкое колесо-пластина; 3 – катушка электромагнита; 4 – толкатель электромагнита; 5 – выходной вал; 6 – ограничитель движения толкателя

Система уравнений, описывающая движения элементов торцевой ВЗП управляемой электромагнитами может быть записана в виде

$$\rho h \frac{\partial^2 w(\mathbf{q}, t)}{\partial t^2} + \beta D \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \nabla^2 w(\mathbf{q}, t)) + \alpha \rho h \frac{\partial w(\mathbf{q}, t)}{\partial t} + D \nabla^2 \nabla^2 w(\mathbf{q}, t) = \sum_{k=1}^M \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_k) P_k(t) + \sum_{j=1}^{z_f} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_j) Q_{bj}(t) + \frac{1}{r_g} \sum_{j=1}^{z_f} \delta'_{\varphi}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_j) M_{oj}(t); \quad (30)$$

$$m_T \frac{\partial^2 w_{Tk}(t)}{\partial t^2} = -P_k(t) + N_k(t) + F_k(t) + s m_T g, \quad k = 1, \dots, M; \quad (31)$$

$$Q_j(t) \geq 0, \quad \Delta_{qj}(t) \geq 0, \quad Q_j(t) \cdot \Delta_{qj}(t) = 0, \quad j = 1, \dots, z_f; \quad (32)$$

$$Q_j^*(t) \geq 0, \quad \Delta_{qj}^*(t) \geq 0, \quad Q_j^*(t) \cdot \Delta_{qj}^*(t) = 0, \quad j = 1, \dots, z_f; \quad (33)$$

$$P_k(t) \geq 0, \quad \Delta_{Pk}(t) \geq 0, \quad P_k(t) \cdot \Delta_{Pk}(t) = 0, \quad k = 1, \dots, M; \quad (34)$$

$$N_k(t) \geq 0, \quad \Delta_{Nk}(t) \geq 0, \quad N_k(t) \cdot \Delta_{Nk}(t) = 0, \quad k = 1, \dots, M; \quad (35)$$

$$U_k(t) = i_k R + L \frac{di_k}{dt}, \quad F_k(t) = f(d_k) i_k^2(t), \quad k = 1, \dots, M; \quad (36)$$

$$J_{np} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = M_R - M_B, \quad (37)$$

где $w(\mathbf{q}, t)$ – функция перемещений точек гибкого колеса; $\mathbf{q} = \{r, \varphi\}$ – вектор, определяющий положение точек гибкого колеса; $P_k(t)$ – сила взаимодействия толкателя k -го электромагнита и гибкого колеса; Q_{bj} – проекция на нормальную к поверхности пластины ось главного вектора сил, действующих на j -ый зуб гибкого колеса со стороны зубьев жесткого колеса; $Q_j(t)$, $Q_j^*(t)$ – силы взаимодействия зубьев гибкого и жесткого колес по рабочей и нерабочей кромкам соответственно; $M_{oj}(t)$ – главный момент сил, действующий на j -ый зуб гибкого колеса со стороны зубьев жесткого колеса; $\Delta_{qj}(t)$, $\Delta_{qj}^*(t)$ – зазоры между зубьями гибкого и жесткого колес по рабочей и нерабочей кромкам соответственно; M – число электромагнитов; z_f – число зубьев гибкого колеса; m_T – масса толкателей; $w_{Tk}(t)$ – функция перемещения k -го толкателя; $F_k(t)$ – электромагнитная сила, действующая на k -ый толкатель; $N_k(t)$ – сила, действующая на k -ый толкатель со стороны ограничителя движения; J_{np} – момент инерции привода, приведенный к выходному валу; $\Delta_{Pk}(t)$ – зазор между толкателем k -го электромагнита и гибким колесом; $\Delta_{Nk}(t)$ – зазор между толкателем k -го электромагнита и ограничителем движения; Θ – угол поворота выходного вала (жесткого колеса); M_B – момент сопротивления на выходном валу; M_R – момент, действующий на жесткое колесо со стороны зубьев гибкого колеса; $f(d_k)$ – экспериментальная функция; L – индуктивность электромагнита; i_k – сила тока в k -ом электромагните; $d_k(t)$ – функция воздушного зазора в k -ом электромагните; R – активное сопротивление обмотки электромагнитов; $U_k(t)$ – функция напряжения, подаваемого на k -ый электромагнит; s – параметр, определяющий расположение электромагнитов ($s = 1(0)$, если электромагниты расположены вертикально (горизонтально)).

Уравнения (30), (31) описывают изгибные колебания гибкого колеса, выполненного в виде круговой пластины и движение толкателей.

Неравенства (32-35) выражают условия одностороннего контакта между: зубьями гибкого и жесткого колес по рабочим и нерабочим кромкам; толкателями и гибким колесом; толкателями и ограничителями движения.

Электромагнитное равновесие в обмотке электромагнитов и их тяговую силу описывают уравнения (36).

Уравнение (37) описывает движение выходного вала, совершающего вращательное движение.

К системе (30 – 37) добавляются начальные и граничные условия элементов передачи.

Для решения разрешающей системы уравнений используется метод расчета колебаний упругой системы с О.С., описанный в первой главе.

Численно и экспериментально исследовалась передача со следующими параметрами: модуль зацепления – 0,5 мм; число зубьев гибкого (жесткого) колеса – 362(360); число электромагнитов – 8; активное сопротивление обмотки электромагнитов – 42 Ом; число витков обмотки электромагнитов – 720.

Как показывают расчеты и эксперимент, максимальная частота подачи напряжения на каждую пару электромагнитов $\nu = 8 \dots 9$ Гц. Максимальный нагрузочный момент на выходном валу на этих частотах $M_{bmax} = 10$ Н·м. При этом подаваемое на электромагниты напряжение $U=12$ В.

Ошибка углового положения выходного вала волновой передачи определяется по формуле $\Delta\Theta(t) = \bar{\omega}_b \cdot t - \Theta(t)$, где $\bar{\omega}_b$ – средняя угловая скорость выходного вала, $\Theta(t)$ – функция угла поворота выходного вала. Угол поворота выходного вала (жесткого колеса) $\Theta(t)$ определяется из разрешающей системы уравнений (30 – 37). График изменения $\Delta\Theta(t)$ представлен на рис.15.

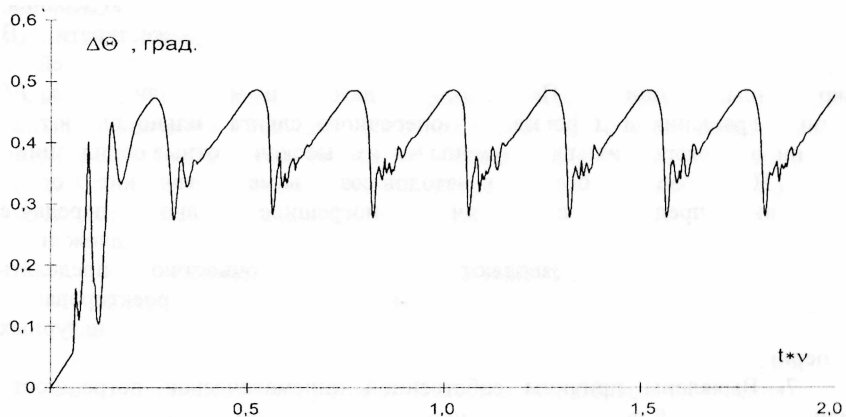


Рис. 15. Изменение ошибки углового положения выходного вала торцевой ВЗП с электромагнитным генератором волн: $M_b = 10$ Н·м; $\nu=8,8$ Гц; $U=24$ В; $M=8$; $J_{пр} = J_{вых}$ ($J_{вых}$ – момент инерции выходного звена)

Основные результаты работы

1. Разработан эффективный метод статического расчета упругих систем с односторонними связями, объединяющий положительные качества известных шаговых и итерационных методов расчета подобных систем. Наибольший эффект предложенного метода проявляется при расчете упругих систем с большим числом односторонних связей (от сотен до тысяч односторонних связей) и многократных вычислениях при небольших изменениях параметров системы.

2. Разработан метод динамического расчета ударного нагружения существенно нелинейных упругих систем с односторонними связями, позволяющий эффективно решать многомерные задачи, в которых жесткость односторонних связей на несколько порядков выше жесткости упругой системы. Метод основывается на теории соударения упругих систем, учитывающей местные деформации, предложенной Тимошенко С.П. и получившей развитие в работах Бидермана В.Л.

3. Уточнено тестовое решение С.П.Тимошенко об ударном взаимодействии шара с балкой. На основе результатов численных расчетов показано, что в процессе удара шар с балкой взаимодействует не два, а три раза.

4. Выявлен характер нестационарного взаимодействия тонких балок и прямоугольных пластин с наложенными на них односторонними связями повышенной жесткости. Показано, что такое взаимодействие сопровождается дребезгом, т.е. частыми кратковременными отрывами в пределах одного взаимодействия.

5. Установлено влияние инерции вращения и деформации поперечного сдвига сечений тонких балок и пластин на их свободные колебания, ограниченные односторонними связями повышенной жесткости. В расчетных примерах связи представлялись в виде стержней с закругленными концами. Показано, что даже при малых значениях h/l инерция вращения и деформация поперечного сдвига сильно влияют на реакции односторонних связей, уменьшая их высокочастотные осцилляции.

6. На основе разработанных методов созданы математические модели и методики определения кинематической погрешности волновых передач с кулачковым и электромагнитным генераторами волн. Предложенные методики и модели позволяют с высокой точностью определять кинематическую погрешность волновых передач на стадии проектирования, т.е. до того как появится возможность проведения дорогостоящих натурных экспериментальных исследований.

7. Выявлены причины собственной кинематической погрешности волновой зубчатой передачи с кулачковым генератором волн. Первая из них вызвана нарушением эвольвентного характера зацепления в связи с деформацией гибкого колеса. Вторая обусловлена движением тел качения гибкого подшипника относительно большой оси кулачка.

8. Установлено, что:

а) максимальная собственная кинематическая погрешность радиальных волновых зубчатых передач с кулачковым генератором волн имеет небольшие значения. Например, для ВЗП-80 эти значения не превышают 1,8 мкм, что составляет менее 10% от общей кинематической погрешности передачи;

б) максимальная собственная кинематическая погрешность у волновых зубчатых передач с нечетным числом тел качения примерно в четыре раза меньше, чем у передач с четным числом тел качения;

в) зависимость максимальной кинематической погрешности $F'_{\text{юр}}$ от смещения кулачка e_H имеет существенно нелинейный характер. Максимальная кинематическая погрешность $F'_{\text{юр}}$ до некоторого значения смещения кулачка e_H увеличивается незначительно. Затем $F'_{\text{юр}}$ резко возрастает. При больших значениях смещения кулачка e_H в некоторых положениях все зубья одной из двух полуволн выходят из контакта. Переход к одноволновому зацеплению сопровождается резким увеличением максимальной кинематической погрешности;

г) повышение технологической точности деталей ВЗП-80 с 9-го до 7-го квалитета позволяет уменьшить максимальную кинематическую погрешность примерно в 1,7 раза. В тоже время повышение точности деталей с 7-го до 5-го квалитета уменьшает максимальную кинематическую погрешность примерно в 1,1 раза;

е) применение кулачка, профиль которого определяется по формуле $w(\varphi) = w_0 \cos(2\varphi) - K \sin^2(2\varphi)$, где $w_0 = 0,48$; $K = 0,04$, снижает наибольшую кинематическую погрешность передачи ВЗП-80 примерно в два раза, если основные детали передачи изготовлены по 7-8 квалитету точности, а передача нагружена моментом до 10 Н·м.

9. Показано, что собственная кинематическая погрешность торцевой волновой зубчатой передачи с электромагнитным генератором волн имеет большие значения. Так для торцевой передачи с 8-ю толкателями и диаметром гибкого колеса 90 мм она составила 314 мкм, что существенно выше собственной кинематической погрешности радиальных волновых зубчатых передач с кулачковым генератором.

Основные публикации по теме диссертации

1. Люминарский И.Е. Расчет упругих систем с односторонними связями: Монография. – М.: МГИУ, 2006. – 308 с.
2. Люминарский И.Е. Метод расчета силового взаимодействия шара и балки при поперечном ударе // Известия вузов. Машиностроение. – 1999. – №2. – С. 20–26.
3. Люминарский И.Е. Расчет колебаний упругих систем с инерционными односторонними связями // Известия вузов. Машиностроение. – 2006. – №6. – С. 8–14.

4. Люминарский И.Е. Собственная кинематическая погрешность волновой зубчатой передачи // Машиностроение и инженерное образование. – 2008. – №2. – С. 53–56.
5. Люминарский И.Е. Влияние деформации поперечного сдвига и инерции вращения на колебания балок с односторонними связями большой жесткости // Известия вузов. Машиностроение. – 2008. – №9. – С. 3–10.
6. Люминарский И.Е. Люминарский С.Е. Расчет кинематической погрешности волновой зубчатой передачи как упругой системы с односторонним контактом звеньев // Известия вузов. Машиностроение. – 2008. – №8. – С. 9–19.
7. Люминарский И.Е. Люминарский С.Е. Метод расчета линейных систем, ограниченных односторонними связями, при статическом нагружении // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение. – 2009. – №2. – С. 84–89.
8. Клеников С.С., Люминарский И.Е., Семин И.И. Расчетная модель волновых передач с учетом несимметрии нагружения элементов по волнам зацепления // Вестник машиностроения. – 1993. – № 1. – С. 17–19.
9. Клеников С.С., Люминарский И.Е., Люминарский С.Е. Шаговый поиск опорных систем нагруженных односторонних связей методом введения восстанавливающих сил // Известия вузов. Машиностроение. – 1987. – №7. – С. 34–40.
10. Клеников С.С., Люминарский И.Е. Силовое взаимодействие упругих элементов нагруженных сдвоенных волновых зубчатых передач // Вестник машиностроения. – 1988. – № 1. – С. 17–20.
11. Агамиров В.Л., Клеников С.С., Люминарский И.Е. Распределение нагрузок между элементами сдвоенной волновой передачи при ее сборке // Вестник машиностроения. – 1986. – № 10. – С. 17–20.
12. Люминарский И.Е. Динамика упругих систем с односторонними связями большой жесткости // Естественные и технические науки. – 2003. – №2. – С. 11–21.
13. Люминарский И.Е. Расчет колебаний упругих систем с односторонними связями повышенной жесткости // XV симп. Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем: Сборник трудов. Москва – Звенигород, 2006. – С. 187–192.
14. Люминарский И.Е. Численные методы решения интегрального уравнения, описывающего удар шара по балке // Участие молодых ученых, инженеров и педагогов в разработке и реализации инновационных технологий: Сборник науч. докладов международной конференции. – М., 2006. – С. 73–77.
15. Люминарский С.Е., Люминарский И.Е. Исследование погрешности установки кулачка в волновой зубчатой передаче ВЗП-80 // Участие молодых ученых, инженеров и педагогов в разработке и реализации инновационных технологий: Сборник науч. докладов международной

- конференции. – М., 2006. – С. 77–81.
16. Люминарский И.Е., Люминарский С.Е, Семин И.И. О положительной определённости матриц упругих систем с односторонними связями // Сб. н. тр. – М.: МАСИ (Втуз-ЗиЛ), 1995. – С. 76–81.
 17. Люминарский И.Е., Люминарский С.Е. Собственная кинематическая погрешность волновых зубчатых передач с кулачковым генератором волн // Сб. н. тр. – М.: МАСИ (Втуз-ЗиЛ), 1995. – С. 49–52.
 18. Теоретическое исследование влияния зазоров и податливостей на силовое взаимодействие элементов нагруженного волнового редуктора МВЗ-160 / С.С. Клеников, М.Н. Иванов, В.С. Сергеев, И.Е. Люминарский // Волновые зубчатые передачи и механизмы: Межвуз. сб. – М.: Моск. инж. - строит. ин-т, 1985. – С. 75–89.
 19. А.с. СССР № 1442772. Зубчатое колесо волновой передачи / С.С. Клеников, Ю.С. Иванов, И.Е. Люминарский, И.И. Семин // Б.И. – 1988. – № 45.
 20. А.с. СССР № 1595117. Генератор волновой передачи / С.С. Клеников, Ю.С. Иванов, И.Е. Люминарский, И.И. Семин, С.В. Решетников // Б.И. – 1990. – № 15.

Люминарский Игорь Евгеньевич

**Разработка научных методов расчета
нестационарного взаимодействия тонкостенных элементов
с жесткими односторонними связями и математических моделей
волновых передач**

Автореферат

Подписано в печать 15.09.09

Формат бумаги 60×84/16

Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,25. Тираж 100. Заказ № 422

Издательство МГИУ, 115280, Москва, Автозаводская, 16
www.izdat.msiu.ru; e-mail: izdat@msiu.ru; тел. (495) 677-23-15