

ТЕОРІЯ СООРУЖЕНІЙ.

АНАЛИТИЧЕСКІЙ и ГРАФИЧЕСКІЙ РАЗСЧЕТЪ
СООРУЖЕНІЙ
ПО НОВѢЙШИМЪ МЕТОДАМЪ

СОСТАВИЛЪ

М. Черепашинскій,

Профессоръ Императорскаго Техническаго Училища
и Приватъ-Доцентъ Университета въ Москвѣ.

Съ 8 листами чертежей.

В ы п у с к ъ I.

МОСКВА.

Типографія Общества распростран. полезн. книгъ. Моховая, д. Торлецкой.

1889.

ТЕОРІЯ СООРУЖЕНІЙ.

АНАЛИТИЧЕСКІЙ И ГРАФИЧЕСКІЙ РАЗСЧЕТЪ СООРУЖЕНІЙ
ПО НОВѢЙШИМЪ МЕТОДАМЪ

СОСТАВИЛЪ

М. Черепашинскій,

Профессоръ Императорскаго Техническаго Училища и
Привать-Доцентъ Университета въ Москвѣ.

Провер. 1933

133954 ✓
ПРОВЕРЕНО
1945

Съ 8 листами чертежей.

В ы п у с к ъ I.

ПРОВЕРЕНО
1952



МОСКВА.

1889.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ сочиненіи, начало котораго составляетъ подлежащій выпускъ, мы намѣрены изложить по возможности полную теорію сооружений, развитую на основаніи взглядовъ, установленныхъ новѣйшими опытами и практикой. Желая сдѣлать нашъ трудъ одинаково полезнымъ какъ для строителей такъ и механиковъ мы поясняемъ выводы теоріи примѣрами, относящимися къ этимъ обѣимъ специальностямъ.

Перемѣщенія точекъ упругихъ системъ мы опредѣляемъ помощью принципа производной работы, употребленнаго для рѣшенія статическихъ задачъ впервые итальянскимъ инженеромъ Кастильяно, къ сожалѣнію столь преждевременно потеряннымъ для науки. Объ этомъ принципѣ догадывался уже Maupertuis, предложившій въ 1744 г. французской академіи наукъ теорему, названную имъ „loi de repos“ выражающую весьма неяснымъ впрочемъ образомъ, частный случай принципа производной работы. Прежде всѣхъ этимъ принципомъ воспользовался англійскій астрономъ Green для рѣшенія специальной задачи; но первый толчокъ къ его приложенію для рѣшенія задачъ практической механики далъ Кастильяно въ 1873 г. своей диссертацией, озаглавленной имъ: „Nuova teoria intorno all' equilibrio dei sistemi elastici.“

Въ Германіи замѣняютъ принципъ производной работы закономъ возможныхъ перемѣщеній. Вслѣдствіе отсутствія до сихъ поръ точнаго доказательства этого, хотя и безусловно вѣрнаго закона, мы не сочли цѣлесообразнымъ послѣдовать примѣру германскихъ авторовъ. Только строго логическое доказательство закона можетъ очертить точно кругъ его правильной примѣнимости. Въ противномъ случаѣ легко выйти изъ предѣловъ этого круга, и незамѣтнымъ образомъ впасть въ ошибку. Принципъ

производной работы, называемый въ частномъ случаѣ „принципомъ наименьшей работы“, доказывается безъ затрудненія самымъ строгимъ образомъ, и въ томъ заключается его преимущество передъ закономъ возможныхъ перемѣщеній.

Уравненіе (168) дополняетъ статическія условія равновѣсія, и весьма простымъ образомъ дѣлаетъ возможнымъ расчетъ тѣхъ сооружений, для которыхъ эти условія недостаточны. Такимъ образомъ получается общее правило для расчета всѣхъ сооружений вообще, что не мало облегчаетъ изученіе ихъ теоріи.

При опредѣленіи практическихъ коэффициентовъ для сооружений, подвергаемыхъ дѣйствію подвижнаго груза, мы воспользовались опытами, произведенными надъ вліяніемъ перемѣннаго груза на крѣпость матеріаловъ. Выведенные Велеромъ изъ его долготѣхъ опытовъ законы мы выражаемъ формулой, полученной строго математическимъ путемъ, отличающейся отъ эмпирическихъ формулъ Ляунгардта, Вейрауха и др. большей точностью.

Законы Велера вполне подтверждаются новѣйшими опытами Баушингера, Considère и др., вслѣдствіе чего и въ тѣхъ странахъ, гдѣ прежде не обращали на нихъ вниманія, признають въ настоящее время необходимымъ, при расчетѣ сооружений принимать во вниманіе вліяніе перемѣннаго груза. Въ Франціи получила большое распространеніе формула инженера Séjourné, предложенная имъ въ 1886 г. Эта формула совершенно тождественна съ формулой, предложенной нами въ 1882 г. т. е. 4 года раньше. Намъ неизвѣстно какимъ образомъ Séjourné получил свою формулу, и ссылаясь на статью, напечатанную нами въ журналѣ М. П. С. „Инженеръ“ за 1883 г., не можемъ не возразить противъ названія, присвоеннаго ей во Франціи.

Параллельно съ аналитическими мы указываемъ графическіе способы расчета. Имѣя въ виду практическую сторону сочиненія мы рѣшаемъ задачи самыми простыми способами, ведущими къ цѣли по возможности короткимъ путемъ, безъ помощи Новой Геометріи, мало извѣстной инженерамъ. Основаніемъ графическихъ расчетовъ намъ служатъ веревочный многоугольникъ, многоугольникъ перемѣщеній и инфлуэнтныя линіи; послѣдними мы пользуемся не только при графическихъ, но и при аналитическихъ расчетахъ тамъ, гдѣ требуется опредѣлить наиболѣе

невыгодное положеніе подвижной нагрузки. При употребленіи инфлуэнтныхъ линій точность графическаго разсчета почти не уступаетъ точности аналитическаго; это есть причиной предпочтительнаго ихъ употребленія въ подлежащемъ сочиненіи.

Большое значеніе мы придавали ясности изложенія, облегчающей чтеніе сочиненія, хотя преслѣдующаго практическую цѣль, но по своему существу—теоретическаго. Образцомъ въ этомъ отношеніи намъ служилъ знаменитый математикъ и механикъ Бургъ, который, по его собственнымъ словамъ „преслѣдовалъ цѣль быть популярнымъ съ одинаковой настойчивостью и тамъ, гдѣ ясность достигалась не иначе, какъ цѣной весьма впрочемъ похвальной и желательной краткости, потому что должно писать не кратко, но ясно и понятно“.

На сколько исполненіе соотвѣтствуетъ желанію предоставляемъ судить благосклонному читателю. Мы будемъ благодарны за всякія указанія въ этомъ отношеніи, и не преминемъ воспользоваться ими въ слѣдующихъ выпускахъ.

М. Черепанинскій.

Глава I.

Упругость и сопротивленіе.

§ 1.

Упругость и крѣпость. — Всякое твердое тѣло можно разсматривать какъ систему матеріальныхъ точекъ, находящихся на безконечно близкихъ другъ отъ друга разстояніяхъ, связанныхъ между собою частичными силами. Эти силы въ механикѣ называютъ *внутренними силами*.

Дѣйствія, производимыя на тѣло другими тѣлами, называютъ *внѣшними силами*.

Внѣшнія силы дѣлятъ на силы, обусловленныя поверхностью тѣла, и на силы, обусловленныя его массой. Первые независимы отъ массы, и къ нимъ принадлежатъ: давленіе атмосферы, треніе, сопротивленіе опоръ и т. д.; послѣднія дѣйствуютъ на частицы массы тѣла независимо отъ его поверхности, какъ сила тяжести, центробѣжная сила.

Совокупность внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло, будемъ для краткости называть *нагрузкой*.

Всякая нагрузка производитъ измѣненіе формы тѣла, которое по удаленіи нагрузки болѣе или менѣе исчезаетъ. Стремленіе, проявляемое всякимъ тѣломъ, возстановить свою первоначальную форму, измѣненную внѣшними силами, называется *упругостью*.

Та часть видоизмѣненія, которая по удаленіи нагрузки исчезаетъ, называется *упругимъ*, а остальная часть — *остающимся или постояннымъ видоизмѣненіемъ*.

До сихъ поръ неизвѣстно, существуютъ ли совершенно исчезающія видоизмѣненія. Когда остающіяся измѣненія очень малы и не превышаютъ извѣстнаго предѣла, то строительная механика ими пренебрегаетъ и принимаетъ, что тѣло по удаленіи нагрузки возстановляетъ вполнѣ свою первоначальную форму.

Наибольшее полное видоизмѣненіе, при которомъ остающаяся его часть еще такъ мала, что ею можно пренебречь, называется

предельнымъ упругимъ измѣненіемъ, а производящая его нагрузка— предельной упругой нагрузкой.

Очевидно, что обѣ эти величины зависятъ какъ отъ матеріальныхъ свойствъ тѣла, такъ и отъ его величины и формы.

Всякое постоянное видоизмѣненіе происходитъ отъ перемѣны въ группировкѣ частицъ тѣла, а слѣдовательно отъ измѣненія относительнаго положенія равновѣсія частицъ въ тѣлѣ, остающагося въ немъ послѣ освобожденія его отъ нагрузки. При постепенномъ увеличеніи видоизмѣненія посредствомъ постепеннаго увеличенія нагрузки относительное разстояніе частицъ на какомъ нибудь мѣстѣ измѣнится настолько, что равновѣсіе внутреннихъ силъ на томъ мѣстѣ сдѣлается невозможнымъ и сдѣяніе соотвѣтственныхъ частицъ разрушится. Наибольшая сила сдѣянія, которую можетъ проявить тѣло, и которая появляется въ моментъ передъ разрушеніемъ его, называется *крѣпостью матеріала*.

Мы будемъ разсматривать въ слѣдующемъ только такіа измѣненія въ измѣреніяхъ частей тѣла, которыя сравнительно съ самыми измѣреніями такъ малы, что ими при всѣхъ теоретическихъ выводахъ можно пренебрегать.

§ 2.

Безопасная нагрузка.—Части всякаго сооруженія должны получить такіе размѣры, чтобы ихъ видоизмѣненіе во всякой точкѣ было не только ниже того предѣла, при которомъ крѣпость матеріала нарушается, но чтобы оно было вообще ниже той величины, при которой постоянныя измѣненія дѣлаются замѣтными. Такъ какъ сооруженія подвергаются болѣе или менѣе значительнымъ сотрясеніямъ, увеличивающимъ дѣйствіе нагрузки, дѣйствію атмосферы, уменьшающему крѣпость матеріала, и т. д., то слѣдуетъ, что наибольшая безопасная нагрузка зависитъ въ различныхъ практическихъ случаяхъ отъ различныхъ обстоятельствъ, что она поэтому для различныхъ сооруженій вообще не одинакова.

За правило можно принять, что для постоянныхъ сооруженій видоизмѣненіе отъ наибольшей нагрузки ни на какомъ мѣстѣ не должно превосходить предельнаго упругаго измѣненія.

§ 3.

Задача строительной механики.—Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что строительная механика должна рѣшить слѣдующую задачу:

1) Опредѣлить нагрузку, которую сооруженіе можетъ выдерживать безопасно при данныхъ обстоятельствахъ, или опредѣ-

лить размѣры частей сооруженія такимъ образомъ, чтобы измѣненіе ихъ измѣреній, производимое данной нагрузкой, ни на какомъ мѣстѣ не было больше извѣстнаго предѣла.

2) Опредѣлить видоизмѣненія, производимыя данной нагрузкой въ частяхъ сооруженія.

Для рѣшенія этихъ задачъ нужно знать зависимость внутреннихъ или сопротивляющихся силъ отъ внѣшнихъ или дѣйствующихъ. Наука, занимающаяся опредѣленіемъ этой зависимости, называется *теоріей упругости*.

Намъ слѣдовало бы поэтому заняться прежде всего изложеніемъ теоріи упругости, что чрезмѣрно увеличило бы нашу задачу. Но такъ какъ вслѣдствіе несовершенства этой теоріи, строительная механика основываетъ свои теоремы преимущественно на данныхъ, получаемыхъ эмпирическимъ путемъ посредствомъ опытовъ, то знаніе ея для изученія теоріи сопротивленія матеріаловъ не представляетъ вообще необходимости. Вслѣдствіе того мы приведемъ изъ общей теоріи упругости и крѣпости только тѣ положенія, знаніе которыхъ облегчитъ пониманіе послѣдующихъ выводовъ.

§ 4.

Основныя положенія. Теорія упругости пользуется слѣдующими предположеніями, основанными на результатахъ наблюдений:

1) Силы сдѣвленія, проявляющіяся между частицами тѣла при измѣненіи его вида—непрерывныя функціи взаимныхъ разстояній частицъ, т. е. измѣняются безконечно мало при безконечно маломъ измѣненіи этихъ разстояній.

2) Силы сдѣвленія, дѣйствующія между частицами тѣла, притягательны и отталкивательны. Когда тѣло находится въ естественномъ состояніи, то эти силы находятся въ равновѣсіи.

3) При всякомъ увеличеніи разстоянія частицъ какъ притягательныя, такъ и отталкивательныя силы уменьшаются, но отталкивательныя въ большемъ отношеніи чѣмъ притягательныя, такъ что равнодѣйствующая внутреннихъ силъ въ этомъ случаѣ всегда притягательна.

4) При всякомъ уменьшеніи разстоянія частицъ какъ притягательныя, такъ и отталкивательныя силы увеличиваются, но отталкивательныя въ большемъ отношеніи чѣмъ притягательныя, такъ что равнодѣйствующая внутреннихъ силъ въ этомъ случаѣ всегда отталкивательна.

Изъ обоихъ послѣднихъ положеній слѣдуетъ, что сила упругости, проявляющаяся при измѣненіи формы тѣла, всегда противоположна направленію перемѣщенія частицъ. Внутреннія силы

исполняютъ поэтому при видоизмѣненіи, произведенномъ внѣшними силами, отрицательную работу.

§ 5.

Напряжение и сопротивленіе. — Когда тѣло, отъ дѣйствія внѣшнихъ силъ, измѣняетъ свой видъ, то сила упругости стремится возстановить его первоначальную форму, и какія-нибудь двѣ точки, которыхъ относительное положеніе измѣнилось, испытываютъ дѣйствіе внутреннихъ силъ.

Выдѣлимъ внутри этого тѣла очень малую плоскую поверхность $\Delta\Omega$, ограниченную замкнутой кривой, проведенной вокругъ одной изъ его точекъ. Между безконечно близкими частицами, находящимися по обѣимъ сторонамъ этой поверхности, дѣйствуютъ внутреннія силы, равнодѣйствующую которыхъ обозначимъ черезъ W . Если поверхность $\Delta\Omega$ будетъ безконечно мала и равна $d\Omega$, то можно принять, что внутреннія силы распредѣляются по ней равномерно, и частное $\frac{W}{d\Omega}$ дастъ равнодѣйствующую внутреннихъ силъ, отнесенную къ единицѣ площади разсматриваемой поверхности. Эту равнодѣйствующую называютъ *напряженіемъ*.

Подъ словомъ *напряжение* понимаютъ поэтому такую внутреннюю силу, которая соответствуетъ единицѣ площади какова-нибудь плоскаго сѣченія напряженнаго тѣла.

Внутреннюю силу, соответствующую произвольной площади сѣченія, будемъ для краткости называть *сопротивленіемъ*.

Силу $\frac{W}{d\Omega}$ можно разложить на двѣ слагающія σ и τ , изъ которыхъ σ перпендикулярна къ плоскости $d\Omega$, а τ лежитъ въ этой плоскости. Слагающую σ называютъ *нормальнымъ*, а слагающую τ — *касательнымъ или скалывающимъ напряженіемъ*.

То напряженіе, при которомъ видоизмѣненіе равно предѣльному упругому измѣненію, называется *предѣломъ упругости*.

Нормальное напряженіе σ стремится измѣнить разстояніе матеріальныхъ точекъ по направленію, перпендикулярному къ плоскости элемента, и оно называется *растяженіемъ*, когда это измѣненіе состоитъ въ увеличеніи взаимнаго разстоянія частицъ, и *сжатіемъ*, когда разстояніе между частицами уменьшается.

Скалывающее напряженіе τ стремится матеріальныя точки, находящіяся по ту и другую сторону плоскаго элемента, сдвинуть вдоль его плоскости.

§ 6.

Основные законы видоизмѣненія. — Зависимость между напряжениями и производимыми ими видоизмѣненіями было бы легко

опредѣлить, еслибъ были извѣстны законы, по которымъ въ упругихъ тѣлахъ измѣняется упругость, когда они отъ дѣйствія вишнихъ силъ измѣняютъ свой видъ. Такъ какъ, вслѣдствіе недостаточности знаній сущности матеріи, эти законы неизвѣстны, то упомянутая зависимость въ настоящее время можетъ быть опредѣлена только посредствомъ прямыхъ опытовъ надъ матеріалами различнаго рода.

Основной законъ упругости, выражающій зависимость между размѣрами тѣла, его напряженіемъ и производимымъ имъ видоизмѣненіемъ, получается посредствомъ слѣдующаго простаго опыта.

Возьмемъ прямоугольный параллелоипедъ $abcdefgh$ (черт. 1) и приложимъ къ его основаніямъ $abcd$ и $efgh$, равныя, но противоположныя силы P , равномерно распределенныя на площади этихъ основаній. Отъ дѣйствія этихъ силъ параллелоипедъ превращается въ другой— $a_1b_1c_1d_1e_1f_1g_1h_1$ по слѣдующему правилу:

Если силы P растягиваютъ параллелоипедъ, то его измѣреніе l , параллельное P , увеличивается, а другія измѣренія b и h —уменьшаются (черт. 1_а).

Если силы P сжимаютъ параллелоипедъ, то l уменьшается, а b и h —увеличиваются (черт. 1_б).

Въ обоихъ случаяхъ, слѣдовательно, измѣненіе измѣреній, перпендикулярныхъ къ силѣ, прямо противоположно измѣненіямъ измѣреній ей параллельныхъ. Всякое другое измѣреніе, составляющее съ направленіемъ силы уголъ менѣе 90° измѣняется въ положительномъ или отрицательномъ смыслѣ на величину, которая могла бы быть выражена въ функціи этого угла и которая абсолютно тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе этотъ уголъ приближается къ 0 или 90°.

Измѣненіе измѣренія, параллельнаго дѣйствующей силѣ P , называется *продольнымъ измѣненіемъ*. Если продольное измѣненіе положительно, то оно называется *удлинненіемъ*, а если отрицательно, то—*укороченіемъ*.

Измѣненія измѣреній, перпендикулярныхъ къ направленіямъ силы, называются *поперечными измѣненіями*. Положительное поперечное измѣненіе называется *уширеніемъ*, а отрицательное—*суженіемъ*.

Отношеніе измѣненія измѣренія къ его первоначальной длинѣ называютъ *относительнымъ измѣненіемъ*. Если поэтому означимъ измѣненія измѣреній l , b и h черезъ Δl , $-\Delta b$, и $-\Delta h$, а ихъ относительныя измѣненія—черезъ e , e_1 и e_2 , то

$$e = \frac{\Delta l}{l}, e_1 = \frac{\Delta b}{b}, e_2 = \frac{\Delta h}{h} \dots \dots \dots (1)$$

Опытами получено, что пока нормальное напряженіе не превышаетъ предѣла упругости, то какъ продольное, такъ и попе-

§ 9.

Общія выраженія зависимости между нормальными напряжениями и относительными измѣненіями.—Положимъ, что на изотропный параллелепипедъ дѣйствуютъ нормальныя напряжения по тремъ направленіямъ, перпендикулярнымъ къ тремъ ребрамъ l , b и h (черт. 3). Если будемъ разсматривать измѣреніе l , то напряжение σ , параллельное l , увеличитъ его на Δl , напряжение σ_1 , параллельное b —уменьшитъ на $\Delta_1 l$, а напряжение σ_2 , параллельное h ,—уменьшитъ на $\Delta_2 l$. Длина измѣренія l послѣ деформации будетъ поэтому $l + \Delta l - \Delta_1 l - \Delta_2 l$, а относительное измѣненіе этого измѣренія

$$e = \frac{\Delta l - \Delta_1 l - \Delta_2 l}{l}$$

Но по (2)

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} \quad \frac{\Delta_1 l}{l} = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad \frac{\Delta_2 l}{l} = \frac{\sigma_2}{E_2}$$

или, такъ какъ $E_1 = E_2 = mE$

$$\frac{\Delta_1 l}{l} = \frac{\sigma_1}{mE} \quad \frac{\Delta_2 l}{l} = \frac{\sigma_2}{mE}$$

поэтому

$$e = \frac{1}{E} \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m} \right) \dots \dots \dots (7 \text{ а})$$

Точно такимъ образомъ получимъ если относительное измѣненіе измѣренія b означимъ черезъ e_1 , а измѣренія h —черезъ e_2

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{E} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma + \sigma_2}{m} \right) \\ e_2 &= \frac{1}{E} \left(\sigma_2 - \frac{\sigma + \sigma_1}{m} \right) \dots \dots \dots (7 \text{ а}) \end{aligned}$$

§ 10.

Зависимость между скалывающими напряжениями и производимыми ими сдвигеніями.—Возьмемъ внутри тѣла двѣ безконечно малыя плоскости, на которыя дѣйствуютъ скалывающія силы T (черт. 4). Произведенное этими силами видоизмѣненіе проявится въ томъ, что эти плоскости перемѣстятся параллельно самимъ себѣ и относительное положеніе точекъ r и s , которыя до видоизмѣненія находились на перпендикулярѣ rs къ этимъ плоскостямъ, по наступленіи равновѣсія будетъ дано точками r_1 и s_1 . Величина сдвигенія опредѣлится длиной rr_1 , а отношеніе $\frac{rr_1}{rs}$ называютъ *относительнымъ сдвигеніемъ*.

Если угол rr_1 означимъ черезъ g , то изъ черт. 4 имѣемъ

$$\overline{rr_1} = \overline{rs} \cdot tg. g$$

Въ теоріи сооружений разсматриваютъ только такія сдвигенія, которыхъ уголъ g всегда такъ малъ, что можно поставить

$$\cos g. = 1 \quad \sin g. = g = tg g$$

и слѣдовательно

$$g = \frac{\overline{rr_1}}{\overline{rs}} \dots \dots \dots (8)$$

т. е. *относительное сдвигеніе равно углу сдвигенія.*

Опыты показываютъ, что пока скалывающія напряжения (т. е. скалывающія силы, отнесенныя къ единицѣ площади той плоскости, въ которой онѣ дѣйствуютъ) не превышаютъ извѣстнаго предѣла, называемаго *предѣломъ упругости при скалываніи*, то относительныя сдвигенія пропорціональны этимъ напряжениямъ.

Если поэтому означимъ относительное сдвигеніе, произведенное скалывающимъ напряженіемъ 1, черезъ $\frac{1}{G}$, то напряженіе τ произведетъ относительное сдвигеніе

$$g = \frac{\tau}{G} \dots \dots \dots (9)$$

Коэффициентъ G зависитъ отъ свойства матеріала и называется *модулемъ упругости при скалываніи* (или скручиваніи).

Когда на площадь Ω дѣйствуетъ равномерно распределенная скалывающая сила T , то

$$\tau = \frac{T}{\Omega}$$

Если означимъ $\overline{rs}$ черезъ s , и rr_1 —черезъ Δs , то

$$g = \frac{\Delta s}{s}$$

и по (9) будетъ

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{T}{\Omega G}$$

откуда

$$\Delta s = \frac{T s}{\Omega G} \dots \dots \dots (10)$$

Изъ сравненія уравненій (6) и (10) легко узнать, что измѣненія при скалываніи опредѣляются такимъ же образомъ, какъ при растяженіи или сжатіи.

§ 11.

Свойство скалывающихъ напряженій.—Внутри твердаго изотропнаго тѣла, подверженнаго дѣйствію внѣшнихъ силъ и находящагося въ состояніи равновѣсія, выдѣлимъ параллелоипедъ

такимъ образомъ, чтобы его ребра были параллельны прямоугольнымъ осямъ координатъ. Первоначальныя длины этихъ реберъ означимъ черезъ dx , dy , dz (черт. 5).

Дѣйствіе силъ сдѣвленія на каждую грань замѣнимъ соотвѣтственной равнодѣйствующей силой, которую разложимъ на 3 слагающія, параллельныя измѣреніямъ параллелопипеда. Эти силы будемъ считать положительными, когда онѣ направлены въ сторону положительныхъ осей координатъ.

Такъ, силу, замѣняющую дѣйствіе силъ сдѣвленія на грань OZ_1 , разложимъ:

на нормальную слагающую $m\zeta$ и на касательныя— $m\zeta$ и $m\eta$.

Нормальныя напряженія будемъ обозначать буквой σ , а касательныя или скалывающія—буквой τ —съ двумя показателями, изъ которыхъ первый указываетъ ось, къ которой плоскость напряженія перпендикулярна, а второй—ось, къ которой напряженіе параллельно. Такъ какъ для нормальныхъ напряженій оба эти показателя одинаковы, то величины σ получаютъ одинъ только показатель.

Согласно этому обозначенію легко узнать, что на параллелопипедъ дѣйствуютъ слѣдующія силы:

$$\begin{aligned} & \text{въ грани } OX_1: -\sigma_x dydz, \quad \tau_{xy} dydz, \quad \tau_{xz} dydz, \\ O_1 X: & \left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx \right) dydz, - \left(\tau_{xy} + \frac{d\tau_{xy}}{dx} dx \right) dydz, - \left(\tau_{xz} + \frac{d\tau_{xz}}{dx} dx \right) dydz, \\ OY_1: & -\sigma_y dxdz, \quad \tau_{yx} dxdz, \quad \tau_{yz} dxdz, \\ O_1 Y: & \left(\sigma_y + \frac{d\sigma_y}{dy} dy \right) dxdz, - \left(\tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} dy \right) dxdz, - \left(\tau_{yz} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} dy \right) dxdz. \\ OZ_1: & -\sigma_z dxdy, \quad \tau_{zx} dxdy, \quad \tau_{zy} dxdy, \\ O_1 Z: & \left(\sigma_z + \frac{d\sigma_z}{dz} dz \right) dxdy, - \left(\tau_{zx} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} dz \right) dxdy, - \left(\tau_{zy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz} dz \right) dxdy. \end{aligned}$$

Точки приложенія этихъ силъ находятся въ центрахъ тяжести соотвѣтственныхъ граней. Кромѣ того въ центрѣ тяжести параллелопипеда дѣйствуетъ его вѣсъ $gdxdydz$, гдѣ g —удѣльный вѣсъ матеріала.

Такъ какъ послѣ видоизмѣненія тѣло во всѣхъ его элементахъ находится въ равновѣсіи, то дѣйствующія на элементарный параллелопипедъ силы должны удовлетворять условіямъ равновѣсія. Если за ось вращенія примемъ прямую, параллельную ребрамъ dy , проходящую черезъ центръ тяжести параллелопипеда, то силы, пересѣкающія эту ось, а также — параллельныя ей, не дадутъ никакого момента, и уравненіе моментовъ—по отношенію

къ этой оси будетъ (пренебрегая измѣненіями измѣреній параллелоипеда) (черт. 6)

$$\left[\tau_{xz} dz dy + \left(\tau_{xz} + \frac{d\tau_{xz}}{dx} dx \right) dy dz \right] \frac{dx}{2} -$$

$$\left[\tau_{zx} dy dx + \left(\tau_{zx} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} dz \right) dy dz \right] \frac{dz}{2} = 0.$$

Пренебрегая очень малыми величинами высшей чѣмъ 3-й степени получимъ послѣ сокращенія на общій множитель $dx dy dz$

$$\tau_{xz} - \tau_{zx} = 0$$

откуда

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \dots \dots \dots (11)$$

Такимъ же образомъ получимъ, принимая за ось моментовъ прямую параллельную ребрамъ dx , и затѣмъ—ребрамъ dy ,

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} \text{ и } \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ:

Скалывающія напряженія двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей, перпендикулярныя къ линіи пересѣченія этихъ плоскостей, равны между собою.

Вслѣдствіе этого свойства будемъ обозначать

$$\tau_{xy} \text{ и } \tau_{yx} \text{ черезъ } \tau_x$$

$$\tau_{xz} \text{ и } \tau_{zx} \quad \text{„} \quad \tau_y$$

$$\tau_{yz} \text{ и } \tau_{zy} \quad \text{„} \quad \tau_z$$

§ 12.

Работа деформациі (*Живое сопротивленіе, работа внутреннихъ силъ*).—Положимъ, что вслѣдствіе видоизмѣненія, произведеннаго дѣйствующими на тѣло внѣшними силами, измѣренія $dx dy dz$ элементарнаго параллелоипеда измѣнились на $\Delta dx \Delta dy \Delta dz$.

Когда тѣло находилось въ естественномъ состояніи, то всѣ напряженія σ и τ были равны 0. Послѣ приложенія внѣшнихъ силъ нормальное напряженіе грани OX_1 возрастало отъ 0 до σ_x , а измѣреніе dx измѣнялось въ то же время отъ dx до $dx + \Delta dx$. Если въ слѣдующій затѣмъ моментъ продольное измѣненіе Δdx измѣнилось на $d\Delta dx$, то нормальная сила $\sigma_x dy dz$ исполнила въ этотъ моментъ работу (пренебрегая очень малыми величинами высшаго порядка)

$$\sigma_x dy \cdot dz \cdot d\Delta dx$$

поэтому работа, которую совершаетъ эта переменная сила во

время деформации элементарного параллелоипеда, определяется выражением

$$\int_{\Delta} \sigma_x dy \cdot dz \cdot d\Delta dx = dy \cdot dz \int_{\Delta} \sigma_x d\Delta dx$$

Изменение других ребер, которые перпендикулярны к σ_x не имеет на работу силы $\sigma_x dy dz$ никакого влияния.

Если не только изменение dx , но и изменения dy и dz получают изменения, то нормальные силы, действующие в гранях параллелоипеда, исполняют работу

$$\begin{aligned} d\delta_1 &= dy \cdot dz \int \sigma_x \cdot d\Delta dx + dx \cdot dz \int \sigma_y d\Delta dy + dx \cdot dy \int \sigma_z d\Delta dz \\ &= dx dy dz \left[\int \sigma_x \frac{d\Delta dx}{dx} + \int \sigma_y \frac{d\Delta dy}{dy} + \int \sigma_z \frac{d\Delta dz}{dz} \right]. \end{aligned}$$

Так как

$$\Delta dx = dx \cdot e_x$$

то

$$d\Delta dx = dx \cdot de_x,$$

следовательно

$$\frac{d\Delta dx}{dx} = de_x, \quad \frac{d\Delta dy}{dy} = de_y, \quad \frac{d\Delta dz}{dz} = de_z.$$

Если эти значения вставим в предыдущие уравнения, и означим объем $dx \cdot dy \cdot dz$ через dv , то получим:

$$d\delta_1 = dv \int [\sigma_x de_x + \sigma_y de_y + \sigma_z de_z] \dots (12)$$

Работа скалывающих сил определяется подобным образом, как и нормальных. Означим величину, на которую вследствие действия внешних сил изменяется угол YOZ (черт. 5), через g_x (показатель указывает ось, к которой плоскость угла перпендикулярна), угол ZOX —через g_y и угол XOY —через g_z .

Если угол g_x изменится на бесконечно малую величину dg_x , то грань YO_1 передвинется по отношению к параллельной ей грани OV_1 в сторону OZ на $dy \cdot dg_x$, и сила $\tau_x dx \cdot dz$, действующая в грани YO_1 перпендикулярно к dx , исполнит работу $\tau_x dx \cdot dz \cdot dy \cdot dg_x$, или: грань ZO_1 передвинется по отношению к грани OZ_1 , в сторону OV на величину $dz \cdot dg_x$, причем сила $\tau_x dx \cdot dy$, действующая в грани ZO_1 перпендикулярно к dx , исполнит работу $\tau_x dx \cdot dy \cdot dz \cdot dg_x$, следовательно в обоих случаях эта работа равна

$$\tau_x dg_x \cdot dx dy dz = dv \tau_x dg_x.$$

Работа, которую эта сила исполняет во время видоизменения параллелоипеда будет поэтому

$$dv \int_0^{g_x} \tau_x dg_x,$$

слідовательно работа всіхъ скалывающихъ силъ параллело-
пипеда опредѣлится изъ выраженія

$$d\mathcal{A} = dv \left[\int \tau_x dg_x + \int \tau_y dg_y + \int \tau_z dg_z \right] \dots \dots (13)$$

Если работу всіхъ внутреннихъ силъ элементарнаго параллело-
пипеда означимъ черезъ $d\mathcal{A}$, то

$$d\mathcal{A} = d\mathcal{A}_1 + d\mathcal{A}_2$$

а изъ (12) и (13) получимъ

$$d\mathcal{A} = dv \left[\left(\int \sigma_x de_x + \int \sigma_y de_y + \int \sigma_z de_z \right) + \left(\int \tau_x dg_x + \right. \right. \\ \left. \left. + \int \tau_y dg_y + \int \tau_z dg_z \right) \right] \dots \dots \dots (14)$$

Для возможности интегрированія этого уравненія нужно е вы-
разить въ функціи σ , и g въ функціи τ , или наоборотъ. Для
этого служатъ уравненія (7) и (9).

По (7)

$$e_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right)$$

$$de_x = \frac{1}{E} \left(d\sigma_x - \frac{d\sigma_y + d\sigma_z}{m} \right)$$

поэтому

$$\int \sigma_x de_x = \frac{1}{E} \left[\int \sigma_x d\sigma_x - \frac{1}{m} \int (\sigma_x d\sigma_y + \sigma_x d\sigma_z) \right]$$

Такимъ же образомъ получимъ

$$\int \sigma_y de_y = \frac{1}{E} \left[\int \sigma_y d\sigma_y - \frac{1}{m} \int (\sigma_y d\sigma_x + \sigma_y d\sigma_z) \right]$$

$$\int \sigma_z de_z = \frac{1}{E} \left[\int \sigma_z d\sigma_z - \frac{1}{m} \int (\sigma_z d\sigma_x + \sigma_z d\sigma_y) \right]$$

Помощію этихъ значеній уравненіе (12) получаетъ видъ

$$p\mathcal{A}_1 = \frac{1}{E} \left[\int \sigma_x d\sigma_x + \int \sigma_y d\sigma_y + \int \sigma_z d\sigma_z \right] - \frac{1}{mE} \left[\int (\sigma_x d\sigma_y + \sigma_y d\sigma_x) + \right. \\ \left. + \int (\sigma_x d\sigma_z + \sigma_z d\sigma_x) + \int (\sigma_y d\sigma_z + \sigma_z d\sigma_y) \right] \\ d\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{mE} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \dots (15)$$

По (9)

$$g_x = \frac{\tau_x}{G}, dg_x = \frac{d\tau_x}{G}$$

$$\int \tau_x dg_x = \frac{1}{G} \int \tau_x d\tau_x = \frac{\tau_x^2}{2G}$$

слѣдовательно также

$$\int \tau_y dg_y = \frac{\tau_y^2}{2G} \quad \int \tau_z d\tau_z = \frac{\tau_z^2}{2G}$$

Уравненіе (13) можно поэтому написать такъ:

$$d\mathcal{H}_2 = \frac{dv}{2G} (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) (16)$$

Помощію (15) и (16) получаемъ для работы внутреннихъ силъ элементарнаго параллелепипеда выраженіе

$$d\mathcal{H} = \frac{dv}{2E} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \right] + \\ + \frac{dv}{2G} (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) (17)$$

Работа всего тѣла равна суммѣ работъ всѣхъ его элементовъ, т. е.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2E} \int (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) dv - \frac{1}{mE} \int (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) dv + \\ + \frac{1}{2G} \int (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) dv (18)$$

§ 13.

Опредѣленіе напряженій σ и τ .— Разобьемъ тѣло, подверженное дѣйствию внѣшнихъ силъ, двумя системами взаимно перпендикулярныхъ плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ ZOU и ZOX , на бесконечно узкія элементарныя призмы. Выдѣлимъ одну такую призму; означимъ размѣры ея поперечнаго сѣченія черезъ dx и dy , а длину—черезъ z (черт. 7).

Разсмотримъ только тотъ, на практикѣ всего чаще встрѣчающійся случай, когда всѣ на призму дѣйствующія силы находятся въ плоскости XU , или распределены по обѣ стороны этой плоскости такимъ образомъ, что ихъ равнодѣйствующія находятся въ ней. При этомъ предположеніи напряженія σ_y, τ_x и τ_z равны нулю, и на призму дѣйствуютъ только силы, представленныя на черт. 7 (для простоты напряженія σ_x и σ_z означены черезъ σ и γ , а напряженіе τ_y черезъ τ); кромѣ того, въ центрѣ тяжести призмы дѣйствуетъ ея вѣсъ $\gamma dx dy.z$, гдѣ γ —вѣсъ единицы объема.

Когда тѣло послѣ видоизмѣненія, произведеннаго внѣшними силами, пришло въ состояніе покоя, то силы, дѣйствующія на

всякій его элементъ, удовлетворяють условіямъ равновѣсія. Изъ этихъ условій получимъ слѣдующія уравненія:

$$\begin{aligned} & -\sigma z dy - \tau z dx + \left(\tau + \frac{d\tau}{dy} dy \right) z dx + \left(\sigma + \frac{d\sigma}{dx} dx \right) z dy = 0 \\ & -\nu z dx - \tau z dy + \left(\nu + \frac{d\nu}{dy} dy \right) z dx + \left(\tau + \frac{d\tau}{dx} dx \right) z dy - \gamma dx dy z = 0 \end{aligned}$$

Послѣ соотвѣтственнаго сокращенія эти выраженія получаютъ видъ



$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx} + \frac{d\tau}{dy} &= 0 \\ \frac{d\tau}{dx} + \frac{d\nu}{dy} &= \gamma \end{aligned} \quad (19)$$

Когда на тѣло дѣйствуютъ только силы, распределенныя по его поверхности, и не существуетъ силъ, дѣйствующихъ на его массу, то $\gamma=0$, и тогда вмѣсто послѣдняго уравненія будемъ имѣть слѣдующее:

$$\frac{d\tau}{dx} + \frac{d\nu}{dy} = 0 \quad (20)$$

Въ дѣйствительности не бываетъ случая, чтобы на массу не дѣйствовала никакая сила, такъ какъ сила тяжести дѣйствуетъ постоянно; но мы можемъ вычислить вліяніе послѣдней отдѣльно, а формулой (20) вмѣстѣ съ первой изъ формулъ (19) будемъ пользоваться для опредѣленія двухъ изъ напряженій σ , ν и τ , произведенныхъ тѣми внѣшними силами, которыя дѣйствуютъ на поверхность тѣла. Дѣйствительныя напряженія будутъ равны суммѣ напряженій, произведенныхъ силами поверхности, и напряженій, произведенныхъ силами массы.

§ 14.

Продолженіе.—Разрѣжемъ элементарную призму, рассмотримъ въ предыдущемъ параграфѣ, діагональной плоскостью ac на двѣ половины; устранимъ верхнюю половину acd , и дѣйствіе ея на плоскость ac нижней половины acb замѣнимъ нормальной силой $szdr$ и $tzdr$, гдѣ dr —длина діагонали ac (черт. 8).

Если уголъ этой діагонали съ осью OX означимъ черезъ α , то пренебрегая очень малыми величинами 3-й степени будемъ имѣть изъ условій равновѣсія:

$$\begin{aligned} szdr - \nu z dx \cos \alpha - \tau z dy \cos \alpha - \tau z dx \sin \alpha - \sigma z dy \sin \alpha &= 0 \\ -tzdr - \nu z dx \sin \alpha - \tau z dy \sin \alpha + \tau z dx \cos \alpha + \sigma z dy \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

133954

Раздѣливъ эти уравненія на zdr , и принявъ во вниманіе, что

$$\frac{dx}{dr} = \cos \alpha \quad \frac{dy}{dr} = \sin \alpha$$

получимъ

$$s = v \cos^2 \alpha + \tau \sin \alpha \cos \alpha + \tau \sin \alpha \cos \alpha + \sigma \sin^2 \alpha$$

$$t = \tau \cos^2 \alpha + \sigma \sin \alpha \cos \alpha - v \sin \alpha \cos \alpha - \tau \sin^2 \alpha$$

Если въ эти уравненія подставимъ слѣдующія значенія

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\text{и } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2},$$

то они, послѣ соотвѣтственнаго сокращенія, получатъ видъ:

$$s = \frac{\sigma + v}{2} - \frac{\sigma - v}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

$$t = \frac{\sigma - v}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Послѣднія уравненія можно написать такъ:

$$s = \frac{\sigma + v}{2} - \cos 2\alpha \left(\frac{\sigma - v}{2} - \tau \tan 2\alpha \right) = \frac{\sigma + v}{2} + \frac{\sigma - v}{2} \frac{\tau \tan 2\alpha}{\sqrt{1 + (\tan 2\alpha)^2}} \quad (23)$$

$$t = \cos 2\alpha \left(\tau + \frac{\sigma - v}{2} \tan 2\alpha \right) = \pm \frac{\tau + \frac{\sigma - v}{2} \tan 2\alpha}{\sqrt{1 + (\tan 2\alpha)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Разложимъ силу, дѣйствующую въ плоскости ac , на горизонтальную и вертикальную слагающую, и означимъ горизонтальное напряженіе этой плоскости черезъ h ; а вертикальное—черезъ v , то изъ черт. 8 получаемъ легко

$$vzdr = szdr \sin \alpha - szdr \cos \alpha$$

$$hzdr = -tzdr \cos \alpha - szdr \sin \alpha$$

откуда

$$v = t \sin \alpha - s \cos \alpha$$

$$h = -t \cos \alpha - s \sin \alpha$$

или, если для s и t вставимъ значенія (21) и (22)

$$\begin{aligned} v &= -(\tau \sin \alpha + v \cos \alpha) \\ h &= -(\sigma \sin \alpha + \tau \cos \alpha) \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

которых дѣйствуютъ предѣльные нормальныя напряжения, перпендикулярны другъ къ другу. Одному изъ этихъ значеній соотвѣствуетъ наибольшее, а другому—наименьшее нормальное напряжение, и по (29)

$$\begin{aligned} S \max &= \frac{\sigma + \nu}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + (\sigma - \nu)^2} \\ S \min &= \frac{\sigma + \nu}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + (\sigma - \nu)^2} \end{aligned} \quad \dots (30)$$

Которое изъ этихъ двухъ значеній максимумъ, а которое минимумъ, рѣшаетъ уравненіе (21).

Предѣльныя значенія скалывающаго напряжения t , въ данной точкѣ получаются изъ условія

$$\frac{dt}{d\alpha} = 0.$$

Если уголъ α для плоскости, въ которой скалывающее напряжение достигаетъ предѣла, означимъ черезъ α_t , то изъ (22) получимъ

$$\frac{dt}{d\alpha} = 2 \frac{\sigma - \nu}{2} \cos 2\alpha_t - 2t \sin 2\alpha_t = 0$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_t = \frac{\sigma - \nu}{2\tau} \quad \dots (31)$$

Помощію этого значенія уравненіе (24) получаетъ видъ, если предѣльное скалывающее напряжение означимъ черезъ T

$$T = \pm \frac{\tau + \frac{\sigma - \nu}{2} \cdot \frac{\sigma - \nu}{2\tau}}{\sqrt{1 + \frac{(\sigma - \nu)^2}{4\tau^2}}}$$

$$T = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + (\sigma - \nu)^2} \quad \dots (32)$$

Когда уголъ α измѣняется отъ 0 до 180° , то онъ принимаетъ два раза значеніе, удовлетворяющее уравненію 31, и оба эти значенія разнятся другъ отъ друга на 90° , т. е. плоскости, въ которыхъ дѣйствуютъ предѣльныя скалывающія напряжения, перпендикулярны между собою. Одному изъ этихъ значеній соотвѣствуетъ наибольшее, а другому наименьшее скалывающее напряжение, и по (32)

$$\begin{aligned} T \max &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma - \nu)^2 + 4\tau^2} \\ T \min &= - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma - \nu)^2 + 4\tau^2} \end{aligned} \quad \dots (33)$$

Изъ этихъ уравненій видно, что предѣльныя скалывающія напряжения равны между собою.

Слагая и вычитая уравненія (30) получаемъ

$$S \max + S \min = \sigma + \nu$$

$$S \max - S \min = \sqrt{4\tau^2 + (\sigma - \nu)^2}$$

и по (33)

$$S \max - S \min = 2T$$

откуда

$$T = \frac{S \max - S \min}{2}$$

Изъ (28) и (31) имѣемъ

$$\operatorname{tg} 2\alpha_s = - \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_t}$$

изъ чего слѣдуетъ

$$\begin{aligned} 2\alpha_s &= 90 + 2\alpha_t \\ \alpha_s &= 45 + \alpha_t. \end{aligned} \quad (34)$$

т. е. плоскости предѣльных нормальныхъ напряженій составляютъ съ плоскостями предѣльныхъ скалывающихъ напряженій углы 45° .

Предѣльныя напряженія называютъ часто главными напряженіями.

§ 16.

Графическое опредѣленіе напряженій s и t .

Радіусомъ $zA = \frac{\sigma + \nu}{2}$ (черт. 9) опишемъ изъ z окружность I, проведемъ горизонтальный діаметръ AzB , отложимъ отъ z на zB

$$zr = \frac{\sigma - \nu}{2}$$

возставимъ въ r къ zB перпендикуляръ rd , отложимъ на немъ

$$\overline{rd} = \tau,$$

соединимъ d съ z , и на zd , какъ на діаметръ, опишемъ окружность II.

Чтобы получить напряженія s и t для плоскости, наклоненной къ горизонтали подъ угломъ α , проводимъ черезъ A прямую Ap подъ угломъ α къ AB , продолжаемъ ее до пересѣченія съ окружностью I въ n , соединяемъ n съ z , опредѣляемъ точку пересѣченія τ прямой nz съ окружностью II, и соединяемъ τ съ d . Получаемъ

$$\overline{n\tau} = s, \quad \overline{\tau d} = t$$

Въ самомъ дѣлѣ: опустимъ изъ r на nz и $d\tau$ перпендикуляры rp и rq , то

$$\overline{zq} = \frac{\sigma - \nu}{2} \cos 2\alpha \quad \overline{rq} = \frac{\sigma - \nu}{2} \sin 2\alpha$$

$$\tau d = d q_1 + q_1 \tau = \tau \cos 2\alpha + \frac{\sigma - \nu}{2} \sin 2\alpha = t$$

$$n\tau = n z - z q + q \tau = \frac{\sigma + \nu}{2} - \frac{\sigma - \nu}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha = s$$

следовательно, по (21) и (22)

$$\tau d = t, \quad n\tau = s.$$

Если соединимъ n съ d , то

$$nd = r = \sqrt{s^2 + t^2}$$

$$\text{и } \angle \tau nd = \delta$$

Продолжимъ nd до пересѣченія съ окружностью I въ δ и соединимъ δ съ A , то δA —дѣйствительное направленіе равнодѣйствующаго напряженія r . Потому что, если въ A возставимъ къ nA перпендикуляръ An_1 , встрѣчающій окружность I въ n_1 , то

$$\angle n_1 A \delta = \angle \tau nd.$$

Если тоже построеніе повторимъ для плоскости $a_1 b_1$, перпендикулярной къ ab , то получимъ

$$s_1 = n_1 \tau, \quad t_1 = \tau d, \quad r_1 = d n_1, \quad \delta_1 = \angle d n_1 \tau$$

r_1 совпадаетъ съ направленіемъ $\delta_1 A$.

Такъ какъ

$$\overline{mn_1} = 2Az = 2 \frac{\sigma + \nu}{2}$$

$$\text{и } \overline{mn_1} = n\tau + \tau n_1 = s + s_1, \text{ то}$$

$$s + s_1 = \sigma + \nu$$

т. е. сумма нормальныхъ напряженій въ данной точкѣ для всѣхъ паръ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей—величина постоянная.

Изъ построенія видно, что скалывающія напряженія въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ—численно равны между собою.

Предѣльные нормальныя напряженія. Когда элементъ $a_1 b_1$ вращается около точки A , то дѣйствующее на него нормальное напряженіе s вращается около z , и равно $n_1 \tau = n_1 z + z \tau$. Во время этого вращенія измѣняется только $z \tau$, $n_1 \tau$ сдѣлается поэтому максимумъ для такого положенія плоскости $a_1 b_1$, для котораго $z \tau$ будетъ максимумъ, т. е. для котораго $z \tau$ сдѣлается діаметромъ круга II (черт. 10). Нормальное напряженіе $n \tau$ плоскости ab , перпендикулярной къ $a_1 b_1$, будетъ въ тоже время минимумъ, и ноо = nd , а касательное напряженіе $t = 0$.

Изъ черт. 10 получаемъ

$$tg (180 - 2\alpha_s) = -tg 2\alpha_s = \frac{rd}{rz} = \frac{\tau}{\sigma - \nu}$$

или

$$tg 2\alpha_s = -\frac{2\tau}{\sigma - \nu}$$

$$S \max = n_1 \tau = n_1 z + \tau z = \frac{\sigma + \nu}{2} + \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma - \nu}{2}\right)^2}$$

$$S \min = n\tau = nz - z\tau = \frac{\sigma + \nu}{2} - \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma - \nu}{2}\right)^2}$$

Радиусъ вѣшняго круга I

$$zn = \frac{S \max + S \min}{2}$$

Диаметръ круга II

$$zd = \frac{S \max - S \min}{2}$$

Предѣльные скалывающія напряженія. Скалывающее напряженіе t изображается хордой $d\tau$ (черт. 9), которая достигаетъ предѣльнаго значенія, когда сдѣлается діаметромъ (черт. 11). Такъ какъ въ этомъ случаѣ точка τ совпадаетъ съ точкой z , то m_1 дѣлается касательной къ окружности II.

Изъ черт. 11 получаемъ

$$\max t = zd = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma - \nu}{2}\right)^2}$$

$$\min t = -zd = -\sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma - \nu}{2}\right)^2}$$

$$tg \varphi = tg (90 - 2\alpha_t) = cotg 2\alpha_t = \frac{dr}{rz} = \frac{\tau}{\sigma - \nu}$$

$$cotg 2\alpha_t = \frac{2\tau}{\sigma - \nu}$$

$$tg \delta_t = \frac{zd}{zm} = \frac{S \max - S \min}{S \max + S \min}$$

Изъ черт. 12 видно, что плоскости ab и a_1b_1 , въ которыхъ дѣйствуютъ предѣльныя нормальныя напряженія, составляютъ съ плоскостями $\alpha\beta$ и $\alpha_1\beta_1$, соотвѣтствующими предѣльнымъ скалывающимъ напряженіямъ, углы въ 45° .

§ 17.

Работа деформациі тѣла, подвергаемаго одному только нормальному напряженію σ_x .—Когда всѣ напряжения σ и τ , за исключеніемъ одного σ_x , которое въ этомъ случаѣ означимъ просто черезъ σ , равны нулю, то уравненіе (18) получаетъ видъ:

$$\gamma = \frac{1}{2E} \int \sigma^2 dv \dots \dots \dots (35)$$

Тѣло подвергается одному напряженію σ когда равнодѣйствующая приложенныхъ къ нему силъ проходитъ черезъ его ось и совпадаетъ съ этой осью, т. е. когда тѣло растягивается или сжимается. Если эту равнодѣйствующую означимъ черезъ P , а площади сѣченія тѣла, перпендикулярнаго къ ней черезъ Ω , то

$$\sigma = \frac{P}{\Omega}.$$

Для призматическаго тѣла Ω постоянно, а слѣдовательно и σ постоянно, и тогда

$$\gamma = \frac{\sigma^2}{2E} \int dv = \frac{\sigma^2 v}{2E} \dots \dots \dots (36)$$

Если l — длина тѣла, то

$$v = l\Omega,$$

последнее уравненіе можно поэтому написать такъ:

$$\gamma = \frac{\sigma^2 l \Omega}{2E} \dots \dots \dots (37)$$

Означимъ удлинненіе, произведенное напряженіемъ σ или силой $\sigma\Omega$, черезъ λ , то по (4)

$$\sigma = \frac{\lambda E}{l}.$$

Подставивъ это значеніе въ (37), получимъ

$$\gamma = \frac{E \lambda^2 \Omega}{2l} \dots \dots \dots (38)$$

§ 18.

Работа деформациі, произведенная грузомъ, приложеннымъ съ начальной скоростью.—Положимъ, что сила P приложена къ призматическому тѣлу съ начальной скоростью v_0 , и что послѣ извѣстнаго промежутка времени, въ теченіе котораго эта сила произвела удлинненіе λ , скорость его сдѣлалась равной v .

Если означимъ ускореніе силы тяжести черезъ g , то въ теченіе этого промежутка живая сила груза P измѣнилась на

$$\frac{P}{g} \frac{v^2}{2} - \frac{P}{g} \frac{v_0^2}{2}.$$

Такъ какъ точка приложенія груза прошла путь λ , то онъ сдѣлалъ работу $P\lambda$, а сила упругости, по (38),—отрицательную работу $\frac{E\lambda^2\Omega}{2l}$, слѣдовательно по извѣстному закону работы

$$\frac{P}{2g} (v^2 - v_0^2) = P\lambda - \frac{E\lambda^2\Omega}{2l},$$

откуда работа деформациі

$$\mathcal{A} = \frac{E\lambda^2\Omega}{2l} = P\lambda - \frac{P}{2g} (v^2 - v_0^2). \quad *)$$

Когда начальная скорость v_0 груза, вслѣдствіе его встрѣчи съ тѣломъ, замедляется до нуля, то въ (39) $v=0$, и тогда

$$\mathcal{A} = \frac{E\lambda^2\Omega}{2l} = P\lambda + \frac{Pv_0^2}{2g}$$

т. е. работа деформациі въ этомъ случаѣ равна работѣ груза, сложенной съ начальной живой силой груза.

Очевидно, что уравненія (39) и (40) дѣйствительны только для напряженій σ , не превышающихъ предѣла упругости, или что одно и то же, для удлиненій λ , не превышающихъ предѣльное упругое удлиненіе.

Работа видоизмѣненія призматическаго тѣла для напряженій большихъ предѣла упругости, получается по (14) изъ выраженія

$$\mathcal{A} = \int dv \int \sigma de.$$

Такъ какъ въ призматическомъ брусь σ и de въ каждый моментъ для всѣхъ элементовъ dv одинаковы, то можно написать

$$\mathcal{A} = \int \sigma de \int dV = V \int \sigma de \dots \dots \dots (41)$$

$\int \sigma de$ выражаетъ площадь кривой, которой абсциссы— e , а ординаты— σ . Работа $\mathcal{A}$ можетъ поэтому быть опредѣлена ошитами. Для сего откладываемъ величины относительнаго удлин-

*) Для тѣла съ непостояннымъ поперечнымъ сѣченіемъ было бы нужно въ

уравненіи (39) вмѣсто $\frac{E\lambda^2\Omega}{2l}$ поставить $\frac{1}{2E} \int \sigma^2 dv$

нія e , получаема по мѣрѣ возрастанія груза P , какъ абсциссы, а соотвѣтствующія имъ напряженія σ —какъ ординаты; площадь полученной такимъ образомъ кривой, ограниченная крайними ординатами, представитъ работу деформаци, отнесенную къ единицѣ объема.

§ 19.

Живое сопротивленіе. — Выраженіемъ работы деформаци пользуются для опредѣленія сопротивленія, какое вызывается въ тѣлѣ подвижнымъ грузомъ, обладающимъ живою силою или механическимъ запасомъ работы, вслѣдствіе чего эту работу, отнесенную къ единицѣ объема, называютъ *живымъ сопротивленіемъ*.

Живое сопротивленіе называется *живымъ упругимъ сопротивленіемъ*, если оно соотвѣтствуетъ продольному измѣненію, равному предѣльному упругому измѣненію, и *живымъ временнымъ сопротивленіемъ*, когда это измѣненіе доведено до разрушенія сцѣпленія.

Размѣры сооружений, подвергаемыхъ дѣйствію подвижнаго груза, должны быть опредѣлены такимъ образомъ, чтобы ихъ напряженія, производимыя динамическимъ грузомъ, вообще не превышали живаго упругаго сопротивленія.

§ 20.

Вліяніе колебаній напряженій.—Вліяніе подвижнаго груза на крѣпость матеріала оказывается тѣмъ болѣе вреднымъ, чѣмъ чаще его дѣйствіе повторяется. Мы разсмотримъ два практическихъ случая повторенія дѣйствія плавнаго груза (дѣйствующаго безъ сотрясеній):

1) Матеріалъ послѣ каждаго повторенія дѣйствія освобождается отъ всякаго напряженія.

2) Предѣльныя напряженія каждаго повторенія равны и противоположны.

Первый случай.—Когда грузъ P приложенъ къ призматическому тѣлу безъ начальной скорости, то онъ перемѣщается только вслѣдствіе имъ самымъ производимаго удлиненія, и по (39) при $v=v_0=0$

$$\frac{E\lambda^2\Omega}{2l} = P\lambda,$$

откуда—наибольшее удлиненіе при динамическомъ дѣйствіи груза

$$\lambda = \frac{2Pl}{E\Omega} \dots \dots \dots (42)$$

Статическое удлинение, производимое грузомъ P по (6),

$$\Delta l = \frac{Pl}{E\Omega},$$

изъ чего видимъ, что вслѣдствіе живой силой, развивающейся при приложеніи груза, продольное измѣненіе въ первый моментъ вдвое больше того, какое соотвѣтствуетъ статическому равновѣсію тѣла.

Послѣ удлиненія тѣло укорачивается до первоначальной длины, затѣмъ испытываетъ по направленію его оси качанія, которыхъ первоначальная амплитуда $\lambda = 2\Delta l$ вслѣдствіе различнаго рода виѣшнихъ и внутреннихъ сопротивленій постепенно уменьшается, пока тѣло наконецъ не приметъ форму равновѣсія, опредѣленную уравненіемъ (6).

Второй случай. Когда грузъ P приложенъ къ призматическому тѣлу длиной l , то по наступленіи равновѣсія его длина измѣнилась на величину $\lambda = \frac{Pl}{E\Omega}$.

Если вслѣдъ за этимъ направленіе силы P сдѣлается прямо противоположнымъ, то въ первый моментъ тѣло будетъ стремиться принять первоначальную длину, и укоротится на λ . Начальная скорость этого періода $= 0$, а конечная $= v$, а такъ какъ сила упругости дѣйствуетъ по тому же направленію, что сила P , то по (39)

$$\frac{E\lambda^2\Omega}{2l} + P\lambda = \frac{P}{2g}v^2 \dots \dots \dots (43)$$

Во время слѣдующаго періода грузъ P измѣняетъ длину тѣла по направленію противоположному предыдущему измѣненію; начальная скорость этого періода равна конечной скорости перваго, а конечная—равна нулю. Если μ —величина этого измѣненія, то по (39)

$$\frac{E\mu^2\Omega}{2l} - P\mu = \frac{P}{2g}v^2 \dots \dots \dots (44)$$

Изъ (43) и (44) имѣемъ

$$\frac{E\mu^2\Omega}{2l} - P\mu = \frac{E\lambda^2\Omega}{2l} + P\lambda$$

или, такъ какъ $P = \frac{E\lambda\Omega}{l}$,

$$\frac{E\mu^2\Omega}{2l} - \frac{E\lambda\Omega}{l}\mu = \frac{E\lambda^2\Omega}{2l} + \frac{E\lambda^2\Omega}{l}$$

и послѣ соотвѣстнаго сокрашенія

$$\mu^2 - 2\mu\lambda = 3\lambda^2,$$

откуда

$$\mu = 3\lambda \dots \dots \dots (45)$$

т. е. когда предѣльные напряженія одного повторенія равны и противоположны, то продольное измѣненіе втрое больше статического измѣненія.

Если поэтому продольное измѣненіе тѣла по наступленіи равновѣсія означимъ черезъ λ , то при повторенномъ прикладываніи груза по одному направленію это измѣненіе будетъ 2λ , а по противоположнымъ направленіямъ— 3λ . Изъ этого слѣдуетъ, что для достиженія одинаковой прочности допускаемая нагрузка должна быть въ послѣднемъ случаѣ — втрое, а въ первомъ — вдвое меньше, чѣмъ въ случаѣ неподвижнаго дѣйствія груза.

§ 21.

Вліяніе ударовъ.—Удары дѣйствуютъ на тѣло динамическимъ образомъ; производимыя ими напряженія опредѣляются поэтому помощію работы деформаціи. Такъ какъ теорія удара для случаевъ, имѣющихъ мѣсто въ сооруженіяхъ, весьма несовершенна, то производимыя ударами напряженія не могутъ быть опредѣлены теоретически съ достаточной для практики приближенностью. Вслѣдствіе того вліяніе ударовъ расчетомъ не опредѣляютъ, и принимаютъ его во вниманіе отъ части соотвѣтственнымъ увеличеніемъ напряженій, полученныхъ для покойнаго груза, и отъ части выборомъ матеріала, обладающаго достаточнымъ живымъ сопротивленіемъ. Такъ какъ послѣднее пропорціонально грузу и удлиненію, то слѣдуетъ, что матеріалъ, дающій значительное удлиненіе, можетъ при малой крѣпости обладать для ударовъ бѣльшимъ сопротивленіемъ, чѣмъ матеріалъ съ высокою крѣпостію, но малой способностью удлиняться.

Опыты показываютъ, что мягкіе металлы, не смотря на свою низкую крѣпость, сопротивляются динамическому грузу, дѣйствующему съ ударами, значительно лучше чѣмъ твердые, которые разрушаются при меньшемъ видоизмѣненіи. По Ардану и Борне, производившимъ въ этомъ отношеніи опыты надъ желѣзомъ различной твердости, мягкое желѣзо, котораго временное сопротивленіе покойному грузу 32 кил. на 1 квадр. миллиметръ, имѣетъ въ 53 раза большее сопротивленіе динамическому грузу чѣмъ твердое желѣзо съ временнымъ сопротивленіемъ въ 60 кил. на 1 кв. миллиметръ. Хотя поэтому первое разрывается при усиліи почти вдвое меньшемъ, но выдерживаетъ безопасно гораздо большіе удары, чѣмъ послѣднее. Вслѣдствіе того для частей, подверженныхъ грузу, дѣйствующему съ ударами, слѣ-

дуетъ употреблять мягкіе сорта желѣза и стали, а твердые можно брать только для такихъ сооруженій, на которыя дѣйствуетъ покойная нагрузка.

§ 22

Нагрузка и сопротивленіе.—Наименьшій грузъ отъ дѣйствія котораго въ теченіе короткаго времени тѣло разрушается, называется *разрушающимъ грузомъ*, а часть разрушающаго груза, приходящаяся на единицу площади сѣченія, въ которомъ произошло разрушеніе сдѣлленія—*модулемъ крѣпости*.

Наибольшая величина силы упругости, отнесенная къ единицѣ площади, проявляющаяся въ моментъ передъ разрушеніемъ тѣла отъ дѣйствія спокойной нагрузки, называется *временнымъ сопротивленіемъ*.

Нагрузка, которую матеріалъ можетъ выдерживать безопасно, называется *безопасной нагрузкой*, а ея наибольшая величина, допускаемая на практикѣ,—*допускаемой нагрузкой*.

Сила упругости, отнесенная къ единицѣ площади, допускаемая безопасно въ сооруженіяхъ, называется *прочнымъ или допускаемымъ напряженіемъ*.

Прежде принимали за допускаемое напряженіе извѣстную часть временнаго сопротивленія, и называли отношеніе временнаго сопротивленія къ прочному напряженію—*степенью прочности*, а обратную величину степени прочности — *коэффициентомъ прочности*.

Степень прочности принимаютъ тѣмъ большую, чѣмъ большее вліяніе на прочность матеріала въ данномъ сооруженіи могутъ имѣть постороннія обстоятельства, какъ удары и сотрясенія, производимыя движущимися массами, перемѣны температуры, атмосфера и т. д.

Среднія величины степеней прочности приведены въ таблицѣ II.

Если коэффициентъ прочности означимъ черезъ $\frac{1}{p}$, модуль крѣпости черезъ R , а допускаемое напряженіе черезъ k , то

$$k = \frac{1}{p} R \dots \dots \dots (46)$$

Въ таблицѣ III приведены числовыя данныя для модуля упругости, предѣла упругости, модуля крѣпости и допускаемаго напряженія. Числа даны въ килограммахъ на квадратный миллиметръ. Эти числа для различныхъ матеріаловъ—среднія, они выведены изъ многочисленныхъ опытовъ надъ матеріалами различного качества.

Къ временнымъ сооруженіямъ принадлежатъ лѣса, временные мосты и прочія краткосрочныя сооружения, а также постоянныя сооружения, на которыя дѣйствуетъ неподвижная нагрузка.

Допускаемыя напряженія, данныя въ графѣ „зданія и прочія сооружения“ дѣйствительны для такихъ частей, которыя испытываютъ небольшіе удары и сотрясенія.

Большія значенія прочнаго сопротивленія, помѣщенные въ графѣ „стропила и мосты“ относятся къ ихъ длиннымъ частямъ, на которыя сотрясенія имѣютъ менѣе вліянія (какъ ноги стропиль, пояса мостовыхъ фермъ), а меньшія — къ короткимъ частямъ (поперечныя и продольныя балочки, раскосы фермъ и т. д.). Тѣже числа можно употреблять для частей машинъ, испытывающихъ небольшія сотрясенія.

§ 23.

Старый способъ опредѣленія размѣровъ поперечныхъ сѣченій. — Прежде опредѣляли площадь Ω поперечнаго сѣченія всякой части сооружения такимъ образомъ, что статическимъ путемъ находили ея наибольшее сопротивленіе N и дѣлили его на допускаемое напряженіе k , т. е. вычисляли Ω по формулѣ

$$\Omega = \frac{N}{k} \dots \dots \dots (47)$$

Если k равнялось $\frac{1}{p}$ части модуля крѣпости, то говорили, что сооруженіе построено съ p кратной прочностью. Что такое мнѣніе невѣрно, показываютъ уравненія (42) и (45), по которымъ подвижной грузъ производитъ въ моментъ приложенія, смотря по роду колебанія напряженій, напряженіе вдвое и втрое большее статическаго, производимаго имъ въ неподвижномъ положеніи.

Если прикладываніе груза часто повторяется, то и эти увеличенныя напряженія будутъ часто повторяться, вслѣдствіе чего при одномъ и томъ же коэффициентѣ прочности $\frac{1}{p}$ сооруженіе, которое послѣ каждаго повторенія приходитъ въ ненапряженное состояніе, будетъ имѣть при одинаковыхъ прочихъ обстоятельствахъ вдвое, а которое при каждомъ повтореніи испытываетъ равныя и противоположныя напряженія — втрое меньшую прочность чѣмъ то, на которое дѣйствуетъ неподвижная нагрузка. При этомъ сравненіи не принято еще во вниманіе вліяніе ударовъ и сотрясеній.

Это, теоретическимъ путемъ полученное, заключеніе о вліяніи динамическаго дѣйствія груза на сопротивленіе матеріала вполне подтверждается опытами.

§ 24.

Новый способ опредѣленія размѣровъ поперечныхъ сѣченій.—Надъ вліяніемъ повторенныхъ напряженій на крѣпость матеріала производили весьма обстоятельные опыты инженеръ Велеръ и профессоръ Шпангенбергъ въ Берлинѣ, профессоръ Баушингеръ въ Мюнхенѣ, инженеръ Considère въ Парижѣ и др.

Опыты Велера продолжались 12 лѣтъ (1859—1871). Изъ полученныхъ помощію ихъ результатовъ Велеръ вывелъ слѣдующіе законы крѣпости, которые всѣми послѣдующими опытами, произведенными другими испытателями, вполне подтвердились:

1) Разрушеніе матеріала можетъ произойти не только отъ нагрузки, равной разрушающему грузу (§ 28), но также отъ значительно меньшей нагрузки, если она повторяется достаточное число разъ.

2) Число повтореній напряженій, производящихъ разрушеніе, тѣмъ меньше:

а) чѣмъ больше наибольшее напряженіе при одинаковомъ наименьшемъ;

б) чѣмъ меньше наименьшее напряженіе при одинаковомъ наибольшемъ.

Изъ (2) слѣдуетъ

3) число повтореній напряженій, нужныхъ для разрушенія матеріала тѣмъ больше, чѣмъ меньше разность между наибольшимъ и наименьшимъ напряженіемъ каждаго повторенія. Замѣтимъ при этомъ, что согласно опытамъ, увеличеніе наибольшаго напряженія болѣе невыгодно при одной и той же разности напряженій, чѣмъ уменьшеніе наименьшаго.

4) Если наибольшее напряженіе меньше извѣстнаго предѣла, то разрушеніе не произойдетъ, какъ велико ни было бы число повтореній, т. е. число повтореній, производящихъ разрушеніе, въ этомъ случаѣ безконечно велико.

Пусть

π —число повтореній напряженій, нужныхъ для излома какой-нибудь части сооруженія,

N —наибольшее и

n —наименьшее сопротивленіе каждаго повторенія,

то, согласно третьему закону Велера, число π должно быть функцией не разности $N-n$, но разности $\alpha N-n$, въ которой коэффициентъ α выражаетъ болѣе сильное вліяніе на π величины N , чѣмъ его имѣетъ величина n .

Законы Велера могутъ поэтому быть выражены алгебраической функцией вида

$$\frac{1}{\pi} = f(\alpha N - n).$$

Если въ известной общей формулѣ

$$y = a + bx + cx^2 + \dots$$

поставимъ

$$y = \frac{1}{\pi} \text{ и } x = \alpha N - n,$$

то получимъ

$$\frac{1}{\pi} = a + b(\alpha N - n) + c(\alpha N - n)^2 + \dots \quad (48)$$

Если этотъ рядъ окончимъ н. пр. третьимъ членомъ, то по-мощію четырехъ опытовъ было бы возможно опредѣлить коэффи-циенты a , b , c и α ; если бы число опытовъ было больше, то по-мощію метода наименьшихъ квадратовъ получились бы для этихъ коэффиціентовъ удовлетворительныя практическія величины.

Для $N=n$, уравненіе (48) получаетъ видъ

$$\frac{1}{\pi} = a + bN(\alpha - 1) + cN^2(\alpha - 1) + \dots$$

Когда N очень мало, то по 4-му закону Велера $\pi = \infty$, слѣдо-вательно для $N = 0$ и $\frac{1}{\pi} = 0$, поэтому

$$a = 0$$

и уравненіе крѣпости можно написать такъ:

$$\frac{1}{\pi} = b(\alpha N - n) + c(\alpha N - n)^2 + d(\alpha N - n)^3 + \dots$$

Опыты показываютъ, что отношеніе, въ какомъ уменьшается π при увеличеніи N , выше чѣмъ 2-й степени, такъ что для практическаго употребленія слѣдуетъ взять по крайней мѣрѣ 3 члена, т. е.

$$\frac{1}{\pi} = b(\alpha N - n) + c(\alpha N - n)^2 + d(\alpha N - n)^3 \dots \quad (49)$$

Для долговѣчныхъ сооруженій должно $\pi = \infty$, и зависимость между напряжениями долговѣчныхъ сооруженій опредѣлится урав-неніемъ

$$b(\alpha N - n) + c(\alpha N - n)^2 + d(\alpha N - n)^3 = 0$$

или

$$b + c(\alpha N - n) + d(\alpha N - n)^2 = 0 \dots \dots \dots (50)$$

Означимъ наибольшее и наименьшее сопротивленіе, повто-реніе которыхъ матеріалъ можетъ выдержать безконечное число разъ:

а) когда наименьшее напряженіе каждаго повторенія равно наибольшему—черезъ K и K ,

б) когда наименьшее напряжение = 0 — черезъ $\mathfrak{N}$ и θ .

в) Когда наименьшее напряжение равно, но противоположно наибольшему — черезъ S и $-S$.

Для этихъ трехъ случаевъ получимъ по (50) слѣдующія уравненія:

$$b + cK(\alpha - 1) + dK^2(\alpha - 1)^2 = 0 \quad (51)$$

$$b + c\alpha\mathfrak{N} + d\alpha^2\mathfrak{N}^2 = 0 \quad (52)$$

$$b + cS(\alpha + 1) + dS^2(\alpha + 1)^2 = 0 \quad (53)$$

изъ которыхъ получаемъ:

$$\alpha\mathfrak{N} = K(\alpha - 1) \cdot \alpha = \frac{K}{K - \mathfrak{N}} \quad (54)$$

$$\text{и } \alpha\mathfrak{N} = S(\alpha + 1) \cdot \alpha = \frac{S}{\mathfrak{N} - S} \quad (55)$$

Если для K , $\mathfrak{N}$ и S подставимъ въ уравненіяхъ (54) и (55) опредѣленные опытами численные значенія, то получаются для α не совсѣмъ одинаковыя величины. Причина тому заключается отчасти въ томъ, что металлъ проявляетъ при сжатіи не совсѣмъ тѣже свойства, что при растяженіи, а также, вѣроятно, въ недостаточномъ числѣ членовъ, взятыхъ въ уравненіи (49).

Хотя разница значеній α , получаемыхъ для одного и того же матеріала по формуламъ (54) и (55), такъ небольшая, что въ практикѣ ея можно бы пренебрегать, но для большей точности мы будемъ принимать за α среднее арифметическое обонихъ значеній. Оказывается также цѣлесообразнымъ для частей, которыхъ предѣльные напряжения однородны, опредѣлять α по (54), а для частей съ разнородными напряжениями пользоваться уравненіемъ (55).

Изъ уравненій (50) и (52) получаемъ

$$-c\alpha\mathfrak{N} - d\alpha^2\mathfrak{N}^2 + c(\alpha N - n) + d(\alpha N - n)^2 = 0$$

$$c[(\alpha N - n) - \alpha\mathfrak{N}] = -d[(\alpha N - n)^2 - \alpha^2\mathfrak{N}^2]$$

$$\frac{c}{d} = -[(\alpha N - n) + \alpha\mathfrak{N}].$$

Такимъ же образомъ получимъ изъ уравненій (50) и (51)

$$\frac{c}{d} = -[K(\alpha - 1) + \alpha\mathfrak{N}],$$

слѣдовательно

$$(\alpha N - n) + \alpha\mathfrak{N} = K(\alpha - 1) + \alpha\mathfrak{N}$$

или

$$\alpha N - n = K(\alpha - 1)$$

Если отношеніе наименьшаго напряженія къ наибольшему, т. е. $\frac{n}{N}$, означимъ черезъ ω , то изъ послѣдняго уравненія имѣемъ

$$\alpha - \omega = \frac{K}{N}(\alpha - 1),$$

откуда

$$N = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \omega} K = \frac{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) K}{1 - \frac{\omega}{\alpha}} \quad (56)$$

По (54)

$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{\mathfrak{N}}{K},$$

слѣдовательно также

$$N = \frac{\mathfrak{N}}{1 - \frac{\omega}{\alpha}} \quad (57)$$

Изъ уравненій (50) и (53) получаемъ для случая, когда предѣльные напряженія противоположны, слѣдовательно — отрицательно, выраженіе

$$c [(\alpha N + n) - S(\alpha + 1)] = -d [(\alpha N + n)^2 - S^2(\alpha + 1)^2]$$

$$\frac{c}{d} = -[(\alpha N + n) + S(\alpha + 1)].$$

Такимъ же образомъ, изъ (52) и (53)

$$\frac{c}{d} = -[S(\alpha + 1) + \alpha \mathfrak{N}].$$

Слѣдовательно

$$(\alpha N + n) + S(\alpha + 1) = \alpha \mathfrak{N} + S(\alpha + 1),$$

откуда, означивъ отношеніе $\frac{n}{N}$ черезъ ω

$$N = \frac{\alpha}{\alpha + \omega} \mathfrak{N} \quad (58)$$

или

$$N = \frac{\mathfrak{N}}{1 + \frac{\omega}{\alpha}} \quad (59)$$

Изъ уравненій (57) и (59) видно, что для опредѣленія такого наибольшаго напряженія N , которое можетъ произвести разрушеніе матеріала только послѣ безконечно большаго числа повтореній, нужно вычислить оба предѣльные напряженія, и опредѣлить ихъ отношеніе ω . Между тѣмъ какъ при расчетахъ по старому методу достаточно было знать только наибольшее напряженіе каждаго повторенія, нужно по новому методу, кромѣ наибольшаго, опредѣлять и наименьшее напряженіе.

Въ формулахъ (57) и (59) не приняты во вниманіе вліянія ударовъ и сотрясеній, неоднородности матеріала и другихъ,

теоретически неопредѣлимыхъ обстоятельствъ. Эти вліянія принимаютъ въ расчетъ такимъ образомъ, что за допускаемое напряженіе берутъ не всю величину N , опредѣленную уравненіями (57) и (59), но только нѣкоторую часть ея, т. е. умножаютъ N на коэффициентъ прочности $\frac{1}{p}$. Безъ коэффициента прочности невозможно поэтому обойтись и при расчетахъ по новому методу, только теперь онъ можетъ быть болѣе близкимъ къ единицѣ, чѣмъ при употребленіи стараго метода.

Оказывается достаточнымъ для сооружений, подвергаемыхъ сильнымъ толчкамъ (железнодорожныхъ мостовъ и т. п.) брать для желѣза и стали $p=3$,
для дерева $p=6$.

Если допускаемое напряженіе означимъ черезъ k , то для однородныхъ предѣльныхъ напряженій

$$k = \frac{N}{p} \frac{1}{1 - \frac{\omega}{\alpha}} \quad (60)$$

и для разнородныхъ

$$k = \frac{N}{p} \frac{1}{1 + \frac{\omega}{\alpha}} \quad (61)$$

§ 25.

Числовыя значенія допускаемаго напряженія для мостовыхъ и имъ подобныхъ сооружений.—Чтобы числовыя данныя допускаемаго напряженія были дѣйствительны и для менѣ хорошихъ сортовъ, мы воспользуемся только наиминизшими величинами, полученными изъ опытовъ надъ сопротивленіемъ матеріала при повторенныхъ напряженіяхъ.

а) *Жельзо*. Въ слѣдующей таблицѣ приведены наименьшія значенія напряженій K , N и S , выраженные въ килограммахъ на 1 квадратный миллиметръ, полученные изъ опытовъ надъ тремя сортами желѣза.

Таблица IV.

Происхожденіе матеріала.	K.	N.	S.	$\alpha = \frac{K}{K-N}$	$\alpha = \frac{S}{N-S}$
Ось завода Фениксъ .	32,2	21,9	11,7	3,12	1,15
Однородное желѣзо					
Пирсона	42,8	29,2	17,5	3,14	1,50
Вестфальское желѣзо.	—	23,4	17,5	—	2,53
Среднее значеніе				3,13	1,72

$$\text{Беремъ: } \alpha = \frac{3,13 + 1,72}{2} = 2,42$$

$$\frac{1}{\alpha} = 0,4 \quad \mathfrak{N} = 21.$$

Поэтому

а) для однородныхъ напряжений, по (60)

$$k = \frac{21}{3} \cdot \frac{1}{1-0,4\omega} = \frac{7}{1-0,4\omega} \dots \dots \dots (62)$$

б) для разнородныхъ напряжений по (61)

$$k = \frac{7}{1+0,4\omega} \dots \dots \dots (62)$$

б) *Мякая Сталь.* Для мягкой стали, содержащей около 0,45 % углерода, получаются изъ таблицъ Велера слѣдующія наименьшія величины для K , $\mathfrak{N}$ и S , выраженные въ килограммахъ на 1 квадратный миллиметръ:

Таблица V.

Родъ матеріала.	K.	$\mathfrak{N}$.	S.	$\alpha = \frac{K}{K-\mathfrak{N}}$	$\alpha = \frac{S}{N-S}$
Литая сталь завода Бо-хумъ	64,7	32,9	19,0	2,04	0,37
Литая сталь завода Викерсъ	42,4	—	16,1	—	—
Литая сталь завода Борзигъ	58,6	—	14,6	—	—
Листовая сталь . . .	53,4	36,5	—	3,16	—
Среднее				2,6	1,37

$$\alpha = \frac{2,6 + 1,37}{2} = 2,01 \quad \frac{1}{\alpha} = 0,5 \quad \mathfrak{N} = 32.$$

Для однородныхъ напряжений, по (60)

$$k = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{1-0,5\omega} = \frac{10}{1-0,5\omega} \dots \dots \dots (63)$$

и для разнородныхъ, по (61)

$$k = \frac{10}{1+0,5\omega}$$

в) *Твердая, литая, незакаленная сталь* (содержащая около 0,6% углерода).

Для этой стали получаемъ изъ опытовъ Шпангенберга слѣдующую таблицу:

Таблица VI.

Родъ матеріала	K.	N.	S.	$\alpha = \frac{S}{K-N}$	$\alpha = \frac{S}{N-S}$
Ось 1862	76,2	36,5	19,0	1,92	1,09
Сталь Firth	84,0	—	16,1	—	—
Среднее				1,92	1,09

$$\alpha = \frac{1,92 + 1,09}{2} = 1,5$$

$$\frac{1}{\alpha} = 0,7 \quad N = 36$$

$$k = \frac{36}{3} \frac{1}{1 \mp 0,7\omega} = \frac{12}{1 \mp 0,7\omega} \dots (64)$$

г) *Дерево*.—Соотвѣтственно практическимъ даннымъ можно взять для дерева среднимъ числомъ (въ килограммахъ на 1 квадратный миллиметр).

$$K=6, \quad N=2, \quad S=1,3.$$

Поэтому

$$\alpha = \frac{K}{K-N} = \frac{6}{4} \quad \alpha = \frac{S}{N-S} = 1,85$$

Среднее изъ обонхъ значеній

$$\alpha = \frac{1,5 + 1,85}{2} = 1,7 \quad \frac{1}{\alpha} = 0,6$$

Вслѣдствіе вреднаго вліянія атмосферы нужно взять для дерева: для постоянныхъ сооружений $p=6$ и для временныхъ— $p=4,5$. Изъ формулъ (60) и (61) получимъ для постоянныхъ сооружений

$$k = \frac{0,3}{1 \mp 0,6\omega} \dots (65)$$

и для временныхъ

$$k = \frac{0,44}{1 \mp 0,6\omega} \dots (66)$$

Для опредѣленія допускаемаго напряженія при разсчетѣ сооружений, подвергаемыхъ дѣйствію переменной нагрузки съ сотрясеніями, имѣемъ поэтому слѣдующія формулы:

а) Желѣзо: $k = \frac{7}{1 \mp 0,4\omega}$

$$K = 7(1704\omega)$$

- б) Мягкая сталь: $k = \frac{10}{1 \mp 0,5\omega}$ $= 10 / (1 \mp 0,5\omega)$
 в) Твердая, незакаленная сталь: $k = \frac{12}{1 \mp 0,7\omega}$ (67)

- г) Дерево $\left\{ \begin{array}{l} \text{постоянные сооруженія: } k = \frac{0,3}{1 \mp 0,6\omega} \\ \text{временные сооруженія: } k = \frac{0,44}{1 \mp 0,6\omega} \end{array} \right.$

Изъ этихъ формулъ k получается въ килограммахъ на 1 квадратный миллиметръ. Знакъ минусъ въ знаменателѣ относится къ случаю, когда оба предѣльные напряженія однородны, а знакъ + — когда они разнородны.

Г л а в а II.

Нормальная упругость.

§ 26.

Вступленіе.—Если плоская фигура, постоянного или перемѣннаго вида, скользятъ своимъ центромъ тяжести вдоль прямой или кривой линіи такимъ образомъ, что ея плоскость остается постоянно перпендикулярной къ этой линіи, то она описываетъ тѣло, которое называютъ *брусомъ*.

Линія, по которой движется центръ тяжести фигуры, называется средней линіей, или *осью* бруса, всякая линія, параллельная оси—*волокомъ*, а всякое сѣченіе, перпендикулярное къ оси—*поперечнымъ сѣченіемъ*.

По виду оси бруса его называютъ *прямымъ или кривымъ брусомъ*.

Сооруженіе можетъ состоять изъ одного, или изъ нѣсколькихъ брусевъ. Въ первомъ случаѣ оно называется *простымъ*, а въ послѣднемъ—*сложнымъ сооруженіемъ*.

Если брусья сложнаго сооруженія соединены между собою такимъ образомъ, что въ немъ возможны только такія видоизмѣненія, которыя допускаетъ упругость матеріала, то оно называется *сооруженіемъ неизмѣняемаго вида*. Чтобы такое сооруженіе имѣло неизмѣняемое положеніе въ пространствѣ, оно должно быть соединено съ неподвижнымъ тѣломъ такимъ образомъ, чтобы по отношенію къ послѣднему не могло имѣть никакого другого движенія кромѣ того, которое зависитъ отъ упругости.

Точки, посредствомъ которыхъ сооруженіе соединено съ неподвижнымъ тѣломъ, называются *подпорными точками*, а части неподвижнаго тѣла, содержащія подпорныя точки—*опорами*.

Сооруженіе неизмѣняемаго вида будемъ для краткости называть *неизмѣняемымъ*, а сооруженіе неподвижное въ пространствѣ,—*устойчивымъ сооруженіемъ*.

§ 27.

Роды дѣйствія вѣшнихъ силъ.—Положимъ, что на устойчивый брусъ AB (черт. 13) дѣйствуютъ вѣшнія силы $P_1 P_2 P_3 \dots$ по различнымъ направленіямъ въ пространствѣ. Эти силы вызываютъ въ опорныхъ точкахъ противодѣйствія или реакціи, а въ поперечныхъ сѣченіяхъ—упругія сопротивленія. Совокупность этихъ реакцій и сопротивленій измѣнить форму и положеніе бруса настолько, насколько это допустить упругость бруса и опоръ. Соотвѣтственно увеличенію видоизмѣненія бруса будетъ возрастать и напряженіе частичныхъ силъ до тѣхъ поръ, пока не наступитъ равновѣсіе во всѣхъ точкахъ между вѣшними и внутренними силами.

Представимъ себѣ, что черт. 13 представляетъ видъ бруса по наступленіи равновѣсія. Очевидно, что это равновѣсіе не будетъ нарушено, если произвольнымъ сѣченіемъ mn разрѣжемъ брусъ на двѣ части, и къ поверхностямъ разрѣза приложимъ силы, производящія на нихъ точно такое дѣйствіе, какое въ неразрѣзанномъ брусѣ производили внутреннія силы.

Отбросимъ правую часть mnB и рассмотримъ, какимъ образомъ проявляется дѣйствіе силъ на лѣвую часть Amn .

Если R —реакція опорной точки A , то силы R, P_1 и P_2 (черт. 13 a) вмѣстѣ съ сопротивленіемъ сѣченія mn , должны удовлетворять условіямъ равновѣсія.

Возьмемъ три взаимно перпендикулярныя оси координатъ такимъ образомъ, чтобы ось X проходила черезъ центръ тяжести сѣченія mn , и была къ нему перпендикулярна, и чтобы оси Y и Z лежали въ плоскости этого сѣченія.

Разложимъ силы $P_1 P_2$ и реакцію R (т. е. всѣ вѣшнія силы, дѣйствующія на лѣвую отсѣченную часть бруса) по направленіямъ этихъ трехъ осей, и означимъ алгебраическую сумму слагающихъ, параллельныхъ осямъ OX, OY и OZ (соотвѣтственно) черезъ $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$. Означимъ сумму моментовъ тѣхъ же силъ R, P_1, P_2 по отношенію къ осямъ OX, OY и OZ —черезъ M_x, M_y и M_z .

Такъ какъ сопротивленіе сѣченія уравниваетъ вѣшнія

силы R, P_1, P_2 , то слѣдуетъ, что слагающія силы этого сопротивленія будутъ— $\Sigma X, -\Sigma Y, -\Sigma Z$, а моменты:— $M_x, -M_y, -M_z$.

Сила ΣX , дѣйствующая перпендикулярно къ сѣченію (по направленію оси бруса), называется *нормальной силой*, а силы ΣY и ΣZ , параллельныя сѣченію—*поперечными силами*.

Нормальная сила ΣX стремится удалить два сѣченія другъ отъ друга, или приблизить ихъ другъ къ другу; въ первомъ случаѣ она называется *растяженіемъ*, а въ послѣднемъ—*сжатіемъ*.

Поперечныя силы ΣY и ΣZ стремятся сдвинуть одно сѣченіе по другому, или срѣзать брусъ по сѣченію; ихъ называютъ по-этому *срѣзывающими или скалывающими силами*.

Моментъ M_x стремится вращать сѣченіе бруса около его оси (т. е. около оси OX). Такой родъ дѣйствія внѣшнихъ силъ называется *крученіемъ*, а моментъ M_x —*скручивающимъ моментомъ*.

Моменты M_y и M_z стремятся повернуть сѣченіе бруса, первый около оси OY , а второй—около оси OZ . Производимое этими моментами видоизмѣненіе называютъ *изгибомъ или выгибаніемъ*, а моменты M_y и M_z —*сгибающими моментами*.

Въ практикѣ всего чаще встрѣчаются слѣдующіе случаи:

1) Всѣ слагающія и моменты за исключеніемъ слагающихъ ΣX , равны нулю. Это случай *нормальной упругости (растяженія или сжатія)*. Тѣло при разрушеніи разрывается или раздробляется.

2) Только ΣY или ΣZ не равны нулю: случай *скалыванія или перерѣзыванія*. При разрушеніи тѣло перерѣзывается или скалывается.

3) Только моментъ M_x не равенъ нулю. Это случай *скручиванія*; при разрушеніи тѣло скручивается.

4) Только одинъ изъ моментовъ M_y и M_z , или оба одновременно не равны нулю. При разрушеніи тѣло ломается—это случай *изгиба*.

Кромѣ этихъ четырехъ простыхъ случаевъ возможны также сложные случаи дѣйствія внѣшнихъ силъ на тѣло. Изъ нихъ въ строительной практикѣ встрѣчается всего чаще случай совокупнаго растяженія или сжатія и изгиба.

§ 28.

Нормальная упругость (растяженіе и сжатіе).

Нормальная упругость вообще.—Въ брусѣ вызывается одна только нормальная упругость если для cadaго сѣченія равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ проходитъ черезъ его центръ тяжести и совпадаетъ съ осью бруса.

Простейшій случай растяженія или сжатія имѣется тогда, когда прямолинейный брусъ на одномъ концѣ укрѣпленъ, а въ центрѣ тяжести сѣченія другого конца дѣйствуетъ сила, имѣющая направленіе оси бруса, или когда къ центрамъ тяжести обоихъ конечныхъ сѣченій приложены по направленію оси равныя и противоположныя силы. Если эти силы обращены другъ къ другу, то брусъ сжимается, въ противномъ случаѣ—растягивается.

Такъ какъ законъ, по которому напряженіе, вызываемое нормальной силой, распредѣляется на площадь сѣченія, точно не извѣстенъ, то принимаютъ, что усиліе распредѣляется равномерно на сѣченіе. Это предположеніе соотвѣтствуетъ тѣмъ болѣе дѣйствительности, чѣмъ болѣе сѣченіе удалено отъ точки приложенія силы. Опыты и теорія показываютъ, что неравномерность распредѣленія силы имѣетъ мѣсто только въ сѣченіяхъ, весьма близкихъ къ ея точкѣ приложенія.

§ 29.

Призматическій брусъ.—Если означимъ черезъ

Ω —площадь сѣченія бруса,

l —его длину,

G —дѣйствующую на него нормальную силу,

σ —напряженіе,

E —модуль упругости,

Δl —удлиненіе (измѣненіе длины l , произведенное силой G),

$$\text{то} \quad \sigma = \frac{G}{\Omega} \dots \dots \dots (68)$$

Когда сѣченіе Ω переменнo, то въ различныхъ сѣченіяхъ будетъ дѣйствовать различное напряженіе σ . Условія прочности требуютъ, чтобы это напряженіе ни на какомъ мѣстѣ не было болѣе допускаемаго напряженія k . Если, поѣтому, наиболѣе слабое сѣченіе бруса означимъ черезъ $\min \Omega$, то должно

$$k = \frac{G}{\min \Omega}, \dots \dots \dots (69)$$

откуда

$$\min \Omega = \frac{G}{k} \dots \dots \dots (70)$$

Помощію этихъ уравненій можно опредѣлить силу G , которую данный брусъ можетъ нести безопасно или—наименьшее сѣченіе $\min \Omega$ для данной силы G .

Пусть

dl —длина элемента бруса, заключеннаго между двумя безконечно близкими сѣченіями,

Δdl —его удлинение, произведенное напряженіемъ σ , то по (4)

$$\frac{\Delta dl}{dl} = \frac{\sigma}{E}$$

$$\Delta dl = \frac{\sigma}{E} dl$$

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_0^l \sigma dl = \frac{1}{E} \int_0^l G \, dl \dots \dots \dots (71)$$

Для призматическаго бруса (черт. 14), на концѣ котораго дѣйствуетъ сила G , послѣднее уравненіе получаетъ видъ

$$\Delta l = \frac{G}{E\Omega} \int_0^l dl$$

$$\Delta l = \frac{Gl}{E\Omega} \dots \dots \dots (72)$$

На всякое тѣло дѣйствуетъ, кромѣ приложенныхъ къ нему внѣшнихъ силъ, сила тяжести, проявляющаяся какъ вѣсъ тѣла. Въ многихъ случаяхъ этотъ вѣсъ, сравнительно съ приложенными къ тѣлу силами, такъ малъ, что имъ пренебрегаютъ, но иногда онъ бываетъ столь значителенъ, что необходимо его дѣйствіе принимать въ расчетъ.

Мы рассмотримъ тотъ случай, когда прямолинейный брусъ укрѣпленъ вертикально, когда слѣдовательно вѣсъ дѣйствуетъ какъ нормальная сила. Если вѣсъ единицы объема бруса означимъ черезъ γ , то на сѣченіе mn (черт. 15), отстоящее отъ свободнаго конца на разстояніе x дѣйствуетъ сила

$$P_x = G + \gamma \int_0^x \Omega dx \dots \dots \dots (73)$$

Прочность требуетъ, чтобы для всякаго сѣченія было исполнено условіе

$$k.\Omega_x = G + \gamma \int_0^x \Omega dx \dots \dots \dots (74)$$

Когда брусъ призматическій, то уравненіе (73) получаетъ видъ

$$P_x = G + \gamma \Omega x$$

$$\sigma_x = \frac{G + \gamma \Omega x}{\Omega} \dots \dots \dots (75)$$

Наибольшее напряженіе испытываетъ въ этомъ случаѣ сѣченіе у прикрѣпленнаго конца, для котораго

$$P = G + \gamma \Omega l$$

Поэтому

$$\max \sigma = \frac{G + \gamma \Omega l}{\Omega} \dots \dots \dots (76)$$

Изъ условія, что должно

$$\max \sigma \leq k,$$

получаемъ

$$\Omega = \frac{G}{k - \gamma l} \dots \dots \dots (77)$$

откуда

$$G = \Omega (k - \gamma l) \dots \dots \dots (78)$$

Для опредѣленія удлиненія Δl имѣемъ по (71) и (75)

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_0^l \sigma dl = \frac{1}{E\Omega} \int_0^l (G + \gamma \Omega l) dl$$

$$\Delta l = \frac{\left(G + \frac{\gamma \Omega l}{2}\right)l}{E\Omega}$$

Если вѣсъ всего бруса означимъ черезъ W , то

$$\gamma \Omega l = W,$$

слѣдовательно

$$\Delta l = \frac{\left(G + \frac{W}{2}\right)l}{E\Omega} \dots \dots \dots (79)$$

Въ этомъ уравненіи $\frac{Gl}{E\Omega}$ означаетъ удлиненіе, произведенное

силой G , а $\frac{1}{2} \frac{Wl}{E\Omega}$ — вѣсомъ W бруса, и изъ него видимъ,

что грузъ, приложенный къ концу бруса, производитъ въ два раза большее удлиненіе, чѣмъ нагрузка, равномерно распределенная по всей длинѣ его.

§ 30.

Брусъ равнаго сопротивленія.—Въ призматическомъ, вертикально укрѣпленномъ брусѣ, подверженномъ дѣйствію нормальной силы, сѣченіе укрѣпленнаго конца испытываетъ наибольшее напряженіе, а напряженіе во всякомъ другомъ сѣченіи тѣмъ меньше, чѣмъ оно ближе къ свободному концу, ибо тѣмъ меньшая часть вѣса бруса дѣйствуетъ на него.

Измѣняя величину поперечныхъ сѣченій такъ, чтобы напряженіе во вѣсхъ сѣченіяхъ было постоянно и равно допускаемому

напряженію k , получимъ брусъ съ наивыгоднѣйшей формой въ продольномъ очертаніи, такъ какъ безъ ущерба для прочности его объемъ будетъ наименьшій.

Если напряженіе бруса во всѣхъ сѣченіяхъ постоянно и равно k , то нагрузка сѣченія C (черт. 16), отстоящаго отъ свободнаго конца на разстояніе x

$$P_x = k\Omega,$$

гдѣ Ω — площадь этого сѣченія.

Нагрузка слѣдующаго сѣченія, отстоящаго отъ l на безконечно близкомъ разстояніи dx будетъ

$$P_{\zeta} = k\Omega + \gamma\Omega dx,$$

слѣдовательно

$$dP_x = P_{\zeta} - P_x = \gamma\Omega dx.$$

Такъ какъ

$$P_x = k\Omega,$$

то

$$dP_x = k d\Omega,$$

поэтому

$$k d\Omega = \gamma\Omega dx$$

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{\gamma}{k} dx,$$

откуда

$$\log n\Omega = \frac{\gamma}{k}x + C.$$

Для $x=0$, $\Omega=\Omega_0$

Вставивъ это значеніе въ предыдущее уравненіе, получимъ

$$\log n\Omega = \frac{\gamma}{k}x + \lg n\Omega_0$$

$$\lg n \frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{\gamma}{k}x$$

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = e^{\frac{\gamma}{k}x}$$

гдѣ e —основаніе натуральныхъ логарифмовъ.

Такъ какъ $\Omega_0 = \frac{G}{k}$, то

$$\Omega = \frac{G}{k} e^{\frac{\gamma}{k}x}$$

и для $x=l$

$$\max \Omega = \frac{G}{k} e^{\frac{\gamma}{k}l} \dots \dots \dots (80)$$

По извѣстной формулѣ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1,2} + \dots$$

можно уравненіе (80) представить въ видѣ слѣдующаго ряда

$$\max \Omega = \frac{G}{k} \left(1 + \frac{\gamma l}{k} + \frac{\gamma^2 l^2}{2k^2} + \dots \right) \quad (81)$$

и точно также

$$\Omega = \frac{G}{k} \left(1 + \gamma \frac{x}{k} + \frac{\gamma^2 x^2}{2k^2} + \dots \right)$$

Относительное удлиненіе бруса равнаго сопротивленія по (4)

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{E}$$

откуда

$$\Delta l = \frac{k l}{E} \quad (82)$$

Уравненіями (80)—(82) можно пользоваться при опредѣленіи формы длинныхъ *шагтенныхъ штангъ*, а также высокихъ каменныхъ опоръ. Но какъ на практикѣ для нѣкоторыхъ матеріаловъ непрерывное измѣненіе сѣченія трудно исполнимо, то обыкновенно брусъ равнаго сопротивленія строятъ приблизительнымъ образомъ, составляя его изъ отдѣльныхъ призматическихъ брусевъ длиною $l_1, l_2, l_3 \dots$ (черт. 17), сѣченія которыхъ опредѣляютъ такимъ образомъ, что ихъ конечныя сѣченія $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \dots$ испытываютъ напряженіе k . Изъ этого условія получаются слѣдующія уравненія:

$$G + \gamma_1 \Omega_1 l_1 = \Omega_1 k$$

$$G + \gamma \Omega_1 l_1 + \gamma \Omega_2 l_2 = \Omega_2 k$$

$$G + \gamma \Omega_1 l_1 + \gamma \Omega_2 l_2 + \gamma \Omega_3 l_3 = \Omega_3 k$$

Отсюда по порядку

$$\Omega_1 = \frac{G}{k - \gamma l_1}$$

$$\Omega_2 = \frac{G k}{(k - \gamma l_1)(k - \gamma l_2)}$$

$$\Omega_3 = \frac{G k^2}{(k - \gamma l_1)(k - \gamma l_2)(k - \gamma l_3)}$$

Въ частномъ случаѣ, когда $l_1 = l_2 = l_3 = \dots$

$$\Omega_n = \frac{G}{k} \left(\frac{k}{k - \gamma l} \right)^n$$

Удлиненіе такого бруса равно суммѣ удлиненій его призматическихъ частей, которыя получаются по формулѣ (72).

Вліяніє температури.—При всякомъ повышеніи температуры бруса длина его увеличивается, а при пониженіи—уменьшается. Если α —относительное удлинение, соответствующее измѣненію температуры на 1 градусъ, то при измѣненіи ея на t градусовъ

откуда
$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha t, \\ \Delta l = \alpha t l \dots \dots \dots (84)$$

Коэффициентъ α зависитъ отъ свойства матеріала и называется *коэффициентомъ линейнаго расширенія*.

Когда на призматическій брусъ дѣйствуетъ сила, производящая въ его сѣченіяхъ напряженіе σ , и если при томъ температура его увеличится на t градусовъ, то относительное измѣненіе длины бруса будетъ

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} + \alpha t \dots \dots \dots (85)$$

Измѣненіе длины бруса, произведенное переменной температуры, не имѣетъ на его напряженіе никакого вліянія, если этому измѣненію не противодѣйствуютъ никакія препятствія. Въ противномъ случаѣ измѣненіе температуры вызываетъ въ брусѣ напряженіе, которое опредѣляется слѣдующимъ образомъ:

Положимъ, что прямолинейный призматическій брусъ AB (черт.18), укрѣпленный въ A неподвижно и свободный въ B , имѣетъ при извѣстной температурѣ длину $AB=l$. Если температура бруса понизится на t^0 , то онъ укоротится на длину $B\beta = \alpha t l$, и это укороченіе останется безъ вліянія на его напряженіе.

Представимъ себѣ теперь, что не только конецъ A , но и конецъ B укрѣпленъ неподвижно. Измѣненіе длины бруса въ этомъ случаѣ не будетъ возможно, вслѣдствіе чего при пониженіи температуры на t градусовъ длина его будетъ на $B\beta$ большая той, которую онъ имѣлъ бы въ свободномъ состояніи. Переменная температуры произведетъ, поэтому, точно такое дѣйствіе, какое произвела бы сила, измѣняющая длину бруса на $B\beta$. Но такая сила произвела бы въ сѣченіяхъ бруса, по (4), напряженіе

$$\sigma_t = Ee = \frac{E \cdot B\beta}{AB} = \frac{E \alpha t l}{l}$$

изъ чего слѣдуетъ, что измѣненіе температуры на t градусовъ вызываетъ въ несвободномъ брусѣ напряженіе

$$\sigma_t = E \alpha t.$$

При пониженіи температуры это напряженіе равномерно растяженію, а при повышеніи—сжатію, и оно складывается (алгебраически) съ напряженіями, произведенными внѣшними силами.

Примѣры:

1) На круглый желѣзный стержень, длиною 2 метра, дѣйствуетъ переменная, растягивающая сила, измѣняющаяся въ предѣлахъ 8 и 0 тонн.; опредѣлить діаметръ стержня и его удлиненіе.

Такъ какъ $\omega = 0$, то по (67a)

$$k = 7$$

и по (70)

$$\min \Omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{8000}{7}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \times 8000}{7}} = \sqrt{4571.4} = 38 \text{ мм.}$$

По (72)

$$\Delta l = \frac{Gl}{E\Omega}$$

Изъ таблицы I имѣемъ для желѣза $E = 20000$, слѣдовательно

$$\Delta l = \frac{8000 \cdot 2000}{\frac{3,14}{4} 38^2 \cdot 20000} = 0,706 \text{ мм.}$$

2) Предѣльные напряженія стержня изъ мягкой стали—12400 и 5000 кил.; опредѣлить площадь его полезнаго сѣченія.

Такъ какъ предѣльные напряженія противоположны, то по (67b)

$$k = \frac{10}{1 + 0,5 \frac{5000}{12400}} = \frac{10}{1,2} = 8,$$

поэтому

$$\Omega = \frac{12400}{8} = 1550 \text{ qmm.}$$

3) Желѣзная балка шириною 200 мм, лежитъ однимъ своимъ концомъ на кирпичной кладкѣ, на которую производитъ давленіе 6000 кил. Какой длиною должна балка лежать на кладкѣ, чтобы давленіе на нее не превышало 8 кил. на 1 квадратный сантиметръ?

Такъ какъ 8 кил. на 1 кв. сантиметръ = 0,08 кил. на 1 кв. миллиметръ, то, означивъ искомую длину черезъ x , имѣемъ

$$\frac{6000}{200 \cdot x} = 0,08$$

откуда

$$x = \frac{30}{0,08} = 375 \text{ мм.}$$

4) Какой грузъ можетъ нести короткая чугунная колонна кольцеобразнаго сѣченія, которой внѣшній діаметръ $D=20$, а внутренній $d=16$ мм.

$$G = k\Omega = k \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2).$$

Принимая $k=6$ кил. на 1 кв. мм. (таблица III) получимъ

$$G = \frac{3,14}{4} \cdot 6 (200^2 - 160^2) = 67824 \text{ кил.}$$

Какой грузъ раздробилъ бы эту колонну?

$$x = K\Omega = 70 \frac{3,14}{4} (200^2 - 160^2) = 791240 \text{ кил.}$$

5) Какую площадь сѣченія должна получить каменная колонна высотой 25 миллиметр., которая кромѣ собственнаго вѣса должна выдерживать давленіе 180 тоннъ? Колонна должна состоять изъ 5 призматическихъ частей, каждая высотой 5 миллиметр.

$$\text{По (83) } \Omega = \frac{G}{k} \left(\frac{k}{k - \gamma l} \right)^n$$

Здѣсь $G=180000$ кил.

Если возьмемъ $k=10$ кил. на 1 кв. см. = 100 тоннъ на 1 кв. метръ (табл. III) и положимъ вѣсъ 1 куб. метра камня $\gamma=2,5$ тон., то будетъ

$$\Omega = \frac{180000}{100000} \left(\frac{100000}{100000 - 2500 \times 5} \right)^n = 1,8 \times 1,143^n.$$

Изъ этого уравненія получаемъ

$$\Omega_1 = 2,06 \text{ квадр. мтр.}$$

$$\Omega_2 = 2,34 \quad " \quad "$$

$$\Omega_3 = 2,67 \quad " \quad "$$

$$\Omega_4 = 3,04 \quad " \quad "$$

$$\Omega_5 = 3,47 \quad " \quad "$$

6) Какое напряженіе вызываетъ въ желѣзномъ брусѣ, укрѣпленномъ обоими концами неподвижно, повышеніе температуры на 30° выше нормальной?

По (86)

$$\sigma_t = E\alpha t.$$

Если температура дана въ градусахъ Цельзія, то

$$\alpha = 0,0000118$$

поэтому

$$\sigma_t = 20000 \times 0,0000118 \times 30 = 7,08 \text{ кил. на 1 кв. мм.}$$

Изъ этого примѣра видно, какъ значительно можетъ быть напряженіе, произведенное перемѣной температуры въ несвободномъ брусѣ.

§ 33.

Практическіе случаи. — 1. Два упругія тѣла *A* и *B*, ограниченные произвольными кривыми поверхностями, соприкасаются въ точкѣ *P*. Тѣло *B* неподвижно, а тѣло *A* производитъ на *B* давленіе *D*. Определить наибольшее напряженіе, производимое этимъ давленіемъ.

Означимъ главные радіусы кривизны въ точкѣ *P* (черт. 19) для тѣла *A*—черезъ *R* и *r*, а для тѣла *B*—черезъ *R*₁ и *r*₁, и положимъ, что оба тѣла имѣютъ такое относительное положеніе, что ихъ радіусы *R* и *R*₁ находятся въ одной плоскости (при чемъ и перпендикулярные къ нимъ радіусы *r* и *r*₁ будутъ находиться тоже въ одной плоскости).

Пусть *MN*—плоскость соприкасанія въ точкѣ *P* и *zz*₁—нормаль къ ней въ той же точкѣ. Проведемъ черезъ *zz*₁ плоскость, составляющую съ плоскостью радіусовъ *R* и *R*₁ уголъ φ ; возьмемъ на этой плоскости прямую *bb*₁, параллельную *zz*₁, на очень близкомъ разстояніи отъ *zz*₁, и означимъ ея точки пересѣченія съ поверхностями тѣлъ *A* и *B* черезъ *a*₁ и *b*₁. Если ρ и ρ_1 —радіусы кривизны нормальныхъ сѣченій *zPa*₁ и *zPb*₁, то по известной формулѣ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \varphi}{R} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{r_1} \quad (87)$$

Означимъ разстоянія точекъ *a*₁ и *b*₁ отъ *MN* черезъ η и η_1 , то

$$\eta = \frac{a^2}{2\rho}, \quad \eta_1 = \frac{a^2}{2\rho_1} \quad (88)$$

Послѣ видоизмѣненія, произведеннаго давленіемъ *D*, оба тѣла будутъ соприкасаться по маленькой поверхности *qs* (черт. 20), причемъ тѣло *A* получитъ въ *a*₁, по направленію этого давленія, сжатіе *a*₁ β = *y*, а тѣло *B* въ *b*₁—сжатіе *b*₁ β = *y*₁. Тѣла *A* и *B* будутъ испытывать напряженіе, пропорціональное этимъ сжатіямъ, такъ что если означимъ черезъ *c* и *c*₁—коэффициенты, зависящіе отъ свойствъ матеріала и отъ формы обоихъ тѣлъ, можно написать

$$\sigma = cy = c_1 y_1 \quad (89)$$

Обозначимъ полное сжатіе *P*₀*P* въ прямой *zz*₁, соответствующее точкѣ первоначальнаго соприкасанія, черезъ *p*, то легко узнать, что

$$y + y_1 = p - (\eta + \eta_1)$$

Слѣдовательно

$$y = p - (\eta + \eta_1) - y_1$$

и такъ какъ по (89)

$$y = \frac{\sigma}{c} \quad y_1 = \frac{\sigma}{c_1}$$

то

$$\frac{\sigma}{c} = p - (\eta + \eta_1) - \frac{\sigma}{c_1}$$

откуда

$$\sigma = \frac{cc_1}{c+c_1} [p - (\eta + \eta_1)] \dots \dots \dots (90)$$

Это выраженіе получаетъ наибольшее значеніе въ точкѣ P , т. е. для $\eta + \eta_1 = 0$, поэтому

$$\max \sigma = \frac{cc_1}{c+c_1} p.$$

Если для краткости положимъ

$$\frac{c+c_1}{cc_1} = C,$$

то, принимая во вниманіе, что наибольшее напряженіе не должно быть больше допускаемаго напряженія k , будемъ имѣть

$$k = \frac{p}{C}.$$

Помощію этого значенія уравненіе (90) получаетъ видъ

$$\sigma = k - \frac{\eta + \eta_1}{C} = k - \frac{a^2}{2C} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) \dots \dots \dots (91)$$

Для точекъ, находящихся на периметрѣ поверхности соприкасанія qs (черт. 20) $\sigma = 0$; если разстояніе этихъ точекъ отъ zz_1 означимъ черезъ A , то изъ послѣдняго уравненія получимъ

$$0 = k - \frac{A^2}{2C} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) \dots \dots \dots (92)$$

Отнесемъ точки периметра qs поверхности соприкасанія къ прямоугольнымъ осямъ координатъ, взятымъ въ пересѣченіи этой поверхности съ плоскостями радіусовъ RR_1 и rr_1 главныхъ искривленій, и означимъ координаты точки этого периметра, лежащей въ выше упомянутой (произвольной) плоскости, составляющей съ плоскостью радіусовъ R и r , уголъ φ черезъ ξ и η , то

$$\xi = A \cos \varphi \quad \eta = A \sin \varphi$$

Помощію этихъ значеній уравненіе (87) получаетъ видъ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\xi^2}{RA^2} + \frac{\eta^2}{rA^2}, \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{\xi^2}{R_1A^2} + \frac{\eta^2}{r_1A^2}$$

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{A^2} \left[\xi^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) + \eta^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \right].$$

Вставивъ это значеніе въ (92), получимъ

$$k - \frac{1}{2C} \left[\xi^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) + \eta^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \right] = 0$$

$$1 = \frac{\xi^2}{\left[\frac{2kC}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}} \right]} + \frac{\eta^2}{\left[\frac{2kC}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}} \right]} \quad (93)$$

Это уравненіе показываетъ, что периметръ поверхности соприкасания—эллипсисъ, котораго полуоси

$$A = \sqrt{\frac{2kC}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}}, \quad B = \sqrt{\frac{2kC}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}}}.$$

Полное давленіе, производимое тѣломъ A на тѣло B

$$D = \int_0^{2\pi} \int_0^A \sigma(ad\varphi) da = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^A ada \left[k - \frac{a^2}{2C} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) \right]$$

$$D = \int_0^{2\pi} d\varphi \left[k - \frac{A^2}{4C} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) \right] \frac{A^2}{2} = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \frac{A^2}{2} d\varphi.$$

Послѣдній интегралъ выражаетъ площадь плоскости соприкасания qs , а такъ какъ, по доказанному, периметръ этой плоскости—эллипсисъ, то

$$\int_0^{2\pi} \frac{A^2 d\varphi}{2} = \pi AB,$$

слѣдовательно

$$D = \frac{k}{2} \pi AB = \frac{k\pi}{2} \sqrt{\frac{2kC}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}} \sqrt{\frac{2kC}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}}},$$

или, означивъ $\pi C = \frac{\pi(c+c_1)}{cc_1}$ — черезъ L ,

$$D = \frac{Lk^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)}}$$

$$k^2 = \frac{D \sqrt{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)}}{L} \dots \dots \dots (94)$$

Изъ этого выраженія видимъ, что при одинаковыхъ прочихъ обстоятельствахъ наибольшее напряженіе пропорціонально квадратному корню изъ давленія D .

Частные случаи.

а) Тѣло A шаръ, а тѣло B —плоская плита.

Въ этомъ случаѣ

$$R = r, \quad R_1 = r_1 = \infty,$$

слѣдовательно по (94)

$$D = Lk^2 r \dots \dots \dots (95)$$

б) Тѣла A и B —цилиндры, которыхъ оси перпендикулярны другъ къ другу.

$$R_1 = r = \infty,$$

$$D = Lk^2 \sqrt{Rr} \dots \dots \dots (96)$$

Этому случаю соотвѣтствуетъ давленіе колеса на рельсъ, при положеніи колеса надъ шпалой (R означаетъ радіусъ колеса, т. е. длину нормали коническаго обода, считая до оси колеса). Когда колесо находится между шпалами, то поверхность соприкасания, вслѣдствіе выгибанія рельса, увеличивается, и, слѣдовательно, k —уменьшается.

в) Тѣла A и B —цилиндры съ параллельными осями.—Въ этомъ случаѣ уравненіе (94) недѣйствительно.

Если R и R_1 —радіусы цилиндровъ, то по (91) и (92)

$$\sigma = k - \frac{a^2}{2C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right), \quad 2kC = A^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Давленіе D на длину $= 1$ поверхности соприкасания, которой ширина $2A$, будетъ

$$D = 2 \int_0^A \sigma da = 2A \left[k - \frac{A^2}{2C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \right] = \frac{4}{3} k \sqrt{\frac{2kC}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}}.$$

Если положимъ

$$\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2C}{9}} = \sqrt{\frac{32}{9} \frac{c + c_1}{cc_1}} = B,$$

то

$$D = \frac{Bk^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}} \dots \dots \dots (97)$$

Наибольшее напряженіе k въ этомъ случаѣ пропорціонально третьему корню изъ квадрата давленія.

1) Цилиндръ на плоскости.

Для $R_1 = \infty$ получаемъ изъ (97)

$$D = Bk^{\frac{3}{2}} \sqrt{R}, \quad D^2 = \frac{32}{9} Ck^3 R \dots \dots \dots (98)$$

Въ практикѣ обыкновенно принимаютъ, что сопротивленіе цилиндрическихъ катковъ, лежащихъ на плоскости, прямо пропорціонально произведенію изъ діаметра на длину, т. е.—горизонтальной проэкціи цилиндра, и берутъ для допускаемаго напряженія на 1 квадратный сантиметръ этой проэкціи

для желѣзныхъ катковъ—отъ 25—35 кил.,

для стальныхъ—отъ 35—50 кил.

д) Цилиндръ въ цапфѣ. — Мы предполагаемъ, что во всѣхъ точкахъ цилиндра и цапфы имѣетъ мѣсто совершенное соприкасаніе. Если величину сжатія въ произвольной точкѣ d (чер. 21), измѣренную по направленію радіуса этой точки, означимъ для цилиндра черезъ y , а для цапфы—черезъ y_1 , то по (89)

$$\sigma = cy = c_1 y_1.$$

Проведемъ въ f перпендикуляръ fg къ zc , до пересѣченія съ прямой cg_1 проведенной черезъ c параллельно zP ,

то

$$\overline{cf} = y + y_1 = \overline{cg} \cos \varphi$$

и o означивъ cg черезъ η

$$y + y_1 = \eta \cos \varphi,$$

или

$$\frac{\sigma}{c} + \frac{\sigma}{c_1} = \eta \cos \varphi,$$

откуда

$$\sigma = \frac{\eta \cos \varphi}{C} \dots \dots \dots (99)$$

Если R —радіус цилиндра и D —давленіе на единицу его длины, то, предполагая, что соприкасаніе происходит по полуокружности, будетъ

$$D = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma R d\varphi \cos \varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \cos^2 \varphi}{C} R d\varphi.$$

Для простоты примемъ, что вертикальное сжатіе η на всѣхъ мѣстахъ одинаково, тогда

$$D = \frac{2\eta R}{C} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\eta R}{C} \frac{\pi}{2}.$$

Вставивъ это значеніе въ (99), получимъ

$$\sigma = \frac{2DC \cos \varphi}{\pi R C} = \frac{2D \cos \varphi}{\pi R}.$$

Наибольшее напряженіе дѣйствуетъ въ точкѣ P , для которой $\varphi = 0$, т. е.

$$\max \sigma = k = \frac{2D}{\pi R} \dots \dots \dots (100)$$

Изъ послѣдняго уравненія видимъ, что наибольшее напряженіе точно такое, какое оно было бы, если бы давленіе D распредѣлялось равномерно на половину поверхности цилиндра.

Этотъ результатъ полученъ при предположеніи, что η постоянно для всей поверхности соприкасанія. Такъ какъ въ дѣйствительности давленіе распредѣляется менѣе равномерно, то напряженіе въ P немного больше величины, получаемой изъ уравненія (100). Для сооружений, подвергаемыхъ сильнымъ ударамъ (какъ подушки мостовыхъ балокъ) слѣдуетъ брать

$$\max \sigma = k = \text{отъ } \frac{4D}{\pi R} \text{ до } \frac{6D}{\pi R},$$

$$\text{или } r = \text{отъ } \frac{1,5D}{k} \text{ до } \frac{2,0D}{k} \dots \dots \dots (101)$$

Меньшее значеніе дѣйствительно для стали, а большее—для желѣза.

е) *Призма лежитъ ребромъ на плоскости.*—Согласно опытамъ берутъ за допускаемое напряженіе k на 1 погонный метръ стального лезвія—200 кил.

Если D —давленіе, а l —длина лезвія, то

$$D = 200l,$$

откуда

$$l = \frac{D}{200} \text{ (въ кил. и см.)} \dots \dots \dots (102)$$

Примѣчаніе. Для опредѣленія постоянной C не имѣется еще достаточно опытовъ, но изъ сравненія выведенныхъ въ этомъ параграфѣ формулъ съ лучшими изъ существующихъ сооружений (преимущественно мостовыхъ) получится для чугуна и желѣза приблизительно

$$C = \text{отъ } 0,008 \text{ до } 0,05,$$

такъ что среднимъ числомъ

$$C = 0,023.$$

§ 34.

2) На вагонное колесо, имѣющее $2n$ желѣзныхъ спицъ, требуется надѣть стальную шину въ горячемъ состояніи, такимъ образомъ, чтобы напряженіе шины, произведенное укороченіемъ при охлажденіи, не было болѣе допускаемаго напряженія k . До каковой температуры должна быть нагрѣта шина?

Для рѣшенія этой задачи означимъ черезъ

e —относительное укороченіе шины,

s —ея сѣченіе,

s_1 —среднее сѣченіе спицъ,

d —длину спицъ,

e_1 —ихъ относительное укороченіе,

o —сѣченіе обода,

r —его внѣшній радіусъ,

$r(1-\rho)$ —внутренній радіусъ холодной шины, который на $r\rho$ короче внѣшняго радіуса r обода,

E —модуль упругости стали и

E_1 —желѣза.

Такъ какъ отъ сжатія, производимаго шиной вслѣдствіе укорачиванія ея при охлажденіи, длина d спицъ, а слѣдовательно и радіусъ r обода, уменьшаются, то наружный периметръ p обода послѣ охлажденія будетъ

$$2\pi (r - e_1 d),$$

поэтому, его относительное укороченіе

$$\frac{2\pi e_1 d}{2\pi r} = \frac{e_1 d}{r}$$

и дѣйствующая въ его сѣченіи сжимающая сила, по (6)

$$\frac{E_1 e_1 d}{r} o.$$

Въ спицахъ дѣйствуетъ сжатіе

$$E_1 e_1 s_1,$$

а въ шипѣ — растяженіе Ees .

Внутренняя окружность шины послѣ охлажденія равняется

$$2\pi r(1-\rho)(1+e),$$

а внѣшняя — обода

$$2\pi(r - e_1 d).$$

Поэтому

$$2\pi r(1-\rho)(1+e) = 2\pi(r - e_1 d)$$

или

$$(1-\rho)(1+e) = 1 - \frac{e_1 d}{r},$$

откуда, пренебрегая малыми величинами высшаго порядка,

$$1 - \rho + e = 1 - \frac{d}{r} e_1,$$

$$\rho = e + \frac{d}{r} e_1, \quad \frac{\rho}{e} = 1 + \frac{de_1}{re} \dots \dots \dots (103)$$

Разрѣжемъ колесо сѣченіемъ *mnopqr* (черт. 22), пересѣкающимъ по поламъ ободѣ, шины и всѣ спицы, и замѣнимъ напруги, дѣйствующія въ отдѣльныхъ сѣченіяхъ, внѣшними силами. Тогда нужно приложить къ сѣченіямъ шины растягивающія силы Ees , къ сѣченіямъ обода — сжимающія силы

$E_1 e_1 o \frac{d}{r}$ и къ сѣченіямъ спицъ — сжимающія силы $E_1 e_1 s_1$. Число

последнихъ въ одной половинѣ колеса — n . Если себѣ представимъ, что эти силы распределены равномерно вдоль обода, — что будетъ тѣмъ болѣе соответствовать дѣйствительности, чѣмъ больше n , — то вдоль длины $r\pi$ обода распределена сила $nE_1 e_1 s_1$, слѣдовательно на элементъ его длиной dx дѣйствуетъ по направ-

ленію радіуса сила $\frac{nE_1 e_1 s_1}{r\pi} dx$, которой слагающая, перпендику-

лярная къ сѣченію $mn = \frac{nE_1 e_1 s_1 dx}{r\pi} \sin \varphi$, гдѣ φ = уголъ, обра-

зубый радіусомъ соотвѣтственнаго элемента, съ m . Сумма этихъ слагающихъ будетъ

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{nE_1 e_1 s_1 dx \sin \varphi}{r\pi},$$

или, такъ какъ $dx = r d\varphi$,

$$\frac{2nE_1 e_1 s_1}{r\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sin \varphi = \frac{2nE_1 e_1 s_1}{\pi}.$$

Изъ условія равновѣсія имѣемъ

$$2Es = 2E_1 e_1 o \frac{d}{r} + \frac{2nE_1 e_1 s_1}{\pi},$$

откуда

$$\frac{e_1}{e} = \frac{Es}{2E_1 \left(\frac{do}{r} + \frac{ns_1}{\pi} \right)}.$$

Если это значеніе вставимъ въ (103), то получимъ

$$\frac{\rho}{e} = 1 + \frac{d}{r} \frac{Es}{2E_1 \left(\frac{do}{r} + \frac{ns_1}{\pi} \right)} \dots \dots \dots (104)$$

гдѣ
$$e = \frac{\sigma}{E}.$$

Укороченіе шины равно $2\pi r \rho$; если α —коэффициентъ линейнаго расширенія матеріала шины и t —разность температуръ, вызвавшая это укороченіе, то

$$2\pi r \rho = 2\pi r \alpha t$$

и отсюда

$$t = \frac{\rho}{\alpha} = \frac{\sigma}{E\alpha} \left[1 + \frac{d}{r} \frac{Es}{2E_1 \left(\frac{do}{r} + \frac{ns_1}{\pi} \right)} \right] \dots \dots \dots (105)$$

t означаетъ число градусовъ, на которое должна быть повышена температура шины, чтобы ея напряженіе по охлажденію было равно σ .

§ 35.

Сопротивленіе тянутыхъ проволокъ.—При изготовленіи проволоки металлъ уплотняется преимущественно на поверхности, а сердцевина состоитъ изъ менѣ плотнаго металла. Проволоку

можно поэтому разсматривать какъ тѣло, состоящее изъ двухъ металловъ различной плотности: изъ мягкой сердцевины и изъ твердой оболочки.

Если означимъ черезъ

Ω_1 —сѣчение, E_1 —модуль упругости и σ_1 —напряженіе сердцевины,

Ω_2 —сѣчение, E_2 —модуль упругости и σ_2 —напряженіе оболочки,

G —дѣйствующій на проволоку грузъ, то, принимая во вниманіе, что удлиненіе оболочки и сердцевины одинаковы, имѣемъ

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}$$

$$\text{и } G = \Omega_1 \sigma_1 + \Omega_2 \sigma_2.$$

Изъ этихъ уравненій получаемъ:

$$\sigma_1 = \frac{GE_1}{E_1 \Omega_1 + E_2 \Omega_2} \dots \dots \dots (106)$$

$$\sigma_2 = \frac{GE_2}{E_1 \Omega_1 + E_2 \Omega_2} \dots \dots \dots (107)$$

Такъ какъ $E_2 > E_1$, то $\sigma_2 > \sigma_1$, т. е. оболочка болѣе напряжена чѣмъ сердцевина, вслѣдствіе чего предѣльное напряженіе въ первой достигнется ранѣе чѣмъ въ послѣдней. Проволоку нужно поэтому разсчитывать на сопротивленіе оболочки, т. е. ея сопротивленіе опредѣляется формулой (107).

Если напряженіе проволоки не должно превышать данной величины k , то по (107) получимъ

$$k = \frac{GE_2}{E_1 \Omega_1 + E_2 \Omega_2}.$$

Означивъ діаметръ проволоки черезъ d и толщину оболочки—черезъ $\frac{\delta}{2}$, имѣемъ

$$\Omega_1 = \frac{\pi}{4}(d - \delta)^2$$

и пренебрегая очень малой величиной δ^2

$$\Omega_1 = \frac{\pi}{4}(d^2 - 2d\delta)$$

$$\Omega_2 = \frac{\pi}{4}d^2 - \Omega_1 = \frac{\pi}{2}d\delta.$$

Поэтому

$$k = \frac{GE_2}{E_1 \frac{\pi}{4} (d^2 - 2d\delta) + E_2 \frac{\pi}{2} d\delta},$$

откуда

$$G = \frac{\pi}{4} \frac{k}{E_2} \left[E_1 d^2 + 2\delta (E_2 - E_1) d \right].$$

Если поставим

$$\frac{\pi E_1}{4 E_2} k = A, \quad \frac{\pi}{4} \frac{k}{E_2} 2\delta (E_2 - E_1) = B,$$

то сопротивление G проволоки разрыву определится формулой

$$G = Ad^2 + Bd \dots \dots \dots (108)$$

Хотя эта формула не точна, такъ какъ пропорціональность напряженій и удлинений имѣть мѣсто только до предѣла упругости, и переходъ матеріала оболочки къ матеріалу ядра въ дѣйствительности не внезапный, но постепенный, такъ что сѣченіе проволоки слѣдовало бы разсматривать состоящимъ изъ болѣе или менѣе значительнаго числа металлическихъ колецъ, которыхъ твердость отъ крайняго кольца къ центру постепенно уменьшается, но опыты подтверждаютъ, что сопротивление тянутой проволоки опредѣляется формулой вида (108).

Отожженіе проволоки уменьшаетъ E_2 въ болѣе сильной степени чѣмъ E_1 , коэффициентъ B уравненія 108 долженъ поэтому отожженіемъ уменьшаться болѣе чѣмъ коэффициентъ A . Это теоретическое заключеніе вполнѣ подтверждается опытами Кармарша, изъ которыхъ получены для A и B слѣдующія значенія:

Таблица VII.

Родъ матеріала.	Неотож- женная.		Отожжен- ная.	
	A	B	A	B
Сталь	50	21	45	3
Желѣзо лучшее	50	12,5	26	3
Желѣзо обыкновенное.	36	18	22,5	5
Латунь	43	8	22,5	5
Мѣдь	27,5	7,5	18,5	0

Помощію этихъ значеній получается по формулѣ (108) сопротивление разрыву проволоки въ килограммахъ, если d взято въ миллиметрахъ.

Задача.—Проволока AOB (черт. 23) телеграфнаго провода подвѣшена въ A и B къ столбамъ такимъ образомъ, что ея середина O находится немного ниже прямой AB , соединяющей ея точки прикрѣпленія. Стрѣлка f образованной ея кривой AOB измѣняется вмѣстѣ съ температурой; при пониженіи температуры стрѣлка уменьшается, вслѣдствіе чего напряженіе проволоки увеличивается.

Опредѣлить стрѣлку f такимъ образомъ, чтобы во время наименьшей температуры, какая въ данной мѣстности возможна, натяженіе проволоки не было больше известнаго предѣла.

Наинизшую точку O примемъ за начало осей координатъ, изъ которыхъ ось OX —касательна къ AOB въ O . Означимъ черезъ

x и y —абсциссу и ординату произвольной точки m проволоки,

φ —уголъ касательной въ этой точкѣ съ осью OX ,

g —вѣсъ 1-го погоннаго метра проволоки,

H —ея сопротивленіе въ сѣченіи O ,

S —тоже въ сѣченіи m .

Мы предполагаемъ, что искривленіе проволоки такъ мало, что длину какой нибудь части ея можно замѣнить длиной проекціи этой части на ось OX .

Вырѣжемъ часть Om проволоки, и къ разрѣзаннымъ сѣченіямъ O и m приложимъ нормальныя силы H и S . На эту часть дѣйствуютъ 3 силы: H , S и вѣсъ gx , поэтому изъ условій равновѣсія получимъ:

$$H - S \cos \varphi = 0,$$

$$S \sin \varphi - gx = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{gx}{H} = \frac{dy}{dx},$$

$$y = \frac{gx^2}{2H} + C.$$

Такъ какъ для $x = 0$, y тоже $= 0$, то $C = 0$.

Для $x = a$, $y = f$, поэтому

$$f = \frac{ga^2}{2H} \dots \dots \dots (109)$$

Изъ обоихъ послѣднихъ уравненій получаемъ:

$$\frac{y}{f} = \frac{x^2}{a^2} \dots \dots \dots (109a)$$

Это уравненіе показываетъ, что при малыхъ искривленіяхъ проволока принимаетъ видъ параболы.

Если

s —длина проволоки при температурѣ, при которой происходитъ устройство провода,

s_1 —длина ея при наинизшей температурѣ, какая въ данной мѣстности возможна,

t —разность этихъ температуръ, и

α —коэффициентъ линейнаго расширенія матеріала проволоки,

то

$$s = s_1(1 + \alpha t) \dots \dots \dots (110)$$

Но

$$s = 2 \int_0^a dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

или, такъ какъ по (109a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2f}{a^2} x,$$

то

$$\frac{s}{2} = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{2fx}{a^2}\right)^2} dx = \int_0^a dx \left(1 + \frac{2f^2 x^2}{a^4}\right),$$

откуда

$$s = 2a \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f^2}{a^2}\right) \dots \dots \dots (111)$$

Такимъ же образомъ получимъ

$$s_1 = 2a \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f_1^2}{a^2}\right) \dots \dots \dots (112)$$

гдѣ f_1 —стрѣлка проволоки при наинизшей температурѣ.

Помощію этихъ значеній уравненіе (110) получаетъ видъ

$$2a \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f^2}{a^2}\right) = 2a \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f_1^2}{a^2}\right)(1 + \alpha t)$$

и пренебрегая малыми величинами высшей степени

$$\frac{2}{3} \frac{f}{a^2} = \frac{2}{3} \frac{f_1}{a^2} + \alpha t$$

$$f = \sqrt{f_1^2 + 1,5 \alpha t a^2} \dots \dots \dots (113)$$

Если наибольшее напряжение проволоки, испытываемое ею во время наинизшей температуры означимъ для сѣченія O черезъ H_m , а для сѣченія m —черезъ S_m , то по (109)

$$f_1 = \frac{ga^2}{2H_m}, \quad S_m = \sqrt{H_m^2 + (ga)^2}.$$

Уравненіе (113) можно поэтому написать такъ:

$$f = a \sqrt{\left(\frac{ga}{2H_m}\right)^2 + 1,5\alpha t} \dots \dots \dots (114)$$

По этой формулѣ можно вычислить f для различныхъ температуръ t , и составить таблицу значеній f и t , которыми слѣдуетъ пользоваться при устройствѣ телеграфнаго провода.

Проволочные канаты.

§ 36.

Роды проволочныхъ канатовъ. Допускаемое напряженіе.—Проволочные канаты бываютъ крученые и некрученые.

Въ некрученыхъ канатахъ проволоки расположены параллельно и связаны на соответственныхъ мѣстахъ обвитой вокругъ нихъ проволокой, а крученые состоятъ изъ нѣсколькихъ проволочныхъ снурковъ, соединенныхъ въ одинъ канатъ.

Сопротивленіе проволоки, которой діаметръ d , по (108) = $Ad^2 + Bd$. Если поэтому $\frac{1}{p}$ коэффициентъ прочности, то безопасная нагрузка проволоки = $\frac{1}{p} (Ad^2 + Bd)$, а безопасная нагрузка единицы площади сѣченія, т. е. *допускаемое напряженіе*

$$k = \frac{Ad^2 + Bd}{p \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4}{\pi p} (A + Bd),$$

или

$$k = \frac{1,273}{p} \left(A + \frac{B}{d} \right) \dots \dots \dots (115)$$

Въ большинствѣ случаевъ пренебрегаютъ вторымъ членомъ въ скобкахъ, который сравнительно съ первымъ малъ, и берутъ

$$k = \frac{1,27A}{p} \dots \dots \dots (115a)$$

Коэффициенты A и B даны въ таблицѣ VII.

Формула (115) действительна для постоянной нагрузки; когда нагрузка переменная, то по (60)

$$k = \frac{R}{p} \frac{1}{1 - \frac{\omega}{\alpha}},$$

гдѣ $\alpha = \frac{R}{R - N}$ и $\omega = \frac{\min N}{\max N}$.

Для хорошей *железной проволоки*

$$R = 60, N = 24,$$

следовательно

$$\frac{1}{\alpha} = 0,6$$

и при тройной прочности ($p = 3$)

$$k = \frac{8}{1 - 0,6\omega} \dots \dots \dots (116)$$

Для хорошей *стальной проволоки*

$$R = 110, N = 54,$$

поэтому

$$\frac{1}{\alpha} = 0,5$$

и для $p = 3$

$$k = \frac{18}{1 - 0,5\omega} \dots \dots \dots (117)$$

Формулы (116) и (117) дают допускаемое напряженіе въ килограммахъ на 1 квадратный миллиметръ.

§ 37.

Некрученные проволочные канаты.—Некрученные проволочные канаты употребляются только въ тѣхъ случаяхъ, когда канатъ не долженъ навиваться на цилиндрическую поверхность, потому что при большихъ изгибахъ его сопротивленіе значительно уменьшается.

Если означимъ черезъ

d —діаметръ проволоки,

D —діаметръ каната,

n —число составляющихъ его проволокъ,

G —безопасный грузъ каната,

то по (108)

$$G = \frac{n}{p} (Ad^2 + Bd) \dots \dots \dots (118)$$

откуда діаметръ проволоки, нужный при грузѣ G ,

$$d = -\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} + \frac{Gp}{nA}} \dots \dots \dots (119)$$

Эмпирически получено, что сѣченіе каната среднимъ числомъ на 70 процентовъ больше суммы сѣченій его проволокъ, т. е.

$$\frac{\pi}{4} D^2 = 1,7n \frac{\pi}{4} d^2.$$

Изъ этого уравненія получимъ

$$d = \frac{0,77D}{\sqrt{n}} \dots \dots \dots (120)$$

Помощію этого значенія уравненіе (118) получаетъ видъ

$$G = \frac{n}{p} \left(\frac{AD^2}{1,7n} + \frac{B0,77D}{\sqrt{n}} \right)$$

или

$$G = \frac{1}{p} (0,59AD^2 + 0,77BD \sqrt{n}) \dots \dots \dots (121)$$

Если k —допускаемое напряженіе проволоки, то

$$G = kn \frac{\pi d^2}{4} \dots \dots \dots (121a)$$

слѣдовательно

$$d = 1,128 \sqrt{\frac{G}{nk}} \dots \dots \dots (122)$$

и по (120)

$$D = 1,47 \sqrt{\frac{G}{k}} \dots \dots \dots (123)$$

Если вѣсъ одного погоннаго метра каната, въ килограммахъ, означимъ черезъ g , то приблизительно

$$\text{для желѣза } g = 0,8 \text{ } nd^2 \dots \dots \dots (124)$$

$$\text{и для стали } g = 0,9 \text{ } nd^2 \dots \dots \dots (125)$$

гдѣ d —діаметръ проволоки въ сантиметрахъ.

Примѣръ. Опредѣлить діаметръ желѣзнаго проволочнаго каната, который при 7 кратной прочности могъ бы поддерживать грузъ 1000 кил. Діаметръ проволоки = 3 мм.

Здѣсь

$p = 7$, $d = 3$, а въ таблицѣ VII находимъ

$$A = 45, \quad B = 3.$$

По (115)

$$k = \frac{1,27}{7} \left(45 + \frac{3}{3} \right) = 8 \text{ кил. на 1 кв. мм.}$$

По (123)

$$D = 1,47 \sqrt{\frac{1000}{8}} = 16,47 \text{ мм.}$$

Число проволокъ каната, по (120),

$$n = \left(\frac{0,77 D}{d} \right)^2 = \left(\frac{0,77 \times 16,47}{3} \right)^2 = 18.$$

§ 38.

Крученые канаты.—Крученые канаты изготовляютъ такимъ образомъ, что сначала скручиваютъ изъ проволокъ шнурки, и затѣмъ изъ этихъ шнурковъ—канаты. Какъ проволоки въ шнуркахъ, такъ и шнурки въ канатѣ располагаютъ вокругъ сердцевинъ изъ пеньки, которыя придаютъ канату требуемую гибкость. Только при употребленіи очень тонкихъ проволокъ замѣняютъ иногда пеньковыя сердцевинны въ шнуркахъ проволоками.

Число проволокъ въ канатѣ—всегда нѣкоторое кратное числа 6; всего чаще встрѣчаются слѣдующія числа:

18, 24, 30, 36, 72, 84, 108, 144 и 192.

Канаты составляютъ изъ 4—6 шнурковъ; послѣднее число болѣе употребительно чѣмъ первое. Въ фиг. 23 представлено сѣченіе каната, составленнаго изъ сердцевинны и 6 шнурковъ; каждый шнурокъ содержитъ 6 проволокъ.

Наиболѣе употребляемыя толщины проволокъ—1·2, 1·3, 1·5, 1·7, 1·9, 2·1, 2·5, 2·8, 3·2, и 3·5, миллиметр. Проволоки въ шнуркахъ скручиваютъ на уголъ отъ 8 до 15°, а шнурки въ канатѣ—на уголъ отъ 10 до 25°.

Всякое скручиваніе уменьшаетъ сопротивленіе каната, такъ какъ проволока уже въ ненагруженномъ состояніи испытываетъ напряженіе, произведенное крученіемъ, но оно для канатовъ полезно, потому что: 1) лучше обезпечиваетъ при изгибѣ каната совмѣстное дѣйствіе всѣхъ составляющихъ его проволокъ, и 2) проволока дѣйствуетъ въ родѣ винтообразной пружины, вслѣдствіе чего дѣйствіе ударовъ и сотрясеній дѣлается для каната менѣе вреднымъ.

Когда канатъ употребляется въ прямолинейномъ или немного изогнутомъ видѣ, то его сопротивленіе можетъ быть опредѣлено по формулѣ (121).

Если канатъ обхватываетъ цилиндрическую поверхность, то уже въ ненагруженномъ состояніи онъ испытываетъ напряженія, произведенныя его изгибомъ; въ нагруженномъ состояніи напряженіе каната равно суммѣ напряженій, произведенныхъ нагрузкой и этимъ изгибомъ. Если напряженіе, произведенное нагрузкой, означимъ черезъ t , а наибольшее напряженіе отъ изгиба — черезъ σ , то прочность требуетъ, чтобы

$$\sigma + t \leq k \dots \dots \dots (126)$$

Чтобы опредѣлить напряженіе σ , означимъ черезъ r —радіусъ поверхности, огибаемой канатомъ,
 D —діаметръ каната,
 d —діаметръ составляющихъ его проволокъ,
 l —длину верхней, наиболѣе натянутой части проволоки, которой центральный уголъ φ ,
 Δl —измѣненіе длины l , произведенное натяженіемъ,
 φ —длину дуги радіуса $= 1$, соотвѣтствующую центральному углу φ .

Изъ черт. 24 имѣемъ

$$l = \left(r + D - \frac{d}{2} \right) \varphi,$$

$$l + \Delta l = (r + D) \varphi.$$

Изъ этихъ уравненій получаемъ

$$\Delta l = \frac{1}{2} d \varphi.$$

Напряженіе, произведенное изгибомъ верхней проволоки, по (4)

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l} = \frac{E \frac{1}{2} d \varphi}{\left(r + D - \frac{d}{2} \right) \varphi},$$

откуда, пренебрегая величиной $\left(D - \frac{d}{2} \right)$ весьма малой въ сравненія съ величиной r ,

$$\sigma = \frac{dE}{2r} \dots \dots \dots (127)$$

и

$$r = \frac{dE}{2\sigma} \dots \dots \dots (128)$$

Изъ послѣдняго уравненія видимъ, что радіусъ r увеличивается вмѣстѣ съ толщиной проволоки.

Если t —безопасное напряженіе проволоки, произведенное одной нагрузкой, то безопасная нагрузка каната, состоящаго изъ n проволокъ

$$G = nt \frac{\pi d^2}{4},$$

или, такъ какъ по (126)

$$t = k - \sigma,$$

$$G = n (k - \sigma) \frac{\pi d^2}{4} = n \left(k - \frac{dE}{2r} \right) \frac{\pi d^2}{4},$$

$$G = \frac{n\pi}{4} \left(kd^2 - \frac{d^3 E}{2r} \right) \dots \dots \dots (129)$$

Наиболѣе выгодный діаметръ проволоки тотъ, для котораго G получаетъ наибольшее значеніе, т. е. для котораго

$$\frac{dG}{dd} = 0.$$

Но

$$\frac{dG}{dd} = 2kd - \frac{3}{2} \frac{d^2 E}{2r} = 0,$$

откуда

$$d = \frac{4}{3} \frac{kr}{E} \dots \dots \dots (130)$$

Подставивъ это значеніе въ (127), получимъ

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{kr}{E \cdot 2r} = \frac{2}{3} k \dots \dots \dots (131)$$

слѣдовательно

$$t = k - \sigma = \frac{1}{3} k \dots \dots \dots (132)$$

т. е. напряженіе, производимое нагрузкой, не должно превышать $\frac{1}{3}$ допускаемаго напряженія.

Такъ какъ $\sigma = \frac{2}{3} k$, то по (128)

$$r = \frac{3}{4} \frac{dE}{k} \dots \dots \dots (133)$$

$$G = \frac{k}{3} \cdot \frac{n\pi d^2}{4} = 0,26knd^2 \dots \dots \dots (134)$$

Примръ.—Опредѣлить толщину желѣзной проволоки для крученаго каната, состоящаго изъ 72 проволокъ, который въ шахтѣ глубиною 200 метр. долженъ кромѣ собственнаго вѣса, платформы и телѣжки, поднимать грузъ 800 кил. Вѣсъ платформы и телѣжки = 700 кил.

Для рѣшенія этой задачи имѣемъ уравненіе (134)

$$G = 0,26 \, knd^2.$$

Нагрузка G состоитъ изъ вѣса каната, платформы и телѣжки, и изъ полезнаго груза. Такъ какъ вѣсъ каната по (124) $= 0,8 \times 72 \times d^2 \times 200 = 11520d^2$, то $G = 700 + 800 + 11520d^2 = 1500 + 11520d^2$.

Канатъ подвергается дѣйствію переменнѣй нагрузки, поэтому по (116)

$$k = \frac{8}{1 - 0,6\omega}.$$

Наибольшая нагрузка $\max N = G$, а наименьшая $\min N = G - 800$; для опредѣленія $\omega = \frac{\min N}{\max N}$ нужно слѣдовательно знать діаметръ d . Такъ какъ этотъ діаметръ неизвѣстенъ, то исполнимъ расчетъ каната сначала такимъ образомъ, какъ если бы на него дѣйствовала постоянная нагрузка G .

По (132) напряженіе отъ нагрузки должно равняться только $\frac{1}{3}$ всего напряженія, поэтому

$$\max N = \frac{1}{3} \frac{n}{p} (Ad^2 + Bd).$$

Изъ табл. VII имѣемъ

$$A = 50, B = 12,5.$$

Если положимъ $p = 3$, то получимъ $\max N = 1500 + 115,2d^2$

$$\frac{1}{3} - \frac{72}{3} (50d^2 + 12,5d)$$

или

$$5,266 = d^2 + 0,351d,$$

откуда

$$d = 2,15 \text{ мм.}$$

Помощію этого значенія будетъ

$$\omega = \frac{700 + 115,2 (2,15)^2}{1500 + 115,2 (2,15)^2} = 0,6.$$

Поэтому

$$k = \frac{8}{1 - 0,6\omega} = 12,5.$$

По (134)

$$1500 + 115,2d^2 = 0,26 \times 12,5 \times 72d^2$$

$$1500 = 118,8d^2$$

$$d = 3,5 \text{ мм.}$$

Радиусъ блока получается изъ уравненія (133)

$$r = \frac{3dE}{4\kappa}.$$

Для желѣза $E = 20000$ кил., поэтому

$$r = \frac{3 \times 3,5 \times 20000}{4 \times 12,5} = 4200 \text{ миллиметр.}$$

§ 39.

Утоняющіеся проволочные канаты.—Когда глубина колодца или шахты очень большая, то для уменьшенія вѣса каната составляютъ его изъ частей, діаметры которыхъ могутъ быть опредѣлены по формуламъ (83), полученнымъ для длинныхъ шахтенныхъ штангъ. Число проволокъ во всѣхъ частяхъ каната берутъ одинаковымъ, а измѣненіе діаметра достигается измѣненіемъ толщины проволокъ.

Утоняющіеся канаты, вслѣдствіе ихъ меньшаго вѣса, обходятся, при одинаковой крѣпости, дешевле канатовъ съ постояннымъ поперечнымъ сѣченіемъ.

Если означимъ черезъ $l_1, l_2, l_3 \dots$ длины отдѣльныхъ частей каната, считая снизу вверхъ, въ метрахъ,

$d_1, d_2, d_3 \dots$ діаметры ихъ проволокъ, въ миллиметрахъ,

$k_1, k_2, k_3 \dots$ ихъ допускаемыя напряженія въ килограммахъ на 1 квадратный миллиметръ,

n — число проволокъ каната,

g — вѣсъ одного погоннаго метра каната въ килограммахъ, то вообще

$$g = an d^2.$$

По (124) и (125)

для желѣза $a = 0,008$

и для стали $a = 0,009$.

Чтобы напряженіе въ опасныхъ (наивысшихъ) сѣченіяхъ отдѣльныхъ частей не превышало допускаемаго напряженія, должны быть исполнены слѣдующія уравненія, въ которыхъ G означаетъ грузъ, привѣшенный къ концу каната:

$$G + an d_1^2 l_1 = \frac{k_1 n \pi d_1^2}{4},$$

$$G + an d_1^2 l_1 + an d_2^2 l_2 = \frac{k_2 n \pi d_2^2}{4},$$

$$G + an d_1^2 l_1 + an d_2^2 l_2 + an d_3^2 l_3 = \frac{k_3 n \pi d_3^2}{4}$$

.....

Изъ этихъ уравненій получаемъ:

$$d_1 = \sqrt{\frac{G}{n \left(\frac{\pi k_1}{4} - al_1 \right)}}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{G \frac{\pi k_2}{4}}{n \left(\frac{\pi k_1}{4} - al_1 \right) \left(\frac{\pi k_2}{4} - al_2 \right)}}$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{G k_1 k_2 \left(\frac{\pi}{4} \right)^2}{n \left(\frac{\pi k_1}{4} - al_1 \right) \left(\frac{\pi k_2}{4} - al_2 \right) \left(\frac{\pi k_3}{4} - al_3 \right)}} \quad (135)$$

вообще

$$d_n = \sqrt{\frac{G k_1 k_2 k_3 \dots k_{n-1} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n-1}}{n \left(\frac{\pi k_1}{4} - al_1 \right) \left(\frac{\pi k_2}{4} - al_2 \right) \dots \left(\frac{\pi k_n}{4} - al_n \right)}}$$

Когда нагрузка постоянна, то $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n$; если при этомъ длины всѣхъ астей каната равны между собою, т. е. $l_1 = l_2 = l_3 = \dots = l_n$, то послѣднее уравненіе получаетъ видъ

$$d_n = \sqrt{\frac{G \left(\frac{k\pi}{4} \right)^{n-1}}{n \left(\frac{k\pi}{4} - al \right)^n}} \dots \dots \dots (136)$$

Когда канатъ огибаетъ цилиндрическую поверхность (блокъ, барабанъ), то по (132) вмѣсто $k_1, k_2, k_3 \dots$ нужно подставить въ эти формулы $\frac{1}{3} k_1, \frac{1}{3} k_2, \frac{1}{3} k_3 \dots$

Примръ. Определить діаметры проволокъ стального каната, состоящаго изъ 72 проволокъ, для шахты глубиною 720 метровъ. Канатъ раздѣленъ на 3 равныя части, каждая длиною 240 мтр., діаметры которыхъ сверху внизъ уменьшаются. Всѣ платформы и тѣлѣжки = 790 кил., а нагрузки — 1000 кил.

а) Расчетъ наинизшей части.

Для опредѣленія допускаемаго напряженія k_1 имѣемъ:

$$\begin{aligned} \min N &= 790 + 0,009 \times 72 \times d^2 \times 240 = 790 + 155,52d^2 \\ \max N &= 1790 + 155,52d^2 \end{aligned}$$

Принимая сначала, что на канатъ дѣйствуетъ постоянная нагрузка, будетъ по (118)

$$\max N = \frac{1}{3} \frac{n}{p} (Ad^2 + Bd).$$

Для неотожженной стали получаемъ изъ табл. VII

$$A = 50, \quad B = 21.$$

Поэтому, для $p = 3$

$$\max N = \frac{1}{3} \cdot \frac{72}{3} (50d^2 + 21d) = 400d^2 + 168d$$

$$1790 + 155,52d^2 = 400d^2 + 168d.$$

Изъ этого уравненія получаемъ

$$d = 2,4 \text{ миллим.},$$

слѣдовательно

$$\min N = 790 + 0,009 \times 72 \times 2,4^2 \times 240 = 790 + 896 = 1686$$

$$\max N = 2686$$

$$\omega = \frac{\min N}{\max N} = 0,6$$

и по (117)

$$k = \frac{18}{1 - 0,5\omega} = 25.$$

По (135)

$$d_1 = \sqrt{\frac{1790}{72 \left(\frac{3,14 \times \frac{25}{3}}{4} - 0,009 \times 240 \right)}} = 2,4 \text{ мм.}$$

Вѣсъ первой части каната

$$W_1 = 155,52d^2 = 896 \text{ вѣд.}$$

б) Расчетъ средней части:

$$\min N = 790 + 896 + 155,52d_2^2 = 1686 + 155,52d_2^2$$

$$\max N = 2686 + 155,52d_2^2.$$

Изъ уравненія

$$2686 + 155,52d_2^2 = 400d_2^2 + 168d_2$$

получаемъ какъ приблизительное значеніе

$$d_2 = 2,99$$

$$\min N = 1686 + 155,52 \times 2,99^2 = 3046$$

$$\max N = 4046$$

$$\omega = \frac{3046}{4046} = 0,75$$

$$k = \frac{18}{1 - 0,5 \times 0,75} = 28$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{1790 \times \frac{3,14}{4} \cdot \frac{25}{3}}{72 \left(\frac{3,14}{4} \cdot \frac{25}{3} - 0,009 \times 240 \right) \left(\frac{3,14}{4} \cdot \frac{28}{4} - 0,009 \times 240 \right)}} = 2,7 \text{ мм.}$$

$$W_2 = 155,52 d_2^2 = 1115 \text{ кил.}$$

в) Расчетъ верхней части:

$$\min N = 790 + 896 + 1115 + 155,52 d_3^2 = 2801 + 155,52 d_3^2$$

$$\max N = 3801 + 155,52 d_3^2,$$

Приблизительно

$$3801 + 155,52 d_3^2 = 400 d_3^2 + 168 d_3,$$

откуда

$$d_3 = 3,6.$$

Помощію этого значенія получаемъ

$$\omega = \frac{\min N}{\max N} = \frac{4816}{5816} = 0,83$$

$$k = \frac{18}{1 - 0,5 \times 0,83} = 30$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{1790 \cdot \frac{25}{3} \cdot \frac{28}{3} \left(\frac{3,14}{4} \right)^2}{316,1 \times 5,17 \left(\frac{3,14}{4} \cdot \frac{30}{3} - 2,16 \right)}} = 3,0 \text{ мм.}$$

$$W_3 = 155,52 d_3^2 = 1400 \text{ кил.}$$

§ 40.

Практическія данныя для расчета желѣзныхъ проволочныхъ канатовъ. — Когда не требуется большой точности, производятъ расчетъ желѣзныхъ проволочныхъ канатовъ по слѣдую-

щимъ приближительнымъ формуламъ, въ которыхъ буквы G , n , d и g имѣютъ прежнее значеніе:

$$G = 3,15D^2 \dots \dots \dots (137)$$

$$g = 0,003D^2 \dots \dots \dots (138)$$

$$D = 1,59d\sqrt{n} \dots \dots \dots (139)$$

Въ этихъ формулахъ нужно выражать D и d въ сантиметрахъ, а G и g —въ килограммахъ.

Примѣръ. Определить приближительно нагрузку и вѣсъ одного погоннаго метра желѣзнаго каната, содержащаго 24 проволоки діаметра 2,1 миллим.

Діаметръ каната по (139)

$$D = 1,59 \times 2,1 \times \sqrt{24} = 16,4 \text{ мм.}$$

Вѣсъ одного пог. метра по (138)

$$g = 0,003 \times 16,4^2 = 0,81 \text{ кил.}$$

Безопасная нагрузка каната при отсутствіи изгиба

$$G = 3,15 \times 16,4^2 = 849 \text{ кил.}$$

Если канатъ обхватываетъ цилиндрическую поверхность, то

$$G = \frac{849}{3} = 283 \text{ кил.}$$

§ 41

Пеньковые канаты.—Пеньковые канаты составляютъ, подобнымъ образомъ какъ и проволочные, изъ снурковъ, изготовленныхъ изъ пеньковыхъ нитей, расположенныхъ вокругъ особаго пеньковаго снурка, называемаго сердцевиной (черт. 25). Въ сердцевинѣ нити расположены всегда параллельно.

Когда канатъ назначается для употребленія въ прямолинейномъ или только немного изогнутомъ видѣ, то снурки, располагаемые вокругъ сердцевины, имѣютъ или одинаковое съ сердцевиной устройство, или ихъ скручиваютъ на столько, что составляющія ихъ нити укорачиваются на $\frac{1}{5}$ своей первоначальной длины. Опыты показали, что болѣе сильное скручиваніе уменьшаетъ крѣпость снурковъ.

Когда канатъ долженъ навиваться на цилиндрическую поверхность, то сердцевина, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, состоитъ изъ параллельныхъ нитей, но другіе снурки—крученые,

и ихъ оси образуютъ вокругъ сердцевины винтообразныя линіи. Крученые канаты обладаютъ въ изогнутомъ состояніи болѣе значительнымъ сопротивленіемъ чѣмъ некрученые, такъ какъ усиліе въ нихъ распредѣляется болѣе равномерно на снурки.

Опыты показываютъ, что при одинаковыхъ прочихъ обстоятельствахъ сопротивленіе пеньковыхъ канатовъ, отнесенное къ единицѣ площади сѣченія, тѣмъ больше, чѣмъ тоньше нити, изъ которыхъ состоятъ снурки, и чѣмъ меньше толщина каната. Вода уменьшаетъ крѣпость каната, потому что волокна, пропитываясь водой, утолщаются, вслѣдствіе чего длина ихъ увеличивается и они испытываютъ напряженія уже въ ненагруженномъ состояніи.

Крѣпость пеньковыхъ канатовъ колеблется между 5 и 8 килогр. на 1 квадратный миллиметръ и равняется среднимъ числомъ 6-ти кил. на 1 кв. миллиметръ. Поэтому допускаемое напряженіе пеньковыхъ канатовъ при 6 кратной прочности

$$k=1 \text{ кил. на 1 кв. мм.}$$

Полезное сѣченіе каната равно приблизительно 0,9 площади того круга, который можетъ быть описанъ около его дѣйствительнаго сѣченія, поэтому безопасная нагрузка пеньковаго каната, включая его собственный вѣсъ, получается изъ уравненія

$$G=0,9 \frac{\pi D^2}{4} k=0,7kD^2 \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

откуда

$$D=\sqrt{\frac{G}{0,7k}}=1,19\sqrt{\frac{G}{k}} \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

Для $k=1$ кил. на 1 кв. мм. будетъ

$$G=0,7D^2, \quad D=1,19\sqrt{G} \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

Если вѣсъ одного погоннаго метра каната въ килограммахъ означимъ черезъ g , а діаметръ его въ миллиметрахъ—черезъ D , то для сухаго несмазаннаго каната приблизительно

$$g=0,00065D^2.$$

а для мокраго и смазаннаго

$$g=0,00078D^2.$$

Пеньковые канаты получаютъ діаметръ отъ 10—60 миллиметровъ.

Наименьшій радіусъ блока или барабана, на который канатъ долженъ навиваться, опредѣляютъ изъ уравненія

$$r=4D.$$

Примѣръ. Определить діаметръ пеньковаго каната, который долженъ поднимать грузъ=500 кил. на высоту 10 метровъ.

Вѣсъ каната

$$g=0,00078D^2 \times 10=0,0078D^2,$$

поэтому полный грузъ

$$G=500 \times 0,0078D^2 \quad (143)$$

По (142)

$$D=1,19\sqrt{500+0,078D^2},$$

откуда

$$D=28 \text{ миллиметровъ.}$$

§ 42.

Цѣпи. — Звенья, изъ которыхъ состоятъ цѣпи, получаютъ различную форму, но наибольшимъ распространеніемъ пользуются цѣпи, называемыя англійскими, которыхъ звенья имѣютъ видъ эллиптическихъ колець, изготовленныхъ изъ круглаго желѣза (черт. 26). Очевидно, что при этой формѣ звенья сопротивляются растяженію и выгибанію, что поэтому ихъ сопротивленіе меньше чѣмъ сопротивленіе желѣза, изъ котораго они изготовлены, при дѣйствіи одного растяженія. Произведенные въ Англій опыты показали, что сопротивленіе эллиптическихъ звеньевъ относится къ сопротивленію желѣза, изъ котораго они изготовлены, какъ 9:11, такъ что допускаемое напряженіе k_1 для англійской цѣпи

$$k_1 = \frac{9}{11}k \quad (144)$$

гдѣ k —допускаемое напряженіе желѣза при растяженіи. Соответственно обстоятельствамъ, при которыхъ цѣпь должна работать, k определяется данными таблицы III, или формулами (67).

При временномъ употребленіи цѣпи можно принимать

для желѣза $k_1=10$ кил. на 1 кв. мм.

и для стали $k_1=12$ кил. на 1 кв. мм.

Если полную нагрузку (включая собственный вѣсъ цѣпи), которую цѣпь можетъ нести безопасно, означимъ черезъ G , то діаметръ звена d получается изъ уравненія

$$G=k_1 \frac{\pi d^2}{4} = 0,785 k_1 d^2 \quad (145)$$

Вѣсъ одного погоннаго метра цѣпи, приблизительно

$$g=0,0233d^2 \text{ килогр.,}$$

если d взято въ миллиметрахъ.

Относительные размѣры звеньевъ видны изъ черт. 26.

Радіусъ блока или барабана, на который цѣпь должна навиваться, не дѣлають менѣе 12*a*.

Чтобы уменьшить изгибъ звеньевъ и такимъ образомъ увеличить сопротивленіе цѣпи, *Brunton* снабжаетъ звенья поперечинами, расположенными по малой оси эллипсиса (черт. 27). Цѣпи *Brunton*'а изготовляютъ изъ круглаго желѣза, діаметра 13—52 миллиметра.

По опытамъ, произведеннымъ въ Англіи, сопротивленіе цѣпи, *Brunton*'а $\frac{9}{7}$ разъ больше сопротивленія обыкновенной англійской цѣпи.

Такъ какъ при продолжительномъ употребленіи цѣпей металлъ ихъ дѣлается хрупкимъ, то бываетъ необходимо черезъ каждые 3—4 года отжигать ихъ.

Глава III.

Сочлененныя системы.

§ 43.

Определение сочлененной системы. Сочлененной системой называется система прямолинейных брусевъ, соединенныхъ между собою только на концахъ посредствомъ шарнировъ, такимъ образомъ, что, освободивъ одинъ конецъ бруса, можно его вращать свободно около другого конца. Такіе брусья называются *стержнями*, а соединенныя ими точки—*узлами*.

Мы будемъ предполагать, что:

- 1) оси всѣхъ стержней, выходящихъ изъ одного узла, пересекаются въ центрѣ его шарнира, называемаго *узловой точкой*.
- 2) Внешнія силы имѣютъ точки приложенія только въ узловыхъ точкахъ.
- 3) Вращеніе около шарнировъ происходитъ безъ тренія.

Очевидно, что при этихъ условіяхъ стержни могутъ испытывать только растяженія, или только сжатія, т. е. въ нихъ вызывается только нормальная упругость.

§ 44.

Свободная неизмѣняемая система.

Нужные стержни.—Неизмѣняемую сочлененную систему можно себѣ представить какъ систему матеріальныхъ точекъ, соединенныхъ между собою стержнями такимъ образомъ, что ихъ относительныя разстоянія измѣняться не могутъ.

Положимъ, что въ пространствѣ даны точки 1, 2, 3.... n , которыя должны быть соединены стержнями неизмѣняемымъ образомъ и требуется найти число нужныхъ для этого стержней.

Первыя двѣ точки 1 и 2 могутъ быть соединены между собою только однимъ стержнемъ $\overline{12}$ (черт. 28).

Третья точка 3 требуетъ для неизмѣняемаго соединенія съ обѣими предыдущими двухъ стержней $\overline{31}$ и $\overline{32}$. Три точки, 1, 2 и 3, соединенныя неизмѣняемо стержнями, образуютъ неизмѣняемую фигуру—треугольникъ.

Чтобы четвертую точку 4 соединить неизмѣняемо съ предыдущими необходимы 3 стержня, потому что если бы мы ее соединили только двумя стержнями $\overline{43}$ и $\overline{41}$, то она могла бы вращаться около оси $\overline{13}$; третій стержень $\overline{42}$ уничтожаетъ это вращеніе и дѣлаетъ ее неподвижной. Такимъ же образомъ узнаемъ, что всякая слѣдующая точка требуетъ для неизмѣняемаго соединенія ея съ системой, образованной предыдущими точками, 3 стержня. Изъ этого слѣдуетъ, что для соединенія n точекъ въ неизмѣняемую систему необходимо

$$1+2+3(n-3)=3n-6 \text{ стержней} \quad . \quad . \quad . \quad (146)$$

Стержни, необходимые для неизмѣняемости системы, называются *нужными*.

Свободная неизмѣняемая система (ничѣмъ не связанная съ какимъ нибудь другимъ тѣломъ) имѣетъ поэтому при n узлахъ $3n-6$ *нужныхъ стержней*.

§ 45.

Несвободная неизмѣняемая система.—Всякая сила, приложенная къ свободной системѣ, приведетъ ее въ движеніе. Въ практикѣ обыкновенно требуется, чтобы система имѣла по отношенію къ данному тѣлу (или другой системѣ) неизмѣняемое положеніе.

Число стержней, необходимое для неизмѣняемаго соединенія двухъ тѣлъ A и B получается слѣдующимъ образомъ (черт. 29).

Для неизмѣняемаго прикрѣпленія какой-нибудь точки къ тѣлу необходимы 3 стержня. Если точка α тѣла A соединена съ тѣломъ B тремя стержнями $\alpha 1$, $\alpha 2$ и $\alpha 3$, то она по отношенію къ B абсолютно неподвижна, но тѣло A можетъ вращаться около ней по всевозможнымъ направленіямъ.

Если другую точку β , взятую на A , соединимъ съ B четвертымъ стержнемъ $\beta 4$, то точки α , β и 4 составятъ треугольникъ, котораго вершина β можетъ вращаться около оси $\alpha 4$. Это вращеніе будетъ уничтожено стержнемъ $\beta 5$, соединяющимъ β съ произвольной точкой 5 тѣла B , не находящейся на прямой $\alpha 4$.

Этими 5 стержнями достигнется неподвижность прямой $\alpha\beta$ тѣла A , но самое тѣло можетъ около этой прямой вращаться какъ около неподвижной оси. Шестой стержень $\gamma\delta$, соединяющій третью точку γ тѣла A съ тѣломъ B сдѣлаетъ это вращеніе невозможнымъ.

Точки α, β, γ , которыми свободная система A соединена съ тѣломъ B , называются *опорными точками*, а стержни, которыми эти точки соединены съ B —*опорными стержнями*.

Изъ предыдущаго разсужденія слѣдуетъ, что для того, чтобы одна система имѣла по отношенію къ другой неизмѣняемое положеніе, необходимы 6 опорныхъ стержней, выходящихъ изъ трехъ опорныхъ точекъ.

Въ практикѣ мѣсто опорныхъ стержней замѣняютъ обыкновенно соотвѣтственные сопротивленія опоръ. Если сопротивленіе опоры такого рода, что опорная точка абсолютно неподвижна, то она можетъ быть замѣнена тремя стержнями; если она можетъ двигаться по линіи, то двумя, а если по поверхности, то—однимъ стержнемъ.

Неизмѣняемая система, соединенная съ тѣломъ неизмѣняемымъ образомъ, называется по отношенію къ этому тѣлу—*устойчивой*. *Устойчивая неизмѣняемая система имѣетъ при n узлахъ $3n-6$ нужныхъ стержней системы и 6 нужныхъ опорныхъ стержней, слѣдовательно всего $(3n-6)+6=3n$ нужныхъ стержней.*

§ 46.

Плоскія системы.—Когда всѣ точки системы находятся въ одной плоскости, то первыя 3 точки потребуютъ для неизмѣняемаго соединенія между собою трехъ стержней, а каждая слѣдующая для неизмѣняемаго соединенія съ предыдущими—по 2 стержня, поэтому число нужныхъ стержней плоской системы, имѣющей n узловъ, будетъ

$$s_1 = 3 + 2(n-3) = 2n - 3 \dots \dots \dots (147)$$

Если точку α плоской системы A (черт. 29) прикрѣпимъ къ плоскости B двумя стержнями, то точка α будетъ по отношенію къ B неподвижной, но система A можетъ около нея вращаться въ плоскости. Третій стержень $\beta\gamma$ сдѣлаетъ это вращеніе невозможнымъ. Плоская система требуетъ поэтому для устойчивости 3 нужныхъ стержня, такъ что число нужныхъ стержней устойчивой неизмѣняемой плоской системы, имѣющей n узловъ,

$$s = (2n-3) + 3 = 2n \dots \dots \dots (148)$$

§ 47.

Наибольшее число стержней системы. Добавочные стержни. —

Первые три точки могутъ быть соединены между собою только тремя стержнями; четвертая точка можетъ быть соединена съ тремя предыдущими тремя стержнями, пятая съ четырьмя предыдущими—четырьмя стержнями и т. д. Поэтому наибольшее число стержней, которое можетъ имѣть свободная система при n узлахъ, будетъ

$$(1+2)+3+4+5+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \dots (149)$$

Это правило дѣйствительно какъ для пространственныхъ, такъ и для плоскихъ системъ.

Выше было получено, что неизмѣняемая система имѣетъ при n узлахъ $3n-6$ стержней, но изъ этого не слѣдуетъ, чтобы всякая система, имѣющая это число стержней, была неизмѣняемой. Она будетъ неизмѣняемой только тогда, когда *вся $3n-6$ стержней—нужные стержни, т. е. когда они расположены такимъ образомъ, что всякая точка соединена съ системой предыдущихъ не меньше чѣмъ тремя стержнями.*

Плоская система будетъ неизмѣняемой когда ея стержни имѣютъ такое расположеніе, что *каждый узелъ соединенъ съ системой остальныхъ не меньше чѣмъ двумя стержнями.*

Представленная на черт. 30 плоская система имѣетъ 8 узловъ и 14 стержней. Такъ какъ $2 \times 8 - 3 = 13$, то она имѣетъ на одинъ стержень болѣе, чѣмъ необходимо для неизмѣняемости. Но если будемъ распредѣлять стержни попарно отдѣльнымъ узламъ, то увидимъ, что въ четырехугольникъ 2564 одна точка (напр. 5) прикрѣплена къ системѣ предыдущихъ только однимъ стержнемъ, и что послѣ распредѣленія два стержня, напр. a и b , останутся не принадлежащими никакому узлу. Эта система не имѣетъ поэтому свойства неизмѣняемости, такъ какъ она вмѣсто 13 имѣетъ только 12 нужныхъ стержней; остающіеся два стержня a и b называются *добавочными*.

Такимъ же образомъ легко узнать, что пространственная система только тогда устойчива, когда имѣетъ не менѣе чѣмъ 6 нужныхъ опорныхъ стержней. Система, имѣющая болѣе чѣмъ 6 опорныхъ стержней, будетъ неустойчивой, если число ея нужныхъ опорныхъ стержней менѣе 6.

Такъ система $ABCD$ (черт. 31) имѣетъ 7 опорныхъ стержней и не смотря на то она неустойчива. Эти семь стержней дѣлаютъ неподвижной въ пространствѣ только прямую AB , а эта цѣль будетъ тоже достигнута, если у точки A два опорныхъ

стержня, напр. a и b , устранимъ. Система имѣетъ поэтому 2 добавочныхъ, а слѣдовательно только 5 нужныхъ опорныхъ стержней.

§ 48.

Деформация сочлененной системы.—Положимъ, что къ узламъ $a, b, c, \dots$ сочлененной системы приложены силы такого рода, что напряженія, произведенныя ими въ стержняхъ системы, не превышаютъ предѣла упругости. Длина каждаго стержня измѣнится на величину, пропорціональную его напряженію (опредѣляемую уравненіемъ 4) и первоначальная форма системы перейдетъ въ другую, соотвѣтствующую новымъ длинамъ ея стержней. При этомъ узлы, а слѣдовательно и концы стержней, перемѣстятся въ пространствѣ на нѣкоторыя величины, при чемъ концы стержней, выходящихъ изъ одного узла, перемѣстятся на одну и ту же величину, равную перемѣщенію этого узла.

Видъ системы послѣ деформации будетъ извѣстенъ, если будутъ извѣстны относительныя перемѣщенія узловъ, т. е. измѣненія ихъ относительныхъ разстояній и положеній.

Для опредѣленія этихъ перемѣщеній отнесемъ узлы системы къ тремъ взаимно перпендикулярнымъ осямъ координатъ OX, OY и OZ (черт. 32), соединеннымъ неизмѣяемо съ самой системой. При такомъ соединеніи координаты узловъ, взятыя по отношенію къ этимъ осямъ, могутъ измѣняться только при измѣненіи относительныхъ разстояній узловъ, а всякое перемѣщеніе системы въ пространствѣ, при которомъ относительныя положенія узловъ не измѣняются, не будетъ имѣть на эти координаты никакого вліянія.

Пусть (черт. 32)

a и b —два произвольные узла ненагруженной сочлененной системы,

x, y, z и x_1, y_1, z_1 —ихъ координаты,

ab —соединяющій ихъ призматическій стержень,

l —длина этого стержня,

Ω —площадь его поперечнаго сѣченія,

E —модуль упругости его матеріала,

α, β, γ —его углы съ осями OX, OY, OZ .

Приложимъ къ узламъ системы внѣшнія силы и означимъ перемѣщенія, произведенныя ими по направленію осей координатъ, для узла a черезъ ξ, η, ζ , а для узла b —черезъ

ξ_1, η_1, ζ_1 .

сопротивленіе стержня ab —черезъ N ,
измѣненіе его длины l —черезъ λ ,

а его углы съ осями координатъ послѣ деформаци — черезъ α' , β' , γ' ,

то по (6)

$$N = E\Omega \frac{\lambda}{l}.$$

Если постоянное отношеніе $\frac{E\Omega}{l}$, зависящее только отъ матеріала и размѣровъ стержня и независящее отъ дѣйствующихъ внѣшнихъ силъ, означимъ для краткости черезъ c , то будетъ

$$N = \lambda \cdot c \dots \dots \dots (150)$$

Для опредѣленія удлиненія λ (которое можетъ быть положительно или отрицательно), имѣемъ

$$l = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$$

$$l + \lambda = \sqrt{[(x_1 + \xi_1) - (x + \xi)]^2 + [(y_1 + \eta_1) - (y + \eta)]^2 + [(z_1 + \zeta_1) - (z + \zeta)]^2}$$

Пренебрегая величинами $(\xi_1 - \xi)^2$, $(\eta_1 - \eta)^2$ и $(\zeta_1 - \zeta)^2$, которыя сравнительно съ $(x_1 - x)^2$, $(y_1 - y)^2$ и $(z_1 - z)^2$ очень малы, получимъ

$$l + \lambda = l \sqrt{1 + \frac{2[(x_1 - x)(\xi_1 - \xi) + (y_1 - y)(\eta_1 - \eta) + (z_1 - z)(\zeta_1 - \zeta)]}{l^2}}$$

или

$$l + \lambda = l \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2}{l^2} [(x_1 - x)(\xi_1 - \xi) + (y_1 - y)(\eta_1 - \eta) + (z_1 - z)(\zeta_1 - \zeta)] \right) + f,$$

гдѣ f представляетъ сумму тѣхъ членовъ ряда, которые содержатъ высшія степени очень малыхъ величинъ $\xi_1 - \xi$, $\eta_1 - \eta$ и $\zeta_1 - \zeta$. Изъ послѣдняго уравненія имѣемъ

$$\lambda = \frac{1}{l} [(x_1 - x)(\xi_1 - \xi) + (y_1 - y)(\eta_1 - \eta) + (z_1 - z)(\zeta_1 - \zeta)] + f \dots (151)$$

Такъ какъ

$$\frac{x_1 - x}{l} = \cos \alpha, \quad \frac{y_1 - y}{l} = \cos \beta, \quad \frac{z_1 - z}{l} = \cos \gamma$$

то

$$\lambda = (\xi_1 - \xi) \cos \alpha + (\eta_1 - \eta) \cos \beta + (\zeta_1 - \zeta) \cos \gamma + f \dots (152)$$

Углы, образуемые стержнемъ ab съ осями координатъ послѣ деформаци получаются изъ уравненій:

$$\cos \alpha' = \frac{(x_1 + \xi_1) - (x + \xi)}{l + \lambda}$$

$$\begin{aligned}\cos\beta' &= \frac{(y_1 + \eta_1) - (y + \eta)}{l + \lambda} \\ \cos\gamma' &= \frac{(z_1 + \zeta_1) - (z + \zeta)}{l + \lambda} \quad \dots \dots \dots (153)\end{aligned}$$

Выраженія справа знака уравненія могутъ быть развиты въ ряды, сходящіеся по величинамъ $\xi_1 - \xi$, $\eta_1 - \eta$, $\zeta_1 - \zeta$. Если сумму членовъ, содержащихъ эти величины, означимъ черезъ φ_x , φ_y и φ_z , то можно написать

$$\begin{aligned}\cos\alpha' &= \frac{x_1 - x}{l} + \varphi_x = \cos\alpha + \varphi_x \\ \cos\beta' &= \frac{y_1 - y}{l} + \varphi_y = \cos\beta + \varphi_y \quad \dots \dots \dots (154) \\ \cos\gamma' &= \frac{z_1 - z}{l} + \varphi_z = \cos\gamma + \varphi_z\end{aligned}$$

§ 49.

Условія равновѣсія сочлененныхъ системъ.—Когда система, подверженная дѣйствию внѣшнихъ силъ, измѣнила свою форму и пришла въ состояніе покоя, то совокупность силъ, дѣйствующихъ на какую нибудь ея точку, находится въ состояніи равновѣсія. Къ этимъ силамъ принадлежатъ приложенныя къ точкѣ внѣшнія силы и сопротивленія сходящихся въ ней стержней. Такъ, напр., сила P_1 , дѣйствующая на точку a (черт. 33), находится въ равновѣсіи съ сопротивленіями стержней $a1$, $a2$, $a3$ и $a4$, выходящихъ изъ узла a . Если вырѣжемъ этотъ узелъ произвольнымъ сѣченіемъ mnp и къ мѣстамъ разрѣзовъ приложимъ такія внѣшнія силы N_1 , N_2 , N_3 , N_4 , которыя на отсѣченные части $a\alpha$, $a\beta$, $a\gamma$ и $a\delta$ произведутъ точно такое дѣйствіе, какое производили на нихъ сопротивленія стержней $a1$, $a2$, $a3$, $a4$ передъ разрѣзомъ, то въ состояніи равновѣсія узла a ничего не измѣнится, изъ чего слѣдуетъ, что силы G , N_1 , N_2 , N_3 и N_4 , дѣйствующие на узелъ a , удовлетворяютъ условіямъ равновѣсія.

Если означимъ черезъ

α' , β' , γ' —углы, образуемые сопротивленіемъ N съ осями координатъ OX , OY , OZ послѣ деформаціи,

X , Y , Z —слагающія внѣшней силы G , взятая по направленіямъ этихъ осей,

то изъ условій равновѣсія получимъ:

$$X + N_1 \cos\alpha'_1 + N_2 \cos\alpha'_2 + N_3 \cos\alpha'_3 + \dots = 0$$

$$V + N_1 \cos \beta_1' + N_2 \cos \beta_2' + N_3 \cos \beta_3' + \dots = 0$$

$$Z + N_1 \cos \gamma_1' + N_2 \cos \gamma_2' + N_3 \cos \gamma_3' + \dots = 0$$

или короче

$$X + \sum N \cos \alpha' = 0$$

$$V + \sum N \cos \beta' = 0 \quad \dots \dots \dots (155)$$

$$Z + \sum N \cos \gamma' = 0$$

Углы α' , β' , γ' опредѣляются уравненіями (154). Каждая изъ сумм $\sum$ содержитъ столько членозъ, сколько отъ соотвѣтственнаго узла выходитъ стержней.

Для каждаго узла можно составить 3 уравненія вида (155); когда система имѣетъ n узловъ, то условія равновѣсія дадутъ $3n$ такихъ уравненій, и они могутъ служить для опредѣленія неизвѣстныхъ.

Система называется *статически опредѣленной*, если при данныхъ внѣшнихъ силахъ и извѣстной формѣ системы по наступленіи равновѣсія, сопротивленія всѣхъ ея стержней и опоръ могутъ быть опредѣлены. Въ противномъ случаѣ система называется *статически неопредѣленной*.

Если число стержней, составляющихъ систему, s , а число ея опорныхъ стержней— r , то въ случаѣ, когда форма равновѣсія системы извѣстна, неизвѣстными въ уравненіяхъ (155) будутъ только сопротивленія N ; система будетъ поэтому статически опредѣленной, если

$$s + r = 3n \quad \dots \dots \dots (156)$$

Но исполненіе этого одного условія недостаточно для того, чтобы система была статически опредѣленной и необходимо, чтобы уравненія (155), которыхъ число= $3n$, были такого рода, чтобы $s + r$ неизвѣстныхъ могли изъ нихъ быть опредѣлены. Изслѣдованія показываютъ, что послѣднее условіе исполнено только тогда, когда система не имѣетъ ни одного добавочнаго стержня, т. е. не имѣетъ ни одного такого стержня, который могъ бы быть устраненъ не нарушая той неизмѣнимости системы, какой она обладала передъ устраненіемъ его.

Такъ какъ число нужныхъ стержней устойчивой неизмѣнимой системы (включая опорные стержни)= $3n$, то слѣдуетъ, что неизмѣняемая система, не имѣющая добавочныхъ стержней—всегда статически опредѣленная.

Когда система при n узлахъ имѣетъ менѣе чѣмъ $3n$ нужныхъ стержней, то она не имѣетъ свойства неизмѣнимости. Условія равновѣсія дають для такой системы $3n$ уравненій: число уравненій будетъ поэтому больше числа стержней. А такъ какъ $r + s$

неизвѣстныхъ могутъ быть опредѣлены только изъ $r+s$ уравненій, то для равновѣсія такая система должна удовлетворять $3n-(r+s)$ условіямъ положенія, опредѣляющимъ ея форму равновѣсія.

§ 50.

Общія уравненія сочлененныхъ системъ.—Уравненія (155) содержатъ кромѣ $r+s$ неизвѣстныхъ сопротивленій еще $3n$ неизвѣстныхъ перемѣщеній узловъ. Если поэтому видъ системы послѣ деформации неизвѣстенъ, то для опредѣленія $r+s$ сопротивленій ея стержней нужно опредѣлять $r+s+3n$ неизвѣстныхъ, для чего необходимо имѣть $r+s+3n$ независимыхъ уравненій.

Условія равновѣсія даютъ только $3n$ уравненій, недостающихъ $r+s$ уравненій нужно поэтому искать въ геометрическихъ условіяхъ системы, которыя опредѣлены уравненіями вида (152). Такъ какъ по (150)

$$N = c\lambda,$$

то уравненіе (152) можно написать такъ:

$$N = c[(\xi_1 - \xi)\cos\alpha + (\eta_1 - \eta)\cos\beta + (\zeta_1 - \zeta)\cos\gamma + f] \quad (157)$$

Такое уравненіе можно составить для каждаго стержня системы, какъ нужнаго, такъ и добавочнаго, слѣдовательно число уравненій вида (157) будетъ $r+s$. Поэтому уравненія (155), въ соединеніи съ уравненіями (157), достаточны для рѣшенія всякой системы, какъ статически опредѣленной, такъ и статически неопредѣленной.

§ 51.

Упрощеніе общихъ уравненій для неизмѣняемыхъ системъ.— Въ неизмѣняемыхъ системахъ возможны только такія перемѣщенія, которыя обусловлены упругостью стержней. Такъ какъ напряженія въ сооруженіяхъ не должны превышать предѣла упругости, то измѣненія длинъ стержней не будутъ превышать предѣльныхъ упругихъ удлиненій, а послѣднія для строительныхъ матеріаловъ, сравнительно съ первоначальными длинами, всегда такъ малы, что, не умаляя практическаго значенія результатовъ, величинами f въ уравненіяхъ (157), содержащими высшія степени разностей $\xi_1 - \xi$, $\eta_1 - \eta$ и $\zeta_1 - \zeta$, и величинами φ_x , φ_y , φ_z въ уравненіяхъ (154), содержащими отношенія первой и высшихъ степеней тѣхъ же разностей къ длинѣ $l + \lambda$, можно пренебречь.

Для неизмѣняемыхъ системъ можно поэтому написать:

$$\cos \alpha' = \cos \alpha, \quad \cos \beta' = \cos \beta, \quad \cos \gamma' = \cos \gamma$$

$$\lambda = (\xi_1 - \xi) \cos \alpha + (\eta_1 - \eta) \cos \beta + (\zeta_1 - \zeta) \cos \gamma \quad (158)$$

Для рѣшенія неизмѣняемыхъ системъ будемъ, слѣдовательно, вмѣсто уравненій (155) и (157) имѣть слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} X + \Sigma N \cos \alpha &= 0 \\ Y + \Sigma N \cos \beta &= 0 \\ Z + \Sigma N \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

$$N = c[(\xi_1 - \xi) \cos \alpha + (\eta_1 - \eta) \cos \beta + (\zeta_1 - \zeta) \cos \gamma] \quad (160)$$

Эти уравненія дѣйствительны для неизмѣняемыхъ системъ безъ исключенія.

§ 52.

Выраженіе работы деформациі въ функціи виѣшнихъ силъ.—Работа деформациі упругаго тѣла опредѣляется уравненіемъ (18). Когда стержень подвергается одному только нормальному напряженію (растяженію или сжатію), то за исключеніемъ σ всѣ другія напряженія σ и τ равны нулю, такъ что въ этомъ случаѣ уравненіе (18) получаетъ видъ:

$$\varphi = \frac{1}{2E} \int \sigma^2 dV \quad (161)$$

Для призматическаго стержня σ_x постоянно и равно $\frac{N}{\Omega}$ (гдѣ N —сопротивленіе и Ω —площадь сѣченія стержня). Такъ какъ

$$dV = \Omega dx,$$

то

$$\varphi = \frac{N^2}{2E\Omega^2} \cdot \Omega \int_0^l dx = \frac{N^2 l}{2E\Omega} \quad (162)$$

По (6)

$$\lambda = \frac{Nl}{E\Omega},$$

поэтому

$$\varphi = \frac{N\lambda}{2} \quad (163)$$

По (158)

$$\lambda = (\xi_1 - \xi) \cos \alpha + (\eta_1 - \eta) \cos \beta + (\zeta_1 - \zeta) \cos \gamma.$$

Если $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ —углы, образуемые верхнимъ концомъ стержня съ осями координатъ (черт. 32), то

$$\alpha_1 = 180 - \alpha, \quad \beta_1 = 180 - \beta, \quad \gamma_1 = 180 - \gamma.$$

Уравнение (158) можно поэтому написать такъ:

$$\lambda = -\xi_1 \cos \alpha_1 - \eta_1 \cos \beta_1 - \zeta_1 \cos \gamma_1 - \xi \cos \alpha - \eta \cos \beta - \zeta \cos \gamma.$$

Умножимъ это уравнение на $\frac{N}{2}$,

$$\begin{aligned} \frac{N\lambda}{2} + \frac{N}{2} \xi \cos \alpha + \frac{N}{2} \eta \cos \beta + \frac{N}{2} \zeta \cos \gamma + \frac{N}{2} \xi_1 \cos \alpha_1 + \\ + \frac{N}{2} \eta_1 \cos \beta_1 + \frac{N}{2} \zeta_1 \cos \gamma_1 = 0. \end{aligned}$$

Если такое выражение составимъ для всѣхъ стержней системы и сложимъ ихъ, то получимъ:

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{N\lambda}{2} + \Sigma \frac{N}{2} \xi \cos \alpha + \Sigma \frac{N}{2} \eta \cos \beta + \Sigma \frac{N}{2} \zeta \cos \gamma + \\ + \Sigma \frac{N}{2} \xi_1 \cos \alpha_1 + \Sigma \frac{N}{2} \eta_1 \cos \beta_1 + \Sigma \frac{N}{2} \zeta_1 \cos \gamma_1 = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{N\lambda}{2} + \frac{1}{2} (\Sigma \xi N \cos \alpha + \Sigma \xi_1 N \cos \alpha_1) + \frac{1}{2} (\Sigma \eta N \cos \beta + \\ + \Sigma \eta_1 N \cos \beta_1) + \frac{1}{2} (\Sigma \zeta N \cos \gamma + \Sigma \zeta_1 N \cos \gamma_1) = 0. \quad (164) \end{aligned}$$

Чтобы получить выражение $\Sigma \xi N \cos \alpha + \Sigma \xi_1 N \cos \alpha_1$ нужно перемѣщенія верхнихъ и нижнихъ концовъ стержней, взятыхъ по направленію оси OX , умножить на слагающія ихъ напряженій, взятыхъ по направленію той же оси, и полученные такимъ образомъ для всѣхъ стержней выраженія вида $\xi N \cos \alpha + \xi_1 N \cos \alpha_1$ сложить въ одну сумму. Такъ какъ концы всѣхъ стержней, выходящихъ изъ одного и того же узла, перемѣщаются на одинаковую величину, то, обозначивъ перемѣщеніе узла m по направленію OX , черезъ ξ_m , а сумму слагающихъ напряженій стержней, выходящихъ изъ этого узла, для оси OX —черезъ $\Sigma_m N \cos \alpha$, получимъ для системы, которой узлы обозначены буквами $a, b, c, \dots$

$$\begin{aligned} \Sigma \xi N \cos \alpha + \Sigma \xi_1 N \cos \alpha_1 = \xi_a \Sigma N \cos \alpha + \xi_b \Sigma N \cos \alpha + \\ + \xi_c \Sigma N \cos \alpha + \dots \end{aligned}$$

По (159)

$$\Sigma N \cos \alpha = -X,$$

слѣдовательно

$$\Sigma \xi N \cos \alpha + \Sigma \xi_1 N \cos \alpha_1 = -\xi_a X_a - \xi_b X_b - \xi_c X_c - \dots = -\Sigma X \xi.$$

Точно такимъ образомъ получимъ

$$\Sigma \eta N \cos \beta + \Sigma \eta_1 N \cos \beta_1 = -\Sigma Y \eta$$

$$\Sigma \zeta N \cos \gamma + \Sigma \zeta_1 N \cos \gamma_1 = -\Sigma Z \zeta.$$

Помощію этихъ значеній уравненіе (164) получаетъ видъ

$$\Sigma \frac{N\lambda}{2} = \frac{1}{2} \Sigma (X\xi + Y\eta + Z\zeta) \quad . \quad . \quad (165)$$

Такъ какъ $\Sigma \frac{N\lambda}{2}$ выражаетъ работу деформациі всей системы, то послѣднее уравненіе опредѣляетъ эту работу въ функціи внѣшнихъ силъ, и оно показываетъ, что работа деформациі системы зависитъ только отъ конечныхъ значеній внѣшнихъ силъ.

Если означимъ черезъ

P_m — равнодѣйствующую внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на узелъ m ,

u, v, w — углы этой равнодѣйствующей съ осями координатъ,

p_m — перемѣщеніе узла m по направленію линіи дѣйствія силы P_m ,

$\delta, \varepsilon, \varphi$ — углы, образуемые перемѣщеніемъ p_m съ осями координатъ,

то

$$X_m = P_m \cos u, \quad Y_m = P_m \cos v, \quad Z_m = P_m \cos w,$$

$$\xi_m = p_m \cos \delta, \quad \eta_m = p_m \cos \varepsilon, \quad \zeta_m = p_m \cos \varphi.$$

Слѣдовательно

$$X_m \xi_m + Y_m \eta_m + Z_m \zeta_m = P_m p_m (\cos u \cos \delta + \cos v \cos \varepsilon + \cos w \cos \varphi).$$

Но

$$\cos u \cos \delta + \cos v \cos \varepsilon + \cos w \cos \varphi = \cos \rho,$$

гдѣ ρ — уголъ, образуемый P_m съ p_m ,

поэтому

$$X_m \xi_m + Y_m \eta_m + Z_m \zeta_m = P_m p_m \cos \rho$$

$p_m \cos \rho$ есть проеція перемѣщенія p_m на направленіе силы P_m ; если эту проецію означимъ черезъ π_m , то уравненіе (165) получитъ видъ:

$$\Sigma \frac{N\lambda}{2} = \frac{1}{2} \Sigma P \pi \quad . \quad . \quad . \quad (166)$$

Проецію перемѣщенія точки приложенія силы на направленіе этой силы будемъ для краткости называть *относительнымъ перемѣщеніемъ*.

Изъ уравненія (166) получаемъ слѣдующее правило: *работа деформации упругой сочлененной системы равняется полусуммѣ произведеній, которыя получатся, если каждую изъ дѣйствующихъ на систему вѣншихъ силъ умножимъ на относительное перемѣщеніе ея точки приложенія.*

Когда $\rho > 90^\circ$, то $\cos \rho$, а слѣдовательно и π , получаетъ отрицательный знакъ, изъ чего слѣдуетъ, что относительное перемѣщеніе должно быть взято съ положительнымъ или отрицательнымъ знакомъ, смотря по тому, получается-ли проэкція перемѣщенія на направленіи силы или на ея продолженіи въ противоположную сторону.

§ 53.

Производная работа деформациі. — Если одна изъ дѣйствующихъ на систему вѣншихъ силъ P , напр., сила P_m измѣнится на безконечно малую величину dP_m , то система получитъ безконечно малое измѣненіе деформациі, при которомъ относительныя перемѣщенія π точекъ приложенія силъ P измѣнятся на безконечно малыя величины $d\pi$. Каждая изъ силъ P исполнитъ во время этой деформациі работу $Pd\pi$, поэтому полное измѣненіе работы деформациі δ , произведенное безконечно малымъ измѣненіемъ силы P_m , будетъ

$$\Sigma Pd\pi.$$

Но это измѣненіе опредѣляется выраженіемъ

$$\frac{d\delta}{dP_m} dP_m,$$

поэтому

$$\frac{d\delta}{dP_m} dP_m = \Sigma Pd\pi. \quad (167)$$

Такъ какъ по (166)

$$\delta = \frac{1}{2} \Sigma P\pi,$$

то

$$\frac{d\delta}{dP_m} = \frac{1}{2} \left[\Sigma P \frac{d\pi}{dP_m} + \Sigma \pi \frac{dP}{dP_m} \right].$$

Если силы P независимыя величины,

то

$$\Sigma \pi \frac{dP}{dP_m} = \pi_m$$

и тогда

$$\frac{d\delta}{dP_m} = \frac{1}{2} \left(\Sigma P \frac{d\pi}{dP_m} + \pi_m \right),$$

или, такъ какъ по (167)

$$\Sigma P \frac{d\pi}{dP_m} = \frac{d\delta}{dP_m},$$

то

$$\frac{d\delta}{dP_m} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\delta}{dP_m} + \pi_m \right),$$

откуда

$$\pi_m = \frac{d\delta}{dP_m} \dots \dots \dots (168)$$

Изъ послѣдняго уравненія получаемъ слѣдующее важное правило:

Если будемъ разсматривать внѣшнія силы какъ независимыя величины, и выразимъ работу деформации въ функціи внѣшнихъ силъ, то производная этой работы, взятая по отношенію къ одной изъ внѣшнихъ силъ даетъ относительное перемѣщеніе точки приложенія этой силы.

§ 54.

Приложеніе принципа производной работы деформации къ разсчету статически неопредѣленныхъ системъ. — Когда неизмѣняемая система имѣетъ добавочные стержни, то устраненіе этихъ стержней не измѣняетъ геометрическаго вида системы, такъ какъ этотъ видъ опредѣленъ вполне нужными стержнями. Отсюда слѣдуетъ, что если на мѣсто добавочныхъ стержней поставимъ силы, равныя ихъ напряженіямъ, то эти силы произведутъ точно такую деформацию и, слѣдовательно, на сопротивленія нужныхъ стержней точно такое дѣйствіе, какое производятъ добавочные стержни, когда они находятся въ системѣ. *Послѣ наступленія равновѣсія можно поэтому сопротивленія добавочныхъ стержней разсматривать, точно такъ какъ и внѣшнія силы, какъ независимыя величины.*

Это свойство добавочныхъ стержней даетъ возможность привести разсчетъ статически неопредѣленныхъ системъ къ разсчету статически опредѣленныхъ слѣдующимъ образомъ:

Изъ данной статически неопредѣленной системы устраняемъ всѣ добавочные стержни, и на ихъ мѣсто ставимъ силы, равныя сопротивленіямъ этихъ стержней. Для краткости будемъ эти силы называть добавочными силами.

Добавочная сила состоитъ всегда изъ двухъ равныхъ и противоположныхъ силъ, дѣйствующихъ по направленію прямой, соединяющей узлы устраненнаго стержня.

Если стержень сопротивляется растяженіемъ, то при деформации разстояніе его узловъ увеличивается. Сопротивленіе стержня

противодѣйствуетъ этому увеличенію, и оно стремится привести узлы въ первоначальное положеніе, изъ чего слѣдуетъ, что для того, чтобы внѣшнія силы, замѣняющія данный стержень, произвели точно такое дѣйствіе, какое производитъ самъ стержень, онѣ должны быть направлены къ тѣмъ узламъ, на которые не дѣйствуютъ (см. стержень ab на черт. 34).

Когда сопротивленіе стержня — сжатіе, то замѣняющія его внѣшнія силы направлены въ сторону тѣхъ узловъ, на которые онѣ дѣйствуютъ (стержень cd на черт. 34), потому что въ этомъ случаѣ первоначальное разстояніе узловъ устраненнаго стержня уменьшилось, а силы упругости стремятся его величину возстановить, т. е. стремятся измѣненное разстояніе увеличить.

Когда добавочные стержни устранены и замѣнены добавочными силами, то вмѣсто данной статически неопредѣленной системы получаемъ статически опредѣленную, на которую кромѣ данныхъ внѣшнихъ силъ дѣйствуютъ еще добавочныя. Если поэтому выразимъ работу деформации этой статически опредѣленной системы въ функціи внѣшнихъ силъ, то полученное выраженіе будетъ функціей данныхъ внѣшнихъ и неизвѣстныхъ добавочныхъ силъ, въ которой какъ первыя, такъ и послѣднія имѣютъ свойство независимыхъ величинъ.

Производная этой работы, взятая по отношенію къ одной изъ внѣшнихъ силъ (къ которымъ принадлежатъ и добавочныя силы) даетъ относительное перемѣщеніе точки приложенія этой силы.

Если поэтому ab (черт. 34) добавочный стержень и D его сопротивленіе (а слѣдовательно D и $-D$ замѣняющія его внѣшнія силы) и возьмемъ производную работы деформации по отношенію къ силѣ D , дѣйствующей въ a , то получимъ относительное перемѣщеніе aa_1 точки a , а производная той же работы, взятая по отношенію къ силѣ D , дѣйствующей въ b , дастъ относительное перемѣщеніе bb_1 точки b . Такъ какъ направленія этихъ обѣихъ силъ совпадаютъ и опредѣляются прямой, соединяющей узлы a и b , на которые онѣ дѣйствуютъ, то и относительныя перемѣщенія aa_1 и bb_1 будутъ находиться на этой прямой и ихъ сумма $aa_1 + bb_1$ будетъ ничто другое, какъ измѣненіе разстоянія узловъ a и b , произведенное деформацией. Но въ данной первоначально системѣ, содержащей вмѣсто силъ D стержень ab , котораго сопротивленіе $= D$, это измѣненіе разстоянія узловъ a и b будетъ равно измѣненію длины стержня ab , произведенному деформацией, которое по (6) $= \frac{Dl}{E\Omega}$, поэтому

$$-\frac{d\delta}{dD_a} - \frac{d\delta}{dD_b} = \overline{aa_1} + \overline{bb_1} = \frac{Dl}{E\Omega} \dots \dots \dots (169)$$

Знакъ—производныхъ $\frac{d\varphi}{dD}$ происходитъ оттого, что дѣйствующія въ a и b сопротивленія D направлены въ стороны, противоположныя перемѣщеніямъ точекъ a и b ; такъ какъ въ случаѣ растяженія разстояніе ab увеличивается, а въ случаѣ сжатія—уменьшается, проекціи перемѣщенія въ обоихъ случаяхъ получаются поэтому не на направленіи силъ D , но на ихъ продолженіи.

Такъ какъ D_a и D_b независимыя величины и $D_a=D_b=D$, то, по извѣстному правилу,

$$\frac{d\varphi}{dD_a} + \frac{d\varphi}{dD_b} = \frac{d\varphi}{dD}.$$

Уравненіе (169) можно поэтому написать такъ:

$$-\frac{d\varphi}{dD} = \frac{Dl}{E\Omega},$$

$$\text{или } \frac{d\varphi}{dD} + \frac{Dl}{E\Omega} = 0 \quad (170)$$

Это уравненіе имѣетъ тѣже неизвѣстныя, что и функція φ , и такихъ уравненій можно составить столько, сколько система имѣетъ добавочныхъ силъ, или что одно и тоже, сколько она имѣетъ добавочныхъ стержней.

Если неизмѣняемая система имѣетъ n узловъ и s стержней (включая и воображаемые опорные стержни) и $s > 3n$, то она имѣетъ $s-3n$ добавочныхъ стержней. Число неизвѣстныхъ напряженій $=s$; для ихъ опредѣленія даютъ условія равновѣсія $3n$, а условія производной работы $-(s-3n)$ уравненій, число всѣхъ уравненій для опредѣленія s неизвѣстныхъ поэтому $=3n+(s-3n)=s$. Изъ уравненій (159) и (170) могутъ, слѣдовательно, всѣ неизвѣстныя быть опредѣлены.

Приложеніе принципа производной работы, выраженнаго уравненіемъ (170), къ расчету статически неопредѣленныхъ системъ значительно упрощаетъ этотъ расчетъ. При употребленіи правила, даннаго въ § 50, нужно s неизвѣстныхъ сопротивленій опредѣлять изъ $s+3n$ уравненій, такъ какъ въ уравненіяхъ (157) или (160) къ s неизвѣстнымъ, опредѣленіе которыхъ требуется, прибавляются $3n$ (а въ случаѣ плоскихъ системъ— $2n$) перемѣщеній узловъ. При замѣнѣ этихъ уравненій уравненіями (170) число неизвѣстныхъ остается $=s$, такъ какъ уравненія (170) содержать только тѣ неизвѣстныя, что и уравненія (159), поэтому для опредѣленія s сопротивленій нужно не болѣе s уравненій.

§ 55.

Системы, которые уже въ ненагруженномъ состояніи испытываютъ напряженія.—Длины нужныхъ стержней въ извѣстныхъ предѣлахъ независимы другъ отъ друга; при измѣненіи этихъ длинъ измѣняется видъ системы и этому измѣненію не противоѣдствуетъ никакое препятствіе. Но этотъ видъ нужными стержнями вполне опредѣленъ, поэтому длины добавочныхъ стержней не произвольны, а опредѣлены разстояніями узловъ системы, составленной изъ нужныхъ стержней.

Когда система состоитъ изъ однихъ только нужныхъ стержней то въ ненагруженномъ состояніи она не испытываетъ никакихъ напряженій и перемѣна температуры не имѣетъ на нее никакого вліянія. При измѣненіи длинъ, произведенныхъ перемѣной температуры, система измѣняетъ свой видъ соотвѣтственно новымъ длинамъ стержней, а такъ какъ эти длины независимы другъ отъ друга, то система въ новомъ видѣ будетъ свободна отъ напряженій, также какъ и въ первоначальномъ.

Если въ неизмѣняемую систему, представленную на черт. 35, желаемъ ввести добавочный стержень ab , котораго длина не точно равна разстоянію ab , то это будетъ возможно только посредствомъ измѣненія разстоянія ab и длины $\alpha\beta$ добавочнаго стержня. Но въ неизмѣняемой системѣ возможны лишь такіа измѣненія, которые обусловлены упругостью матеріала; это измѣненіе можетъ поэтому быть достигнуто только помощію упругихъ удлиненій и укороченій нужныхъ стержней; а такъ какъ всякое упругое измѣненіе длины вызываетъ сопротивленіе, то слѣдуетъ, что система, имѣющая добавочный стержень, котораго длина не соотвѣтствуетъ разстоянію соединяемыхъ имъ узловъ, опредѣленному длинами нужныхъ стержней, находится въ такъ называемомъ *принужденномъ состояніи*, и испытываетъ напряженія и при отсутствіи нагрузки.

Если $\alpha\beta$ (черт. 35)—длина добавочнаго стержня и $\alpha\beta < ab$, то его можно ввести въ систему такимъ образомъ, что приблизимъ a къ α и b къ β , и прикрѣпимъ концы α и β стержня къ узламъ a и b системы. Если теперь предоставимъ систему самой себѣ, то вслѣдствіе упругости она будетъ стремиться принять первоначальный видъ, чему будетъ противоѣдствовать сопротивленіе стержня $\alpha\beta$, вслѣдствіе чего восстановленіе вида будетъ возможно только отчасти и узлы a и b займутъ новое положеніе равновѣсія a_1 и b_1 , при чемъ длина стержня $\alpha\beta$ измѣнится на $\alpha a_1 + \beta b_1$. Если означимъ $\alpha a_1 + \beta b_1$ черезъ Δl и поло-

жимъ, что Δl не превышаетъ предѣльнаго упругаго измѣненія, то стержень $\alpha\beta$ будетъ испытывать напряженіе, по (4),

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l},$$

слѣдовательно его сопротивленіе

$$D_1 = E\Omega \frac{\Delta l}{l},$$

откуда

$$\Delta l = \overline{\alpha a_1} + \overline{\beta b_1} = \frac{D_1 l}{E\Omega} \quad \dots \quad (171)$$

Если въ статически неопредѣленной системѣ добавочные стержни устранимъ, поставимъ на ихъ мѣсто добавочныя силы, и выразимъ работу деформациі системы въ функціи внѣшнихъ и добавочныхъ силъ, то производная этой работы, взятая по отношенію къ одной изъ силъ, равна относительному перемѣщенію точки приложенія этой силы. Слѣдовательно, производная, взятая по отношенію къ добавочной силѣ D_1 , даетъ перемѣщенія aa_1 и bb_1 точекъ приложенія силъ D_1 , дѣйствующихъ въ a и b , т. е.

$$\frac{d\delta}{dD_1} = \overline{aa_1} + \overline{bb_1} \quad \dots \quad (172)$$

Здѣсь производная положительна, потому что стержень $\alpha\beta$ растягивается, когда разстояніе ab уменьшается, и сжимается—когда это разстояніе увеличивается.

Если разницу $\overline{ab} - \overline{\alpha\beta}$, на которую длина добавочнаго стержня $\alpha\beta$ больше или меньше разстоянія ab соединяемыхъ имъ узловъ, означимъ черезъ δ , то

$$\delta = (\overline{aa_1} + \overline{bb_1}) + (\overline{a_1\alpha} + \overline{b_1\beta})$$

и принимая во вниманіе уравненія (171) и (172)

$$\delta = \frac{d\delta}{dD_1} + D_1 \frac{l}{E\Omega} \quad \dots \quad (173)$$

Такихъ уравненій можно составить столько, сколько система имѣетъ добавочныхъ стержней, они поэтому въ соединеніи съ уравненіями (159) всегда достаточны для опредѣленія напряженій всѣхъ стержней.

При $\delta=0$,—т. е. когда длина добавочнаго стержня равна разстоянію соединяемыхъ имъ узловъ,—формула (173) переходитъ въ формулу (170). Формулу (173) можно поэтому разсматривать какъ общее выраженіе правила производной работы.

§ 56.

Вліяніе перемѣнъ температуры.—Вліяніе перемѣнъ температуры на напряженія стержней статически неопредѣленной системы опредѣляется точно такимъ образомъ, какъ и вліяніе разности длинъ добавочныхъ стержней и разстояній соединяемыхъ ими узловъ, рассмотрѣнное въ предыдущемъ параграфѣ. При измѣненіи температуры на t градусовъ длина l измѣняется на αtl , гдѣ α —коэффициентъ линейнаго расширенія. Величины αtl при данномъ t извѣстны, и помощью ихъ легко опредѣлить измѣненныя разстоянія узловъ и величины δ , на которыя эти разстоянія разнятся отъ новыхъ длинъ добавочныхъ стержней. Напряженія, производимыя перемѣной температуры, опредѣляются слѣдовательно по правилу, выраженному уравненіемъ (173).

§ 57.

Общіе правила расчета матеріальныхъ системъ.—Когда матеріальная система послѣ деформаціи пришла въ состояніе равновѣсія, то произвольная часть ея находится въ состояніи равновѣсія, изъ чего слѣдуетъ, что дѣйствующія на эту часть внѣшнія силы и сопротивленія остальныхъ частей, съ которыми она связана, удовлетворяютъ условіямъ равновѣсія. Если всѣ силы и сопротивленія пересѣкаются въ одной точкѣ, то условія равновѣсія дадутъ 3 уравненія: сумма слагающихъ, взятыхъ по отношенію къ тремъ непараллельнымъ осямъ и не находящимся въ одной плоскости, должна быть равна нулю для каждой оси порознь, а если онѣ дѣйствуютъ на различныя точки, то къ тремъ уравненіямъ слагающихъ, выражающихъ невозможность поступательнаго движенія, прибавляются еще 3 уравненія моментовъ вращенія, которыхъ сумма, взятая по отношенію къ тѣмъ же тремъ осямъ, должна быть равна нулю для каждой оси порознь.

Когда число уравненій равновѣсія недостаточно для опредѣленія всѣхъ неизвѣстныхъ (т. е. когда система статически неопредѣленная), то недостающія уравненія получаютъ изъ правилъ производной работы.

Въ слѣдующемъ будемъ разсматривать *только плоскія системы* и будемъ предполагать, что дѣйствующія на нихъ внѣшнія силы *находятся въ плоскости системы*. Въ этомъ случаѣ условія равновѣсія дадутъ для силъ, дѣйствующихъ на одну точку, два уравненія: сумма слагающихъ всѣхъ силъ и сопротивленій, взятыхъ по отношенію къ двумъ непараллельнымъ ²¹ осямъ, должна быть

равна нулю для каждой оси порознь. Когда силы дѣйствуютъ на большее число точекъ, то къ прежнимъ двумъ условіямъ прибавляется еще третье: сумма моментовъ, взятыхъ по отношенію къ какой нибудь точкѣ на плоскости, должна быть равна нулю.

Если число уравненій недостаточно для опредѣленія всѣхъ неизвѣстныхъ, т. е. когда система статически неопредѣленная, то недостающія уравненія получаются изъ правила производной работы.

§ 58.

Практическія правила разсчета статически опредѣленныхъ сочлененныхъ системъ. — Представимъ себѣ, что изъ системы произвольнымъ сѣченіемъ вырѣзана часть *A*. Означимъ для внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на эту вырѣзанную часть: сумму горизонтальныхъ слагающихъ черезъ *H*, вертикальныхъ — черезъ *V*, и сумму моментовъ по отношенію къ какой нибудь точкѣ въ плоскости системы—черезъ *M*. Пусть (черт. 36)

$N_1, N_2, N_3 \dots$ сопротивленія пересѣченныхъ стержней,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ ихъ углы съ горизонтальною,

$n_1, n_2, n_3 \dots$ ихъ разстоянія отъ точки моментовъ, взятой произвольно на плоскости силъ.

Изъ условій равновѣсія получимъ для части *A* уравненія:

$$H + N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 + N_3 \cos \alpha_3 + \dots = 0$$

$$V + N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 + N_3 \sin \alpha_3 + \dots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (174)$$

$$M + N_1 n_1 + N_2 n_2 + N_3 n_3 + \dots = 0$$

Сопротивленіе *N* можетъ быть растяженіе или сжатіе. Такъ какъ родъ этого сопротивленія во время разсчета неизвѣстенъ, то для простоты принимаемъ всѣ неизвѣстныя *N* за растяженія, т. е. ставимъ на ихъ направленіяхъ стрѣлки, обращенныя въ стороны узловъ, противоположныхъ тѣмъ, на которые они дѣйствуютъ. Моментъ считаемъ положительнымъ, если онъ вращаетъ вправо (по направленію часовой стрѣлки) и отрицательнымъ—если влѣво.

Растяженія принимаемъ за положительныя, а сжатія—за отрицательныя напряженія. Если поэтому разсчетомъ получится для *N* положительная величина, то соотвѣтственный стержень растягивается, въ противномъ случаѣ—сжимается.

Изъ уравненій (174) можно получить 3 неизвѣстныхъ сопротивленія, но они неудобны тѣмъ, что для опредѣленія одной неизвѣстной нужно рѣшать 3 уравненія. Это неудобство избѣгается соотвѣтственнымъ выборомъ точки моментовъ и на-

правления слагающихъ, для чего пользуются слѣдующими правилами:

1) Если сѣченіе проведено такимъ образомъ, что разрѣзаны только 3 стержня, коихъ напряженія неизвѣстны, то принимаютъ за точку моментовъ точку пересѣченія тѣхъ двухъ неизвѣстныхъ сопротивленій, величины которыхъ не ищутъ. Тогда моменты этихъ сопротивленій будутъ $=0$, и послѣднее изъ уравненій (174) будетъ имѣть только одну неизвѣстную.

Такъ, если примемъ за точку моментовъ точку пересѣченія сопротивленій N_2 и N_3 , то, означивъ черезъ μ — сумму моментовъ пересѣченныхъ стержней части A , сопротивленія которыхъ извѣстны, получимъ

$$N_1 n_1 + M + \mu = 0.$$

Если точкой вращенія будетъ пересѣченіе силъ N_1 и N_3 :

$$N_2 n_2 + M + \mu = 0,$$

а если — точка пересѣченія силъ N_1 и N_2

$$N_3 n_3 + M + \mu = 0.$$

Каждое изъ этихъ уравненій содержитъ только по одной неизвѣстной. Этотъ способъ выбора точки моментовъ впервые указалъ Риттеромъ.

2) Когда два изъ трехъ пересѣченныхъ стержней, которыхъ сопротивленія N_1 и N_3 неизвѣстны, параллельны между собою (черт. 37), то при опредѣленіи третьяго неизвѣстнаго сопротивленія N_2 по предыдущему правилу точка моментовъ получается въ безконечности. Въ этомъ случаѣ ставимъ сумму слагающихъ, взятыхъ по направленію, перпендикулярному къ параллельнымъ стержнямъ, равной нулю.

Такъ, при опредѣленіи напряженія N_2 , проектируемъ всѣ на отсѣченную часть дѣйствующія силы и сопротивленія на прямую m , перпендикулярную къ N_1 и N_3 . Проекціи послѣднихъ на эту прямую будутъ равны нулю. Если V — сумма проэкцій вѣшнихъ силъ, и $\sum N \sin \alpha$ — сумма проэкцій сопротивленій, которыхъ величины извѣстны, на прямую m , то изъ условій равновѣсія получимъ уравненіе:

$$N_2 \sin \alpha_2 + \sum N \sin \alpha + V = 0.$$

Въ этомъ уравненіи неизвѣстной есть только N_2 .

3) Если пересѣчены только два стержня съ неизвѣстными напряженіями, то при опредѣленіи одного изъ этихъ напряженій беремъ точку моментовъ гдѣ нибудь на направленіи другаго.

4) Если сѣченіе проведено такимъ образомъ, что вырѣзанная

часть содержит только одинъ узелъ (черт. 38), то условія равновѣсія дають не болѣе двухъ независимыхъ уравненій:

$$H + N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 + \dots = 0$$

$$V + N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 + \dots = 0.$$

Чтобы каждое изъ этихъ уравненій содержало не болѣе одной неизвѣстной, берутъ за направленія проэкцій прямыя, перпендикулярныя къ неизвѣстнымъ сопротивленіямъ. Такъ, для опредѣленія сопротивленія N_x проецируемъ всѣ силы на прямую $y_1 y_2$, перпендикулярную къ другому неизвѣстному сопротивленію N_y . Если ε —уголъ, образуемый напряженіемъ N_x съ $y_1 y_2$ и V —сумма проэкцій данныхъ силъ, дѣйствующихъ на вырѣзанный узелъ A , то

$$N_x \cos \varepsilon + V = 0.$$

Для опредѣленія сопротивленія N_y , проецируемъ всѣ силы на прямую $x_1 x_2$, перпендикулярную къ N_x , и сумму этихъ проэкцій ставимъ $= 0$.

Когда статически опредѣленная система состоитъ изъ однихъ треугольниковъ, то въ ней всегда возможны такія сѣченія, что при одномъ узлѣ вырѣзанная часть будетъ имѣть не болѣе двухъ, а при большемъ числѣ узловъ—не болѣе трехъ стержней, которыхъ сопротивленія неизвѣстны. Приведенныя въ этомъ параграфѣ правила поэтому всегда достаточны для рѣшенія весьма простымъ образомъ треугольныхъ сочлененныхъ системъ.

Глава IV.

Крѣпкія системы.

§ 59.

Крѣпкія системы и ихъ свойства.—Когда брусъя системы соединены между собою накрѣпко, т. е. такимъ образомъ, что соединенія на одномъ мѣстѣ достаточно для того, чтобы положеніе бруса по отношенію къ остальной части системы было неизмѣняемо, то система называется *крѣпкой системой*.

Неизмѣняемое положеніе бруса въ плоскости совершенно опредѣлено тремя стержнями, соединяющими по крайней мѣрѣ двѣ точки бруса съ не менѣе чѣмъ двумя точками неподвижной въ плоскости системы (§ 46). Поэтому всякое крѣпкое соединеніе въ плоскости можетъ быть замѣнено тремя стержнями, не пересекающимися въ одной точкѣ.

Также легко узнать, что всякое крѣпкое соединеніе въ пространствѣ можетъ быть замѣнено шестью стержнями, не находящимися въ одной плоскости, соединяющими по крайней мѣрѣ три точки бруса съ не менѣе чѣмъ тремя точками системы.

Не трудно доказать, что всѣ теоремы, выведенныя въ предыдущей главѣ для сочлененныхъ системъ, дѣйствительны и для крѣпкихъ. Эти теоремы основаны на томъ законѣ упругости, что пока напряженія не превышаютъ предѣльныхъ упругихъ напряженій, то измѣненія измѣреній пропорціональны напряженіямъ. Но этому закону подлежатъ и частичныя силы, удерживающія частицы твердаго тѣла въ совокупности; всякое твердое тѣло можно поэтому представить себѣ какъ неизмѣняемую сочлененную систему, которой узлы (частицы) находятся на безконечно близкихъ другъ отъ друга разстояніяхъ.

Возьмемъ 3 взаимно перпендикулярныя оси координатъ, неизмѣняемо связанныя съ крѣпкой системой, напримѣръ, такимъ образомъ, чтобы началомъ координатъ была одна частица, чтобы

ось OX проходила через другую, а плоскость XOY —через третью частицу. Если эти три частицы представимъ себѣ неподвижными, то при всякомъ измѣненіи положенія остальныхъ частицъ системы, т. е. при всякомъ видоизмѣненіи послѣдней будутъ измѣняться координаты частицъ, между тѣмъ какъ перемѣщеніе системы въ пространствѣ, происходящее безъ видоизмѣненія, не будетъ имѣть на эти координаты никакого вліянія.

Возьмемъ двѣ бесконечно близкія частицы a и b (черт. 32), которыхъ координаты передъ деформацией x, y, z , и x_1, y_1, z_1 , а послѣ деформации

$$\begin{array}{lll} x + \xi & y + \eta & z + \zeta \\ x + \xi & y_1 + \eta_1 & z_1 + \zeta_1 \end{array} \text{ и}$$

и означимъ углы, образуемые прямой, соединяющей эти частицы между собою, съ осями OX, OY, OZ передъ деформацией, черезъ α, β, γ , а измѣненіе ихъ разстоянія, произведенное деформацией, черезъ λ , то помощію такихъ же разсужденій какъ въ §§ 48 и 5 получимъ

$$\lambda = (\xi_1 - \xi) \cos \alpha + (\eta_1 - \eta) \cos \beta + (\zeta_1 - \zeta) \cos \gamma. \quad (175)$$

Когда λ меньше предѣльнаго упругаго измѣненія, то величина частичной силы, дѣйствующей между обѣими разсматриваемыми частицами, произведенной измѣненіемъ λ , на основаніи закона пропорціональности напряженій и видоизмѣненій, получится изъ уравненія (160), т. е.

$$N = c[(\xi_1 - \xi) \cos \alpha + (\eta_1 - \eta) \cos \beta + (\zeta_1 - \zeta) \cos \gamma] \quad (176)$$

Когда тѣло (а слѣдовательно и его частицы) находятся въ равновѣсіи, то частичныя силы, дѣйствующія на всякую частицу его, должны удовлетворять условіямъ равновѣсія. На частицу дѣйствуютъ силы N , происходящія отъ окружающихъ ее частицъ, и внѣшнія силы, которыми для частицы, находящейся на поверхности тѣла, могутъ быть приложенныя къ ней внѣшнія силы, а для частицъ, находящихся внутри тѣла—сила тяжести (вѣсъ частицы).

Если сумму слагающихъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на какую нибудь частицу, взятыхъ по направленію осей OX, OY, OZ , означимъ черезъ X, Y, Z , то изъ условій равновѣсія получимъ уравненія:

$$\begin{array}{l} X + \Sigma N \cos \alpha = 0 \\ Y + \Sigma N \cos \beta = 0 \\ Z + \Sigma N \cos \gamma = 0 \end{array} \quad (177)$$

Уравненія 175, 176 и 177 ничѣмъ не отличаются отъ уравненій 158, 160 и 159, полученныхъ для сочлененныхъ системъ, изъ чего слѣдуетъ, что всѣ слѣдствія, выведенныя изъ послѣд-

нихъ для сочлененныхъ системъ, дѣйствительны безъ измѣненія для крѣпкихъ. Повторимъ эти слѣдствія:

1) Работа реформации всякаго тѣла опредѣляется въ функціи внѣшнихъ силъ выраженіемъ (166)

$$\delta = \frac{1}{2} \Sigma P \pi.$$

2) Если выразимъ работу деформации въ функціи внѣшнихъ силъ, то производная этой работы, взятая по отношенію къ одной изъ внѣшнихъ силъ, равняется относительному перемѣщенію точки приложенія этой силы. При опредѣленіи производной нужно внѣшнія силы разсматривать какъ независимыя величины.

Эти правила получены при предположеніи такъ малыхъ видоизмѣненій, что величинами f и φ въ уравненіяхъ (152) и (154) можно пренебречь безъ замѣтныхъ практическихъ погрѣшностей. Такъ какъ въ сооруженіяхъ допускаются только такія видоизмѣненія, которыя не превышаютъ предѣльныхъ упругихъ измѣненій, а послѣднія для твердыхъ тѣлъ всегда очень малы, то оба предыдущія правила имѣютъ для сооруженій общее значеніе.

§ 60.

Производная работы деформации, взятая по отношенію къ моменту или парѣ силъ.—При расчетѣ матеріальныхъ системъ, какъ сочлененныхъ, такъ и крѣпкихъ, неизвѣстными суть напряженія стержней или равнодѣйствующихъ и моменты частичныхъ силъ, дѣйствующихъ въ плоскомъ сѣченіи тѣла. Такъ какъ моментъ—функція силы, то работа деформации можетъ быть выражена въ функціи неизвѣстныхъ силъ или моментовъ, и производная этой работы, взятая по отношенію къ силѣ или моменту, можетъ быть употреблена для опредѣленія неизвѣстныхъ. Поэтому важно знать значеніе производной работы деформации, взятой по отношенію въ парѣ силъ или моменту.

Положимъ, что вслѣдствіе дѣйствія пары силъ P и P (черт. 39), которой моментъ $M = Pr$, система получила очень малое вращеніе, при которомъ точки a и b этихъ силъ, находящіяся на перпендикулярѣ ab , перемѣстились въ α и β . Работа пары при этомъ перемѣщеніи равняется

$$Pa\alpha + Pb\beta = P(\alpha\alpha + b\beta).$$

Если уголъ вращенія $a\alpha$ означимъ черезъ φ , то

$$\alpha\alpha = (p-x)\varphi \quad \text{и} \quad b\beta = x\varphi,$$

поэтому

$$P(\alpha\alpha + b\beta) = P[(p-x)\varphi + x\varphi] = Pr\varphi = M\varphi. \dots\dots\dots (178)$$

Если, слѣдовательно, выразимъ работу деформации въ функціи внѣшнихъ силъ и моментовъ, то будемъ имѣть выраженіе вида

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \Sigma P \pi + \Sigma M \varphi = \frac{1}{2} (P_1 \pi_1 + P_2 \pi_2 + \dots) + M_1 \varphi_1 + M_2 \varphi_2 + \dots \quad (179)$$

Когда внѣшнія силы и моменты — независимыя величины, то производная этой работы, взятая по отношенію къ одному изъ моментовъ, будетъ

$$\frac{d\bar{\omega}}{dM_p} = \varphi_p \quad \dots \dots \dots (180)$$

изъ чего слѣдуетъ:

Если будемъ разсматривать внѣшнія силы и моменты какъ независимыя величины, и выразимъ работу деформации въ функціи внѣшнихъ силъ и моментовъ, то производная этой работы, взятая по отношенію къ одному изъ моментовъ, даетъ уголъ вращенія пары, образующей взятый моментъ. Этотъ уголъ вращенія будемъ называть относительнымъ вращеніемъ.

Глава V.

Основные начала графическихъ способовъ расчета.

§ 61.

Введение.—При рѣшеніи статическихъ задачъ графическимъ образомъ представляютъ силы по величинѣ и направленію прямыми линіями.

Линія дѣйствія силы извѣстна, когда дано ея направленіе и точка приложенія, а чтобы узнать сторону, въ которую она дѣйствуетъ, снабжаютъ представляющую ее линію стрѣлкой.

Напряженіе силы изображается длиною прямой. Для этого принимаютъ нѣкоторую длину за единицу силы и откладываютъ ее столько разъ, сколько сила содержитъ единицъ. Такъ сила, представленная прямой Ab (черт. 40), для которой длина mn принята за 1 килограммъ, дѣйствуетъ по направленію отъ A къ b и $=5$ килог.

§ 62.

Сложеніе непараллельныхъ силъ.—Положимъ, что на точку A (черт. 41) дѣйствуютъ двѣ силы P_1 и P_2 , которыхъ величины и направленія даны прямыми Ab и Ac . По извѣстному правилу параллелограмма силъ, равнодѣйствующая этихъ силъ равна діагонали Ad параллелограмма $Abdc$, и она дѣйствуетъ по направленію отъ A къ d .

Половина этого параллелограмма, напр., треугольникъ Abd (черт. 41) называется *треугольникомъ силъ*. Этотъ треугольникъ представленъ отдѣльно на чертежѣ 41_a, изъ котораго видно, что онъ содержитъ какъ данныя силы, такъ и ихъ равнодѣйствующую.

Если заставимъ точку A двигаться по периметру треугольника силъ по направленію, указанному на каждой сторонѣ стрѣлкой, то видимъ, что точка A должна двигаться отъ A къ b , и

отъ b къ d . Въ d кончается движеніе точки, такъ какъ по dA она должна перемѣщаться слѣва вправо, что невозможно. Отсюда заключаемъ: *если въ треугольникъ силъ одна сторона представляетъ равнодѣйствующую, то точка, движущаяся по периметру его по направленіямъ стрѣлокъ, не можетъ возвратиться въ первоначальное положеніе.*

При противоположномъ направленіи силы Ad , равномъ dA , (черт. 42), три силы: P_1 , P_2 и R находятся въ равновѣсіи. Точка, движущаяся по периметру этого треугольника по направленіямъ стрѣлокъ, поставленныхъ на соотвѣтственныхъ сторонахъ, возвращается въ первоначальное положеніе.

Когда число силъ болѣе двухъ, то равнодѣйствующая получается помощью многоугольника силъ. Чтобы сложить силы P_1, P_2, P_3, P_4 (черт. 43), дѣйствующія на точку A , опредѣляемъ помощью треугольника Abc равнодѣйствующую R_{1-2} силъ P_1 и P_2 , затѣмъ помощью треугольника Acd — равнодѣйствующую R_{1-3} силъ R_{1-2} и P_3 и, наконецъ, помощью треугольника Adf — равнодѣйствующую R силъ R_{1-3} и P_4 , или, что все равно — равнодѣйствующую силъ P_1, P_2, P_3, P_4 .

Полученный такимъ образомъ многоугольникъ $Abcdf$ называется *многоугольникомъ силъ*. Очевидно, что для опредѣленія R нѣтъ надобности строить промежуточные равнодѣйствующія R_{1-2}, R_{1-3} , и что достаточно строить на данныхъ силахъ многоугольникъ, откладывая каждую слѣдующую силу въ сторону ея направленія отъ конца предыдущей. Прямая, соединяющая послѣднюю точку f съ начальной A , будетъ искомой равнодѣйствующей.

Изъ чертежа 43, видно, что когда одна сторона многоугольника силъ представляетъ равнодѣйствующую, то точка A , движущаяся по его периметру по направленіямъ стрѣлокъ, можетъ пройти всѣ слагающія, но не можетъ возвратиться въ первоначальное положеніе, такъ какъ стрѣлка равнодѣйствующей прекращаетъ это движеніе. Такой многоугольникъ силъ называется *многоугольникомъ прерваннаго движенія*.

При построеніи многоугольника силъ можно данныя силы откладывать въ произвольномъ порядкѣ, нужно только соблюдать условіе, чтобы точка могла имѣть по периметру, образованному слагающими, непрерывное движеніе, т. е. каждую слѣдующую силу нужно проводить отъ конца предыдущей въ ту сторону, въ которую указываетъ стрѣлка ея направленія.

Если сила R сдѣлается противоположной (черт. 44), то система силъ P_1, P_2, P_3, P_4, R , представленныхъ сторонами многоугольника $Abcdf$, находится въ равновѣсіи. Изъ черт. 44 видно, что точка, движущаяся по периметру многоугольника, образован-

наго силами, находящимися въ равновѣсїи, можетъ пройти весь периметръ непрерывно.

Такъ какъ въ многоугольникѣ всякая сторона можетъ быть разсматриваема какъ замыкающая сторона многоугольника, образованнаго остальными сторонами, то въ многоугольникѣ прерваннаго движенія всякая сила можетъ быть разсматриваема какъ равнодѣйствующая остальнымъ, а въ многоугольникѣ непрерывнаго движенія всякая сила уравниваетъ остальные.

Сложене силъ, дѣйствующихъ на различныя точки.—Когда силы P_1, P_2, P_3, P_4 не пересѣкаются въ одной точкѣ, то ихъ равнодѣйствующая по величинѣ и направленію ищется помощію многоугольника силъ точно такимъ образомъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ (черт. 45_а и 45_б).

Положеніе этой равнодѣйствующей опредѣляется слѣдующимъ образомъ: къ произвольной точкѣ A , взятой на силѣ P_1 , приложимъ двѣ силы I и II , уравнивающія эту силу P_1 , которыхъ направленія AE и AB беремъ произвольно. Величины этихъ вспомогательныхъ силъ получаются изъ треугольника aOb въ которомъ

$$aO \parallel AE \text{ и } Ob \parallel AB,$$

а направленія ихъ дѣйствія указаны стрѣлками 1 и 2.

Продолжимъ силу II до пересѣченія съ P_2 въ B и повторимъ для силы P_2 дѣйствіе, исполненное для P_1 , а именно: приложимъ къ B двѣ силы, уравнивающія эту силу P_2 , изъ которыхъ одна должна быть равна и противоположна силѣ II , а другая опредѣляется по величинѣ и направленію третьей стороны $Oс$ треугольника bOc . Направленіе дѣйствія этихъ слагающихъ опредѣляется стрѣлками 2, и 3.

Продолжая такимъ образомъ получимъ равновѣсіе къ точкѣ C приложивъ къ точкѣ пересѣченія силъ III и P_3 вспомогательныя силы: одну, равную и противоположную силѣ III , и другую, обозначенную числомъ IV , которой величина и направленіе опредѣлены прямой, соединяющей d съ O . Точно такимъ образомъ прикладываемъ къ точкѣ D , въ которой сила IV встрѣчаетъ P_4 , двѣ силы, уравнивающія силу P_4 , изъ которыхъ одна равна и противоположна IV , а другая $V=сO$.

Продолженія силъ V и I встрѣчаются въ точкѣ E . Если къ этой точкѣ приложимъ три силы: силу R и силы— I и— V , равныя и противоположныя силамъ I и V , приложеннымъ къ точкамъ A и D , то помощію треугольника $aOс$ узнаемъ, что точка E , при дѣйствїи на нее этихъ трехъ силъ, находится въ равновѣсїи.

Каждая изъ точекъ A, B, C, D, E находится теперь въ равновѣсїи подъ дѣйствіемъ трехъ силъ. Но изъ этихъ силъ—равныя и противоположныя силы I и— I , дѣйствующія въ A и E ,

II и II, дѣйствующія въ A и B , и т. д. взаимно уничтожаются, изъ чего слѣдуетъ, что сила R , проходящая черезъ точку E и имѣющая направленіе En , уравниваетъ силы P_1, P_2, P_3, P_4 .

Можно себѣ представить, что многоугольникъ $ABCDE$ образованъ веревкой, на которую въ точкахъ A, B, C, D и E дѣйствуютъ силы P_1, P_2, P_3, P_4 и R . Этотъ многоугольникъ называютъ поэтому часто *веревочнымъ многоугольникомъ*. Но такое названіе его не совсѣмъ правильно, потому что если бы силы P_1, P_2, P_3, P_4 сдѣлались противоположными, то въ сторонахъ AB, BC, CD, DE и EA дѣйствовали бы сжатія, и тогда они не могли бы быть замѣнены веревкой.

Прямые $Oa, Ob, Oc...$ въ многоугольникѣ силъ называются *веревочными лучами*, а точка O — *полюсомъ*. Разстояніе полюса отъ какой-нибудь изъ силъ, образующихъ очертаніе многоугольника силъ, называется *полюснымъ разстояніемъ*.

Изъ предыдущаго получается для опредѣленія положенія равнодѣйствующей слѣдующее правило:

На данныхъ силахъ строимъ многоугольникъ силъ, котораго замыкающая сторона даетъ величину и направленіе равнодѣйствующей. Беремъ произвольный полюсъ O , проводимъ веревочные лучи I, II, III... и строимъ веревочный многоугольникъ $ABCD...$ такимъ образомъ, чтобы каждая двѣ стороны встрѣчались на той силѣ P , которая въ многоугольникѣ силъ съ лучами, имѣя параллельными, образуетъ треугольникъ. Равнодѣйствующая R проходитъ черезъ точку, въ которой пересѣкаются первая и послѣдняя сторона полученнаго такимъ образомъ веревочнаго многоугольника.

Первую и послѣднюю сторону веревочнаго многоугольника будемъ называть *крайними сторонами* для данной группы силъ. Такъ, напр., стороны III и V суть крайнія стороны для группы силъ P_3 и P_4 .

§ 63.

Параллельныя силы.

а) *Сложеніе параллельныхъ силъ*.—Когда силы P_1, P_2, P_3, P_4 (черт. 46_а и 46_б) параллельны, то построенный на нихъ по предыдущимъ правиламъ многоугольникъ силъ будетъ прямою ae . Равнодѣйствующая этихъ силъ—по величинѣ и направленію= ae , а чтобы получить ея положеніе беремъ произвольный полюсъ O , проводимъ лучи $Oa, Ob, Oc...$ и помощью ихъ строимъ веревочный многоугольникъ E_1ABCDE_2 . Если продолжимъ крайнія стороны E_1A и E_2D до пересѣченія въ E , то черезъ E проходитъ равнодѣйствующая R .

б) *Определение центра тяжести произвольной плоской фигуры.*—Если данную фигуру разделим на части $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \dots$ и представим себѣ, что въ центрѣ тяжести каждой части дѣйствуетъ вѣсъ, пропорціональный ея площади, то центръ тяжести фигуры будетъ находиться на равнодѣйствующей этихъ вѣсовъ, разсматриваемыхъ какъ параллельныя силы.

Поэтому данную фигуру (черт. 47) дѣлимъ на такія части, чтобы площадь $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \dots$ и центръ тяжести $z_1, z_2, z_3 \dots$ каждой части легко было опредѣлить. При дѣленіи параллельными линиями получаются треугольники, трапеціи и параллелограммы *). Принимаемъ, что вѣсъ дѣйствуетъ по какому нибудь направленію mn . Отложивъ на mn силы, пропорціональныя площадямъ $\Omega_1, \Omega_2 \dots$, беремъ произвольный полюсъ O , строимъ помощію его веревочную линію и получаемъ въ пересѣченіи крайнихъ сторонъ точку E равнодѣйствующей EE_1 , которая параллельна mn . Затѣмъ повторяемъ тоже дѣйствіе при предположеніи, что направленіе тѣхъ же вѣсовъ, дѣйствующихъ въ тѣхъ же точкахъ $z_1, z_2 \dots$, параллельно какой нибудь другой прямой pq , и получаемъ FF_1 какъ линію равнодѣйствующей. Центръ тяжести фигуры находится на линіи EE_1 и на линіи FF_1 , т. е. въ точкѣ пересѣченія z этихъ обѣихъ линій.

Такъ какъ при построеніи многоугольника силъ (черт. 47_b) вѣсы частей, на которыя разбита данная фигура, представляются длинами, пропорціональными этимъ площадямъ, то, превративъ фигуры этихъ частей въ треугольники съ однимъ общимъ основаніемъ, можно площади $\Omega_1, \Omega_2 \dots$ замѣнить соотвѣтственными высотами этихъ треугольниковъ **).

*) *Центръ тяжести треугольника* (черт. 48). Одну изъ сторонъ, напр. ac , дѣлимъ въ d пополамъ, соединяемъ точку дѣленія съ противоположной вершиной b и дѣлимъ db на 3 равныя части. Первая точка дѣленія, считая отъ d , есть искомый центръ тяжести z .

Центръ тяжести трапеціи (черт. 49). Параллельныя стороны ab и cd дѣлимъ въ α и β пополамъ и соединяемъ α съ β прямой $\alpha\beta$. Продолжаемъ ab и cd въ противоположныя стороны; на продолженіи ab откладываемъ $bc_1 = dc$, а на продолженіи cd — $ca_1 = ba$, и соединяемъ c_1 съ a_1 . Точка z , въ которой a_1b_1 пересѣкаетъ $\alpha\beta$, есть центръ тяжести трапеціи.

Центръ тяжести параллелограмма находится въ пересѣченіи его діагоналей.

**) *Превратимъ треугольникъ abc* (черт. 50) *въ другой съ основаніемъ cm .* Соединяемъ m съ b , и черезъ a проводимъ прямую aM , параллельную mb до пересѣченія со стороною bc (или съ ея продолженіемъ) въ M . Треугольникъ mMc будетъ искомымъ.

Превратимъ четырехугольникъ $abdc$ въ треугольникъ съ основаніемъ cm (черт. 51). Сначала превращаемъ четырехугольникъ въ треугольникъ. Для этого соединяемъ a съ d , проводимъ черезъ b прямую ba_1 , параллельно da до пересѣченія съ ca въ a_1 и соединяемъ a_1 съ d . Затѣмъ превращаемъ треугольникъ a_1dc въ другой съ основаніемъ cm .

§ 64.

Условія равновѣсія силъ въ плоскости, не пересѣкающихся въ одной точкѣ.—Когда силы P_1, P_2, P_3, P_4 , дѣйствующія на различныя точки въ плоскости, составляютъ замкнутый многоугольникъ силъ, то ихъ равнодѣйствующая равна нулю. Если для этихъ силъ построимъ веревочный многоугольникъ, то онъ вообще не будетъ замѣнутъ, и крайнія стороны его I и I' (черт. 52) встрѣтятся въ безконечности. Предполагая, что силы $P_1, P_2, \dots$ дѣйствуютъ на веревку $E_1 ABCDE_2$ видимъ, что натяженія въ частяхъ II, III и IV взаимно уничтожаются, и что для равновѣсія нужно къ A и D приложить силы, равныя и противоположныя дѣйствующимъ на эти точки натяженіямъ I и I' . Матеріальная система, на которую дѣйствуютъ силы P_1, P_2, P_3, P_4 не будетъ поэтому находиться въ равновѣсіи не смотря на то, что ихъ равнодѣйствующая равна нулю, потому что точка приложенія равнодѣйствующей (точка пересѣченія крайнихъ сторонъ AE_1 и DE_2) находится въ безконечности. Такія силы приводятся къ парѣ силъ, которыхъ разстояніе h другъ отъ друга называется *плечомъ*, а произведеніе $I \times h$ изъ силы на плечо—*моментомъ пары силъ*.

Если передвинемъ силу P_4 параллельно самой себѣ настолько, чтобы она проходила черезъ точку H , въ которой пересѣкаются стороны I и I' веревочнаго многоугольника, то веревочный многоугольникъ замыкается. Обѣ силы I и I' уничтожаются и силы P_1, P_2, P_3, P_4 находятся между собою въ равновѣсіи. Вслѣдствіе перемѣщенія силы P_4 въ H моментъ Ih сдѣлался $=0$.

Изъ этого слѣдуетъ, что *силы, дѣйствующія на различныя точки въ плоскости, находятся тогда въ равновѣсіи, когда онѣ даютъ замкнутый многоугольникъ силъ и замкнутый веревочный многоугольникъ*.

§ 65.

Разложеніе силъ.

а) Разложитъ силу R на двѣ слагающія, параллельныя прямымъ l и m (черт. 53). Строимъ треугольникъ Abc , котораго одна сторона $=R$, а двѣ другія—параллельны прямымъ l и m . Искомыя слагающія волюнѣ опредѣлены прямыми Ab и Bc , направленія ихъ дѣйствія даны стрѣлками, поставленными на сторонахъ такимъ образомъ, чтобы онѣ образовали треугольникъ прерваннаго движенія.

Если-бы требовалось найти двѣ силы, параллельныя двумъ даннымъ прямымъ, уравновѣшивающія силу R , то было бы нужно построить треугольникъ непрерывнаго движенія (черт. 53_a).

Задача дѣлается неопредѣленною и допускаетъ безконечно большое число рѣшеній, когда число слагающихъ, на которыя должна быть разложена данная сила, болѣе двухъ.

б) Данную силу P разложить на двѣ, ей параллельныя слагающія A и B , проходящія черезъ точки a и b (черт. 54). Для рѣшенія этой задачи нужно построить многоугольникъ силъ и веревочный многоугольникъ.

Искомыя силы будутъ дѣйствовать вдоль прямыхъ aa_1 и bb_1 , проведенныхъ черезъ a и b параллельно P . Чтобы получить ихъ величины, проводимъ прямую mn параллельно P и откладываемъ на ней $mn=P$. Беремъ произвольный полюсъ O , проводимъ лучи I и II, пересѣкающіе aa_1 и bb_1 въ a и b , и соединяемъ a съ b . Черезъ O проводимъ $Oz \parallel ab$ до пересѣченія съ mn въ z , то $mz=A$ и $nz=B$.

На чертежѣ 54 рѣшена таже задача для случая, когда обѣ слагающія находятся по одну сторону данной равнодѣйствующей P . Какъ изъ чертежа видно, слагающія A и B дѣйствуютъ по противоположнымъ направленіямъ.

в) Даны направленія двухъ параллельныхъ силъ A и B ; опредѣлить напряженія этихъ силъ такимъ образомъ, чтобы онѣ уравновѣшивали данныя силы P_1, P_2, P_3, P_4 . — На данныхъ силахъ P_1, P_2, P_3, P_4 , строимъ многоугольникъ силъ (черт. 55_a). Беремъ произвольный полюсъ O , и строимъ веревочный многоугольникъ, котораго крайнія стороны I и V пересѣкаютъ направленія силъ A и B въ точкахъ a и b . Равнодѣйствующая R данныхъ силъ, которая равна $m4$, проходитъ черезъ точку c , въ которой встрѣчаются крайнія стороны I и V веревочнаго многоугольника.

Силу R разлагаемъ на двѣ по направленіямъ прямыхъ A и B . Для этого, по указаніямъ предыдущей задачи, соединяемъ a съ b , а черезъ O проводимъ Oz параллельно ab до пересѣченія съ многоугольникомъ силъ $m1234$ въ z . Прямая Oz дѣлитъ равнодѣйствующую $m4$ на двѣ части, такъ что получаемъ замкнутый многоугольникъ $m1234zt$, котораго углы при m и 4 равны нулю, а каждый изъ остальныхъ $=180^\circ$. Сила mz составляетъ треугольникъ съ лучами I и r , а такъ какъ параллельные имъ веревочные лучи встрѣчаются на линіи A , то слѣдуетъ, что

$$A = mz \text{ и } B = z4.$$

2) Дана сила R и положеніе трехъ другихъ силъ x, y и z , не пересѣкающихся въ одной точкѣ; опредѣлить величины послѣднихъ такимъ образомъ, чтобы онѣ уравновѣшивали силу R .

Когда 4 силы находятся въ равновѣсіи, то сила, уравновѣшивающая двѣ изъ нихъ, равна и противоположна силѣ, уравно-

вѣшивающей двѣ остальные. Если поэтому продолжимъ R и z до пересѣченія въ b , а x и y — до пересѣченія въ a , то эта уравновѣшивающая сила проходитъ какъ черезъ точку a , такъ и черезъ точку b , т. е. она будетъ находиться на прямой ab .

Чтобы получить ея величину нужно на силѣ R и на прямыхъ ba и z построить треугольникъ bcd непрерывнаго движенія. Затѣмъ откладываемъ на продолженіи ba

$$\overline{af} = \overline{db}$$

въ сторону противоположную направленію силы db , и строимъ на af и на прямыхъ y и x треугольникъ непрерывнаго движенія afg . Величины искомымъ силъ будутъ:

$$z = \overline{cd}, \quad x = \overline{ga}, \quad y = \overline{fg}.$$

§ 66.

Статическіе моменты силъ.—Статическимъ моментомъ силы P по отношенію къ точкѣ вращенія t (черт. 56) называютъ произведеніе этой силы на ея разстояніе p отъ этой точки. Если поэтому статическій моментъ означимъ черезъ P , то

$$M = P.p.$$

Перпендикуляръ p называютъ *плечомъ* силы P . Если себѣ представимъ, что это плечо — твердый рычагъ, вращающійся около оси t , то сила P стремится повернуть этотъ рычагъ около t . Мы будемъ считать моментъ положительнымъ, когда сила стремится вращать плечо слѣва вправо (по направленію часовой стрѣлки) и отрицательнымъ — при прямопротивоположномъ направленіи вращенія.

а) *Найти моментъ силъ P_1, P_2, P_3, P_4 по отношенію къ точкѣ t .* Такъ какъ моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ моментовъ слагающихъ, то задача будетъ рѣшена, если найдемъ моментъ равнодѣйствующей данныхъ силъ по отношенію къ точкѣ t .

Поэтому опредѣляемъ равнодѣйствующую данныхъ силъ, для чего строимъ многоугольникъ силъ $m1234$ (черт. 57) и затѣмъ помощію произвольнаго полюса O — веревочный многоугольникъ. Искомая равнодѣйствующая R равна и параллельна $m4$, и проходитъ черезъ точку s , въ которой пересѣкаются продолженія крайнихъ сторонъ I и V веревочнаго многоугольника.

Проведемъ черезъ t прямую FJ , параллельную R , до пересѣченія съ крайними сторонами веревочнаго многоугольника въ F и J , и опустимъ изъ O перпендикуляръ H на $m4$. Изъ подобія треугольниковъ $FEEJ$ и $mO4$ получаемъ:

$$\frac{FJ}{m4} = \frac{r}{H},$$

откуда, такъ какъ $m4 = R$,

$$FJ = \frac{Rr}{H},$$

или, означивъ моментъ Rr черезъ M , а отрѣзокъ FJ черезъ y

$$y = \frac{M}{H},$$

откуда

$$M = Hy. \quad (181)$$

Послѣднее уравненіе даетъ слѣдующее правило: *если черезъ центръ вращенія проведемъ прямую, параллельную равнодѣйствующей данныхъ силъ, то отрѣзокъ y этой прямой, отсѣченный крайними сторонами веревочнаго многоугольника, умноженный на полное разстояніе H , равенъ статическому моменту этихъ силъ.*

Принимая $H=1$, получимъ

$$M = y.$$

Въ произведеніи Rr нужно R выразить въ единицахъ силы (напр. въ килограммахъ), а r —въ единицахъ длины (напр. въ метрахъ). При опредѣленіи произведенія Hy можно H измѣрять по масштабу силъ, а y —по масштабу длинъ, или наоборотъ.

Чтобы получить моментъ силъ P_2 и P_3 по отношенію къ точкѣ t , нужно по предыдущему правилу провести равнодѣйствующую 13 этихъ силъ (черт. 57), опустить изъ O на 13 перпендикуляръ H_1 , провести черезъ t прямую $\overline{fi} \parallel 13$, и опредѣлить ея пересѣченія f и i съ крайними сторонами II и IV веревочнаго многоугольника, построеннаго на силахъ P_2 и P_3 . Искомый моментъ

$$M_1 = \overline{fi} \times H_1.$$

б) *Найти моментъ параллельныхъ силъ A , P_1 и P_2 по отношенію къ точкѣ t (черт. 58).*—На данныхъ силахъ строимъ многоугольникъ силъ $ma12$, откладывая силы A , P_1 и P_2 по правилу непрерывнаго движенія.

Беремъ произвольный полюсъ O , проводимъ лучи I, II, III, z , и строимъ веревочный многоугольникъ $Ea\alpha\beta E_1$. Если черезъ t проведемъ прямую, параллельную даннымъ силамъ, и означимъ ея точки пересѣченія съ крайними веревочными сторонами Ea

и βE_1 через F и J , а полюсное разстояніе—через H , то

$$M = \overline{FJ} \times H.$$

Этотъ моментъ положительный, потому что равнодѣйствующая силъ A , P_1 и P_2 проходитъ черезъ точку пересѣченія крайнихъ веревочныхъ сторонъ, которая получается слѣва t , а такъ какъ

$$A > P_1 + P_2,$$

то равнодѣйствующая направлена вверхъ, она вращаетъ поэтому около t вправо.

в) Даны параллельныя силы $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$; опредѣлить по отношенію къ какой бы то ни было точкѣ на плоскости моментъ силъ, находящихся слѣва точки вращенія (черт. 59).— На черт. 59_a построенъ многоугольникъ силъ, который въ этомъ случаѣ имѣетъ видъ прямой m_6 . Въ 6 возставленъ къ m_6 перпендикуляръ; на этомъ перпендикулярѣ взять полюсъ O и построенъ веревочный многоугольникъ (чертежъ 59). Если продолжимъ крайнюю сторону этого многоугольника, то отрѣзокъ всякой прямой параллельной m_6 , заключенный между веревочнымъ многоугольникомъ и этой продолженной стороной, умноженный на полюсное разстояніе H , будетъ равенъ требуемому моменту.

Такъ произведеніе $\overline{ab} \times H =$ моменту силъ P_4, P_5 и P_6 , взятому по отношенію къ какой нибудь точкѣ на ab , потому что отрѣзокъ ab заключенъ между сторонами IV и VII, которыя для веревочнаго многоугольника, построеннаго на силахъ P_4, P_5, P_6 , суть крайними сторонами.

г) Даны вертикальныя силы P_1, P_2, P_3, P_4 . Найти силы A и B , уравновѣшивающія данныя, и опредѣлить для какой нибудь точки, взятой между A и B , моментъ силъ, находящихся по одну сторону точки моментовъ (черт. 60).— Силы A и B опредѣлены посредствомъ построенія, указаннаго въ § 65_b.

Если въ полученномъ такимъ образомъ веревочномъ многоугольникѣ проведемъ произвольную вертикаль vv_1 и означимъ ея точки пересѣченія съ веревочными сторонами черезъ α и β , то произведеніе $\overline{\alpha\beta} \times H =$ статическому моменту лѣвыхъ силъ A, P_1, P_2 , взятому по отношенію къ какой нибудь точкѣ на v_1v_2 , потому что точки α и β находятся на крайнихъ сторонахъ a и III веревочнаго многоугольника, построеннаго на силахъ A, P_1, P_2 . Но $\overline{\alpha\beta} \times H$ равняется также моменту правыхъ силъ B, P_4 и P_3 , взятому по отношенію къ той же точкѣ, потому что a и c можно разсматривать какъ крайнія стороны веревочнаго многоугольника, построеннаго на силахъ B, P_4 и P_3 .

§ 67.

Непрерывная нагрузка. Единичный грузъ.—Когда поверхность тѣла покрыта сплошной нагрузкой такимъ образомъ, что на очень малую часть ея $\Delta\Omega$, ограниченную замкнутой линіей, дѣйствуетъ нагрузка P , то частное

$$\frac{P}{\Delta\Omega}$$

называютъ средней нагрузкой на единицу поверхности элемента $\Delta\Omega$. При безконечно маломъ $\Delta\Omega$ эта часть поверхности превращается въ точку $d\Omega$, и тогда

$$p = \frac{P}{d\Omega}$$

выражаетъ нагрузку этой точки, отнесенную къ единицѣ площади. Величина p не означаетъ поэтому силу, но *отношеніе силы къ площади*.

Если нагрузка распредѣлена непрерывно вдоль линіи l , и элементу dl этой линіи соотвѣтствуетъ грузъ P , то частное $p = \frac{P}{dl}$ будетъ средняя нагрузка этого элемента на единицу длины, или *единичная нагрузка* точки, соотвѣтствующей элементу dl . Единичная нагрузка не означаетъ поэтому силу, но отношеніе силы къ длинѣ.

Положимъ, что линія l —прямая, и что нагрузка p во всякой точкѣ перпендикулярна къ этой линіи. Примемъ l за ось абсциссъ и на перпендикулярахъ, возставленныхъ къ ней въ различныхъ точкахъ, отложимъ ординаты $aa_1, bb_1, \dots$ равныя единичнымъ грузамъ p этихъ точекъ. Полученная такимъ образомъ линія $\tau b_1 \tau_1$ (черт. 61) называется *линіей нагрузки*.

На всякій элементъ ds этой линіи дѣйствуетъ грузъ $p \cdot ds$ и изъ фигуры видно, что

$$p \cdot ds = \overline{mn} \times \overline{mm_1}$$

равняется площади полосы mnm_1 , соотвѣтствующей элементу mn . Изъ этого слѣдуетъ, что площадь abb_1a_1 , соотвѣтствующая отрѣзку ab линіи mn , равна нагрузкѣ этого отрѣзка; эту площадь называютъ поэтому *площадью нагрузки*.

Если прямая MN нагружена равномерно, то линія $\tau b_1 \tau_1$ превращается въ прямую, параллельную MN , и площадь нагрузки имѣетъ видъ прямоугольника.

Когда нагрузка перемежна, то въ нѣкоторыхъ точкахъ она

можетъ быть положительной, а въ другихъ отрицательной; тогда отрицательные единичные грузы p нужно откладывать отъ оси MN въ сторону, противоположную p . Вертикальную нагрузку будемъ считать положительной, если она направлена внизъ, и отрицательной—если направлена вверхъ.

§ 68.

Веревочный многоугольникъ непрерывной нагрузки.—Площадь нагрузки дѣлимъ прямыми $m_1, n_2, p_3, \dots$ (черт. 62) на части $оm_1, 1m_2, 2n_3, \dots$ и замѣняемъ каждую часть равнодѣйствующей $P_1, P_2, P_3, \dots$ равной ея площади, которой точка приложенія находится въ центрѣ тяжести соотвѣтственной площади. Такъ, напримѣръ, сила P_3 —площади четырехугольника $2np_3$, и дѣйствуетъ въ центрѣ тяжести z этого четырехугольника.

Строимъ веревочный многоугольникъ для нагрузки, составленной изъ силъ $P_1, P_2, P_3, \dots$. Точки $\alpha, \mu, \nu, \dots$ этой линіи, находящіяся на продолженіи дѣлящихъ прямыхъ $ao, m_1, n_2, \dots$ лежатъ на иско-мой веревочной линіи, потому что если возьмемъ ординаты этой линіи по отношенію къ сторонѣ Ea (т. е. принявъ Ea за ось абсциссъ), то по § 66 эти ординаты, умноженные на полюсное разстояніе H , равны моментамъ силъ, находящихся слѣва со-отвѣтственныхъ ординатъ. Поэтому, напримѣръ, произведеніе $\pi_1 H$ равно моменту силъ $P_1, P_2, P_3, \dots$ взятому по отношенію къ точкѣ 3, а такъ какъ моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ моментовъ слагающихъ, то слѣдуетъ, что моментъ нагрузки $оарq4o$ по отношенію къ точкѣ 3 равенъ тоже $\pi_1 H$.

Такъ какъ непрерывную нагрузку можно себѣ представить состоящей изъ сосредоточенныхъ грузовъ, находящихся на без-конечно близкихъ другъ отъ друга разстояніяхъ, а вершины веревочнаго многоугольника лежатъ на линіяхъ дѣйствія его гру-зовъ, то слѣдуетъ, что вершины веревочнаго многоугольника для непрерывной нагрузки находятся на безконечно близкихъ другъ отъ друга разстояніяхъ, т. е. многоугольникъ имѣетъ видъ кри-вой линіи.

Изъ предыдущаго заключаемъ: стороны веревочнаго многоуголь-ника, построеннаго на равнодѣйствующихъ $P_1, P_2, P_3, \dots$ (черт. 62),—касательны къ дѣйствительной веревочной линіи и точки касанія находятся на продолженіи дѣлящихъ прямыхъ $oa, 1m, 2n, \dots$

§ 69.

Веревочная линія равнобѣрной непрерывной нагрузки.—Раздѣлимъ площадь $AabB$ нагрузки (черт. 63) прямой mn по-поламъ и замѣнимъ площади $Aamn$ и mbB соотвѣтственными

силами P_1 и P_2 , дѣйствующими въ центрахъ тяжести z_1 и z_2 этихъ площадей. Очевидно, что направленія этихъ силъ P_1 и P_2 раздѣлятъ Am и nB пополамъ.

Построимъ для P_1 и P_2 веревочный многоугольникъ A_1stB_1 ; его стороны A_1s , st и tB_1 , по полученному въ предыдущемъ § правилу, суть касательныя къ искомой веревочной кривой, и ихъ точки касанія находятся на продолженіи вертикалей Aa , mn и Bb въ A_1 , k и B_1 . Такъ какъ mn проходитъ черезъ середину разстоянія z_1z_2 , то k дѣлитъ отрѣзокъ st пополамъ и изъ построенія слѣдуетъ, что

$$As=sc \text{ и } ct=tB.$$

На чертежѣ 64 нагрузка $AabB$ раздѣлена вертикалями mn и pq на три равныя части, для которыхъ построенъ веревочный многоугольникъ $A_11\pi2_1B_1$. Легко узнать, что продолженія сторонъ 1π и $\pi2_1$ дѣлятъ A_1c и cB_1 на 3 равныя части и что точки 2 и 1_1 находятся, точно также какъ и точки касанія k_1 и k_2 искомой веревочной кривой, на продолженіи дѣлящихъ вертикалей mn и pq .

Если поэтому раздѣлимъ A_1c и cB_1 на n равныхъ частей и обозначимъ точки дѣленія на A_1c отъ A_1 къ c , и на cB_1 —отъ c къ B_1 , цифрами 1, 2, 3... то соединивъ одноименныя точки дѣленія прямыми линиями, получимъ веревочный многоугольникъ, соотвѣтствующій раздѣленію площади нагрузки на n равныхъ частей.

На черт. 65 $n=6$. Вершины $\omega_1, \omega_2...$ веревочнаго многоугольника находятся на вертикаляхъ точекъ дѣленія 1, 3, 5, 1... а точки касанія $k_0, k_1, k_2...$ на вертикаляхъ остальныхъ точекъ дѣленія прямыхъ A_1c и cB_1 .

§ 70.

Алгебраическое значеніе веревочнаго многоугольника.— Для лучшаго ознакомленія со свойствами веревочнаго многоугольника укажемъ его алгебраическое значеніе.

Положимъ, что требуется найти графически слѣдующую алгебраическую сумму:

$$x = \frac{a_1b_1}{c_1} + \frac{a_2b_2}{c_2} + \frac{a_3b_3}{c_3} - \frac{a_4b_4}{c_4}.$$

Мы предполагаемъ, что въ этомъ уравненіи знакъ $+$ или $-$ зависитъ только отъ величинъ b , что поэтому величины a и c всегда положительны.

На произвольной горизонтали OX (черт. 66) наносимъ въ непрерывномъ порядкѣ множители $a_1, a_2...$, т. е. откладываемъ

$$\overline{oa_1}=a_1, \quad \overline{a_1a_2}=a_2, \quad \overline{a_2a_3}=a_3, \quad \overline{a_3a_4}=a_4$$

и черезъ точки o, a_1, a_2, a_3, a_4 проводимъ вертикали v, v_1, v_2, v_3, v_4 .

На произвольной вертикали MN наносимъ въ непрерывномъ порядкѣ множители $b_1, b_2, b_3, \dots$, положительные—внизъ, а отрицательные—вверхъ, т. е. откладываемъ

$$\overline{bb_1}=b_1, \quad \overline{b_1b_2}=b_2, \quad \overline{b_2b_3}=b_3, \quad \overline{b_3b_4}=-b_4.$$

На разстояніи c_1 отъ MN беремъ точку π_1 и соединяемъ ее съ b и b_1 ; на $b_1\pi_1$ беремъ точку π_2 , отстоящую отъ MN на c_2 , и соединяемъ π_2 съ b_2 ; на π_2b_2 беремъ точку π_3 , отстоящую отъ MN на разстояніи c_3 , соединяемъ π_3 съ c_3 , и наконецъ на π_3c_3 беремъ точку π_4 , отстоящую отъ MN на разстояніи c_4 , и соединяемъ π_4 съ b_4 .

Принимаемъ $b_1\pi_1, b_2\pi_2, b_3\pi_3$ и $b_4\pi_4$ за лучи многоугольника силъ и $bb_1, b_1b_2, \dots$ за соотвѣтствующія имъ силы, дѣйствующія вдоль линий $v_1, v_2, v_3, \dots$ и строимъ, по данному въ § 62 правилу, веревочный многоугольникъ I II III..., въ которомъ на вертикали v_1 пересѣкаются стороны I и II, параллельныя лучамъ 1 и 2, составляющимъ съ bb_1 треугольникъ; на v_2 пересѣкаются стороны II и III, параллельныя лучамъ 2 и 3, составляющимъ съ b_1b_2 треугольникъ, и т. д.

Продолжимъ стороны I, II, III, IV, V веревочнаго многоугольника до пересѣченія съ вертикалью v въ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ и α_5 .

Изъ построенія слѣдуетъ:

$$\Delta\alpha_1w_1\alpha_2 \sim \Delta bb_1\pi$$

$$\frac{\overline{\alpha_1\alpha_2}}{a_1} = \frac{\overline{bb_1}}{c_1}, \quad \text{или} \quad \frac{\overline{\alpha_1\alpha_2}}{a_1} = \frac{b_1}{c_1},$$

откуда

$$\overline{\alpha_1\alpha_2} = \frac{a_1b}{c_1}.$$

Такимъ же образомъ получаемъ

$$\overline{\alpha_2\alpha_3} = \frac{a_2b_2}{c_2}, \quad \overline{\alpha_3\alpha_4} = \frac{a_3b_3}{c_3}, \quad \overline{\alpha_4\alpha_5} = \frac{a_4b_4}{c_4},$$

поэтому

$$\overline{\alpha_1\alpha_3} = \frac{a_1b_1}{c_1} + \frac{a_2b_2}{c_2},$$

$$\overline{\alpha_1\alpha_4} = \frac{a_1b_1}{c_1} + \frac{a_2b_2}{c_2} + \frac{a_3b_3}{c_3},$$

$$\overline{\alpha_1\alpha_5} = \frac{a_1b_1}{c_1} + \frac{a_2b_2}{c_2} + \frac{a_3b_3}{c_3} - \frac{a_4b_4}{c_4}.$$

Если проведемъ какую нибудь другую вертикаль EF , пересекающую стороны I, II, III..., (или ихъ продолженія) въ $\beta_1 \beta_2, \beta_3 \dots$ то, означивъ разстоянія вертикалей $v_1, v_2, v_3 \dots$ отъ EF черезъ $e_1, e_2, e_3 \dots$, получимъ такимъ же образомъ какъ прежде

$$\beta_1 \beta_2 = \frac{e_1 b_1}{c_1},$$

$$\beta_1 \beta_3 = \frac{e_1 b_1}{c_1} + \frac{e_2 b_2}{c_2},$$

$$\beta_1 \beta_4 = \frac{e_1 b_1}{c_1} + \frac{e_2 b_2}{c_2} + \frac{e_3 b_3}{c_3},$$

$$\beta_1 \beta_5 = \frac{e_1 b_1}{c_1} + \frac{e_2 b_2}{c_2} + \frac{e_3 b_3}{c_3} - \frac{e_4 b_4}{c_4}.$$

Когда $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = H$, то точки $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ совпадутъ въ одну точку π . Тогда будетъ (черт. 67)

$$\overline{\gamma_1 \gamma_4} = \frac{1}{H} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4)$$

и для $H=1$

$$\overline{\gamma_1 \gamma_5} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4.$$

Если b_1, b_2, b_3, b_4 —силы, $a, a_1, a_2 \dots$ ихъ разстоянія отъ одной и той же точки t , то $\overline{\gamma_1 \gamma_5}$ —моментъ этихъ силъ по отношенію къ точкѣ t , и многоугольникъ $ww_1 w_2 \dots$ будетъ ничто другое, какъ веревочный многоугольникъ. Веревоочный многоугольникъ можно поэтому построить безъ помощи многоугольника силъ слѣдующимъ образомъ:

Проводимъ произвольную прямую EF (черт. 68) параллельную даннымъ силамъ $P_1, P_2 \dots$, и измѣряемъ разстоянія $p_1, p_2 \dots$, этихъ силъ отъ EF . Вычисляемъ произведенія $P_1 p_1, P_2 p_2 \dots$ принимая во вниманіе направленіе силъ и сторону, на которой онѣ находятся по отношенію къ EF . Если силы дѣйствующія внизъ будемъ считать положительными, то силы дѣйствующія вверхъ должны получить отрицательный знакъ; если примемъ, что для силъ, находящихся справа EF , разстояніе p положительно, то его нужно считать отрицательнымъ, если сила находится слѣва EF .

Отъ произвольной точки g на EF откладываемъ

$$\overline{g1} = P_1 p_1, \quad \overline{12} = P_2 p_2, \quad \overline{23} = P_3 p_3, \quad \overline{34} = P_4 p_4.$$

Беремъ на P_1 произвольную точку w_1 и соединяемъ ее съ g и 1. Продолжаемъ $1w_1$ до пересѣченія съ P_2 въ w_2 и соединяемъ w_2 съ 2; продолжаемъ $w_2 2$ до пересѣченія съ P_3 въ w_3 и т. д.

Многоугольникъ $gw_1w_2w_3w_4\dots$ будетъ веревочный многоугольникъ данныхъ силъ $P_1, P_2\dots$ котораго полюсное разстояніе $H=1$.

Если проведемъ произвольную прямую GH параллельную EF , означимъ ея разстоянія отъ силъ $P_1, P_2\dots$ черезъ $q_1, q_2\dots$ и продолжимъ стороны $gw_1, w_1w_2\dots$ до пересѣченія съ GH въ $g', 1', 2' \dots$, то легко узнать, что

$$\overline{g'1'} = P_1q_1, \quad \overline{1'2'} = P_2q_2, \quad \overline{2'3'} = P_3q_3, \quad \overline{3'4'} = P_4q_4$$

$$\overline{g'4'} = P_1q_1 + P_2q_2 + P_3q_3 + P_4q_4.$$

Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда отъ веревочнаго многоугольника требуется большая точность, слѣдуетъ его строить безъ помощи многоугольника силъ по указанному въ этомъ параграфѣ способу.

Инфлуентныя линіи.

§ 71.

Введеніе.—Когда на сооруженіе дѣйствуетъ подвижная нагрузка, то ея дѣйствіе измѣняется вмѣстѣ съ ея положеніемъ. Поэтому опредѣленіе вліянія подвижнаго груза на величину искомой неизвѣстной (которой можетъ быть напряженіе, моментъ, срѣзывающее усиліе, перемѣщеніе и т. д.) составляетъ одну изъ важнѣйшихъ задачъ, относящихся къ расчету сооружений. Это вліяніе опредѣляется всего проще помощію *линій вліянія* или *инфлуентныхъ линій* (называемыхъ также линіями груза).

Если возьмемъ какую нибудь прямую за ось абсциссъ и будемъ откладывать отъ этой оси на прямыхъ къ ней перпендикулярныхъ дѣйствіяхъ, производимыхъ силой $=1$ въ одной и той же точкѣ t бруса во время, когда точка приложенія этой силы находится на продолженіи соотвѣтственнаго перпендикуляра, какъ ординаты, то образованная полученными точками линія называется инфлуентной линіей точки t .

Инфлуентная линія относится поэтому всегда къ опредѣленной точкѣ тѣла; когда грузъ производитъ во всѣхъ точкахъ сѣченія одинаковое дѣйствіе, то инфлуентную линію относятъ къ сѣченію, а если его дѣйствіе во всѣхъ сѣченіяхъ стержня постоянно,—то ее относятъ къ стержню.

Противоположныя дѣйствія нужно откладывать какъ ординаты въ противоположныя стороны.

Примѣры.—1) Построить инфлуентную линію напряженій сѣченія C (черт. 68) прямолинейнаго стержня AB , произведенныхъ растягивающимъ грузомъ 1.

За ось абсциссъ примемъ прямую OX , параллельную оси стержня. Если площадь сѣченія C означимъ черезъ Ω , то для всякаго положенія точки приложенія груза между A и C напряженіе въ C постоянно и равно $\frac{1}{\Omega}$, а для всякаго другаго положенія этой точки напряженіе равно нулю. Инфлуентная линія будетъ поэтому прямая np , параллельная OX , отстоящая отъ OX на разстояніи $\overline{mn} = \frac{1}{\Omega}$, которой крайнія ординаты mn и qr соотвѣтствуютъ сѣченіямъ C и A .

2) Построить инфлуентную линію удлиненій призматическаго стержня AB , произведенныхъ растягивающей силой 1 (черт. 69)

Когда сила 1 приложена (по направленію оси AB) къ точкѣ C , отстоящей отъ B на разстояніи x , то произведенное ею удлиненіе

$$y = \frac{x}{E\Omega},$$

гдѣ E —модуль упругости и Ω —площадь поперечнаго сѣченія стержня.

Это уравненіе дѣйствительно для всѣхъ точекъ приложенія груза, взятыхъ на оси стержня, и изъ него имѣемъ

$$\text{для } x=0, y=0$$

$$\text{и } x=l \quad y = \frac{l}{E\Omega}$$

Инфлуентная линія будетъ поэтому прямая, проходящая черезъ точку B , которая наклонена къ оси OX подъ угломъ, опредѣляемымъ изъ выраженія

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{qr}{bq} = \frac{1}{E\Omega}.$$

§ 72.

Свойства инфлуентныхъ линій.—Пусть $abcdfg$ —инфлуентная линія, относящаяся къ какому нибудь сѣченію бруса. Требуется опредѣлить дѣйствіе, производимое силами P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , во время, когда они занимаютъ на брусѣ положеніе, указанное на черт. 70.

Если означимъ черезъ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 —ординаты инфлуентной линіи, соотвѣтствующія точкамъ приложенія силъ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , то $y_1, y_2, \dots$ выражаютъ дѣйствія, производимыя силами $P_1, P_2, \dots$ въ соотвѣтственномъ сѣченіи въ случаѣ, когда каждая изъ нихъ равна 1.



Такъ какъ дѣйствія силъ пропорціональны силамъ, то сила P_1 , содержащая P_1 единицъ, произведетъ дѣйствіе $P_1 y_1$, сила P_2 —дѣйствіе $P_2 y_2$, и т. д. Если всѣ эти силы дѣйствуютъ на брусъ одновременно, то, по извѣстному закону слаганія дѣйствія силъ, онѣ произведутъ въ разсматриваемомъ сѣченіи дѣйствіе

$$N = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 - P_5 y_5 \dots \dots \dots (182)$$

Послѣдній членъ этой суммы отрицателенъ, потому что ордината y_5 , какъ изъ чертежа видно, отрицательна.

Помощію инфлуентной линіи легко поэтому опредѣлить дѣйствіе, производимое произвольной системой силъ въ данномъ сѣченіи или стержнѣ при всякомъ положеніи ея. Для этого нужно только измѣрить ординаты $y_1, y_2 \dots$ инфлуентной линіи, соотвѣтствующія точкамъ приложенія силъ $P_1, P_2 \dots$ и составить уравненіе (182).

§ 73.

Опредѣленіе опаснаго положенія системы грузовъ въ случай когда инфлуентная линія имѣетъ видъ многоугольника.—Системой грузовъ называютъ болѣе или менѣе значительное число подвижныхъ грузовъ постоянной величины, связанныхъ между собою такимъ образомъ, что ихъ относительныя разстоянія измѣниться не могутъ. Такъ, напримѣръ, поѣздъ, составленный изъ вагоновъ, представляетъ подвижную систему грузовъ, состоящихъ изъ давленій колесъ.

Пусть $ABCDE$ (черт. 71)—инфлуентная линія и $P_1, P_2, P_3 \dots P_9$ —система грузовъ, занимающая въ какой нибудь моментъ положеніе, указанное на чертежѣ.

Означимъ черезъ $y_1, y_2 \dots$ ординаты инфлуентной линіи, соотвѣтствующія грузамъ $P_1, P_2 \dots$ и черезъ N —дѣйствіе, производимое системой этихъ грузовъ въ точкѣ, сѣченіи или стержнѣ, къ которому инфлуентная линія относится. По (182)

$$N = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 + P_5 y_5 + P_6 y_6 - P_7 y_7 - P_8 y_8 - P_9 y_9.$$

Передвинемъ систему вправо на произвольную величину Δx , относительно которой ставимъ только условіе, чтобы во время передвиженія ни одинъ грузъ не перешелъ черезъ вершину инфлуентной линіи. Грузы будутъ послѣ перемѣщенія помѣщаться между тѣми же вершинами, между которыми они находились до перемѣщенія, но ихъ ординаты $y_1, y_2 \dots$ измѣнятся на $\Delta y_1, \Delta y_2 \dots$ и производимое ими дѣйствіе послѣ перемѣщенія будетъ отличаться отъ прежняго на

$$\Delta N = \Delta_1 P \Delta y_1 + P_2 \Delta y_2 + P_3 \Delta y_3 - \Delta P_4 y_4 - P_5 \Delta y_5 - P_6 \Delta y_6 - P_7 \Delta y_7 + \\ + P_8 \Delta y_8 + P_9 \Delta y_9.$$

Если углы, образуемые сторонами OA , AB , BC , CD и DE съ OX означимъ черезъ α , β , γ , δ , ε ,

то

$$\Delta y_1 = \Delta x \operatorname{tg} \alpha, \Delta y_2 = \Delta y_3 = \Delta x \operatorname{tg} \beta, \Delta y_4 = \Delta y_5 = \Delta y_6 = \Delta x \operatorname{tg} \gamma \text{ и т. д.}$$

Поэтому

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + (P_2 + P_3) \operatorname{tg} \beta - (P_4 + P_5 + P_6) \operatorname{tg} \gamma - P_7 \operatorname{tg} \delta + (P_8 + P_9) \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Это выраженіе легко построить. На прямой $O_1 X_1$ (черт. 71_а), параллельной OX , откладываемъ отъ O вправо

$$\overline{O_1 1} = P_1, \overline{1 2} = P_2, \overline{2 3} = P_3 \dots$$

Черезъ точки 1, 2, 3... проводимъ перпендикуляры къ $O_1 X_1$ и строимъ, начиная отъ O_1 , многоугольникъ $01'3'6'8'9'$ такимъ образомъ, чтобы его вершины находились на этихъ перпендикулярахъ, а стороны, находящіяся надъ силами P_m , P_n ... были параллельны тѣмъ сторонамъ инфлуентной линіи, которыя пересекаются силами P_m , P_n ... Этотъ многоугольникъ называютъ *вспомогательнымъ многоугольникомъ*.

Поэтому проводимъ

$$\overline{O_1 1'} \parallel OA, \overline{1' 3'} \parallel AB, \overline{3' 6'} \parallel BC, \overline{6' 8'} \parallel CD, \overline{8' 9'} \parallel DE.$$

Изъ этого построенія видно, что

$$\overline{1 1'} = P_1 \operatorname{tg} \alpha$$

$$\overline{3 3'} = \overline{3 a} + \overline{a 3'} = \overline{P_1 \operatorname{tg} \alpha} + (P_2 + P_3) \operatorname{tg} \beta$$

$$\overline{6 6'} = \overline{6 c} - \overline{6' c} = P_1 \operatorname{tg} \alpha + (P_2 + P_3) \operatorname{tg} \beta - (P_4 + P_5 + P_6) \operatorname{tg} \gamma$$

$$\overline{9 9'} = P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + (P_2 + P_3) \operatorname{tg} \beta - (P_4 + P_5 + P_6) \operatorname{tg} \gamma + (P_7 + P_8) \operatorname{tg} \delta - P_9 \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Слѣдовательно

$$\Delta N = \overline{9 9'} \times \Delta x$$

Такъ какъ точка $9'$ получилась на сторонѣ положительныхъ ординатъ, то измѣненіе ΔN , которое равно $\Delta x \cdot \overline{9 9'}$ — положительное, т. е. при движеніи системы грузовъ вправо производимое ею дѣйствіе увеличивается. Когда грузы находятся между тѣмъ же вершинами A, B, C ... инфлуентной линіи, между которыми они находились въ началѣ, то при продолженіи движенія вправо величина $\overline{9 9'}$ остается неизмѣнной, но Δx увеличивается, вслѣд-

ствіе чего и ΔN увеличивается. ΔN достигнетъ наибольшаго значенія, когда одинъ изъ грузовъ встрѣтитъ вершину инфлуентной линіи.

Въ данномъ случаѣ, при движеніи вправо, переходитъ черезъ вершину прежде всѣхъ грузъ P_6 . Когда этотъ грузъ перейдетъ вершину и будетъ находиться очень близко справа C , то вспомогательный многоугольникъ получитъ видъ $O_1 1' 3' 5_2 8_2 9_2$, и измѣненіе при передвиженіи на Δx вправо теперь будетъ

$$\Delta N = x \cdot \overline{99_2},$$

которое тоже положительно.

При дальнѣйшемъ продолженіи движенія системы вправо встрѣчаетъ грузъ P_1 вершину A . Когда этотъ грузъ будетъ находиться очень близко справа A , то помощію новаго вспомогательнаго многоугольника $O_1 3_3 5_3 8_3 9_3$ получаемъ

$$\Delta N = -\Delta x \cdot \overline{99_3}.$$

Такъ какъ $\overline{99_3}$ отрицательно, то слѣдуетъ, что въ моментъ, когда грузъ P_1 переходилъ черезъ вершину A , измѣненіе ΔN было максимумъ, что поэтому система произведетъ наибольшее дѣйствіе тогда, когда она имѣетъ такое положеніе, что грузъ P_1 проходитъ черезъ вершину A инфлуентной линіи. Если ординаты инфлуентной линіи, соотвѣтствующія грузамъ $P_1, P_2, \dots$ при этомъ положеніи означимъ черезъ $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ то

$$\max N = P_1 \gamma_1 + P_2 \gamma_2 + P_3 \gamma_3 + P_4 \gamma_4 + P_5 \gamma_5 + P_6 \gamma_6 - P_7 \gamma_7 - P_8 \gamma_8 + P_9 \gamma_9.$$

При передвиженіи системы удобно пользоваться полоской бумаги, на которой отмѣчены разстоянія грузовъ другъ отъ друга.

Изъ предыдущаго видно, что N можетъ достигнуть наибольшаго значенія только тогда, когда одинъ изъ грузовъ проходитъ черезъ вершину инфлуентной линіи. Для опредѣленія опаснаго положенія системы грузовъ получаемъ слѣдующее правило.

Устанавливаемъ систему такимъ образомъ, чтобы наиболѣе тяжелымъ грузамъ соотвѣтствовали по возможности большіе ординаты инфлуентной линіи, и чтобы одинъ изъ нихъ, который означимъ черезъ G , находился вполнѣ слѣва одной вершины. Строимъ для этого положенія вспомогательный многоугольникъ. Затѣмъ ставимъ грузъ G вполнѣ справа той же вершины, и строимъ вспомогательный многоугольникъ для этого втораго положенія системы грузовъ. Если послѣднія точки этихъ вспомогательныхъ многоугольниковъ получатся по разнымъ сторонамъ оси OX , то дѣйствіе N достигаетъ максимума въ моментъ, когда система имѣетъ такое положеніе, что грузъ G проходитъ черезъ

разсматриваемую вершину. Въ противномъ случаѣ, если, напримѣръ, обѣ эти точки получатся выше оси абсциссъ, то нужно систему двигать дальше вправо до тѣхъ поръ, пока какой нибудь другой грузъ не встрѣтитъ одну изъ вершинъ инфлуентной линіи (при этомъ могутъ изъ сооруженія сходить грузы, или входить на него новые) и опредѣлить для этой вершины послѣднія ординаты вспомогательныхъ многоугольниковъ при положеніи груза вполнѣ справа и вполнѣ слѣва ея, и т. д.

§ 73.

Опредѣленіе опаснаго положенія системы грузовъ въ случаѣ, когда инфлуентная линія имѣетъ криволинейный видъ.— Положимъ, что инфлуентная линія имѣетъ видъ криволинейнаго многоугольника, представленнаго на черт. 72. Если P_1, P_2, P_3, P_4 —грузы, и y_1, y_2, y_3, y_4 —соотвѣтствующія имъ ординаты инфлуентной линіи, то произведенное этими грузами дѣйствіе въ данномъ положеніи

$$N = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4,$$

или вообще

$$N = \sum P y.$$

Представимъ себѣ, что вмѣсто данныхъ грузовъ движутся вертикальныя прямыя $y_1, y_2, \dots$ связанныя между собою неизмѣняемымъ образомъ, имѣющія на концахъ маленькія колеса $k_1, k_2, \dots$ которыя катятся по инфлуентной линіи, и что давленія этихъ колесъ равны соотвѣтственнымъ грузамъ. Нагрузка колесами будетъ отличаться отъ данной только тѣмъ, что точки приложенія грузовъ $P_1, P_2, \dots$ при всякомъ ихъ положеніи будутъ находиться не въ точкахъ 1, 2..., но вертикально подъ ними на инфлуентной линіи.

Возьмемъ произвольную точку O на OX за начало координатъ, означимъ черезъ $x_1, x_2, \dots$ разстоянія грузовъ $P_1, P_2, \dots$ отъ O , и черезъ $y_1, y_2, \dots$ соотвѣтствующія имъ ординаты инфлуентной линіи, т. е. ординаты точекъ приложенія воображаемыхъ грузовъ $k_1, k_2, \dots$

Если ξ, η —координаты центра тяжести z этой воображаемой нагрузки, то

$$\xi(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4,$$

или вообще

$$\xi \sum P = \sum P x$$

и точно также

$$\eta \sum P = \sum P y.$$

Такъ какъ

$$\Sigma Py = N. \quad (183)$$

то

$$N = \eta \Sigma P.$$

Поэтому

$$\xi = \frac{\Sigma Px}{P} \quad (184)$$

$$\eta = \frac{\Sigma Py}{P} \quad (185)$$

Уравненія (184) и (185) опредѣляютъ вполнѣ траекторію центра тяжести Z .

Уравненіе (184) опредѣляетъ положеніе вертикали центра тяжести Z ; эта вертикаль неизмѣняемо связана съ системой грузовъ, и для всякаго положенія послѣдней получается весьма просто посредствомъ веревочнаго многоугольника. Абсцисса ξ , слѣдовательно, для всякаго положенія нагрузки извѣстна, а ордината η зависитъ отъ формы инфлуентной линіи.

Изъ уравненія

$$\Sigma Py = \eta \Sigma P,$$

въ которомъ ΣP —величина постоянная, слѣдуетъ, что N достигаетъ наибольшаго значенія вмѣстѣ съ η , что поэтому, *система грузовъ производитъ наибольшее дѣйствіе тогда, когда центръ тяжести воображаемой системы имѣетъ наивысшее или наинизшее положеніе.*

Когда система двинется на бесконечно малую величину, и ни одинъ грузъ не перейдетъ при томъ черезъ вершину инфлуентной линіи, то всѣ y измѣнятся на бесконечно малыя величины, а слѣдовательно и η измѣнится на бесконечно малую величину, т. е. центръ тяжести z будетъ описывать непрерывную кривую. Но какъ только одинъ изъ грузовъ перейдетъ какую-нибудь вершину, то непрерывность нарушается внезапно. Ломаной криволинейной инфлуентной линіи соотвѣтствуетъ поэтому тоже ломаная криволинейная траекторія центра тяжести z , и ея вершины соотвѣтствуютъ тѣмъ положеніямъ системы, при которыхъ одинъ изъ грузовъ переходитъ черезъ вершину инфлуентной линіи. Этотъ центръ занимаетъ, слѣдовательно, наивысшее или наинизшее положеніе тогда, когда одинъ изъ грузовъ проходитъ черезъ вершину инфлуентной линіи, а такъ какъ этимъ положеніямъ центра z соотвѣтствуетъ наибольшее дѣйствіе нагрузки, то можно сказать:

Положеніе системы грузовъ можетъ быть опаснымъ только тогда, когда направленіе одного изъ грузовъ системы проходитъ черезъ вершину инфлуентной линіи.

Въ многихъ случаяхъ то положеніе системы грузовъ, при которомъ центръ тяжести z занимаетъ наивысшее или наинизшее положеніе можетъ приблизительно быть опредѣлено на глазъ. Такъ если C (черт. 72)—наивысшая точка инфлуентной линіи и положимъ, что система грузовъ движется слѣва вправо, то когда всѣ грузы находятся слѣва C , центръ тяжести z воображаемой нагрузки будетъ постоянно подниматься, а когда справа C —постоянно понижаться, и легко узнать, что наивысшее положеніе этотъ центръ будетъ занимать тогда, когда одни грузы будутъ находиться слѣва, а другіе справа вершины C .

Построеніе для точнаго опредѣленія опаснаго положенія получается слѣдующимъ образомъ:

Пусть $ABCDE$ —(черт. 73)—инфлуентная линія, P_1, P_2, P_3, P_4 —грузы, k_1, k_2, k_3, k_4 —точки, въ которыхъ вертикали точекъ приложенія этихъ грузовъ встрѣчаютъ инфлуентную линію. Дѣйствіе, производимое этой системой грузовъ въ принятомъ на чертежѣ положеніи будетъ по (182)

$$N = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4.$$

Когда система передвинется на очень малую величину dx вправо, то N измѣнится на dN , при чемъ

$$dN = P_1 dy_1 + P_2 dy_2 + P_3 dy_3 + P_4 dy_4$$

$$dN = \left(P_1 \frac{dy_1}{dx} + P_2 \frac{dy_2}{dx} + P_3 \frac{dy_3}{dx} + P_4 \frac{dy_4}{dx} \right) dx.$$

Если углы, образуемые касательными въ точкахъ k_1, k_2, k_3, k_4 , означимъ черезъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, то

$$\frac{dN}{dx} = (P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + P_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + P_3 \operatorname{tg} \alpha_3 + P_4 \operatorname{tg} \alpha_4).$$

Для построенія этого выраженія откладываемъ на горизонтали OX (черт. 74) грузы P_1, P_2, P_3, P_4 , и черезъ полученные точки 1, 2, 3, 4 проводимъ вертикальныя линіи. Строимъ, начиная отъ O , вспомогательный многоугольникъ такимъ образомъ, чтобы его вершины находились на этихъ вертикаляхъ, а стороны были параллельны касательнымъ тѣхъ точекъ инфлуентной линіи, въ которыхъ она пересѣкается грузами, находящимися противъ этихъ сторонъ.

Для этого проводимъ: черезъ O — $\overline{O\bar{1}}$, параллельно касательной

точки k_1 до пересѣченія съ вертикалью точки 1 въ 1_1 , черезъ $1_1—1_2$, параллельно касательной точки k_2 до пересѣченія съ вертикалью точки 2 въ 2_1 ; черезъ $2_1—2_3$, параллельно касательной точки k_3 , и черезъ $3_1—3_4$, параллельно касательной точки k_4 . Изъ этого построения легко узнать, что отрѣзокъ на послѣдней вертикали

$$\overline{44_1} = P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + P_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + P_3 \operatorname{tg} \alpha_3 + P_4 \operatorname{tg} \alpha_4$$

$$\text{т. е. } \overline{44_1} = \frac{dN}{dx}.$$

Для построения опаснаго положенія данной системы грузовъ получаемъ изъ предыдущаго слѣдующее правило.

Чтобы получить наибольшее положительное напряженіе, устанавливаемъ нагрузку такимъ образомъ, чтобы центръ тяжести воображаемыхъ грузовъ $k_1, k_2, k_3 \dots$ находился по возможности высоко, т. е., чтобы одинъ тяжелый грузъ, который означимъ черезъ P_m , проходилъ черезъ наивысшую вершину D , и чтобы другіе тяжелые грузы были расположены по обѣимъ сторонамъ ординаты DD' по возможности близко къ ней.

Ставимъ P_m очень близко слѣва DD' , и строимъ для этого положенія нагрузки вспомогательный многоугольникъ $01_12_13_14_1$ (черт. 74); получаемъ на послѣдней вертикали отрѣзокъ $\overline{44_1}$. Такъ какъ этотъ отрѣзокъ положительный, то приращеніе

$$dN = dx \overline{44_1}$$

положительно, т. е. при движеніи системы вправо дѣйствіе N увеличивается, поэтому нагрузка должна быть двинута вправо. Двинемъ ее настолько, чтобы грузъ P_m находился очень близко справа DD' и построимъ для этого новаго положенія вспомогательный многоугольникъ. Отрѣзокъ $\overline{44_2}$ получился теперь отрицательный, изъ чего слѣдуетъ, что въ моментъ, когда грузъ P_m переходилъ черезъ вершину D , приращеніе достигло максимума, что поэтому нагрузка произведетъ наибольшее дѣйствіе тогда, когда грузъ P_m находится на вертикали DD' .

Если бы и при этомъ второмъ положеніи нагрузки получилось положительное приращеніе, то это значило бы, что система должна перемѣщаться дальше вправо; тогда мы двинули бы ее на столько вправо, чтобы слѣдующій грузъ P_{m-1} находился влѣтъ слѣва DD' и повторили бы для этого груза дѣйствіе, уясненное для груза P_m .

При опредѣленіи опаснаго положенія для отрицательнаго дѣйствія было бы нужно замѣнить вершину D вершиной B , т. е.

установить систему грузовъ такимъ образомъ, чтобы одинъ изъ тяжелыхъ грузовъ находился вполнѣ слѣва B , а прочіе тяжелые грузы — по возможности близко справа и слѣва B , и посредствомъ вспомогательнаго многоугольника опредѣлить, точно такимъ образомъ какъ въ предыдущемъ случаѣ, такое положеніе нагрузки, при которомъ приращеніе ΔN достигаетъ максимума.

§ 74.

Опредѣленіе дѣйствія, производимаго непрерывной нагрузкой.—Когда нагрузка непрерывна, то можно себѣ представить, что на каждый элементъ dx бруса, покрытый нагрузкой, дѣйствуетъ сила pdx . Если y — соотвѣтствующая этому элементу ордината инфлуентной линіи (черт. 75), то производимое грузомъ pdx дѣйствіе

$$dN=y.pdx.$$

Когда длина нагрузки — d , то, на основаніи закона слаганія дѣйствія силъ, дѣйствіе, производимое всей нагрузкой, будетъ

$$N = \int_0^d pydx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (186)$$

и въ случаѣ равномерной нагрузки

$$N = p \int_0^d ydx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

Интегралъ справа знака уравненія выражаетъ площадь инфлуентной линіи, заключенную между ординатами y_0 и y_n , соотвѣтствующими концамъ p и q непрерывной нагрузки. Уравненіе (187) даетъ поэтому слѣдующее правило.

Дѣйствіе, производимое непрерывной нагрузкой, равняется площади инфлуентной линіи, заключенной между ординатами, соотвѣтствующими конечнымъ точкамъ нагрузки, умноженной на единичный грузъ p .

§ 75.

Опредѣленіе опаснаго положенія непрерывной нагрузки.—Опасное положеніе непрерывной нагрузки, состоящей изъ частей переменныхъ длинъ и переменныхъ взаимныхъ разстояній, опредѣляется непосредственно формой инфлуентной линіи. Очевидно, что наибольшее положительное дѣйствіе будетъ имѣть мѣсто

тогда, когда ни одна изъ слагающихъ $pudx$ не будетъ отрицательной, т. е. когда при положительныхъ единичныхъ грузахъ p всѣ y положительны; для наибольшаго отрицательнаго дѣйствія всѣ y должны быть отрицательны.

Такъ если инфлуентная линія имѣетъ видъ $\alpha\beta\phi\gamma\rho\delta\sigma\tau\xi$ (черт. 75а), то для положительнаго максимумъ должны быть нагружены части $\beta\gamma$ и $\delta\tau$ (черт. 75б), а для отрицательнаго — части $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$. Тогда, на основаніи правила, полученнаго въ предыдущемъ §, будетъ:

наибольшее положительное дѣйствіе

$$\max N = p (\text{площадь } \beta\phi\gamma + \text{площадь } \delta\sigma\tau),$$

наибольшее отрицательное дѣйствіе

$$\max(-N) = p [\text{площадь } \alpha\epsilon\beta + \text{пл. } \gamma\rho\delta + \text{пл. } \tau\xi\zeta].$$

Глава VI.

Упругость при сгибаніи.

§ 76.

Введение. — Въ этой главѣ мы будемъ разсматривать сопротивленія брусевъ при слѣдующихъ предположеніяхъ:

- 1) ось бруса прямолинейна,
- 2) дѣйствующія на брусъ внѣшнія силы имѣютъ произвольное направленіе, слѣдовательно вообще непараллельны оси бруса,
- 3) внѣшнія силы пересѣкаютъ ось бруса, т. е. скручивающій моментъ $M_x = 0$,

4) брусъ имѣетъ неизмѣняемое положеніе въ пространствѣ, и допускаетъ только такое перемѣщеніе его точекъ, которое обусловлено упругостью матеріала (измѣненіемъ длины его волоконъ).

Если точки a и b бруса $acdfg$ (черт. 76) неподвижны, то вслѣдствіе дѣйствія внѣшнихъ силъ P_1, P_2, P_3 , точки приложенія m, n, p этихъ силъ перемѣстятся въ m_1, n_1, p_1 , и брусъ займетъ новое положеніе $c_1g_1h_1f_1d_1$, при которомъ дѣйствіе внѣшнихъ силъ уравнивается внутренними силами матеріала. Прямолинейная ось ac бруса получитъ криволинейный или изогнутый видъ a_1c_1 , т. е. брусъ изогнется, и въ его волокнахъ будутъ дѣйствовать сопротивленія изгибу.

Брусъ, на который дѣйствуютъ сгибающія силы, называется *балкой*. Линія, образуемая осью балки послѣ изгиба, называется *упругой линіей*; поверхность, составленная касательными къ упругой линіи — *поверхностью изгиба*; перпендикуляръ къ этой поверхности, восстановленный въ произвольной точкѣ упругой линіи — *осью изгиба*, а поверхность, образуемая осями изгиба — *упругой поверхностью*. Упругая линія есть слѣдовательно пересѣченіе упругой поверхности съ поверхностью изгиба.

кое до разрыва производили на нихъ внутреннія силы, ихъ отсѣченныхъ частей.

Такъ какъ отсѣченная часть находится въ равновѣсіи, то эти внутреннія силы вмѣстѣ съ дѣйствующей на нее нагрузкой должны удовлетворять условіямъ равновѣсія. Возьмемъ 3 прямоугольныя оси координатъ такимъ образомъ, чтобы начало координатъ находилось въ центрѣ тяжести O сѣченія $\alpha_1\delta_1$ (черт. 78) и чтобы ось OX совпала съ касательной къ упругой линіи въ O , а ось OY —имѣла направленіе оси изгиба; ось OZ будетъ тогда находиться въ плоскости сѣченія.

Разложимъ силы, дѣйствующія на часть $\alpha\alpha_1\delta_1$ по направленіямъ осей координатъ и означимъ суммы слагающихъ внѣшнихъ силъ P_1, P_2 и сопротивленій опорныхъ стержней aa_1, a_1a_2 , параллельныхъ осямъ OX, OY, OZ , черезъ X, Y, Z , а моменты этихъ силъ, взятые по отношенію къ тѣмъ же осямъ, черезъ M_x, M_y, M_z .

Силы будемъ считать положительными, если онѣ дѣйствуютъ по направленію положительныхъ осей координатъ, т. е. по направленію оси OX —вправо, оси OZ —вверхъ, и оси OY —отъ плоскости XOZ къ читателю.

Направленіе вращенія будемъ считать положительнымъ, когда оно совпадаетъ съ направленіемъ часовой стрѣлки циферблата, установленнаго перпендикулярно къ оси вращенія, и обращеннаго къ ея положительному концу.

Означимъ частичную силу, дѣйствующую на безконечно малый элементъ $d\Omega$ (черт. 79) сѣченія $\alpha_1o\delta_1$ —черезъ $qd\Omega$, а ея слагающія по направленіямъ осей ox, oy, oz —черезъ $\sigma d\Omega, \tau_y d\Omega$ и $\tau_z d\Omega$, то σ —нормальное, а τ_y и τ_z —скалывающія напряженія этого элемента.

Мы будемъ разсматривать только тотъ случай изгиба, когда напряженія ν и τ_y (черт. 7) въ сравненіи съ σ такъ малы, что ими можно пренебречь, и когда при томъ искривленіе упругой линіи столь незначительно, что ее можно принимать за прямую линію. На практикѣ приходится обыкновенно имѣть дѣло со случаями, удовлетворяющими этимъ обоимъ условіямъ. Эти предположенія допустимы тѣмъ болѣе, что формулы, такимъ путемъ выведенныя, даютъ результаты, согласные съ опытами.

Положительное напряженіе σ вращаетъ около оси oy въ положительную, а около оси oz —въ отрицательную сторону, и условія равновѣсія дадутъ, принимая во вниманіе, что внѣшнія силы пересѣкаютъ упругую линію, слѣдующія уравненія;

$$Y=0, \quad Z=0 \quad M_x=0, \quad \int \sigma d\Omega = X. \quad (192)$$

$$\int \sigma d\Omega z = M_y \quad (193)$$

$$-\int \sigma d\Omega y = M_z \quad (194)$$

Означимъ координаты точки $d\Omega$ черезъ y и z ; пусть BoB_1 (черт. 79)—ось изгиба, β — уголъ, образуемый ею съ осью ou и v —длина перпендикуляра, опущеннаго изъ $d\Omega$ на OB . Изъ черт. 79 имѣемъ

$$v = z \cos \beta - y \sin \beta.$$

Уравненіе (191) можно поэтому написать такъ:

$$\sigma = E \left(e_0 + \frac{z \cos \beta - y \sin \beta}{\rho} \right) d\Omega \quad (195)$$

Подставимъ это значеніе въ (192), получимъ

$$\int E \left(e_0 + \frac{z \cos \beta - y \sin \beta}{\rho} \right) d\Omega = X,$$

$$E e_0 \int d\omega + E \frac{\cos \beta}{\rho} \int z d\Omega - E \frac{\sin \beta}{\rho} \int y d\Omega = X.$$

Такъ какъ начало координатъ принято въ центрѣ тяжести сѣченія, то

$$\int z d\Omega = 0, \quad \int y d\Omega = 0,$$

слѣдовательно

$$E e_0 \int d\Omega = X,$$

или

$$E e_0 \Omega = X \quad (196)$$

откуда

$$e_0 = \frac{X}{E\Omega} \quad (197)$$

Помощію этого значенія уравненіе (195) получитъ видъ

$$\sigma = E \left(\frac{X}{E\Omega} + \frac{z \cos \beta - y \sin \beta}{\rho} \right) \quad (198)$$

Подставимъ въ (193) и (194) для σ его значеніе (198)

$$M_y = E \left[\frac{X}{\Omega} \int z d\Omega + \frac{1}{\rho} \left(\cos \beta \int z^2 d\Omega - \sin \beta \int y z d\Omega \right) \right]$$

$$M = -E \left[\frac{X}{\Omega} \int y d\Omega + \frac{1}{\rho} \left(\cos \beta \int y z d\Omega - \sin \beta \int y^2 d\Omega \right) \right] \quad (199)$$

Въ этихъ уравненіяхъ $\int d\Omega z^2$ и $\int d\Omega y^2$ суть моменты инерции сѣченія $\alpha\delta$ по отношенію къ осямъ oy и oz , проходящихъ черезъ его центръ тяжести; если эти моменты означимъ черезъ J_y и J_z , а $\int yz d\Omega$ — черезъ S , то такъ какъ

$$\int z d\Omega = \int y d\Omega = 0,$$

уравненія (199) получаютъ видъ:

$$\begin{aligned} M_y &= E \left(\frac{J_y \cos \beta - S \sin \beta}{\rho} \right) \\ M_z &= E \left(\frac{J_z \sin \beta - S \cos \beta}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (200)$$

Опредѣливъ изъ этихъ уравненій ρ и уголъ β , и подставивъ ихъ значенія въ (198), получимъ напряженіе σ въ точкѣ $d\Omega$.

Уравненія (198) и (200) содержатъ тригонометрическія величины, вслѣдствіе чего они не совсѣмъ удобны для практики, но ихъ можно упростить посредствомъ соотвѣтственнаго выбора положенія осей OY и OZ . Чтобы найти такое положеніе для произвольной плоской фигуры (черт. 80), отнесемъ ее къ прямоугольнымъ осямъ oy и oz , проведеннымъ произвольно на плоскости фигуры.

Проведемъ черезъ o произвольную прямую mn , означимъ уголъ, образуемый ее съ осью oy черезъ α , а моментъ инерціи фигуры по отношенію къ mn — черезъ J . Отложимъ отъ o на om отрѣзокъ

$$\overline{oi} = \frac{1}{\sqrt{J}}.$$

Исполнимъ тоже дѣйствіе для другихъ прямыхъ, проведенныхъ черезъ o , и опредѣлимъ геометрическое мѣсто точекъ i . Если координаты точекъ, взятыхъ на плоскости фигуры, означимъ черезъ y и z , ихъ разстоянія отъ mn — черезъ v , а моменты инерціи фигуры по отношенію къ осямъ oy и oz — черезъ J_y и J_z , то

$$\begin{aligned} v &= z \cos \alpha - y \sin \alpha \\ J &= \int v^2 d\Omega = \int (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 d\Omega = J_y \cos^2 \alpha + J_z \sin^2 \alpha - \\ &\quad - 2S \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (201)$$

Означимъ координаты точки i черезъ y_1 и z_1 , то

$$y_1 = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{J}}, \quad z_1 = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{J}},$$

поэтому

$$J = J_y z_1^2 + J_z y_1^2 - 2S y_1 z_1,$$

или

$$J_y z_1^2 + J_z y_1^2 - 2S y_1 z_1 = 1. \quad (202)$$

Для различных точек i величины J_y , J_z и S постоянны, уравнение (201) есть, следовательно, уравнение эллипсиса по отношению къ прямоугольнымъ осямъ, проходящимъ черезъ его центръ. Если эти оси повернемъ на столько, чтобы онѣ совпали съ главными осями эллипсиса, то его уравнение будетъ (такъ какъ S для главныхъ осей $= 0$)

$$J_a z_1^2 + J_b y_1^2 = 1,$$

гдѣ J_a и J_b — моменты инерціи по отношенію къ главнымъ осямъ a и b .

Такъ какъ одна изъ главныхъ осей — наибольшій, а другая — наименьшій радіусъ векторъ эллипсиса (а каждый радіусъ векторъ разсматриваемаго эллипсиса $= \sqrt{\frac{1}{J}}$), то слѣдуетъ, что одинъ изъ моментовъ инерціи J_a и J_b будетъ наименьшій, а другой — наибольшій изъ всѣхъ возможныхъ моментовъ инерціи J_y и J_z .

Черезъ всякую точку, взятую на плоскости фигуры, можно поэтому всегда провести двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя такого свойства, что моментъ инерціи фигуры по отношенію къ одной изъ нихъ будетъ бѣльшій, а по отношенію къ другой — меньшій, чѣмъ по отношенію къ всякой другой прямой, проведенной черезъ ту же точку. Положеніе этихъ прямыхъ опредѣляется уравненіемъ

$$S = \int y_1 z_1 d\Omega = 0. \quad (203)$$

и ихъ называютъ *главными осями инерціи*, или, короче, *главными осями* фигуры для точки o , а соотвѣтствующіе имъ моменты инерціи — *главными моментами инерціи*.

Когда фигура имѣетъ двѣ перпендикулярныя оси симметріи, то эти оси имѣютъ свойство главныхъ, такъ какъ для нихъ условіе (202) всегда исполнено. Въ кругѣ всѣ діаметры суть главные оси.

Если черезъ J означимъ моментъ инерціи по отношенію къ произвольной оси, составляющей съ осью ou уголъ α , то по (201)

$$J = J_a \cos^2 \alpha + J_b \sin^2 \alpha. \quad (204)$$

§ 78.

Продолженіе.—Въ частномъ случаѣ, когда главные оси имѣютъ начало въ центрѣ тяжести фигуры, по (200) будетъ:

$$M_a = E \frac{J_a \cos \beta}{\rho} \quad M_b = \frac{E J_b \sin \beta}{\rho} \quad (205)$$

Если поэтому оси ou и oz (черт. 79), проходящія черезъ центрѣ тяжести o сѣченія, совпадаютъ съ главными осями, то

$$M_y = \frac{E J_y \cos \beta}{\rho} M = \frac{E J_z \sin \beta}{\rho} \quad (206)$$

гдѣ β —уголъ, образуемый осью изгиба съ главной осью ou .

Изъ (206) имѣемъ

$$\cos \beta = \frac{\rho M_y}{E J_y}, \quad \sin \beta = \frac{\rho M_z}{E J_z}.$$

Вставивъ эти значенія въ (198) получимъ для напряженія σ выраженіе:

$$\sigma = E \left[-\frac{X}{E \Omega} + \frac{M_y z}{E J_y} - \frac{M_z y}{E J_z} \right].$$

или

$$\sigma = -\frac{X}{\Omega} + \frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z} \quad (207)$$

Въ этомъ уравненіи величины Ω , J_y и J_z абсолютны, а относительно знаковъ величинъ y , z , M_y и M_z дѣйствительны условія, поставленныя въ предыдущемъ параграфѣ.

§ 79.

Частный случай изгиба. Нейтральная ось.—Къ предположеніямъ, сдѣланнымъ въ § 77, прибавимъ еще слѣдующія:

1) Форма балки симметрична по отношенію къ плоскости XZ , Въ этомъ случаѣ одна изъ главныхъ осей всякаго сѣченія балки, а слѣдовательно и упругая линія, находится въ этой плоскости, которая есть уже вмѣстѣ плоскостью изгиба. Упругая поверхность, имѣющая теперь цилиндрической видъ, перпендикулярна къ плоскости XZ , слѣдовательно $\beta=0$.

2) Всѣ, на балку дѣйствующія, силы находятся въ той же плоскости XZ , т. е. $M_z=0$.

Если нормальную силу X и моментъ M_y для этого частнаго,

но на практикѣ всего чаще встрѣчающагося случая, означимъ черезъ N и M , то изъ уравненій (206) и (207) получимъ

$$M = \frac{EJ}{\rho} \quad (208)$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{Mv}{J} \quad (209)$$

Послѣднее уравненіе даетъ нормальное напряженіе σ въ точкѣ балки, отстоящей отъ оси центра тяжести сѣченія на разстояніи v , если площадь этого сѣченія Ω , его нормальная сила N , сгибающій моментъ— M и моментъ инерціи по отношенію къ оси центра тяжести, перпендикулярной къ плоскости изгиба— J .

Для различныхъ точекъ одного и того же сѣченія величины N , Ω , M и J постоянны, уравненіе (209) можно поэтому представить въ видѣ

$$\sigma = a + bv \quad (210)$$

гдѣ a и b —постоянные коэффициенты.

Изъ (210) слѣдуетъ, что напряженія σ данного сѣченія изображаются прямой линіей, пересекающей ось координатъ въ точкѣ, которой разстояніе отъ оси центра тяжести

$$v_1 = -\frac{b}{a}.$$

Эта линія представлена на чертежѣ 81, на которомъ σ отложены отъ прямой zz_1 , параллельной главной оси AB сѣченія, по направленію, перпендикулярному къ zz_1 . Изъ чертежа видно, что крайнимъ волокнамъ A и B , которыхъ разстоянія v означены черезъ e_1 и $-e_2$, соответствуютъ наибольшія напряженія $\sigma_1 = an_1$ и $\sigma_2 = bn_2$ и что во всѣхъ точкахъ прямой ns не дѣйствуетъ никакое напряженіе.

По (209) имѣемъ

$$\sigma_1 = \frac{N}{\Omega} + \frac{Me_1}{J}.$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{\Omega} - \frac{Me_2}{J} \quad (211)$$

Такъ какъ наибольшее напряженіе, производимое внѣшними силами, не должно быть болѣе допускаемаго напряженія k , то слѣдуетъ, что когда

$$\sigma_1 > \sigma_2$$

должно

$$\sigma_1 \leq k,$$

а если $\sigma_2 > \sigma_1$, то должно $\sigma_2 \leq k$.

Напряженіе будетъ тогда достигать величины k только въ соотвѣтственныхъ крайнихъ волокнахъ; во всѣхъ другихъ волокнахъ напряженіе будетъ менѣе k .

Въ случаяхъ, когда $\frac{Me_2}{J} > \frac{N}{\Omega}$, σ_2 —отрицательно, т. е. если σ_1 растяженіе, то σ_2 —сжатіе. Тогда волокна, разстоянія v_0 которыхъ отъ оси центра тяжести, получаются изъ уравненія

$$\frac{N}{\Omega} - \frac{Mv_0}{J} = 0 \quad (212)$$

не испытываютъ никакихъ напряженій. Такія волокна называются *нейтральными*, а прямая, параллельная оси центра тяжести, отстоящая отъ этой оси на разстояніи v_0 —*нейтральной осью*.

Положеніе нейтральной оси опредѣлено, по (212), уравненіемъ

$$v_0 = \frac{NJ}{MQ} \quad (213)$$

Если радіусъ инерціи сѣченія означимъ черезъ i , то

$$J = \Omega i^2.$$

Вставивъ это значеніе въ (213) получимъ

$$v_0 = \frac{N}{M} i^2 \quad (214)$$

Пусть R —равнодѣйствующая всѣхъ внѣшнихъ силъ (включая сопротивленія опоръ), дѣйствующихъ слѣва разсматриваемаго сѣченія балки и n —разстояніе точки t , въ которой ея направленіе пересѣкаетъ это сѣченіе (или его продолженіе) (черт. 82). Разложимъ R въ точкѣ t на двѣ слагающія: нормальную N и касательную T , то

$$M = R \cdot \overline{от.}$$

или также

$$M = N \cdot n \quad (215)$$

Поэтому

$$v_0 = \frac{i^2}{n} \quad (216)$$

Если въ центрѣ тяжести o сѣченія $\alpha_1 \delta_1$ возставимъ къ $\alpha_1 \delta_1$ перпендикуляръ, отложимъ на немъ

$$o \vec{j} = i,$$

соединимъ j съ t и возставимъ въ j къ jt перпендикуляръ jo до пересѣченія съ $\alpha_1 \delta_1$ въ r , то

$$\overline{or} = v_0,$$

т. е. точка r лежитъ на нейтральной оси сѣченія.

или

$$\eta = \frac{\Sigma \omega y}{\Omega} \quad (218)$$

гдѣ Ω —площадь всей фигуры.

Центръ тяжести фигуръ, имѣющихъ двѣ оси симметріи, находится въ точкѣ пересѣченія этихъ осей.

§ 81.

Опредѣленіе моментовъ инерціи.—Часто оказывается удобнымъ опредѣлить моментъ инерціи J_1 по отношенію къ какой-нибудь оси, параллельной оси изгиба. Моментъ инерціи J по отношенію къ оси изгиба получается тогда слѣдующимъ образомъ:

Если s —центръ тяжести фигуры MN (черт. 83), ss_1 —ось изгиба, AB —произвольная прямая, параллельная этой оси, отстоящая отъ нея на разстояніи η , и означимъ черезъ Ω —площадь фигуры MN ,

$d\Omega$ —площадь безконечно узкой полосы ея, параллельной ss_1 , отстоящей отъ ss_1 на разстояніи y ,

J —моментъ инерціи фигуры по отношенію къ оси ss_1 , проходящей черезъ ея центръ тяжести,

J_1 —моментъ инерціи по отношенію къ оси AB ,

то

$$J_1 = \int d\Omega (r + y)^2 = \eta^2 \int d\Omega + 2\eta \int y d\Omega + \int y^2 d\Omega.$$

Но

$$\int d\Omega = \Omega, \quad \int y d\Omega = 0, \quad \int y^2 d\Omega = J,$$

слѣдовательно

$$J_1 = \Omega \eta^2 + J \quad (219)$$

откуда

$$J = J_1 - \Omega \eta^2 \quad (220)$$

т. е. моментъ инерціи по отношенію къ оси изгиба, проходящей черезъ центръ тяжести, равняется моменту инерціи по отношенію къ произвольной, ей параллельной оси, уменьшенному на произведение изъ площади фигуры на квадратъ разстоянія обѣихъ осей.

Если фигуру разобьемъ на произвольныя части и опредѣлимъ моменты инерціи каждой части по отношенію къ какой-нибудь оси, то моментъ инерціи всей фигуры равенъ суммѣ моментовъ инерціи отдѣльныхъ частей.

§ 82.

Моменты инерции простѣйшихъ фигуръ.—а) *Сѣченія, симметричныя по отношенію къ оси изгиба.*

1) *Прямоугольникъ.*—Если b —основаніе и h —высота прямоугольника (черт. 85), то

$$J=2 \int_0^{\frac{h}{2}} bdy.y^2 = \frac{bh^3}{12} \quad . \quad . \quad . \quad (221)$$

Моментъ инерціи по отношенію къ оси ab , проходящей черезъ основаніе прямоугольника, по (219)

$$J_1 = J + \Omega \gamma^2 = \frac{1}{12} bh^3 + bh \left(\frac{h}{2} \right)^2,$$

$$J_1 = \frac{1}{3} bh^3 \quad . \quad . \quad . \quad (222)$$

2) *Крестообразное сѣченіе.*—(Черт. 86).—Это сѣченіе можно разбить на 3 прямоугольника: $abgf$, $cdkh$ и $ikml$, поэтому его моментъ инерціи по отношенію къ оси центра тяжести ox будетъ:

$$J = \frac{1}{12} (b - \delta) \delta_1^3 + \frac{1}{12} \delta h^3, \quad \gamma = \frac{1}{2} h \quad . \quad . \quad (223)$$

3) *Двутавровое, и прямоугольное, внутри пустое сѣченіе* (черт. 87 и 87а).

$$J = \frac{1}{12} bh^3 - \frac{1}{12} (b - \delta)(h - 2\delta_1)^3 \quad . \quad . \quad (224)$$

4) *Двойное прямоугольное сѣченіе* (черт. 88)

$$J = \frac{1}{12} \left[bh^3 - b(h - 2\delta_1)^3 \right] \quad . \quad . \quad . \quad (225)$$

б) *Сѣченія, несимметричныя по отношенію къ оси изгиба.*
Треугольникъ.—(Черт. 89). Моментъ инерціи по отношенію къ основанію ab

$$J_1 = \int_0^h xdy.y^2.$$

Такъ какъ

$$x = \frac{b}{h} (h - y),$$

то

$$J_1 = \frac{b}{h} \left[\int_0^h hy^2 dy - \int_0^h y^3 dy \right] = \frac{b}{h} \frac{h^4}{12} =$$

$$J_1 = \frac{1}{12} bh^3, \quad \eta = \frac{1}{3}. \quad (226)$$

Моментъ инерціи по отношенію къ оси центра тяжести

$$J = J_1 - \Omega \eta^2 = \frac{1}{12} bh^3 - \frac{bh}{2} \left(\frac{h}{3} \right)^3,$$

$$J = \frac{1}{36} bh^3 \dots \dots \dots (227)$$

и по отношенію къ оси fd , проведенной черезъ вершину c параллельно ab

$$J_2 = J + \Omega \eta_1^2 = \frac{1}{36} bh^3 + \frac{bh}{2} \left(\frac{2}{3} h \right)^2.$$

$$J_2 = \frac{1}{4} bh^3 \dots \dots \dots (228)$$

в) *Правильныя фигуры.*

1) *Правильный многоугольникъ* (черт. 90). Пусть $abcde$ часть правильного многоугольника, и означимъ черезъ

s — длину его сторонъ,

r — радіусъ вписаннаго и

r_1 — радіусъ описаннаго круга.

Черезъ центръ o этого многоугольника проведемъ двѣ прямоугольныя оси ox и oy ; раздѣлимъ сторону bc въ точкѣ q пополамъ, опустимъ изъ точекъ b , q и c на ox — перпендикуляры bb_1 , qq_1 , cc_1 , и на oy — перпендикуляры bb_2 , qq_2 и cc_2 .

Означимъ уголъ, образуемый прямо qo съ ox черезъ α , а проэкціи стороны bc на ox и oy — черезъ s_1 и s_2 . Проведемъ радіусъ векторы bo и co , и продолжимъ bc до пересѣченія съ ox въ m . Если моментъ инерціи треугольника obc по отношенію къ оси ox означимъ черезъ i , то

$$i = \frac{1}{12} om (bb_1^3 + cc_1^3).$$

Изъ чертежа 90 имѣемъ:

$$om = \frac{r}{\cos \alpha}, \quad bb_1 = r \sin \alpha + \frac{s}{2} \cos \alpha, \quad cc_1 = r \sin \alpha - \frac{s}{2} \cos \alpha.$$

Слѣдовательно

$$i = \frac{1}{12} \frac{r}{\cos \alpha} \left[(r \sin \alpha + \frac{s}{2} \cos \alpha)^3 - (r \sin \alpha - \frac{s}{2} \cos \alpha)^3 \right],$$

откуда, послѣ соотвѣтственнаго сокращенія, получаемъ

$$i = \frac{r}{12 \cos \alpha} \left[6r^2 \frac{s}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{s^3}{4} \cos^3 \alpha \right]$$

или

$$i = \frac{1}{12} \left[3r^2 \cdot r \sin \alpha \cdot s \sin \alpha + \frac{s^2}{4} r \cos \alpha \cdot s \cos \alpha \right].$$

Если координаты точки q означимъ черезъ x и y , то

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha.$$

Кромѣ того

$$s_1 = s \sin \alpha, \quad s_2 = s \cos \alpha,$$

поэтому

$$i = \frac{1}{12} \left(3r^2 y s_1 + \frac{s^2}{4} x s_2 \right).$$

Когда многоугольникъ имѣетъ n сторонъ, то помощію радіусовъ, проведенныхъ ко всѣмъ его вершинамъ, онъ раздѣлится на n равныхъ треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину o . Слѣдовательно моментъ инерціи всего многоугольника по отношенію къ оси ox будетъ

$$J = \frac{1}{12} \left[3r^2 \Sigma (s_1 y) + \frac{s^2}{4} \Sigma (s_2 x) \right],$$

но изъ фигуры видно что $\Sigma (s_1 y) = \Sigma (s_2 x) =$ площади многоугольника. Если эту площадь означимъ черезъ Ω , то

$$J = \frac{\Omega}{12} \left(3r^2 + \frac{s^2}{4} \right) \dots \dots \dots (229)$$

$$\text{Но } r_1 = \sqrt{r^2 + \frac{s^2}{4}},$$

слѣдовательно

$$J = \frac{\Omega}{12} \left(3r_1^2 - \frac{s^2}{2} \right) \dots \dots \dots (230)$$

Уравненія 229 и 230 не содержатъ угла α , изъ чего слѣдуетъ, что моментъ инерціи правильнаго многоугольника имѣетъ для всѣхъ осей, проходящихъ черезъ его центръ, одинаковое значеніе.

2) *Сплошной кругъ.*—Обружность можно разсматривать какъ многоугольникъ съ безконечно большимъ числомъ безконечно

малыхъ сторонъ, поэтому моментъ инерціи круга по отношенію къ оси, проходящей черезъ его центръ, получится изъ уравненія (230), если въ немъ поставимъ

$$s = 0 \text{ и } r_1 = r,$$

Слѣдовательно

$$J = \frac{\Omega}{12} 3r^2 = \frac{r^2}{4} \frac{d^2\pi}{4} = \frac{r^2}{4} r^2\pi,$$

$$J = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi r^4}{4} \dots \dots \dots (231)$$

3) *Кольцеобразное сѣченіе* (черт. 91). По (231)

$$J = \frac{\pi}{4} \left[r^4 - (r - \delta)^4 \right]$$

$$J = \frac{\pi}{64} \left[d^4 - (d - 2\delta)^4 \right] \dots \dots \dots (232)$$

4) *Эллипсисъ* (черт. 92).—На большой оси AB опишемъ окружность и раздѣлимъ эллипсисъ на безконечно узкія полосы, перпендикулярныя къ AB . Если M и m —точка круга и эллипсиса, имѣющія общую абсциссу op , и означимъ ординату Mr точки M черезъ y , ординату mp эллипсиса — черезъ y_1 , а большую и малую полуось его—черезъ a и b , то

$$y_1 = \frac{b}{a} y$$

моментъ инерціи эллипсиса по отношенію къ оси AB

$$J = 4 \int_0^a y_1 dx \left(\frac{y_1}{2} \right)^2 = 4 \int_0^a \frac{b}{a} y dx \left(\frac{b}{a} y \right)^2 = 4 \frac{b^3}{a^3} \int_0^a y dx \left(\frac{y}{2} \right)^2,$$

Но $4 \int_0^a y dx \left(\frac{y}{2} \right)^2$ —моменту инерціи круга, описаннаго на оси

$AB=2a$, поэтому

$$J = \frac{b^3}{a^3} \frac{\pi}{4} a^4,$$

$$J = \frac{\pi}{4} ab^3 \dots \dots \dots (233)$$

г) *Сѣченія, не симметричныя по отношенію къ оси изгиба, но симметричныя по отношенію къ оси центра тяжести, перпендикулярной къ оси изгиба.*

1) *Дзугтавровое сѣченіе* (черт. 93).—Для опредѣленія оси центра тяжести раздѣлимъ данную фигуру на 3 прямоугольника: $abcd$, $efgh$ и $kilm$.

Площадь фигуры

$$\Omega = bt + BT + \delta(h - t - T).$$

Принимая ml за ось статическихъ моментовъ, получимъ по (218)

$$\eta = \frac{bt\left(h - \frac{t}{2}\right) + \delta\left(h - t - T\right)\left(\frac{h - t - T}{2} + T\right) + BT\frac{T}{2}}{bt + BT + \delta(h - t - T)}$$

Моментъ инерціи по отношенію къ оси zt , проходящей черезъ центръ тяжести фигуры

$$J = \frac{1}{3}b(h-d)^3 - \frac{1}{3}(b-\delta)(h-d-t)^3 + \frac{1}{3}Bd^3 - \frac{1}{3}(B-\delta)(d-T)^3. \quad (234)$$

2) *Однотавровое сѣченіе* (черт. 94).—Эта форма сѣченія получается изъ предыдущей, если сдѣлаемъ

$$b = \delta \text{ и } t = 0.$$

Поэтому

$$\eta = \frac{\delta(h-T)\left(\frac{h+T}{2}\right) + BT\frac{T}{2}}{BT + \delta(h-T)}$$

$$J = \frac{1}{3}\delta(h-d)^3 + \frac{1}{3}Bd^3 - \frac{1}{3}(B-\delta)(d-T)^3. \quad (235)$$

Двойное прямоугольное сѣченіе (черт. 95). Чтобы для этого случая получить η и J нужно въ уравненіи (234) поставить $\delta = 0$

$$\eta = \frac{bt\left(h - \frac{t}{2}\right) + \frac{BT^2}{2}}{bt + BT}.$$

$$J = \frac{1}{3}\left[b(h-d)^3 - b(h-d-t)^3 + Bd^3 - B(d-T)^3\right]. \quad (236)$$

д) *Фигуры произвольнаго очертанія* (черт. 96).—Если x и y —координаты произвольной кривой acd и x_1 и x_2 —ея крайнія абсциссы, то

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx$$

можетъ быть получено по правилу Симпсона слѣдующимъ образомъ:

Дѣлимъ длину $\alpha\delta = x_2 - x_1$ на n равныхъ частей, и черезъ точки дѣленія проводимъ ординаты $y_1, y_2, \dots, y_n$. Если n —число четное, и означимъ ординату начальной точки a черезъ y_0 , а длину $\alpha\delta$ —черезъ b , то

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{1b}{3n} \left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) \right] \quad (237)$$

Это выраженіе даетъ интегралъ съ такой точностью, съ какой часть кривой, заключенная между двумя смежными ординатами, можетъ быть принимаема за прямую.

Помощію формулы (237) можно опредѣлять площади, статическіе моменты и моменты инерціи фигуръ, имѣющихъ произвольное очертаніе.

Означимъ площадь фигуры $acdf\delta\alpha$, ограниченную кривой, осью абсциссъ и крайними ординатами, черезъ Ω , ея статическій моментъ по отношенію къ оси oy —черезъ S , и моментъ инерціи по отношенію къ той же оси—черезъ J , то

$$\Omega = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{1b}{3n} \left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) \right] \quad (238)$$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y dx, x = \int_{x_1}^{x_2} (yx) dx.$$

Если положимъ

$$yx = r,$$

то

$$S = \int_{x_1}^{x_2} r dx$$

и по (237) будетъ

$$J = \frac{b}{3n} \left[r_0 + r_n + 4(r_1 + r_3 + \dots + r_{n-1}) + 2(r_2 + r_4 + \dots + r_{n-2}) \right]. \quad (239)$$

Въ этомъ уравненіи нужно поставить

$$r_0 = y_0 x_0, \quad r_1 = y_1 x_1, \quad r_2 = y_2 x_2 \quad \text{и т. д.,}$$

гдѣ

$$x_1 = x_0 + e, \quad x_2 = x_0 + 2e, \quad x_3 = x_0 + 3e \dots$$

Моментъ инерціи по отношенію къ оси OY

$$J_1 = \int_{x_1}^{x_2} y dx \cdot x^2 = \int_{x_1}^{x_2} (yx^2) dx.$$

Положимъ

$$yx^2 = z,$$

то

$$J_1 = \int_{x_1}^{x_2} z dx$$

и по (237)

$$J_1 = \frac{b}{3n} \left[z_0 + z_n + 4(z_1 + z_3 + \dots + z_{n-1}) + 2(z_2 + z_4 + \dots + z_{n-2}) \right]. \quad (240)$$

гдѣ

$$z_0 = y_0 x_0^2, \quad z_1 = y_1 x_1^2, \quad z_2 = y_2 x_2^2 \dots$$

и

$$x_1 = x_0 + e, \quad x_2 = x_0 + 2e.$$

Когда Ω , S и J_1 извѣстны, то

$$\eta = \frac{S}{\Omega}$$

$$J = J_1 - \Omega \eta^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (241)$$

Если данная фигура ограничена замкнутой кривой (черт. 97), то ее можно разлагать, подобнымъ образомъ какъ прямолинейныя фигуры, на части, удобныя для разсчета.

Такъ если бы требовался моментъ инерціи фигуры $abcd$ (черт. 97), по отношенію къ оси, параллельной оси OY , то было бы нужно провести предѣльныя ординаты ax и $c\beta$, параллельныя OY , и разложить данную фигуру на двѣ: положительную— $abc\beta x$, и отрицательную— $adc\beta x$.

Если моментъ инерціи первой означимъ черезъ J_a , а послѣдней—черезъ J_b , то искомый моментъ инерціи

$$J = J_a - J_b,$$

J_a и J_b опредѣляются по формулѣ (240).

§ 83.

Опредѣленіе момента инерціи плоскихъ фигуръ графическимъ способомъ—(черт. 98).

1) *Способъ Мора*. Чтобы получить моментъ инерціи фигуры, представленной на черт. 98, по отношенію къ оси, имѣющей направленіе OX , дѣлимъ фигуру ω прямыми, параллельными этой оси, на части $aAa_1, aa_1b_1b...$ такимъ образомъ, чтобы площадь и центръ тяжести каждой такой части легко было опредѣлить.

Площади $\omega_1, \omega_2, \omega_3...$ этихъ частей рассматриваемъ какъ силы, приложенныя къ ихъ центрамъ тяжести $z_1, z_2, z_3, ...$ по направленію, параллельному оси моментовъ, и строимъ для нихъ веревочный многоугольникъ, (черт. 98_a).

Означимъ разстоянія центровъ $z_1, z_2, ...$ отъ оси моментовъ OX черезъ $y_1, y_2, ...$ и продолжимъ веревочныя стороны I, II, III... до пересѣченія съ OX въ 1, 2, 3...; если H —полюсное разстояніе, то изъ свойства веревочнаго многоугольника слѣдуетъ:

$$\overline{12} = \frac{\omega_1 y_1}{H}, \quad \overline{23} = \frac{\omega_2 y_2}{H}.$$

Площадь треугольника $\overline{1\alpha 2} = \overline{12} \frac{y_1}{2} = \frac{\omega_1 y_1^2}{2H}.$

” ” $\overline{2\beta 3} = \frac{\omega_2 y_2^2}{2H}$

.

слѣдовательно площадь, заключенная между веревочной линіей, его крайней стороной 1α и прямой OX

$$\Omega = \frac{1}{2H} (\omega_1 y_1^2 + \omega_2 y_2^2 + \omega_3 y_3^2 + \dots) = \frac{1}{2H} \Sigma \omega y^2.$$

Когда площади $\omega_1, \omega_2, ...$ —безконечно малы и равны $d\Omega$, то веревочный многоугольникъ будетъ имѣть видъ кривой линіи, и послѣднее уравненіе получить видъ

$$\Omega = \frac{1}{2H} \int d\Omega \cdot y^2.$$

Но $\int d\Omega y^2 = J_1$ —моменту инерціи фигуры по отношенію къ оси OX , слѣдовательно

$$\Omega = \frac{J_1}{2H}$$

откуда

$$J_1 = 2H\Omega. \quad (242)$$

Ось центра тяжести, параллельная OX , проходитъ черезъ точку E , въ которой пересѣкаются крайнія веревочныя стороны I и X. Изъ подобія треугольниковъ $o\beta_1\pi$ и $AE1$ имѣемъ:

Изъ подобія треугольниковъ $1\pi_1 2$ и $1'\alpha' 2'$ имѣемъ

$$\frac{1'2'}{y_1} = \frac{12}{H_1},$$

или, такъ какъ

$$12 = \frac{\omega_1 y_1}{H},$$

$$\text{то } 1'2' = \frac{\omega_1 y_1^2}{HH_1}.$$

Точно такимъ образомъ получимъ

$$2'3' = \frac{\omega_2 y_2^2}{HH_1} \quad 3'4' = \frac{\omega_3 y_3^2}{HH_1}$$

поэтому

$$1'10' = \frac{1}{H.H_1} (\omega_1 y_1^2 + \omega_2 y_2^2 + \omega_3 y_3^2 + \dots) = \frac{1}{HH_1} \Sigma \omega y^2.$$

Если площади $\omega_1, \omega_2 \dots$ бесконечно малы и равны $d\Omega$, то послѣднее уравненіе получить видъ

$$1'10' = \frac{1}{HH_1} \int d\Omega. y^2 = \frac{J_1}{HH_1} \quad (244)$$

и мѣсто веревочнаго многоугольника займетъ веревочная кривая.

Изъ (244) получаемъ, если отрѣзокъ оси OX между крайними сторонами веревочной кривой означимъ черезъ l ,

$$J_1 = H.H_1.l \quad (245)$$

т. е. моментъ инерціи фигуры по отношенію къ оси OX = отрѣзку этой оси, заключенному между крайними сторонами второй линии моментовъ, умноженному на произведеніе HH_1 обоихъ полюсныхъ разстояній.

Такимъ же образомъ получимъ, что моментъ инерціи по отношенію къ оси центра тяжести = отрѣзку этой оси, отсѣченному крайними сторонами второй веревочной линии, умноженному на произведеніе HH_1 полюсныхъ разстояній. Ось центра тяжести проходитъ черезъ точку E , въ которой пересѣкаются крайнія стороны первой веревочной линии.

§ 84.

Механическое опредѣленіе площадей, статическихъ моментовъ и моментовъ инерціи плоскихъ фигуръ посредствомъ

планиметровъ.— Существуетъ нѣсколько системъ планиметровъ, дающихъ возможность опредѣлять механически не только площади, но также статическіе моменты и моменты инерціи плоскихъ фигуръ. Простотой устройства отличается между ними планиметръ-интеграторъ Амслеръ-Лафона, который вслѣдствіе того пользуется наибольшимъ распространеніемъ. Изложимъ теорію и устройство этого планиметра.

Представимъ себѣ прямолинейный стержень AB (черт. 99), который, имѣя длину l , движется такимъ образомъ, что одинъ конецъ его A скользитъ по прямой XX , а другой описываетъ фигуру $CGLF$. Пусть AB и A_1B_1 —два безконечно близкія положенія этого стержня, O —точка пересѣченія продолженій прямыхъ AB и A_1B_1 , и означимъ черезъ

dx —длину AA_1

φ —уголъ A_1AB

$d\varphi$ —уголъ B_1OB (безконечно малое измѣненіе угла φ).

Къ стержню AB прикрѣплена ось ролика R , параллельная AB , около которой этотъ роликъ можетъ вращаться свободно и почти безъ тренія. Ободъ ролика лежитъ на бумагѣ; вслѣдствіе тренія между имъ и бумагой роликъ, во время движенія стержня AB , вращается около своей оси.

Когда стержень перейдетъ изъ положенія AB въ A_1B_1 , то роликъ R повернется на дугу $\overline{kk_1}=ds$; такъ какъ эта дуга перпендикулярна къ AB и A_1B_1 , то

$$ds = \overline{Ok} \cdot d\varphi.$$

Если длину Ak означимъ черезъ r , то

$$\overline{ok} = \overline{oA} + r,$$

поэтому

$$ds = (oA + r)d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (246)$$

Изъ треугольника oAA_1 имѣемъ

$$\frac{oA}{AA_1} = \frac{\sin \varphi}{d\varphi},$$

$$\overline{oA} = \frac{dx \cdot \sin \varphi}{d\varphi}.$$

Подставивъ это значеніе въ (246) будетъ

$$ds = dx \sin \varphi + r d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (247)$$

Означимъ черезъ s —длину дуги, которую описываетъ роликъ

Такъ какъ φ , $d\varphi$ и dx въ этихъ интегралахъ — величины постоянныя, то

$$d\Omega = dx \int_0^y dy + \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_0^{y_1} y dy$$

$$d\Omega = dx \cdot y_1 + \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{y_1^2}{2},$$

но $y_1 = l \sin \varphi$,

поэтому

$$d\Omega = l \sin \varphi dx + \frac{l^2}{2} d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (249)$$

Статическій моментъ элемента AA_1B_1B

$$d\sigma = \int_0^{y_1} d\omega \cdot y = dx \int_0^{y_1} y dy + \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_0^{y_1} y^2 dy = \frac{dx \cdot y_1^2}{2} + \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{y_1^3}{3}$$

$$d\sigma = \frac{l^2}{2} \sin^2 \varphi dx + \frac{l^3}{3} \sin \varphi \cdot d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (250)$$

Моментъ инерціи того же элемента AA_1B_1B

$$di = \int_0^{y_1} d\omega \cdot y^2 = dx \int_0^{y_1} y^2 dy + \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_0^{y_1} y^3 dy = \frac{dx y_1^3}{3} + \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{y_1^4}{4}$$

$$di = \frac{l^3}{3} \sin^3 \varphi dx + \frac{l^4}{4} \sin^2 \varphi d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (251)$$

Когда стержень AB движется отъ F черезъ B къ G , то онъ описываетъ площадь $\Omega_1 = \text{плоч. } (FMNGBF)$, а при продолженіи движенія отъ G черезъ L къ F — площадь $\Omega_2 = \text{плоч. } (FMNGLF)$. Такъ какъ при этомъ движеніи стержень возвращается въ первоначальное положеніе, то

$$\int d\varphi = 0, \quad \int \sin \varphi d\varphi = 0, \quad \int \sin^2 \varphi d\varphi = 0.$$

Если, поэтому, означимъ черезъ

Ω — площадь фигуры $FCGLF$, по контуру которой движется конецъ B стержня,

S_m — ея статическій моментъ по отношенію къ оси XX ,

J_1 — ея моментъ инерціи по отношенію къ той же оси, то

$$\Omega = l \int \sin \varphi dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (252)$$

$$S_m = \frac{l^2}{2} \int \sin^2 \varphi dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (253)$$

$$J_1 = \frac{l^3}{3} \int \sin^3 \varphi dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (254)$$

Изъ (252) и (248) слѣдуетъ

$$\Omega = l.s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (255)$$

т. е. площадь Ω прямо пропорциональна числу оборотовъ ролика R .

Такъ какъ

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \varphi)$$

$$\text{и } \sin^3 \varphi = \frac{1}{4} (3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi),$$

то

$$S_m = \frac{l^2}{2} \int (1 - \cos^2 \varphi) dx$$

$$J_1 = \frac{l^3}{3} \frac{1}{4} \int (3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi) dx.$$

Когда конецъ B стержня AB пройдетъ весь периметръ фигуры, то онъ возвратится въ первоначальное положеніе, и пройденный концомъ A путь $\int dx = 0$.

Вслѣдствіе того

$$S_m = - \frac{l^2}{4} \int \cos^2 \varphi dx = - \frac{l^2}{4} \int \sin(90 - 2\varphi) dx \quad . \quad (256)$$

$$J_1 = \frac{l^3}{12} \int (3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi) dx = - \frac{l^3}{4} \int \sin 3 \varphi dx \quad . \quad (257)$$

Планиметръ Амслера имѣетъ такое устройство, что даетъ возможность опредѣлять S_m и J_1 механически. Для этого кромѣ ролика R онъ имѣетъ еще два ролика S и J , устроенные такимъ образомъ, что во время, когда R поворачивается на уголъ φ , S поворачивается на уголъ 2φ , а J — на уголъ 3φ . Устройство планиметра Амслера видно изъ чертежа 100. Онъ состоитъ изъ линейки KL , которая, посредствомъ стержней KX и LX , устанавливается параллельно оси XX_1 . Въ продольной выемкѣ этой линейки движутся маленькія колеса k_1 и k_2 телѣжки $r_1 dr_2$ такимъ образомъ, что ось tt_1 телѣжки, при всякомъ положеніи ея, остается параллельной XX_1 .

Къ телѣжкѣ прикрѣплена ось A двойнаго сектора EF , ко-

торый около этой оси может вращаться. Эта ось образуетъ конецъ A вышеупомянутаго стержня AB , котораго другой конецъ B снабженъ штифтикомъ. Когда штифтикъ скользитъ остриемъ по периметру фигуры, то точка A перемѣщается посредствомъ телѣжки по прямой XX_1 .

Къ стержню AB прикрѣплена ось ролика R , служащаго для опредѣленія площади Ω , а съ зубчатыми секторами E и F находятся въ зацѣпленіи зубчатая колеса E_1 и F_1 , на которыхъ устроены оси роликовъ S и J , проходящія черезъ центры C и D этихъ колесъ. Когда AB находится на XX ($\varphi=0$), то оси роликовъ R и J — параллельны, а ось ролика S — перпендикулярна къ XX .

Такъ какъ ролики S и J должны поворачиваться на углы вдвое и втрое большіе чѣмъ роликъ R , то радіусы секторовъ E и F вдвое и втрое больше радіусовъ находящихся съ ними въ зацѣпленіи колесъ E_1 и F_1 . Всѣ 3 ролика R , S и J должны лежать ободами на бумагѣ.

Противовѣсъ W служитъ для перенесенія вѣса всей подвижной части прибора на каточки r_1 и r_2 , чтобы облегчить ея движеніе.

Если дуги, описанныя роликами R , S и J означимъ черезъ s , σ и i , то по предыдущему

$$s = \int \sin \varphi dx, \quad \sigma = \int \sin(90 - 2\varphi) dx, \quad i = \int \sin 3\varphi dx.$$

Слѣдовательно, по (252), (256) и (257)

$$\Omega = ls, \quad S_m = -\frac{l^2}{4} \sigma, \quad J_1 = \frac{l^3}{4} s - \frac{l^3}{12} i.$$

Обозначимъ радіусы роликовъ R , S и J черезъ ρ , ρ_1 и ρ_2 , а числа оборотовъ, сдѣланныхъ ими во время, когда штифтикъ B , пройдетъ периметръ фигуры,—черезъ n , n_1 и n_2 , то

$$s = 2\rho\pi n, \quad \sigma = 2\rho_1\pi n_1, \quad i = 2\rho_2\pi n_2.$$

Поэтому

$$\Omega = 2\pi\rho ln, \quad S_m = -2\pi\rho_1 \frac{l^2}{4} n_1, \quad J_1 = 2\pi\rho \frac{l^3}{4} n - 2\pi\rho_2 \frac{l^3}{12} n_2.$$

Дѣленіе ролика S сдѣлано противоположнымъ дѣленію ролика R , черезъ что дугу σ и число n_1 нужно ввести въ формулы съ отрицательнымъ знакомъ.

Частямъ прибора даютъ такіе размѣры, чтобы

$$2\pi\rho l = 1, \quad -\frac{\pi\rho_1}{2} l^3 = 1, \quad \frac{\pi\rho_1}{2} l^3 = 0.6, \quad \frac{\pi\rho_2}{6} l^3 = 0.4.$$

Обыкновенно

$l = 2$ дециметр.

Тогда

$$\rho = \frac{1}{4\pi} = 0.0795 \text{ dm.} \quad \rho_1 = \rho_2 = \frac{0.3}{\pi} = 0.0956 \text{ dm.}$$

$$\Omega = n_{\text{qdm}}, \quad S_m = 0.6n_1, \quad J_1 = n - 0.4n_2. \quad (258)$$

гдѣ Ω , S_m и J выражены въ дециметрахъ.

Ось XX берутъ параллельно той оси центра тяжести, по отношенію къ которой моментъ инерціи требуется опредѣлить. Когда Ω , S и J , опредѣленіе, то разстояніе оси центра тяжести отъ XX₁

$$\eta = \frac{S_m}{\Omega}$$

и моментъ инерціи по отношенію къ этой оси

$$J = J_1 - \Omega \eta^2.$$

Уравненія (258) даютъ Ω , S_m и J въ дециметрахъ. Если бы требовалось имѣть эти величины въ сантиметрахъ, то было бы нужно умножить ихъ на 100, 1000 и 10000.

Показанія нониусовъ на роликахъ точны до $\frac{1}{1000}$ окружности ролика, что составляетъ для площадей точность до $\frac{1}{10}$ квадратнаго сантиметра, а для моментовъ инерціи— $\frac{1}{1000}$ дециметра. Эти степени точности для практики совершенно достаточны.

Во избѣжаніе вліянія мертваго хода слѣдуетъ наблюденія производить въ обѣ стороны

а) объѣзжая фигуру нѣсколько разъ послѣдовательно въ сторону увеличенія дѣлений, и затѣмъ въ столько же разъ въ обратномъ направленіи, или,

б) поочередно объѣзжая въ томъ. и другомъ направленіи, или-же,

в) слѣдуя методу повторенія читать показанія послѣ извѣстнаго числа объѣздовъ, и все-таки по обоимъ направленіямъ.

Среднія величины получаютъ одинаковы при всѣхъ этихъ способахъ.

Въ таблицѣ VIII приведены для наиболѣе употребляемыхъ формъ сѣченія моменты инерціи по отношенію къ оси центра тяжести, и разстоянія e этой оси отъ наиболѣе удаленныхъ верхнихъ волоконъ.

§ 85.

Работа деформациі изгибаемой матеріальной системы или балки.—Когда на балку дѣйствуютъ сгибающія силы, то работа

нормальныхъ напряженій σ_x , параллельныхъ оси балки, сравнительно съ работой всѣхъ другихъ напряженій, обыкновенно столь значительна, что въ уравненіи (18) всѣ σ и τ , за исключеніемъ σ_x , можно поставить $=0$. Если для этого случая означимъ σ_x черезъ σ , то по (18).

$$\bar{\sigma} = \int \frac{\sigma^2}{2E} dV.$$

Такъ какъ для одного и того же матеріала E —величина постоянная, то

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2E} \int \sigma^2 dV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (259)$$

Разобьемъ балку сѣченіями $ab, cd \dots$ (черт. 101) проведенными на бесконечно близкихъ разстояніяхъ dx другъ отъ друга, на бесконечно короткія призмы $abdc \dots$, и затѣмъ каждую такую элементарную призму—сѣченіями $mn, pq \dots$, параллельными оси изгиба, на бесконечно узкія матеріальныя полосы $mnpq \dots$. Если объемъ такой полосы означимъ черезъ dV , а площадь $mnpq$ —черезъ $d\Omega$, то

$$dV = dx \cdot d\Omega.$$

Подставивъ это значеніе въ (259) получимъ для работы деформациі нормальныхъ напряженій σ выраженіе

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{2E} \int dx \int \sigma^2 d\Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (260)$$

въ которомъ $\int \sigma^2 d\Omega$ нужно распространить на все сѣченіе, а второй интеграль—на всю длину балки.

При измѣненіи температуры изогнутой балки на t градусовъ длина элемента dx измѣняется на $\alpha t dx$, гдѣ α —коэффициентъ линейнаго расширенія матеріала. Дѣйствующая въ элементарной полосѣ упругая сила $\sigma d\Omega$ совершаетъ при этомъ работу $\sigma d\Omega \cdot \alpha t dx$, слѣдовательно при измѣненіи температуры на t градусовъ нормальныя силы исполняютъ работу.

$$\bar{\sigma}_2 = \alpha \int dx \int \sigma t d\Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (261)$$

Поэтому полная работа деформациі

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 = \frac{1}{2E} \int dx \int \sigma^2 d\Omega + \alpha \int dx \int \sigma t d\Omega \quad . \quad . \quad . \quad (262)$$

Мы будемъ предполагать, что измѣненія температуры отдѣльныхъ волоконъ зависятъ только отъ ихъ разстояній отъ оси

Относительныя перемѣщенія и относительныя вращенія. (*Производная работы деформации*).—Въ § 50 было доказано, что уравненія 159 и 160 достаточны для опредѣленія сопротивленій всякаго сооруженія, какъ простаго, такъ и сложнаго. Когда сооруженіе имѣетъ свойства статически опредѣленной системы, то уравненія 160 излишны, и всѣ неизвѣстныя получаютъ изъ уравненій 159; такъ какъ эти уравненія—линейныя функціи вѣшнихъ силъ, то получаемыя изъ нихъ напряженія будутъ тоже линейныя функціи вѣшнихъ силъ; для опредѣленія неизвѣстныхъ нужно поэтому рѣшать простыя уравненія первой степени.

Когда система статически неопредѣленная, то уравненія 159 недостаточны для опредѣленія неизвѣстныхъ сопротивленій. Недостающія уравненія получаютъ изъ правила, выраженнаго уравненіемъ 173 (которое для частнаго случая: $\delta=0$, имѣетъ видъ 170). Это уравненіе—тоже линейная функція вѣшнихъ силъ, потому что работа деформации—функція второй степени вѣшнихъ и добавочныхъ силъ, а слѣдовательно производная этой работы, взятая по отношенію къ одной изъ вѣшнихъ или добавочныхъ силъ, разсматриваемыхъ какъ независимыя величины, будетъ содержать только первыя степени этихъ силъ.

Если поэтому

$P_1, P_2, P_3 \dots P_q \dots$ вѣшнія силы, дѣйствующія на точки $1, 2, 3 \dots q$.
 $D_\alpha, D_\beta \dots D_\omega \dots$ добавочныя силы (§ 54), дѣйствующія на точки
 α и α_1, β и $\beta_1 \dots \omega$ и $\omega_1 \dots$

$sr_1, sr_2 \dots sr_\alpha, sr_\beta \dots$ — постоянные коэффициенты, то дѣйствіе Sr , произведенное этими силами на мѣстѣ r , (r можетъ означать точку, сѣченіе или стержень) можно выразить уравненіемъ:

$$S_r = sr_1 P_1 + sr_2 P_2 + \dots + sr_q P_q + \dots + sr_\alpha D_\alpha + sr_\beta D_\beta + \dots + sr_\omega D_\omega + \dots \quad (267)$$

Значеніе коэффициентовъ s слѣдующее:

Если всѣ силы P и D , за исключеніемъ одной силы P_q , равны нулю, и при томъ $P_q=1$, то

$$S_r = sr_q$$

Коэффициентъ sr_q означаетъ поэтому дѣйствіе произведенное на мѣстѣ r вѣшной силой $=1$, дѣйствующей въ точкѣ q матеріальной системы.

Если всѣ силы P и D , за исключеніемъ одной силы D_ω , равны нулю, и при томъ $D_\omega=1$, то

$$S_r = sr_\omega$$

Коэффициентъ sr_ω означаетъ поэтому дѣйствіе, произведенное на мѣстѣ r добавочной силой $=1$ (т. е. двумя противоположными силами, равными 1) дѣйствующей на точки ω и ω_1 матеріальной системы.

Дѣйствіе S можетъ быть сопротивленіе, моментъ, перемѣщеніе и проч. Дѣйствія s однородны съ дѣйствіемъ S , такъ, напр. если S —сопротивленіе, то и s —сопротивленіе; если S —моментъ, то и s —моментъ.

Первый изъ показателей коефициентовъ s означаетъ мѣсто матеріальной системы, къ коему дѣйствіе s относится, послѣдній—точку приложенія силы, производящей это дѣйствіе. Такъ, напр., если s —напряженіе, то s_{rq} означаетъ напряженіе въ точкѣ или сѣченіи, или стержнѣ r , произведенное силой 1, приложенной къ точкѣ q .

Показатели силъ P и D опредѣляютъ ихъ точки приложенія, а показатель дѣйствія S —мѣсто, къ которому это дѣйствіе относится.

Такъ какъ всякая сила можетъ быть замѣнена другой силой, ей равной и параллельной, дѣйствующей на произвольную точку тѣла, и соотвѣтственнымъ моментомъ (парой силъ), то *нѣкоторыя изъ величинъ P и D могутъ быть не силы, а моменты силъ.*

Если дѣйствіе, произведенное на мѣстѣ r однѣми только внѣшними силами, означимъ черезъ $\mathfrak{B}_r$, то

$$\mathfrak{B}_r = s_{r1}P_1 + s_{r2}P_2 + \dots$$

Уравненіе 267 можно поэтому написать такъ:

$$S_r = \mathfrak{B}_r + s_{r\alpha}D_\alpha + s_{r\beta}D_\beta + \dots \quad (268)$$

Когда всѣ $D=0$, то

$$S_r = \mathfrak{B}_r$$

$\mathfrak{B}_r$ есть, слѣдовательно, дѣйствіе, произведенное внѣшними силами на мѣстѣ r такой матеріальной системы, которой всѣ добавочные стержни не напряжены, или, что одно и то же, *которая добавочныхъ стержней не имѣетъ.*

Изъ сего слѣдуетъ, что s и $\mathfrak{B}$ —статически опредѣленные величины, что, поэтому, для ихъ опредѣленія нужно устранить всѣ добавочные стержни, т. е. превратить статически неопредѣленную матеріальную систему въ статически опредѣленную.

Если къ точкѣ q полученной такимъ образомъ системы (не имѣющей добавочныхъ стержней) приложимъ силу=1, то произведенное ее на мѣстѣ r дѣйствіе будетъ величина s_{rq} .

Если къ точкамъ ω и ω_1 тойже системы приложимъ добавочную силу 1, и опредѣлимъ дѣйствіе, произведенное ее на мѣстѣ r , то получимъ величину $s_{r\omega}$. А чтобы получить $\mathfrak{B}_r$ нужно опредѣлить дѣйствіе, произведенное на мѣстѣ r тойже матеріальной системы данной нагрузкой, т. е. силами $P_1, P_2, \dots$

$$\frac{d\delta}{dP_q} = \int \frac{Nn_q dx}{E\Omega} + \int \frac{Mm_q dx}{EJ} + D_\alpha \left[\int \frac{n_\alpha n_q dx}{E\Omega} + \int \frac{m_\alpha m_q dx}{EJ} \right] + \\ + D_\beta \left[\int \frac{n_\beta n_q dx}{E\Omega} + \int \frac{m_\beta m_q dx}{EJ} \right] + \dots + \left[\alpha t_0 n_q dx + \int \frac{\alpha \Delta t}{h} m_q dx \dots \right] \quad (274a)$$

Если возьмемъ производную работы деформациі по отношенію къ добавочной силѣ D_ω , то такимъ же образомъ получимъ:

$$\frac{d\delta}{dD_\omega} = P_1 \left[\int \frac{n_1 n_\omega dx}{E\Omega} + \int \frac{m_1 m_\omega dx}{EJ} \right] + P_2 \left[\int \frac{n_2 n_\omega dx}{E\Omega} + \int \frac{m_2 m_\omega dx}{EJ} \right] + \dots \\ + D_\alpha \left[\int \frac{n_\alpha n_\omega dx}{E\Omega} + \int \frac{m_\alpha m_\omega dx}{EJ} \right] + D_\beta \left[\int \frac{n_\beta n_\omega dx}{E\Omega} + \int \frac{m_\beta m_\omega dx}{EJ} \right] + \dots \\ + \int \alpha t_0 n_\omega dx + \int \frac{\alpha \Delta t}{h} m_\omega dx \dots \quad (275)$$

$$\frac{d\delta}{dD_\omega} = \int \frac{Nn_\omega dx}{E\Omega} + \int \frac{Mm_\omega dx}{EJ} + D_\alpha \left[\int \frac{n_\alpha n_\omega dx}{E\Omega} + \int \frac{m_\alpha m_\omega dx}{EJ} \right] + \\ + D_\beta \left[\int \frac{n_\beta n_\omega dx}{E\Omega} + \int \frac{m_\beta m_\omega dx}{EJ} \right] + \dots + \left[\alpha t_0 n_\omega dx + \int \frac{\alpha \Delta t}{h} m_\omega dx \dots \right] \quad (275a)$$

Когда P_q —сила, то по (168)
 $\frac{d\delta}{dP_q}$ — относительному перемѣ-
 щенію точки приложенія этой
 силы, а когда P_q —моментъ, то
 $\frac{d\delta}{dP_q}$, по (180), равняется углу
 вращенія сѣченія q .

Когда D_ω —сила, то по (173)
 $\frac{d\delta}{dD_\omega} = \delta - \frac{D_\omega}{e_\omega}$, а когда D_ω —
 моментъ, то $\frac{d\delta}{dD_\omega} =$ относи-
 тельному вращенію соответст-
 веннаго сѣченія. Значеніе раз-
 ности $\delta - \frac{D_\omega}{e_\omega}$ уяснено въ § 55.

Частное $\frac{Nd\alpha}{E\Omega}$ равняется, по (6), удлинению или укорочению
 элемента балки, котораго первоначальная длина $d\alpha$. Частное
 $\frac{Md\alpha}{EJ}$ равняется углу $d\varphi$, который образуютъ конечныя сѣченія
 того же элемента по наступленіи равновѣсія, потому что, означивъ
 радіусъ кривизны отръзка упругой линіи, соответствующаго эле-
 менту $d\alpha$ балки, черезъ ρ , будемъ имѣть (черт. 102)

$$d\alpha = \rho d\varphi$$

и такъ какъ по (208)

$$\rho = \frac{EJ}{M}$$

то

$$d\varphi = \frac{Md\alpha}{EJ} \dots \dots \dots (276)$$

Также легко узнать что $\alpha t_0 dx$ —измѣненіе $\delta \lambda$ длины, и $\frac{\alpha \Delta t}{h}$ — вращеніе $\delta \varphi$ безконечно малаго элемента dx упругой линіи, происходящія отъ перемѣны температуры.

Уравненія (273) можно поэтому написать такъ:

$$\frac{d\delta}{dP_q} = \int n_q d\lambda + \int m_q d\varphi + \int n_q \delta \lambda + \int m_q \delta \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (274b)$$

$$\frac{d\delta}{dD_\omega} = \int n_\omega d\lambda + \int m_\omega d\varphi + \int n_\omega \delta \lambda + \int m_\omega \delta \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (275b)$$

Если относительныя перемѣщенія точекъ приложенія грузовъ и относительныя вращенія сѣченій, произведенныя нормальными силами, означимъ черезъ y , а сгибающими моментами — черезъ γ , то для частныхъ случаевъ получимъ изъ уравненій 274 и 275 выраженія, помѣщенныя въ слѣдующей таблицѣ:

Т а б л и ц а IX.

У С Л О В І Е	Видоизмѣненіе производятъ:	Относительныя перемѣщенія или относительныя вращенія, произведенныя	
		нормальными сопротивленіями	сгибающими моментами
Всѣ D и перемѣны температуры равны нулю.	Величины $P_1, P_2, P_3 \dots$	$y_q = \int \frac{M n_q dx}{E \Omega}$	$\gamma_q = \int \frac{M m_q dx}{E J}$
Всѣ P и D , за исключеніемъ P_r , равны нулю. Перемѣны температуры=0.	одна только величина P_r , которая=1.	$y_{qr} = \int \frac{n_r n_q dx}{E \Omega}$	$\gamma_{qr} = \int \frac{m_r m_q dx}{E J}$
Всѣ P и D , за исключеніемъ D_ω , равны нулю. Перемѣны температуры=0.	одна только величина D_ω , которая=1,	$y_{q\omega} = \int \frac{n_\omega n_q dx}{E \Omega}$	$\gamma_{q\omega} = \int \frac{m_\omega m_q dx}{E J}$
Всѣ P и D равны нулю безъ исключенія.	одна перемѣна температуры.	$y_{qt} = \int \alpha t_0 n_q dx$	$\gamma_{qt} = \int \frac{\alpha \Delta t}{h} m_q dx$

Помощью значеній, помѣщенныхъ въ этой таблицѣ, получимъ вмѣсто уравненій 274 и 275 слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{dP_q} &= P_1(y_{q1} + \gamma_{q1}) + P_2(y_{q2} + \gamma_{q2}) + \dots + D_\alpha(y_{q\alpha} + \gamma_{q\alpha}) + \\ &\quad + D_\beta(y_{q\beta} + \gamma_{q\beta}) + \dots + y_{qt} + \gamma_{qt} \\ \frac{d\delta}{dP_q} &= (y_q + \gamma_q) + D_\alpha(y_{q\alpha} + \gamma_{q\alpha}) + D_\beta(y_{q\beta} + \gamma_{q\beta}) + \dots + \\ &\quad + (y_{qt} + \gamma_{qt}) \end{aligned} \right\} \quad . \quad (274c)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{dD_{\omega}} &= P_1(y_{\omega_1} + r_{\omega_1}) + P_2(y_{\omega_2} + r_{\omega_2}) + \dots + D^{\alpha}(y_{\omega\alpha} + r_{\omega\alpha} + \\ &\quad + D^{\beta}(y_{\omega\beta} + r_{\omega\beta}) + \dots + y_{\omega t} + r_{\omega t} \\ \frac{d\delta}{dD_{\omega}} &= (y_{\omega} + r_{\omega}) + D^{\alpha}(y_{\omega\alpha} + r_{\omega\alpha}) + D^{\beta}(y_{\omega\beta} + r_{\omega\beta}) + \dots + \\ &\quad + y_{\omega t} + r_{\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (275^c)$$

Уравненія 275, 275^a, 275^b и 275^c суть только повторенія уравненій 274, 274^a, 274^b и 274^c; ихъ разни́ца состоитъ въ томъ, что послѣднія относятся къ внѣшней, а первыя—къ добавочной силѣ. Каждое изъ нихъ можетъ быть употреблено для опредѣленія относительнаго перемѣщенія или вращенія; которому слѣдуетъ отдать предпочтеніе, зависитъ отъ свойствъ частнаго случая.

Эти уравненія дѣйствительны для всякаго значенія силы P_q (или D_{ω}); они дѣйствительны поэтому и для бесконечно малаго значенія этой силы, т. е. для $P_q=0$ (или $D_{\omega}=0$).

Но если $P_q=0$, то въ уравненіи (274) членъ съ множителемъ P_q исчезнетъ, а n_q и m_q будутъ сопротивленія и моменты произведенные величиной = 1, поставленной на мѣсто P_q .

Но если $D_{\omega}=1$, то въ уравненіяхъ (275) членъ съ множителемъ D_{ω} исчезнетъ, а n_{ω} и m_{ω} будутъ сопротивленія и моменты, произведенные добавочной величиной, равной 1, поставленной на мѣсто D_{ω} .

Для опредѣленія перемѣщеній или вращеній въ такихъ мѣстахъ матеріальной системы, на которыя не дѣйствуетъ никакая сила, получаемъ поэтому слѣдующее правило.

Чтобы получить относительное перемѣщеніе точки q , прикладываемъ къ q по направленію требуемаго перемѣщенія силу = 1, и опредѣляемъ производимыя ее сопротивленія n_q и моменты m_q . Требуемое перемѣщеніе получится изъ одного изъ уравненій 274^{a—c} или 275^{a—c}.

Чтобы получить вращеніе элемента q упругой линіи, прикладываемъ къ q по направленію искомаго вращенія моментъ = 1, и опредѣляемъ производимыя имъ сопротивленія n_q и моменты m_q . Требуемое вращеніе получится изъ одного изъ уравненій 274^{a—c} или 275^{a—c}.

§ 87.

Взаимность перемѣщеній и вращеній.—Положимъ, что къ статически опредѣленной системѣ приложена въ точкѣ q по направленію qq_1 сила $P_q=1$ (черт. 103), и требуется опредѣлить перемѣщеніе, произведенное ее въ точкѣ r по направленію rr_1 . Если это перемѣщеніе означимъ черезъ y_{rq} , то по (274)

$$y_{rq} = \int \frac{n_r n_q dx}{E\Omega} + \int \frac{m_r m_q dx}{EJ}.$$

Сдѣлаемъ эту задачу обратной, т. е. положимъ что требуется опредѣлить перемѣщеніе точки q по направленію qq_1 , произведенное силой $=1$, приложенной къ точкѣ r по направленію rr_1 . Означивъ искомое перемѣщеніе въ этомъ случаѣ черезъ y_{qr} получимъ изъ 274

$$y_{qr} = \int \frac{n_q n_r dx}{E\Omega} + \int \frac{m_q m_r dx}{EJ}$$

Послѣднее уравненіе тождественно съ предыдущимъ, изъ чего слѣдуетъ

$$y_{qr} = y_{rq},$$

т. е. сила, дѣйствующая въ точкѣ r по направленію rr_1 перемѣщаетъ точку q по направленію qq_1 на точно такую величину, на какую она перемѣстила бы точку r по направленію rr_1 , если бы была приложена къ точкѣ q по направленію qq_1 .

Такъ какъ углы вращенія опредѣляются тѣми же уравненіями, что и перемѣщенія, то это правило дѣйствительно и для угловъ вращенія, т. е. моментъ, дѣйствующій на элементъ r по направленію rr_1 (черт. 104) вращаетъ элементъ q по направленію qq_1 на точно такую величину, на какую онъ повернулъ бы элементъ r по направленію rr_1 , если бы дѣйствовалъ на элементъ q по направленію qq_1 .

Изъ этого слѣдуетъ непосредственно, что линія перемѣщеній (или вращеній), т. е. линія, которой ординаты представляютъ перемѣщенія (или вращенія) точекъ матеріальной системы, произведенныя силой 1 (или моментомъ 1) приложенной къ точкѣ q , есть инфлуентная линія перемѣщеній (или вращеній) этой точки.

§ 88.

Приблизительный способъ опредѣленія интеграловъ вида:

$\int \frac{Nndx}{E\Omega}$. — Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ; отложимъ разстоянія x какъ абсциссы, а величины $\frac{Nn}{E\Omega}$, соотвѣтствующія

точкамъ матеріальной системы, опредѣленнымъ этими разстояніями, какъ ординаты, и соединимъ полученныя точки непрерывной линіей. Площадь, заключенная между этой линіей, ея крайними ординатами и осью абсциссъ, равняется искомому интегралу

$$\int \frac{Nndx}{E\Omega}.$$

Эта площадь можетъ быть опредѣлена съ достаточной точностью по формулѣ Симпсона (237). Для этого дѣлимъ отрѣзокъ оси

абсциссъ, заключенный между крайними ординатами, на четное число n равных частей и проводимъ черезъ точки дѣленія 0, 1, 2, 3... ординаты $y_0, y_1, y_2, y_3...$ (черт. 96). Если длину одного дѣленія на оси абсциссъ означимъ черезъ e , то

$$e = \frac{x_n - x_0}{n},$$

Искомая площадь получается изъ формулы

$$\int y dx = \frac{e}{3} \left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots) + 2(y_2 + y_4 + \dots) \right] \quad (237)$$

Раздѣлимъ ось балки на n равныхъ частей (гдѣ n —произвольное, но четное число), и означимъ соотвѣтствующія точкамъ 0, 1, 2, 3...

величины N —черезъ $N_0, N_1, N_2, N_3...$

„ n „ „ $n_0, n_1, n_2, n_3...$

„ E „ „ $E_0, E_1, E_2, E_3...$

„ Ω „ „ $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3...$

то

$$y_0 = \frac{N_0 n_0}{E_0 \Omega_0}, y_1 = \frac{N_1 n_1}{E_1 \Omega_1}, y_2 = \frac{N_2 n_2}{E_2 \Omega_2}, y_3 = \frac{N_3 n_3}{E_3 \Omega_3} \dots$$

Подставивъ эти значенія въ (237) получимъ

$$\int \frac{Nn}{E\Omega} dx = \frac{e}{3} \left[\frac{N_0 n_0}{E_0 \Omega_0} + \frac{N_n n_n}{E_n \Omega_n} + 4 \left(\frac{N_1 n_1}{E_1 \Omega_1} + \frac{N_3 n_3}{E_3 \Omega_3} + \dots \right) + 2 \left(\frac{N_2 n_2}{E_2 \Omega_2} + \frac{N_4 n_4}{E_4 \Omega_4} + \dots \right) \right] \quad (277)$$

Такимъ же образомъ опредѣляются другіе интегралы уравненій 273—275.

Когда вся балка состоитъ изъ одного и того же матеріала, то E —величина постоянная, и тогда

$$\int \frac{Nn}{E\Omega} dx = \frac{e}{3E} \left[\frac{N_0 n_0}{\Omega_0} + \frac{N_n n_n}{\Omega_n} + 4 \left(\frac{N_1 n_1}{\Omega_1} + \frac{N_3 n_3}{\Omega_3} + \dots \right) + 2 \left(\frac{N_2 n_2}{\Omega_2} + \frac{N_4 n_4}{\Omega_4} + \dots \right) \right] \quad (278)$$

Если, кромѣ того, и сѣченіе балки постоянно, то

$$\int \frac{Nn dx}{E\Omega} = \frac{e}{3E\Omega} \left[N_0 n_0 + N_n n_n + 4(N_1 n_1 + N_3 n_3 + \dots) + 2(N_2 n_2 + N_4 n_4 + \dots) \right] \quad (279)$$

Площадь, заключенную между кривой, ея крайними ординатами и осью абсциссъ будемъ для краткости называть *площадью Симпсона*.

§ 89.

Превращеніе площади Симпсона въ прямоугольникъ. — Площадь Симпсона опредѣляется всего проще помощію превращенія ограничивающей ее кривой линіи въ прямую. Для этого дѣлимъ основаніе MN (черт. 105), какъ и въ предыдущемъ случаѣ, на четное число равныхъ частей, и проводимъ ординаты $y_0, y_1, y_2, \dots$

Разсматриваемъ отрѣзки кривой, заключенные между четными ординатами y_0 и y_2, y_2 и $y_4, \dots$ какъ параболическія дуги; проводимъ хорды $02, 24, \dots$ дѣлимъ отрѣзки ординатъ $y_1, y_3, \dots$ заключенные между этими дугами и ихъ хордами, на 3 равныя части, и черезъ первыя точки дѣленія $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots$ считая отъ кривой, проводимъ прямыя $ab, cd, \dots$ параллельныя и равныя хордамъ $02, 24, \dots$ Такъ какъ площадь параболическаго отрѣзка $012 = \frac{2}{3}$ площади параллелограмма $oab2$ (образованнаго хордой, параллельной ей касательной и конечными ординатами этого отрѣзка), то прямая ab замѣняетъ дугу 02 . Такимъ же образомъ узнаемъ, что прямая cd замѣняетъ дугу — 234.

Соединимъ α_1 съ α_3 прямой $\alpha_1\alpha_3$, означимъ точку пересѣченія $\alpha_1\alpha_3$ съ y_2 черезъ z_2 , и продолжимъ $\alpha_1\alpha_3$ до пересѣченія съ y_0 и y_4 въ A и B . Такъ какъ площадь прямоугольной трапеціи равняется произведенію изъ основанія на ея среднюю линію, то

$$\text{трапеція } MAz_2II = \text{трап. } MabII$$

$$\text{и трапеція } IIz_2BIV = \text{трап. } IIcdIV$$

слѣдовательно

$$MabII + IIcdIV = MAz_2II + IIz_2BIV = MABIV.$$

Такъ какъ IIz_2 дѣлитъ MIV пополамъ, то площадь

$$MABIV = \overline{MIV} + \overline{IIz_2}.$$

Если соединимъ z_2 съ α_5 , и означимъ точку пересѣченія прямой $z_2\alpha_5$ съ ординатой y_4 , общей трапеціямъ $MABIV$ и $IVfgVI$ черезъ z_3 , то такимъ же образомъ получимъ

$$MABIV + IVfgVI = \overline{MVI} \times \overline{IVz_3}.$$

Если затѣмъ соединимъ z_3 съ α_5 , и означимъ точку пересѣченія прямой $z_3\alpha_5$ съ конечной ординатой предыдущей трапеціи, т. е. y_6 , черезъ z_4 , то площадь всей фигуры $Mo13N$, заключен-

ной между кривой $M013N$, ея крайними ординатами y_0 и y_n , и основаніемъ MN

$$F = \overline{MN} \times \overline{VIz_4}.$$

Всякая прямая, проведенная через z_4 , замѣняетъ данную кривую 013N.

Для опредѣленія площади Симпсона получаемъ изъ предыдущаго слѣдующее простое правило: основаніе 0.18 (черт. 106) дѣлимъ на четное число равныхъ частей, проводимъ черезъ точки дѣленія ординаты $y_0, y_1, y_2, \dots$, для дугъ, отсѣченныхъ четными ординатами, проводимъ хорды 02, 24... и стрѣлку каждой дуги дѣлимъ на 3 равныя части.

Если означимъ первыя точки дѣленія, считая отъ кривой, черезъ $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots$, то соединяемъ α_1 съ α_3 , и получаемъ на y_2 точку z_2 ; соединяемъ z_2 съ α_5 , получаемъ на y_3 точку z_3 ; соединяемъ z_3 съ α_7 , получаемъ на y_4 точку z_4 и т. д. Такимъ образомъ получимъ наконецъ точку z_m (на черт. 105 это точка z_9), которой ордината z_mt . Искомая площадь равна этой ординатѣ, умноженной на основаніе данной фигуры. Такъ, площадь, заключенная между кривой $0\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_9$, ея крайними ординатами 0 и $18\alpha_{18}$, и основаніемъ 0.18.

$$F = 0.18 \times z_9 9.$$

§ 90

Производная сгибающаго момента. — Какъ балка, такъ и дѣйствующія на нее силы удовлетворяютъ условіямъ, приведеннымъ въ § 80. Возьмемъ въ плоскости силъ прямоугольныя оси координатъ и будемъ считать положительными: ось OX —слѣва направо, ось OY —сверху внизъ, внѣшнія силы—когда онѣ дѣйствуютъ по направленію положительныхъ осей координатъ, а моменты—если они вращаютъ по направленію часовой стрѣлки.

Означимъ разстояніе оси qs балки (черт. 107) отъ OX черезъ a , а координаты точки приложенія t внѣшней силы P —черезъ α и β . Разрѣжемъ балку сѣченіемъ mn , перпендикулярнымъ къ оси qs , пересѣкающимъ эту ось въ точкѣ s , и замѣнимъ дѣйствіе, производимое лѣвой частью балки на отрѣзанную правую, силами: нормальной N_1 и касательной T_1 , приложенными къ точкѣ s , и сгибающимъ моментомъ M_1 . Перенесемъ всѣ внѣшнія силы, включая и реакцію, дѣйствующія на лѣвую отсѣченную часть балки, въ точку s ; означимъ ихъ равнодѣйствующую черезъ R , нормальную и касательную слагающую этой равнодѣйствующей—черезъ N и T , а моментъ этихъ силъ по отношенію къ точкѣ s —

черезъ M . Внѣшнія силы могутъ быть замѣнены силами N и T , дѣйствующими въ s , и моментомъ M , и изъ условій равновѣсія имѣемъ:

$$N+N_1=0 \quad T+T_1=0 \quad M+M=0 \quad . \quad . \quad . \quad (280)$$

Силы T и T_1 , дѣйствующія въ сѣченіи mn по прямопротивоположнымъ направленіямъ, стремятся срѣзать балку по сѣченію mn ; T называется поэтому *срѣзывающей или поперечной силой*. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что *срѣзывающая сила равняется алгебраической суммѣ слагающихъ внѣшнихъ силъ (включая реакціи опоръ), взятыхъ по направленію сѣченія*.

Если разложимъ силу P на нормальную и касательную слагающія n и t , то моментъ, произведенный этой силой въ сѣченіи s , отстоящемъ отъ начала координатъ на разстояніи x , будетъ (черт. 107)

$$m = -t(x-a) + n(a-\beta),$$

слѣдовательно $M = \Sigma[-t(x-a) + n(a-\beta)]$.

Если отъ сѣченія mn перейдемъ къ другому m_1n_1 , то въ этомъ уравненіи измѣнится только x , поэтому

$$\frac{dM}{dx} = \Sigma(-t),$$

или, такъ какъ

$$\Sigma t = T,$$

$$\text{то } \frac{dM}{dx} = -T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (281)$$

Моментъ будетъ имѣть наибольшее значеніе въ томъ сѣченіи, для котораго $\frac{dM}{dx} = 0$, а такъ какъ $\frac{dM}{dx} = -T$, то слѣдуетъ:

1) Наибольшее срѣзывающее усиліе проявляется въ томъ сѣченіи, котораго сгибающій моментъ $= 0$, и наоборотъ: наименьшая срѣзывающая сила дѣйствуетъ въ томъ сѣченіи, котораго сгибающій моментъ наибольшій.

2) Когда сгибающіе моменты для всѣхъ сѣченій одинаковы, то срѣзывающія силы равны нулю.

Глава VII.

Простѣйшій случай сгибания прямыхъ балокъ.

§ 91.

Основныя формулы. — Простѣйшій случай сгибания имѣетъ мѣсто тогда, когда внѣшнія силы и сопротивленія опоръ, дѣйствующія на брусъ съ прямолинейной осью, перпендикулярны къ этой оси, и находятся въ одной съ ней плоскости. Этотъ случай отличается отъ случая, разсмотрѣннаго въ предыдущей главѣ, слѣдовательно, только тѣмъ, что всѣ внѣшнія силы параллельны между собою и перпендикулярны къ оси бруса, вслѣдствіе чего всѣ N и n равны нулю. Если поэтому въ уравненіяхъ, выведенныхъ въ предыдущей главѣ, отбросимъ члены, содержащіе N и n , то получимъ формулы для расчета балокъ, подвергаемыхъ одному изгибу безъ продольнаго растяженія или сжатія. Эти формулы слѣдующія:

$$\sigma = \frac{Mv}{J} \dots \dots \dots (209\alpha)$$

$$\sigma_1 = \frac{Me_1}{J}, \quad \sigma_2 = -\frac{Me_2}{J} \dots \dots \dots (211\alpha)$$

$$\frac{d\delta}{dP_q} = \int \frac{M}{EJ} \frac{dM}{dP_q} dx + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} \frac{dM}{dP_q} dx \dots \dots (272\alpha)$$

$$\frac{d\delta}{dP_q} = \int \frac{M}{EJ} m_q dx + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_q dx \dots \dots (273\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dP_q} = & P_1 \int \frac{m_1 m_q dx}{EJ} + P_2 \int \frac{m_2 m_q dx}{EJ} + \dots + D_\alpha \int \frac{m_\alpha m_q dx}{EJ} + \\ & + D_\beta \int \frac{m_\beta m_q dx}{EJ} + \dots + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_q dx \dots \dots (274\alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dP_q} = \int \frac{M m_q dx}{EJ} + D_\alpha \int \frac{m_\alpha m_q dx}{EJ} + D_\beta \int \frac{m_\beta m_q dx}{EJ} + \dots + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_q dx \quad (274\beta)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dD_\omega} = & P_1 \int \frac{m_1 m_\omega dx}{EJ} + P_2 \int \frac{m_2 m_\omega dx}{EJ} + \dots + D_\alpha \int \frac{m_\alpha m_\omega dx}{EJ} + \\ & + D_\beta \int \frac{m_\beta m_\omega dx}{EJ} + \dots + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_\omega dx. \quad (275\alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dD_\omega} = \int \frac{M m_\omega dx}{EJ} + D_\alpha \int \frac{m_\alpha m_\omega dx}{EJ} + D_\beta \int \frac{m_\beta m_\omega dx}{EJ} + \dots + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_\omega dx \quad (275\beta)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dP_q} = \int m_q d\varphi + \int m_q \delta\varphi \quad (274\gamma)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dD_\omega} = \int m_\omega d\varphi + \int m_\omega \delta\varphi \quad (275\gamma)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dP_q} &= P_1 \tau_{q1} + P_2 \tau_{q2} + \dots + D_\alpha \tau_{q\alpha} + D_\beta \tau_{q\beta} + \dots + \tau_{qt} \\ \frac{d\mathcal{L}}{dP_q} &= y_q + D_\alpha \tau_{q\alpha} + D_\beta \tau_{q\beta} + \dots + \tau_{qt} \end{aligned} \right\} \quad (274\delta)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dD_\omega} &= P_1 \tau_{\omega 1} + P_2 \tau_{\omega 2} + \dots + D_\alpha \tau_{\omega \alpha} + D_\beta \tau_{\omega \beta} + \dots + \tau_{\omega t} \\ \frac{d\mathcal{L}}{dD_\omega} &= y_\omega + D_\alpha \tau_{\omega \alpha} + D_\beta \tau_{\omega \beta} + \dots + \tau_{\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (275\delta)$$

Всѣ эти уравненія, за исключеніемъ первыхъ двухъ: 209 α и 211 α , суть только различные виды одного и того же уравненія.

Помощію уравненій 209 α и 211 α опредѣляются напряженія, а помощію остальныхъ уравненій — видоизмѣненія, т. е. перемѣщенія и вращенія, причемъ въ каждомъ данномъ случаѣ выбираемъ изъ этихъ уравненій то, которое для этого случая окажется наиболѣе удобнымъ.

Изъ 209 α получаемъ

$$\text{для } z=0, \quad \sigma=0,$$

изъ чего слѣдуетъ, что въ случаѣ, когда внѣшнія силы перпендикулярны къ оси балки, нейтральное волокно совпадаетъ съ ея геометрической осью, (т. е. съ прямой, на которой находятся центры тяжести сѣченій).

§ 92.

Продольныя скалывающія напряженія.— Пусть $\alpha\beta\gamma\delta$ (черт.108) часть балки въ изогнутомъ состояніи, и вырѣжемъ изъ нея от-

Для сѣченія bc , отстоящаго отъ ad на безконечно близкомъ разстояніи dx , котораго сгибающій моментъ $= M + dM$ будетъ

$$N_1 = \frac{(M + dM)}{J} S_m.$$

Разность $N_1 - N$ даетъ продольное срывающее усиліе, дѣйствующее въ плоскости dc , которой площадь $= \beta dx$; поэтому скальвающее напряженіе (скальвающее усиліе, отнесенное къ единицѣ площади)

$$\tau = \frac{N_1 - N}{\beta dx} = \frac{S_m}{J} \frac{dM}{\beta dx}.$$

По (281)

$$\frac{dM}{dx} = -T,$$

слѣдовательно, абсолютно,

$$\tau = \frac{TS_m}{\beta J} \quad (283)$$

Въ этомъ уравненіи T означаетъ равнодѣйствующую всѣхъ внѣшнихъ силъ (включая и сопротивленія опоръ), дѣйствующую на часть балки, отрѣзанную сѣченіемъ aa_1 (или bb_1).

Въ § 11 было доказано, что горизонтальное скальвающее напряженіе въ горизонтальномъ сѣченіи равно вертикальному скальвающему напряженію въ вертикальномъ сѣченіи. Поэтому вертикальное скальвающее напряженіе волоконъ dd_1 опредѣляется тѣмъ же уравненіемъ (283)

$$\tau = \frac{TS_m}{\beta J}.$$

§ 93.

Примѣры.

а) Сѣченіе прямоугольное (черт. 109).

Въ этомъ случаѣ

$$S_m = b \left(\frac{1}{2} h - v \right) \left(v + \frac{\frac{1}{2} h - v}{2} \right) = b \left(\frac{\frac{h^2}{4} - v^2}{2} \right)$$

$$\beta = b, \quad J = \frac{1}{12} b h^3$$

$$\tau_v = \frac{S_m}{J} \frac{T}{\beta} = \frac{b \left(\frac{h^2}{4} - v^2 \right)}{2 b h^3} \cdot \frac{T}{b} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} - \frac{6T}{bh^3}.$$

Положимъ

$$\frac{3T}{2bh} = k, \quad \frac{6T}{bh^3} = l,$$

тогда

$$\tau_v = k - lv^2,$$

гдѣ k и l , для одного и того же сѣченія, постоянныя величины.

Если будемъ откладывать отъ вертикальной оси zz_1 на продолженіяхъ волоконъ ss_1 ихъ напряженія τ_v въ одну и ту же сторону, то получимъ параболу $\alpha\beta\gamma$, изъ которой видно, что для крайнихъ волоконъ

$$\tau = 0$$

и что наибольшее скалывающее напряженіе дѣйствуетъ въ нейтральномъ волокнѣ ($v=0$).

Изъ предыдущаго уравненія получаемъ, для $v=0$

$$\max \tau = \frac{3T}{2bh}.$$

2) *Двутапировое сѣченіе* (черт. 110).

Для средней узкой части

$$\tau_v = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - v^2 \right),$$

а для поясовъ

$$\tau_v = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - v^2 \right)$$

Линія скалывающихъ напряженій состоитъ поэтому изъ отрывковъ двухъ параболъ.

3) *Сложное сѣченіе* (черт. 111).—Статическій моментъ сложнаго сѣченія получается изъ выраженій

$$S_m = \int \beta dv \cdot v = \int \beta v dv.$$

Разобьемъ сѣченіе горизонтальными плоскостями на четное число полосъ одинаковой ширины, — означимъ длины этихъ полосъ черезъ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$, ихъ разстоянія отъ оси центра тяжести — черезъ $v_0, v_1, v_2, \dots$ а ихъ ширину — черезъ e , то, по правилу Симпсона,

$$S_m = \frac{e}{3} \left[v_0 \beta_0 + v_n \beta_n + 4(v_1 \beta_1 + v_3 \beta_3 + \dots) + 2(v_2 \beta_2 + v_4 \beta_4 + \dots) \right]$$

и

$$\tau = \frac{TS_m}{\beta J}.$$

§ 94.

Построение скалывающихъ напряженій.—Опредѣляемъ графически моментъ инерціи J . Для этого, по § 84, строимъ многоугольникъ силъ (черт. 112_b) и веревочную линію (черт. 112_a.) Если площадь $azbna$, ограниченную этой линіей и продолженіемъ ея крайнихъ сторонъ, означимъ черезъ Ω , а полюсное разстояніе— черезъ H , то по (243)

$$J=2H\Omega.$$

Чтобы получить скалывающее напряженіе волокна cd (черт. 112_a) нужно построить статическій моментъ J площади cad по отношенію къ оси центра тяжести, которая проходитъ черезъ точку z . Для этого продолжаемъ cd до пересѣченія съ линіей моментовъ въ c_1 , и проводимъ въ c_1 къ этой линіи касательную $c_1\gamma$. Если γ —пересѣченіе этой касательной съ осью zz_1 , проведенною черезъ z параллельно оси изгиба (гдѣ z — точка пересѣченія крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника), и означимъ отръзокъ $z\gamma$ черезъ ζ , то

$$S_m=H\zeta.$$

Теперь будетъ

$$\tau=\frac{T}{2\Omega}\frac{\zeta}{z}.$$

Строимъ прямой уголъ bcd (черт. 112_a), откладываемъ

$$bc=\frac{T}{2\Omega}, \quad \overline{cd}=\beta,$$

и соединяемъ b съ d .

Откладываемъ на dc отъ d

$$\overline{d\zeta}=\zeta,$$

проводимъ черезъ ζ $\zeta\zeta_1 \parallel bc$ до пересѣченія съ bd въ ζ_1 , получаемъ

$$\tau=\frac{\overline{\zeta\zeta_1}}{z}.$$

§ 95.

Напряженія въ наклонныхъ сѣченіяхъ.—Въ трехъ предыдущихъ параграфахъ указаны способы опредѣленія нормальныхъ напряженій σ и скалывающихъ— τ , проявляющихся въ сѣченіяхъ перпендикулярныхъ къ оси балки.

Для вычисленія нормальныхъ напряженій s и скалывающихъ t , дѣйствующихъ въ сѣченіи, составляющемъ съ осью уголь α , служатъ уравненія (21) и (22), въ которыхъ, согласно предположенію, сдѣланному въ § 88, нужно ν поставить $=0$. Для элемента ac (черт. 113) будемъ поэтому имѣть

$$s = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (284)$$

$$t = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (285)$$

Разложимъ напряженіе, дѣйствующее на плоскость ac , на горизонтальную слагающую h и вертикальную v , то по (25)

$$v = -\tau \sin \alpha,$$

$$h = -(\sigma \sin \alpha + \tau \cos \alpha).$$

Равнодѣйствующее напряженіе въ ac

$$r = \sqrt{s^2 + t^2} = \sqrt{h^2 + v^2}$$

а углы δ и φ , образуемые имъ съ нормалью къ ac , и съ осью балки получаются изъ уравненій

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{t}{s} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{h}.$$

§ 96.

Главные напряженія.

а) *Предельныя нормальныя напряженія* — Наибольшее нормальное напряженіе испытываютъ элементы, наклоненные къ оси балки подъ угломъ α_n , который, по (28), получается изъ уравненія

$$\operatorname{tg} 2\alpha_n = -\frac{\tau}{\frac{\sigma}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad (286)$$

и это напряженіе равняется

$$S = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} \quad . \quad . \quad . \quad (287)$$

Когда уголь α измѣняется отъ 0 до 180° , то онъ два раза принимаетъ значеніе, удовлетворяющее уравненію (286), и оба его значенія разнятся другъ отъ друга на 90° ; одному изъ нихъ

соотвѣтствуетъ наибольшее, а другому — наименьшее нормальное напряжение, и по (287)

$$S_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} \quad (287_a)$$

$$S_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}$$

Если σ положительно, то $\max S = S_1$ а если — отрицательно, то $\max S = S_2$. Когда имѣетъ мѣсто первый случай, а когда второй, рѣшаетъ уравненіе (284).

Предѣльные скалывающія напряжения. — Скалывающее напряжение достигаетъ предѣльнаго значенія въ сѣченіи, наклоненномъ къ оси балки подъ угломъ α_m , который получается изъ уравненія (31)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_m = \frac{\sigma}{t} \quad (288)$$

Величина предѣльнаго напряжения опредѣлена уравненіемъ (32)

$$T = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} \quad (289)$$

Когда уголъ α измѣняется отъ 0 до 180° , то онъ два раза получаетъ значеніе, удовлетворяющее уравненію (288), и эти значенія разнятся другъ отъ друга на 90° , т. е. элементы, въ которыхъ дѣйствуютъ предѣльныя скалывающія напряжения, перпендикулярны между собою. Одному изъ этихъ значеній соотвѣтствуетъ максимумъ, а другому — минимумъ скалывающаго напряжения, и изъ (289) видно, что абсолютно оба эти значенія равны.

Изъ (287_a) получаемъ

$$S_1 + S_2 = \sigma,$$

$$S_1 - S_2 = \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} = 2T,$$

поэтому

$$T = \frac{S_1 - S_2}{2}.$$

Изъ (286) и (288) слѣдуетъ

$$\alpha_n = 45^\circ + \alpha_m,$$

т. е. плоскости предѣльныхъ нормальныхъ напряженій составляютъ съ плоскостями предѣльныхъ скалывающихъ углы въ 45° .

§ 97.

Правила расчета балокъ. — Размѣры поперечныхъ сѣченій балки должны быть опредѣлены такимъ образомъ, чтобы ихъ наибольшія напряженія ни на какомъ мѣстѣ не превышали допускаемаго напряженія матеріала. Если поэтому, означимъ допускаемое напряженіе

для растяженія—черезъ k_r ,

для давленія—черезъ k_d

и для скалыванія—черезъ k_s

и примемъ растяженіе за положительное, а сжатіе за отрицательное напряженіе, то для всякаго элемента балки должны быть исполнены условія:

$$\max (+S) \leq k_r,$$

$$\max (-S) \leq k_d,$$

$$\max T \leq k_s \dots \dots \dots (290)$$

Величины S и T даны уравненіями (287) и (289), въ которыхъ для σ и τ нужно подставить значенія 209а и 283.

Чтобы было возможно удовлетворить условіямъ 290 нужно знать тѣ мѣста сѣченій балки, въ которыхъ величины S и T достигаютъ абсолютнаго максимума.

а) абсолютное максимумъ нормальнаго напряженія въ данномъ сѣченіи.

По (287)

$$S = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

гдѣ

$$\sigma = \frac{Mv}{J} \text{ и } \tau = \frac{TS_m}{\beta J}.$$

Для крайнихъ волоконъ a и b (черт. 114)

$$S_m = 0, \quad v = e,$$

поэтому

$$\max S = \sigma = \frac{Me}{J}$$

$$\max T = 0,$$

Для волоконъ на упругой поверхности $v = 0$,

следовательно

$$\max S = 0,$$

$$\max T = \tau = \frac{TS_m}{\beta J},$$

гдѣ

$$S_m = \int v d\Omega.$$

Для волоконъ между упругой поверхностью и крайними волокнами

$$v > 0 \text{ и } v < e$$

$$\max S = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Изъ этого уравненія видно, что $\max S$ больше какъ нормальнаго напряженія σ , такъ и скалывающаго t . Если для σ и τ подставимъ значеніе, то получимъ

$$\max S = \frac{1}{2J} \left(Mv + \sqrt{M^2 v^2 + \frac{4T^2 S_m^2}{\beta^2}} \right) \quad (291)$$

Получаемое изъ этого уравненія максимальное напряженіе вообще меньше напряженія $\frac{Me}{J}$ крайнихъ волоконъ. Но когда β — малая величина, то для волоконъ, близкихъ къ крайнимъ, которыхъ v почти равно e , можетъ уравненіе (291) дать для $\max S$ величину, большую напряженія крайнихъ волоконъ. Тогда наибольшее нормальное напряженіе будетъ проявляться не въ крайнемъ, но въ другихъ волокнахъ, находящихся на близкомъ разстояніи отъ крайняго. Въ этомъ случаѣ расчетъ балки долженъ быть исполненъ по формулѣ (291)

$$k = \frac{1}{2J} \left(Mv + \sqrt{M^2 v^2 + \frac{4T^2 S_m^2}{\beta^2}} \right) \quad (292)$$

въ которой k означаетъ допускаемое напряженіе матеріала.

Напряженіе въ наклонной плоскости можетъ оказаться большимъ напряженія крайнихъ волоконъ въ балкѣ съ тонкой вертикальной стѣнкой и широкими поясами на томъ мѣстѣ, гдѣ стѣнка переходитъ въ пояса.

Такъ какъ при увеличеніи разстоянія v статическій моментъ S_m сѣченія уменьшается, а напряженіе σ — увеличивается, то для волоконъ, близкихъ къ крайнимъ, S_m всегда малая величина, вслѣдствіе чего разница между нормальнымъ напряженіемъ σ край-

ного волокна и абсолютно наибольшимъ напряженіемъ $\max S$ обыкновенно такъ мала, что въ большинствѣ практическихъ случаевъ можно се принимать за абсолютное максимумъ нормальнаго напряженія въ соответственномъ сѣченіи.

По отношенію къ балкамъ, лежащимъ свободно на двухъ опорахъ, послѣднее заключеніе можно считать вѣрнымъ для всей балки, потому что увеличеніе сгибающаго момента M сопровождается въ такихъ балкахъ уменьшеніемъ срывающаго усилія T ; но для балокъ другого рода, какъ: укрѣпленныхъ однимъ или обоими концами, для непрерывныхъ многоопорныхъ балокъ и др., которыхъ сгибающій моментъ достигаетъ максимума въ томъ же сѣченіи что и срывающее усиліе, оно можетъ дать замѣтную ошибку, поэтому прочность такихъ балокъ въ случаѣ, когда онѣ имѣютъ вертикальную стѣнку, должна быть проверена по формулѣ (291).

б) Абсолютное максимумъ скалывающаго напряженія въ данномъ сѣченіи.—Наибольшее скалывающее напряженіе волокна, отстоящаго отъ оси балки на разстояніе v , получается изъ уравненія

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

или

$$t = \frac{1}{2J} \sqrt{M^2 v^2 + \frac{4T^2 S_m^2}{\beta^2}} \dots \dots \dots (293)$$

Когда v увеличивается, то S_m уменьшается, и S_m достигаетъ наибольшаго значенія для нейтральнаго волокна. Такъ какъ ширина β на этомъ мѣстѣ обыкновенно меньше, и вообще не больше, чѣмъ въ другихъ мѣстахъ, то можно принять, что наибольшее скалывающее напряженіе проявляется всегда въ нейтральной оси, что поэтому

$$\max t = \frac{TS_m}{\beta_0 J} \dots \dots \dots (294)$$

гдѣ β_0 —ширина сѣченія на высотѣ его центра тяжести, и

$$S_m = \int_0^e v d\Omega.$$

§ 98.

Графическій способъ опредѣленія напряженій въ наклонныхъ плоскостяхъ.—Для построенія напряженій s и t нужно, по § 22, отложить на горизонталь AB (черт. 115)

$$Az = zB = \frac{\sigma}{2},$$

возставить въ B къ AB перпендикуляръ, отложить на немъ

$$Bd = \tau,$$

описать изъ z радиусомъ zA кругъ I, и на zd какъ на діаметрѣ описать другой кругъ II, который въ этомъ случаѣ будетъ проходить черезъ B .

Чтобы получить напряженія s и t для элемента ab , составляющаго съ осью балки уголъ α , продолжаемъ ab до пересѣченія съ кругомъ I въ n , соединяемъ n съ z прямой nz , встрѣчающей кругъ II въ τ и соединяемъ τ съ d и n . Получаемъ

$$s = \overline{nz}, \quad t = \overline{d\tau}, \quad r = \overline{nd}, \quad \delta = \angle dn\tau.$$

Если продолжимъ nd до пересѣченія съ окружностью I въ δ , и соединимъ δ съ A , то δA —направленіе равнодѣйствующаго напряженія r .

Для элемента a_1b_1 , перпендикулярнаго къ ab ,

$$s = \overline{n_1\tau}, \quad t = \overline{d\tau}, \quad r = \overline{n_1d}$$

и $\delta_1 A$ —направленіе равнодѣйствующаго напряженія.

Построеніе предѣльныхъ нормальныхъ напряженій S_1 и S_2 видно изъ черт. 116, а предѣльныхъ скалывающихъ t —изъ черт. 117. Изъ этихъ чертежей получаемъ

$$S_1 = \overline{nd}, \quad S_2 = \overline{n_1d}, \quad \alpha_n = \angle n_1AB,$$

$$\max t = \overline{zd}, \quad \alpha_m = \angle mAB.$$

Скалывающее напряженіе t элемента, составляющаго съ элементомъ ab (черт. 117), въ которомъ дѣйствуетъ наибольшее скалывающее напряженіе, уголъ φ , какъ изъ чертежа видно

$$\overline{\tau d} = \overline{zd} \cos 2\varphi,$$

или

$$t = \max t \cdot \cos 2\varphi$$

t для различныхъ угловъ φ получается поэтому помощію слѣдующаго простаго построенія: на zn какъ на діаметрѣ описываемъ окружность III. Данный элементъ Ad продолжаемъ до пересѣченія съ окружностью I въ δ , и проводимъ радиусъ δz , который пересѣчетъ окружность III въ δ_1 . Изъ построенія слѣдуетъ

$$\overline{\delta_1 z} = \overline{\delta z} \cos 2\varphi,$$

поэтому

$$\overline{\delta z} = t.$$

Если такимъ образомъ построимъ напряженія t для элементовъ, составляющихъ съ AB углы отъ 0 до 180° , и отложимъ ихъ по направленіямъ соотвѣтственныхъ элементовъ отъ точки A , то получимъ кривую $\alpha\beta\gamma\epsilon$, которой произвольный радіусъ векторъ $A\gamma$ будетъ равняться скалывающему напряженію элемента, имѣющаго направленіе $A\gamma$.

Нормальное напряженіе достигаетъ максимума въ элементѣ mn (черт. 117); нормальное напряженіе s элемента Af , составляющаго съ mn уголъ ϵ , равняется γt , и изъ чертежа имѣемъ

$$\overline{\gamma t} = \overline{\gamma z} + \overline{zt},$$

т. е.

$$s = \frac{\sigma}{2} + \max t \cdot \cos 2\epsilon.$$

Напряженія s получаются поэтому помощію слѣдующаго построенія (черт. 116). На прямой zm , составляющей съ AB уголъ $Bzm = 2\alpha_n$, какъ на діаметръ, описываемъ изъ центра z_2 окружность III. Чтобы для произвольнаго элемента Af получить s , продолжаемъ Af до пересѣченія съ окружностью I въ γ , проводимъ радіусъ γz , и на продолженіи его откладываемъ $\gamma\gamma_1 = Az$, получаемъ

$$s = \overline{\gamma_1 z}.$$

Если полученныя такимъ образомъ величины s отложимъ отъ точки A по направленіямъ соотвѣтственныхъ элементовъ, то получимъ кривую, которая представитъ напряженія s въ данной точкѣ для различныхъ направленій элемента. Произвольный радіусъ векторъ Aq этой кривой равняется нормальному напряженію этой точки въ плоскости, имѣющей направленіе Aq .

§ 99.

Траекторія напряженій. — Опредѣлимъ для произвольной точки a_1 , взятой на сѣченіи m_1n_1 , (черт. 118) направленіе наибольшаго напряженія (нормальнаго или скалывающаго), продолжимъ это направленіе до пересѣченія со слѣдующимъ сѣченіемъ m_2n_2 въ точкѣ s_2 , повторимъ тоже дѣйствіе для точки s_2 , и т. д., то получимъ кривую, которая называется *траекторіей наибольшаго нормальнаго или наибольшаго скалывающаго напряженія*.

1) Трассаторія наибольшихъ нормальныхъ напряженій.

Наибольшее нормальное напряженіе и его уголъ съ осью балки получаются изъ уравненій:

$$\begin{aligned} \max s &= \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \operatorname{tg} 2\alpha_n &= - \frac{2\tau}{\sigma} \\ \sin 2\alpha_n &= \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_n}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_n}} = \frac{-\frac{2\tau}{\sigma}}{\pm \sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{\sigma^2}}} = - \frac{2\tau}{\pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} \quad (295) \\ \cos 2\alpha_n &= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_n}} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \left(\frac{2\tau}{\sigma}\right)^2}} = \frac{\sigma}{\pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} \end{aligned}$$

а) Трассаторія наибольшихъ растяженій. Въ этомъ случаѣ на мѣсто двойнаго знака $\pm$ нужно въ предыдущихъ уравненіяхъ поставить знакъ $+$, такъ что для опредѣленія трассаторіи наибольшихъ растяженій имѣемъ уравненія:

$$\begin{aligned} \max s &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \\ \sin 2\alpha_n &= - \frac{2\tau}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}, \quad \cos 2\alpha_n = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} \quad (296) \end{aligned}$$

Въ крайнихъ волокнахъ $\tau=0$; если разстояніе крайнихъ растягиваемыхъ волоконъ отъ оси означимъ черезъ e , а крайнихъ сжимаемыхъ—черезъ e_1 , то для первыхъ

$$v = e, \quad \sigma = \frac{Me}{J}, \quad \max s = \sigma$$

и для послѣднихъ

$$v = -e_1, \quad \sigma = -\frac{Me_1}{J}, \quad \max s = -\frac{Me_1}{2J} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{Me_1}{J}\right)^2 + 0} = 0,$$

Для нейтральныхъ волоконъ

$$\sigma = 0, \quad \tau = \frac{T}{\beta_0 J} \int_0^e v d\Omega.$$

Если эти значенія вставимъ въ предыдущія уравненія, то получимъ:

для крайних растягиваемых волоконъ $\sin 2\alpha_n = 0$, $\cos 2\alpha_n = 1$,
 слѣдовательно $\alpha_n = 0$,
 для крайних сжимаемыхъ волоконъ: $\sin 2\alpha_n = 0$, $\cos 2\alpha_n = -1$,
 слѣдовательно $\alpha_n = 90^\circ$;
 для нейтральныхъ волоконъ: $\sin 2\alpha_n = 1$, $\cos 2\alpha_n = 0$, слѣдо-
 вательно $\alpha_n = 45^\circ$.

Во всѣхъ другихъ точкахъ сѣченія $\max$ какъ по величинѣ, такъ и направленію имѣеть значенія, заключенныя между этими предѣльными; эти значенія получаются изъ уравненій 295.

Траекторія наибольшихъ растяженій представлена на черт. 119. Она касательна къ крайнему растягиваемому волокну, пересекаетъ нейтральную ось подъ отрицательнымъ угломъ 45° и перпендикулярна къ крайнему сжимаемому волокну.

β) *Траекторія наибольшаго сжатія.* Для этого случая нужно въ уравненіяхъ 295 на мѣсто двойнаго знака $\pm$ поставить знакъ $-$.

$$\max s = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sin 2\alpha_n = \frac{-2\tau}{-\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \frac{2\tau}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}, \quad \cos 2\alpha_n = \frac{\sigma}{-\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}.$$

Для крайнихъ растягиваемыхъ волоконъ

$$v = e, \quad \tau = 0, \quad \sigma = \frac{Me}{J} \quad \max s = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} = 0,$$

$$\sin 2\alpha_n = 0, \quad \cos 2\alpha_n = -1, \quad \text{слѣдовательно } \alpha_n = 90^\circ.$$

Для крайнихъ сжимаемыхъ волоконъ

$$v = -e_1, \quad \tau = 0, \quad \sigma = -\frac{Me_1}{J}, \quad \max s = \sigma,$$

$$\sin 2\alpha_n = 0, \quad \cos 2\alpha_n = +1, \quad \text{слѣдовательно } \alpha_n = 0.$$

Для нейтральныхъ волоконъ

$$v = 0, \quad \tau = \frac{e_1}{\beta_0 J} T \int_0^1 v d\Omega,$$

$$\sin 2\alpha_n = 1, \quad \cos 2\alpha_n = 0, \quad \text{слѣдовательно } \alpha_n = 45^\circ.$$

Траекторія наибольшаго сжатія касательна, поэтому, къ сжимаемому волокну, перпендикулярна къ растягиваемому, и составляетъ съ нейтральнымъ волокномъ уголъ $+45^\circ$. Во всѣхъ другихъ точкахъ сѣченія наибольшія сжатія имѣютъ по величинѣ и направленію значенія, заключенныя между этими предѣльными.

Траекторія наибольшаго сжатія представлена на черт. 120.

γ) Траекторія наибольшаго скалыванія.

По (289)

$$\max t = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

и по (288)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_m = \frac{\sigma}{2\tau}$$

слѣдовательно

$$\sin 2\alpha_m = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}, \quad \cos 2\alpha_m = \frac{2\tau}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}.$$

Для крайнихъ растягиваемыхъ волоконъ

$$\tau = 0, \quad \sigma = \frac{Me}{J}, \quad \max t = \frac{1}{2} \sigma = \frac{Me}{2J},$$

$$\sin 2\alpha_m = 1, \quad \cos 2\alpha_m = 0, \quad \text{слѣдовательно } \alpha_m = 45^\circ.$$

Для крайнихъ сжимаемыхъ волоконъ

$$\tau = 0, \quad \sigma = -\frac{Me_1}{J}, \quad \max t = \frac{\sigma}{2} = -\frac{Me_1}{2J}$$

$$\sin 2\alpha_m = -1, \quad \cos 2\alpha_m = 0, \quad \text{слѣдовательно } \alpha_m = -45^\circ.$$

Для нейтральныхъ волоконъ

$$v = 0, \quad \sigma = 0, \quad \tau = \frac{T}{\beta_0 J} \int_0^e v d\Omega, \quad \max t = \tau$$

$$\sin 2\alpha_m = 0, \quad \cos 2\alpha_m = 1, \quad \text{слѣдовательно } \alpha_m = 0.$$

Для всѣхъ другихъ точекъ сѣченія $\max t$ и α_m опредѣляются изъ уравненій (289) и (288).

Траекторія наибольшаго скалыванія представлена на черт. 121; она состоитъ изъ двухъ вѣтвей, сходящихся касательно въ нейтральномъ волокнѣ, и пересѣкающихъ крайнія волокна подъ угломъ 45° .

Во всѣхъ точкахъ сѣченія, котораго сгибающій моментъ равенъ нулю, $\sigma = 0$, поэтому наибольшее скалывающее напряженіе во всѣхъ точкахъ такого сѣченія параллельно оси балки, а наименьшее—перпендикулярно къ этой оси. Изъ (287) и (289) слѣдуетъ, что въ такомъ сѣченіи наибольшее нормальное напряженіе и наибольшее скалывающее имѣютъ одинаковыя значенія.

Во всѣхъ точкахъ сѣченія, котораго срывающее усиліе

$T=0$, $\tau=0$, изъ чего слѣдуетъ, что наибольшее скалывающее напряженіе во всѣхъ точкахъ такого сѣченія наклонено къ оси балки подъ угломъ 45° .

На черт. 122 представлены (приблизительно) траекторіи наибольшихъ растяженій сплошными и траекторіи наибольшихъ сжатій — пунктирными линіями, а на черт. 123 — траекторіи наибольшихъ скалываній. Изъ чертежей легко узнать, что траекторіи наибольшихъ растяженій и сжатій пересѣкаются между собою подъ прямыми углами, и что онѣ пересѣкаютъ траекторіи наибольшихъ скалываній подъ угломъ 45° .

Если черезъ траекторіи наибольшихъ растяженій и сжатій представимъ себѣ проведенными цилиндрическія поверхности, которыхъ образующія перпендикулярны къ плоскости изгиба, то въ элементахъ балки, лежащихъ въ этихъ поверхностяхъ, не дѣйствуютъ никакія скалывающія силы. Элементы одной изъ этихъ поверхностей только растягиваются, а другой — только сжимаются.

§ 100.

Наивыгоднѣйшія формы поперечныхъ сѣченій изгибаемыхъ брусьевъ. — Условія прочности требуютъ, чтобы наибольшее напряженіе, какое можетъ произвести дѣйствующая на балку нагрузка, ни на какомъ мѣстѣ не было больше допускаемаго напряженія матеріала. Размѣры поперечныхъ сѣченій балки должны быть поэтому опредѣлены такимъ образомъ, чтобы условія (290) были исполнены для всѣхъ сѣченій.

Абсолютное максимумъ нормальнаго напряженія можетъ при нѣкоторыхъ обстоятельствахъ проявиться въ наклонныхъ элементахъ волоконъ, находящихся на небольшомъ разстояніи отъ крайнихъ. Но выше было уяснено, что это максимумъ во всѣхъ практическихъ случаяхъ такъ мало разнится отъ нормальнаго напряженія крайняго волокна, что безъ замѣтной погрѣшности можно за наибольшее нормальное напряженіе принимать всегда напряженіе этого волокна. Если, поэтому, e и e_1 — разстояніе крайняго растягиваемаго и крайняго сжимаемаго волокна отъ нейтральной оси, то по 290, для всякаго сѣченія балки должны быть исполнены условія:

$$\begin{aligned} k_r &= \frac{Me}{J}, \\ k_d &= \frac{Mc_1}{J}, \\ k_s &= \frac{TS_m}{\beta_0 J} \end{aligned} \quad (298)$$

Отношеніе $\frac{J}{e}$, зависящее только отъ размѣровъ поперечнаго сѣченія, но не зависящее отъ нагрузки, называютъ *моментомъ сопротивленія сѣченія*.

Условія (298) можно написать такъ:

$$\frac{J}{e} > \frac{M}{k_r}, \quad \frac{J}{e_1} > \frac{M}{k_d}, \quad \frac{J\beta_0}{S_m} > \frac{T}{k_s}.$$

Для употребляемыхъ на практикѣ формъ поперечнаго сѣченія послѣднее условіе

$$\frac{J\beta_0}{S_m} > \frac{T}{k_s}$$

почти всегда исполнено, если первыя два условія исполнены. Только когда ширина β_0 очень мала, можетъ оказаться нужнымъ провѣрить прочность балки на сопротивленіе скалыванію.

Когда сѣченіе симметрично по отношенію къ оси изгиба, то $e=e_1$; если k_r не равно k_d , то балку въ этомъ случаѣ нужно разсчитать на меньшую изъ двухъ величинъ k_r и k_d . Такъ, напр., если

$$k_r < k_d,$$

то разсчетъ долженъ быть произведенъ по формулѣ

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k_r},$$

такъ какъ тогда будетъ

$$\frac{J}{e} > \frac{M}{k_d},$$

или

$$k_d > \frac{Me}{J}.$$

т. е. допускаемое напряженіе k_d будетъ больше напряженія, производимаго нагрузкой. Такая балка имѣла бы на сторонѣ сжатія излишнее количество матеріала.

Чтобы при данномъ количествѣ матеріала балка имѣла по возможности большое сопротивленіе, должны ея сѣченія имѣть такую форму, чтобы предѣльныя напряженія достигались на сторонѣ растяженія и на сторонѣ сжатія одновременно. Такое сѣченіе называется *сѣченіемъ равной прочности*. Сѣченіе равной прочности будетъ поэтому то, которое удовлетворяетъ слѣдующимъ двумъ уравненіямъ

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k_r}, \quad \frac{J}{e_1} = \frac{M}{k_d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (229)$$

изъ нихъ получаемъ:

$$\frac{e}{e_1} = \frac{k_r}{k_d},$$

т. е. въ сѣченіи равной прочности разстоянія крайнихъ волоконъ прямо пропорціональны прочнымъ сопротивленіямъ.

Для желѣза

$$k_r = k_d,$$

а для чугуна (приблизительно)

$$k_r = \frac{1}{2} k_d,$$

Сѣченія желѣзныхъ балокъ должны быть поѣтому симметричны по отношенію къ нейтральной оси, а въ чугунныхъ балкахъ разстояніе крайнихъ растягиваемыхъ волоконъ отъ нейтральной оси должно быть вдвое меньше разстоянія крайнихъ сжимаемыхъ отъ той же оси.

Такъ какъ M измѣняется вмѣстѣ съ сѣченіемъ, то уравненія (299) даютъ для различныхъ сѣченій вообще неодинаковые размѣры. Когда балка имѣетъ такую форму, что условія (299) исполнены для всѣхъ ея сѣченій, то она называется *балкой постоянного сопротивленія*.

Въ многихъ случаяхъ балка получаетъ постоянное сѣченіе. Тогда условія (299) должны быть исполнены для того сѣченія, котораго сгибающій моментъ наибольшій; прочность такой балки въ другихъ сѣченіяхъ будетъ больше требуемой. Если поѣтому наибольшій сгибающій моментъ означимъ черезъ $\max M$, то для разчета призматической балки имѣемъ уравненіе:

$$\frac{J}{e} = \frac{\max M}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (300)$$

Очевидно, что форма сѣченія тѣмъ болѣе выгодна, чѣмъ больше, при одной и той же величинѣ площади, ея моментъ сопротивленія $\frac{J}{e}$. Такъ какъ этотъ моментъ—функція второй степени размѣра параллельнаго силамъ, т. е. высоты, и только—первой степени ширины, то слѣдуетъ, что увеличеніе высоты сѣченія увеличиваетъ моментъ сопротивленія въ значительно высшей степени, чѣмъ увеличеніе ширины.

Изъ формулы

$$\sigma = \frac{Mv}{J}$$

видно, что напряженіе волоконъ прямо пропорціонально ихъ

разстояніямъ отъ нейтральной оси. Такъ какъ напряженіе ни на какомъ мѣстѣ не должно быть больше k , а наибольшее напряженіе испытываютъ крайнія волокна, то слѣдуетъ, что въ сѣченіяхъ равной прочности матеріалъ работаетъ полнымъ сопротивленіемъ только въ крайнихъ волокнахъ, а напряженіе другихъ волоконъ тѣмъ меньше, чѣмъ они ближе къ нейтральной оси. Напряженіе распределяется поэтому и въ сѣченіи равной прочности весьма неравномѣрно, а такъ какъ наибольшая прочность при данномъ количествѣ матеріала можетъ быть достигнута только при равномѣрномъ распределеніи напряженія, то желательно опредѣлить такую форму сѣченія, для котораго неравномѣрность распределенія напряженія была бы такъ малая, какъ только возможно.

Если бы было возможно составить балку изъ двухъ горизонтальныхъ безконечно тонкихъ полосъ (черт. 124), отстоящихъ отъ нейтральной оси на разстояніяхъ e и e_1 , опредѣляемыхъ уравненіями

$$e = \frac{kxJ}{M} \quad e_1 = \frac{kdJ}{M}$$

то напряженія всѣхъ ея точекъ были бы одинаковы и равны предѣльному напряженію матеріала. Такая форма сѣченія была бы, слѣдовательно, наиболѣе выгодной.

Изъ этого разсужденія слѣдуетъ, что *сѣченіе будетъ тѣмъ болѣе выгодно, чѣмъ больше его высота, и чѣмъ болѣе оно приближается къ двумъ безконечно тонкимъ полосамъ, параллельнымъ оси изгиба.*

Наибольшая высота сѣченія въ дѣйствительности ограничена практическими условіями. Кромѣ того, оно не можетъ состоять изъ двухъ отдѣльныхъ полосъ, такъ какъ изгибаемый брусъ долженъ удовлетворять также условію (283), обѣ полосы должны поэтому быть соединены между собою стѣнкою, которая на всякомъ мѣстѣ имѣла бы достаточное сопротивленіе проявляющимся при изгибѣ срѣзывающимъ силамъ. Наиболѣе выгодное сѣченіе будетъ слѣдовательно состоять изъ двухъ горизонтальныхъ полосъ, находящихся на возможно большемъ разстояніи другъ отъ друга, и изъ вертикальной стѣнки, соединяющей эти полосы. Этимъ условіямъ удовлетворяетъ всего лучше сѣченіе, имѣющее видъ двойнаго T , называемое *двутавровымъ* (черт. 125).

Опредѣлимъ наиболѣе выгодныя практическія формы сѣченія изгибаемыхъ балокъ изъ желѣза, чугуна и дерева.

1) *Желѣзо.* Соотвѣтственно выведеннымъ выше заключеніямъ даютъ желѣзнымъ балкамъ симметричную двутауровую форму (черт. 125). Высоту h двутауровой балки опредѣляютъ, вслѣд-

ствіе практическихъ условий, въ зависимости отъ ея расчетной длины l , при чемъ берутъ

для инженерныхъ сооружений h — отъ $\frac{1}{8}l$ до $\frac{1}{16}l$, а для архитектурныхъ — до $\frac{1}{30}l$.

Если

h — высота сѣченія,

b — ширина фланцевъ или поясковъ,

δ — толщина вертикальной стѣнки, и

δ_1 — толщина фланцевъ,

то площадь сѣченія

$$\Omega = 2b\delta_1 + (h - 2\delta_1)\delta$$

и его моментъ инерціи по отношенію къ оси центра тяжести

$$J = \frac{1}{12} \{ b[h^3 - (h - 2\delta_1)^3] + \delta(h - 2\delta_1)^3 \}$$

Длина этихъ балокъ доходитъ до 14 мтр.

Размѣры поперечнаго сѣченія вычисляются по формулѣ:

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k},$$

или, такъ какъ $e = \frac{1}{2}h$,

$$\frac{2J}{h} = \frac{M}{k},$$

откуда, подставивъ для J значеніе

$$M = \frac{k}{6h} \{ b[h^3 - (h - 2\delta_1)^3] + \delta(h - 2\delta_1)^3 \}$$

Такъ какъ изъ этого уравненія можетъ быть опредѣлено только одно измѣреніе, то другія измѣренія выбираютъ соотвѣтственно практическимъ условіямъ.

Часто берутъ

$$h = 20\delta, \quad b = 10\delta, \quad \delta_1 = 1.5\delta$$

и ставятъ условіе, чтобы h не превышало 40 сантиметровъ, и δ

было не менѣе $\frac{1}{20}h$.

Тогда получается:

$$M=298 \cdot 1 \delta^3 k,$$

откуда

$$\delta=0.15 \sqrt[3]{\frac{M}{k}}.$$

Получаемая из этого уравненія толщина δ может только тогда быть приведена въ исполненіе, если она удовлетворяетъ условію (283)

$$k_s \geq \frac{TS_m}{\delta J}.$$

Желѣзные прокатные двутавровыя балки употребляются для мостовъ малыхъ пролетовъ (не болѣе 7 метр.), для половъ и потолковъ въ гражданскихъ постройкахъ и т. д. Въ виду сотрясеній берутъ за прочное сопротивленіе въ мостовыхъ сооруженіяхъ—6, а въ частяхъ съ болѣе покойной нагрузкой (въ гражданскихъ постройкахъ)—7 до 8 килогр. на 1 квадратный миллиметръ.

Кромѣ двутавроваго типа въ строительной практикѣ употребляютъ часто фасонное желѣзо другой формы сѣченія; главнѣйшія изъ этихъ формъ слѣдующія (см. табл. VIII):

- 1) однотавровое желѣзо
- 2) угловое "
- 3) цоресъ "
- 4) волнистое "
- 5) коробчатое "
- 6) корытное "
- 7) трубчатое "
- 8) Z—образное "

Къ желѣзнымъ балкамъ принадлежатъ также балки изъ литаго желѣза или мягкой стали, содержащей не болѣе 0.20% углерода, не принимающей закалки. Сопротивленіе разрыву такого желѣза=отъ 40 до 50 килогр. на 1 квадратный миллиметръ.

2. Чугунъ. Наивыгоднѣйшая форма сѣченія для чугуновыхъ балокъ—двутавровая, несимметрическая относительно нейтральной оси (черт. 126). Сопротивленіе чугуна при сжатіи приблизительно вдвое больше его сопротивленія при растяженіи, вслѣдствіе чего берутъ

$$\frac{k_r}{k_d} = \frac{1}{2}.$$

Для сѣченія равной прочности, по (299),

$$\frac{e}{e_1} = \frac{k_r}{k_d} = \frac{1}{2},$$

т. е. разстояніе крайнихъ сжимаемыхъ волоконъ отъ нейтральной оси должно быть вдвое больше разстоянія крайнихъ растягиваемыхъ волоконъ отъ той же оси.

Такъ какъ

$$e + e_1 = h,$$

то

$$e = \frac{1}{3}h, \quad e_1 = \frac{2}{3}h,$$

$$M = \frac{k_r J}{e} = \frac{k_d J}{e_1}$$

$$M = \frac{3k_r J}{h} = \frac{3}{2} \frac{k_d J}{h} \quad (301)$$

Такъ какъ нейтральная ось проходитъ черезъ центръ тяжести сѣченія, то статическіе моменты частей сѣченія, находящихся по обѣимъ сторонамъ этой оси, равны между собою. Поэтому (черт. 126)

$$\frac{\delta e^2}{2} + b_1 \delta_1 \left(e - \frac{\delta_1}{2} \right) = \frac{\delta e_1^2}{2} + b_2 \delta_2 \left(e_1 - \frac{\delta_2}{2} \right)$$

$$\frac{\delta e^2}{2} + 2b_1 \delta_1 e - b_1 \delta_1^2 = \frac{\delta e_1^2}{2} + 2b_2 \delta_2 e_1 - b_2 \delta_2^2.$$

Подставимъ въ это уравненіе вмѣсто e_1 его значеніе $h - e$, и опредѣлимъ изъ него e , получимъ

$$e = \frac{\delta h^2 + 2b_2 \delta_2 h + b_1 \delta_1^2 - b_2 \delta_2^2}{2(\delta h + b_1 \delta_1 + b_2 \delta_2)}$$

$$e_1 = h - e = \frac{\delta h^2 + 2b_1 \delta_1 h + b_2 \delta_2^2 - b_1 \delta_1^2}{2(\delta h + b_1 \delta_1 + b_2 \delta_2)}$$

Поэтому

$$\frac{e}{e_1} = \frac{1}{2} = \frac{\delta h^2 + 2b_2 \delta_2 h + b_1 \delta_1^2 - b_2 \delta_2^2}{\delta h^2 + 2b_1 \delta_1 h + b_2 \delta_2^2 - b_1 \delta_1^2} \quad (302)$$

Изъ 301 и 302 можно опредѣлить двѣ неизвѣстныя, а такъ какъ число неизвѣстныхъ измѣреній 6, то четырьмя нужно задаться сообразно съ условіями практики. Чтобы отливка удалась толщина

стѣнки и фланцевъ не должна быть менѣе 7 миллиметровъ; если зададимся величинами δ , δ_1 , и δ_2 , то изъ уравненій 301 и 302 получимъ b_1 и b_2 ,

Хотя чугуныя балки дешевле желѣзныхъ, но вслѣдствіе малаго сопротивленія чугуна динамическому дѣйствію избѣгаютъ ихъ употребленія въ случаяхъ, когда на балку дѣйствуетъ подвижная нагрузка съ сотрясеніями.

Если $b_2=0$, то двутавровое сѣченіе переходитъ въ однотоавровое. Изъ предыдущихъ уравненій получимъ для тавроваго сѣченія (черт. 127)

$$J = \frac{1}{3} [(b_1 + \delta)e^3 - b_1(e - \delta_1)^3 + \delta e_1^3]$$

$$e = \frac{1}{3} h = \frac{\delta h^2 + b_1 \delta_1^2}{2(\delta h + b_1 \delta_1)}$$

$$e_1 = \frac{2}{3} h = \frac{\delta h^2 + 2b_1 \delta_1 h - b_1 \delta_1^2}{2(\delta h + b_1 \delta_1)}$$

$$M = \frac{k \tau J}{e} \dots \dots \dots (301_a)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\delta h^2 + b_1 \delta_1^2}{\delta h^2 + 2b_1 \delta_1 h - b_1 \delta_1^2} \dots \dots \dots (302_a)$$

3) *Дерево*.—Дерево употребляется въ видѣ круглыхъ бревенъ или обтесанныхъ прямоугольныхъ балоковъ. Хотя обтеска уменьшаетъ сопротивленіе бревна, но она улегчаетъ сопряженіе деревянныхъ частей.

Бревна обтесываютъ такимъ образомъ, чтобы моментъ сопротивленія $\frac{J}{e}$ полученнаго обтеской сѣченія, былъ максимумъ. Такъ

какъ

$$J = \frac{1}{12} b h^3 \text{ и } e = \frac{1}{2} h,$$

то

$$W = \frac{J}{e} = \frac{1}{6} b h^2$$

Если d —діаметръ бревна на тонкомъ концѣ, то (черт. 128),

$$h^2 = d^2 - b^2,$$

слѣдовательно

$$W = \frac{1}{6} (d^2 b - b^3).$$

Ширина b , для которой W будетъ максимумъ, получается изъ условія:

$$\frac{dW}{db} = \frac{d^2 - 3b^2}{6} = 0,$$

откуда

$$b = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Поэтому

$$h = \sqrt{d^2 - b^2} = d\sqrt{\frac{2}{3}},$$

слѣдовательно

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

или

$$b:h=5:7.$$

Чтобы получить форму сѣченія, удовлетворяющую послѣднему уравненію, дѣлятъ диаметр AB (черт. 128) на 3 равныя части, и въ точкахъ дѣленія c и d возставляютъ къ AB перпендикуляры въ противоположныя стороны, до пересѣченія съ окружностью въ E и F . Искомый прямоугольникъ будетъ $AEBF$, потому что въ прямоугольномъ треугольникѣ AEB .

$$b^2 = AB \cdot AC = d \frac{d}{3} = \frac{d^2}{3}$$

$$h^2 = AB \cdot CB = d \frac{2}{3} d = \frac{2}{3} d^2,$$

слѣдовательно

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{7}$$

Бревно, обтесанное на форму наибольшаго сопротивленія теряетъ около 30% своего сопротивленія въ кругломъ видѣ. Для уменьшенія обтески на практикѣ замѣняютъ часто отношеніе $\frac{5}{7}$ весьма близкимъ ему отношеніемъ 3:4.

Глава VIII.

Общія формулы разсчета горизонтальных балокъ, на которыя дѣйствуетъ вертикальная нагрузка.

§ 101.

Нагрузка балокъ.—На всякую балку дѣйствуетъ *постоянная нагрузка*, состоящая изъ вѣса балки и ея принадлежностей. Въ мостовыхъ и стропильныхъ балкахъ эту нагрузку можно почти всегда принимать за равномерно распределенную по всей длинѣ балки.

Кромѣ постоянной нагрузки дѣйствуетъ часто на балку еще *временная*, дѣйствующая обыкновенно короткое время, но повторяющаяся послѣ болѣе или менѣе значительныхъ промежутковъ, какъ: движущійся по мосту поѣздъ, толпа людей и т. д. Временная нагрузка можетъ быть разсматриваема какъ равномерно распределенная по всей длинѣ только въ стропильныхъ брусьяхъ; въ мостовыхъ балкахъ наиболѣе невыгодной нагрузкой является обыкновенно система сосредоточенныхъ грузовъ, образованныхъ давленіемъ колесъ вагоновъ или повозокъ, или перемѣщающаяся по мосту равномерная нагрузка, состоящая изъ толпы людей и т.д.

Всякая нагрузка можетъ дѣйствовать непосредственно на балку, или она передается ей посредствомъ второстепенныхъ балочекъ только въ точкахъ соединенія ея съ этими балочками. Нагрузку послѣдняго случая будемъ для краткости называть *передаточной*.

Балка, закрѣпленная однимъ концомъ и свободная на другомъ.

§ 102.

Формулы разсчета.—Закрѣпленіе въ стѣнѣ можетъ быть замѣнено вертикальной силой R и моментомъ M , дѣйствующими по направленіямъ, указаннымъ на (черт. 129₂) стрѣлками.

Число неизвѣстныхъ этой балки—два: R и M ; для ихъ опре-

дѣленія условія равновѣсія дають два уравненія, изъ чего слѣдуетъ, что такая балка представляетъ статически опредѣленную систему. Для ея разсчета имѣются формулы, приведенныя въ § 92, въ которыхъ величины D и члены, зависящіе отъ температуры, нужно поставить равными нулю, такъ какъ перемѣны температуры, какъ это выше было уяснено, не имѣютъ на напряженія статически опредѣленной системы никакого вліянія.

Наибольшія напряжения этой балки получаются изъ формуль (211 α)

$$\sigma_1 = \frac{Me_1}{J}, \quad \sigma_2 = - \frac{Me_2}{J} \quad (303)$$

а ея деформация, изъ уравненія (274 β),

$$\frac{d\delta}{dP_q} = \int \frac{Mm_q dx}{EJ} \quad (304)$$

Если въ уравненіяхъ (303) поставимъ

$$\sigma_1 = k_1, \quad \sigma_2 = k_2,$$

то получимъ для опредѣленія размѣровъ поперечныхъ сѣченій уравненія:

$$k_1 = \frac{Me_1}{J}, \quad k_2 = - \frac{Me_2}{J} \quad (305)$$

Начало координатъ будемъ принимать на свободномъ концѣ A балки и первоначальную ось ея—за ось абсциссъ. Абсциссы сѣченій (точекъ оси балки) будемъ обозначать черезъ x , а точекъ приложенія груза (за которыхъ считаемъ точки пересѣченія направленій грузовъ съ осью балки)—черезъ ξ . Абсциссы будемъ считать положительными слѣва вправо, а ординаты—снизу вверхъ (по направленію дѣйствія грузовъ). Силы будемъ считать положительными, когда онѣ дѣйствуютъ по направленію положительныхъ осей координаты, а моменты—если они вращаютъ слѣва вправо (по направленію часовой стрѣлки).

§ 103.

Сгибающіе моменты.

α) Моменты отъ сосредоточеннаго груза G *). Для всякаго сѣченія, находящагося между свободнымъ концомъ и грузомъ (черт. 130)

*) Буквой P мы обозначали силы, имѣющія произвольное направленіе; буква G означаетъ вертикальный грузъ.

$$M=0,$$

а для сѣченія между грузомъ и закрѣпленнымъ концомъ

$$M=-G(x-\xi) \dots \dots \dots (306)$$

Для $G=1$

$$m=-(x-\xi) \dots \dots \dots (307)$$

β) Моментъ отъ системы сосредоточенныхъ грузовъ. — Если между свободнымъ концомъ A и сѣченіемъ q находятся грузы $G_1, G_2 \dots G_q$, то моментъ въ этомъ сѣченіи (черт. 131)

$$M_q = -G_1(x-\xi_1) - G_2(x-\xi_2) - \dots - G_q(x-\xi_q)$$

или

$$M_q = -x(G_1 + G_2 + \dots + G_q) - (G_1\xi_1 + G_2\xi_2 + \dots + G_q\xi_q).$$

Для краткости напомнимъ послѣднее уравненіе въ слѣдующемъ видѣ

$$M_q = -x \sum_1^q G - \sum_1^q G\xi \dots \dots \dots (308)$$

γ) Моментъ отъ непрерывной нагрузки. — Когда грузы $G_1, G_2 \dots$ и ихъ разстоянія между собою сдѣлаются безконечно малыми, то система грузовъ превращается въ непрерывную нагрузку. Если g — непрерывная нагрузка, соотвѣтствующая единицѣ длины балки, то въ уравненіи (308)

$$G=g d\xi$$

и знакъ Σ превращается въ интегралъ. Поэтому для непрерывной нагрузки (черт. 132)

$$M_q = \int_{\xi=a}^{\xi=x} g d\xi (x-\xi) = x \int_a^x g d\xi + \int_a^x g \xi d\xi \dots \dots \dots (309)$$

Если нагрузка распределѣна равномерно, то g — величина постоянная, и тогда (черт. 133)

$$M = gx \int_a^x d\xi + g \int_a^x \xi d\xi = gx(x-a) + g\left(\frac{x^2-a^2}{2}\right) \\ M = g \frac{(x-a)^2}{2} \dots \dots \dots (310)$$

Послѣднее выраженіе можно получить непосредственно помощью извѣстнаго правила, что моментъ равнодѣйствующей ра-

вень суммѣ моментовъ слагающихъ. Равнодѣйствующая нагрузка, лежащей на отрѣзкѣ $Aq=g(x-a)$, а ея разстояніе отъ $q = \frac{x-a}{2}$, поэтому

$$M=g(x-a)\left(\frac{x-a}{2}\right) = g\frac{(x-a)^2}{2}.$$

§ 104.

Опредѣленіе сгибающихъ моментовъ графическимъ путемъ.—Такъ какъ сгибающій моментъ сѣченія равенъ статическому моменту силъ, находящихся по одну сторону сѣченія, взятыхъ по отношенію къ его центру тяжести, то графически сгибающіе моменты получаются помощію построеній, указанныхъ въ §§ 66—68. Эти моменты для нагрузокъ, рассмотрѣнныхъ въ подлежащемъ параграфѣ, построены на черт. 130а, 131а, 132а и 133а. Если y_q —ордината веревочной линіи, соотвѣтствующая произвольной точкѣ q оси балки, отнесенная къ крайней сторонѣ aE свободнаго конца ея, и H —полюсное разстояніе, то сгибающій моментъ въ сѣченіи q

$$M_q=H \times y_q.$$

Ординаты y нужно измѣрять по масштабу силъ, а полюсное разстояніе H —по масштабу разстояній (по которому была отложена длина балки, или на оборотъ).

Изъ чертежей видно, что наибольшіе моменты соотвѣтствуютъ закрѣпленному концу, что поэтому напряженіе достигаетъ наибольшаго значенія въ сѣченіи B . Такое сѣченіе называютъ *опаснымъ*.

§ 105.

Упругая линія.—Если прогибъ въ точкѣ q означимъ черезъ f_q , то, по § 87,

$$\frac{d^2 \delta}{dP_q} = f_q$$

и по (305)

$$f_q = \int_0^1 \frac{M m_q dx}{EJ}.$$

гдѣ M —моменты, произведенные данной нагрузкой, а m —грузомъ=1, приложеннымъ къ сѣченію q , котораго прогибъ ищется.

Если на балку дѣйствуетъ одинъ только грузъ G , приложенный къ точкѣ t , то для опредѣленія f_q будемъ имѣть слѣдующія данныя:

Для сѣченій	По черт. 134 _a .	По черт. 134.	
отъ $x=0$ до $x=v$	$M=0$	$m=0$	$\int_0^v \frac{Mm_q dx}{EJ} = 0$
„ $x=v$ „ $x=\xi$	$M=0$	$m=-(x-v)$	$\int_v^\xi \frac{Mm_q dx}{EJ} = 0$
„ $x=\xi$ „ $x=l$	$M=-G(x-\xi)$	$m=-(x-v)$	$\int_\xi^l \frac{Mm_q dx}{EJ} = \int_\xi^l \frac{G(x-\xi)(x-v) dx}{EJ}$

Слѣдовательно

$$f_q = \int_0^l \frac{Mm_q dx}{EJ} = G \int_\xi^l \frac{(x-\xi)(x-v) dx}{EJ}.$$

Для призматической балки

$$f_q = \frac{G}{EJ} \int_\xi^l (x-\xi)(x-v) dx$$

$$f_q = \frac{G}{EJ} \int_\xi^l x^2 dx - (\xi+v) \int_\xi^l x dx + v \int_\xi^l dx.$$

Проинтегрировавъ это выраженіе, получаемъ послѣ соотвѣт-
ственного сокращенія

$$f_q = \frac{G(l-\xi)^2}{6EJ} (\xi - 3v + 2l) \quad (311)$$

Изъ этого уравненія получается f для всякаго v , если только $v < \xi$ и оно показываетъ, что упругая линія между A и t имѣетъ видъ прямой линіи.

Для $v > \xi$ дѣйствителенъ черт. 135, по которому получаемъ:

Для сѣченій:	M	m	$\int \frac{Mm dx}{EJ}$
отъ $x=0$ до $x=\xi$	0	0	0
„ $x=\xi$ „ $x=v$	$-G(x-\xi)$	0	0
„ $x=v$ „ $x=l$	$-G(x-\xi)$	$-(x-v)$	$\int_0^l \frac{G(x-\xi)(x-v) dx}{EJ}$

Поэтому

$$f_q = G \int_0^1 \frac{(x-\xi)(x-v)dx}{EJ}$$

и для балки постоянного сѣченія

$$f_q = \frac{G}{EJ} \int_v^1 (x-\xi)(x-v)dx,$$

откуда

$$f_q = \frac{G}{6EJ} \left[v^3 - 3\xi v^2 + 3vl(2\xi - l) + l^2(2l - 3\xi) \right] \quad (312)$$

Для $v=\xi$ получаемъ какъ изъ (311), такъ и изъ (312)

$$f_t = \frac{G(l-\xi)^3}{3EJ} \quad (313)$$

Если грузъ приложенъ къ свободному концу, то $\xi=0$ и тогда по (312)

$$f_q = \frac{Gl^3}{6EJ} \left[\left(\frac{v}{l} \right)^3 - 3\frac{v}{l} + 2 \right] \quad (314)$$

Для $v=0$ получаемъ

$$f_a = \frac{Gl^3}{3EJ}$$

Прогибъ, произведенный большимъ числомъ грузовъ, равенъ суммѣ прогибовъ, произведенныхъ каждымъ грузомъ отдѣльно, при чемъ прогибъ отъ грузовъ, находящихся между свободнымъ концомъ и рассматриваемымъ сѣченіемъ ($\xi < v$) опредѣляется по формулѣ (312), а отъ грузовъ, лежащихъ на балкѣ между этимъ сѣченіемъ и закрѣпленнымъ концомъ—по формулѣ (311). Такъ, прогибъ сѣченія q , произведенный нагрузкой, представленной на черт. 136, будетъ

$$f_q = \frac{G_1}{6EJ} \left[v^3 - 3\xi_1 v^2 + 3vl(2\xi_1 - l) + l^2(2l - 3\xi_1) \right] + \frac{G_2(l-\xi_2)^3}{3EJ} +$$

$$+ \frac{G_3(l-\xi_3)^2}{6EJ} (2l + \xi_3 - 3v) + \frac{G_4(l-\xi_4)^2}{6EJ} (2l + \xi_4 - 3v).$$

Прогибъ свободного конца

$$f_a = \frac{1}{6EJ} \left[G_1(l-\xi_1)^2(2l + \xi_1) + G_2(l-\xi_2)^2(2l + \xi_2) + G_3(l-\xi_3)^2(2l + \xi_3) + \right.$$

$$\left. + G_4(l-\xi_4)^2(2l + \xi_4) \right].$$

Уголъ вращенія.—По § 87

$$\varphi_q = \frac{d\zeta}{dM_q}$$

и по (305)

$$\varphi_q = \int_0^l \frac{M m_q dx}{EJ}$$

гдѣ M —моменты, произведенные нагрузкой, а m_q —моментомъ=1 (т. е. парой силъ равной 1), приложеннымъ къ сѣченію q по направленію искомага вращенія.

Если на балку дѣйствуетъ одинъ только грузъ G , то будетъ (черт. 137)

$$\text{отъ } x=0 \text{ до } x=v: M=0 \quad m_q=0 \quad \int_0^v \frac{M m_q dx}{EJ} = 0$$

$$\text{отъ } x=v \text{ до } x=\zeta: M=0 \quad m_q=-1 \quad \int_v^\zeta \frac{M m_q d\zeta}{EJ} = 0$$

$$\text{отъ } x=\zeta \text{ до } x=l: M=-G(x-\zeta) \quad m_q=-1 \quad \int_\zeta^l \frac{M m_q dx}{EJ} = \int_\zeta^l \frac{G(x-\zeta)}{EJ} 1 \cdot dx$$

поэтому

$$\varphi_q = \int_0^l \frac{M m_q dx}{EJ} = G \int_\zeta^l \frac{(x-\zeta) dx}{EJ} \quad \dots \quad (315)$$

Для призматическаго бруса

$$\varphi_q = \frac{G}{EJ} \int_\zeta^l (x-\zeta) dx,$$

откуда, послѣ интегрированія и соотвѣтственнаго сокращенія

$$\varphi_q = \frac{G(l-\zeta)^2}{2EJ} \quad \dots \quad (316)$$

Это уравненіе дѣйствительно только для сѣченій, находящихся слѣва груза для ($v < \zeta$); для сѣченій справа груза будетъ (черт. 138)

$$\text{отъ } x=0 \text{ до } x=\zeta: M=0 \quad m_q=0$$

$$\text{отъ } x=\zeta \text{ до } x=v: M=-G(x-\zeta) \quad m_q=0$$

$$\text{отъ } x=v \text{ до } x=l: M=-G(x-\zeta) \quad m_q=-1$$

слѣдовательно

$$\varphi_q = \frac{G}{EJ} \int_v^1 (x - \xi) dx$$

$$\varphi_q = \frac{G(l-v)(l+v-2\xi)}{2EJ} \quad . \quad . \quad . \quad (317)$$

Для $\xi=0$ и $v=0$

$$\varphi_a = \frac{Gl^2}{2EJ} \quad . \quad . \quad . \quad (318)$$

Примѣчаніе.—Такъ какъ

$$\varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{df}{dx},$$

то уравненія для угла вращенія могутъ быть получены изъ уравненій прогиба, взявъ ихъ производную по отношенію къ dx . Такъ, напр., производная уравненій 311 и 312 дастъ уравненія 316 и 317.

§ 106.

Прогибъ отъ непрерывной нагрузки. Длину непрерывной нагрузки будемъ обозначать черезъ λ , а начальную и конечную абсциссу ея—черезъ n и k .

Для опредѣленія уравненія упругой линіи имѣемъ (черт. 138а) отъ $x=0$ до $x=n$: $M=0$

$$x=n \quad x=k: M = - \int_n^x g d\xi (x - \xi)$$

$$x=k \quad x=l: M = - \int_n^k g d\xi (x - \xi)$$

Грузъ=1 производитъ въ сѣченіяхъ слѣва его точки приложенія моментъ $m_q=0$, а для сѣченія справа точки q

$$m_q = -(x-v).$$

Упругая линія будетъ состоять изъ трехъ частей, соотвѣствующихъ отрѣзкамъ ac , cd и db балки, изъ которыхъ только отрѣзокъ cd нагруженъ. Уравненія этихъ частей слѣдующія:
1) для отрѣзка ac ($v < n$) черт. 138а и б)

$$f_q = \int_n^k \left[\int_n^x g d\xi (x-\xi) \right] \frac{(x-v)dx}{EJ} + \int_k^l \left[\int_n^k g d\xi (x-\xi) \right] \frac{(x-v)dx}{EJ}$$

2) для отрезка cd ($n < v < k$) (черт. 138а и с) (319)

$$f_q = \int_v^k \left[\int_n^x g d\xi (x-\xi) \right] \frac{(x-v)dx}{EJ} + \int_k^l \left[\int_n^k g d\xi (x-\xi) \right] \frac{(x-v)dx}{EJ}$$

3) для отрезка db ($v > k$) (черт. 138а и d)

$$f_q = \int_v^l \left[\int_n^k g d\xi (x-\xi) \right] \frac{dx(x-v)}{EJ}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда нагрузка распределена равномерно (черт. 139)

$$\int_n^x g(x-\xi) d\xi = \frac{g}{2} (x-n)^2$$

$$\int_n^k g(x-\xi) d\xi = g(k-n) \left(x - \frac{k+n}{2} \right) = g\lambda \left(x - \frac{\lambda}{2} - n \right),$$

$$\text{гдѣ } \lambda = k - n$$

и формулы (319) получаютъ слѣдующій видъ:

$$1a) \ v < n \quad f_q = \frac{g}{2EJ} \left[\int_n^k (x-n)^2 (x-v) dx + \lambda \int_k^l (2x - \lambda - 2n) (x-v) dx \right]$$

2а) $n < v < k$

$$f_q = \frac{g}{2EJ} \left[\int_v^k (x-n)^2 (x-v) dx + \lambda \int_k^l (2x - 2n - \lambda) (x-v) dx \right]$$

3а) $v > k$

$$f_q = \frac{g\lambda}{2EJ} \int_v^l (2x - 2n - \lambda) (x-v) dx.$$

Такъ какъ въ этихъ уравненіяхъ только x —переменная величина, то опредѣленіе ихъ интеграловъ не подлежитъ никакому затрудненію.

Когда равномерная нагрузка покрывает всю балку (черт. 140)

то

$$n=0 \quad k=l$$

и по 2α

$$f_1 = \frac{g}{2EJ} \int_0^l x^2(x-v)dx,$$

$$f_1 = \frac{gl^4}{24EJ} \left[\left(\frac{v}{l} \right)^4 - 4 \frac{v}{l} + 3 \right] \quad (320)$$

Для $v=0$

$$f_a = \frac{gl^4}{8EJ} = \frac{Gl^3}{8EJ}$$

гдѣ G —вся нагрузка балки.

Изъ (320) получимъ

$$\varphi_1 = \frac{df_1}{dv} = \frac{gl^4}{24EJ} \left[4 \left(\frac{v}{l} \right)^3 - \frac{4}{l} \right]$$

$$\varphi_1 = \frac{gl^3}{6EJ} \left[\left(\frac{v}{l} \right)^3 - 1 \right] \quad (321)$$

Для $v=0$

$$\varphi_a = \frac{gl^3}{6EJ} = \frac{Gl^2}{6EJ} \quad (322)$$

§ 108.

Построение упругой линии.—Строимъ для данной нагрузки (черт. 141а) веревочный многоугольникъ (черт. 141б). Если ординаты этого многоугольника означимъ черезъ η , а его полюсное разстояніе (черт. 141б)—черезъ H , то по §. 66 моментъ въ сѣченіи q ,

$$M = H\eta.$$

Построимъ другую линію $\alpha\beta\gamma\delta$ (черт. 141б), которой ординаты въ J разъ меньше ординатъ η , гдѣ J —моменты инерціи сѣченій, соотвѣствующихъ этимъ ординатамъ. Если ординаты этой новой линіи означимъ черезъ η_1 , то

$$\eta_1 = \frac{\eta}{J} = \frac{M}{HJ}$$

Примемъ эту линію $\alpha\beta\gamma\delta$ за линію нагрузки, построимъ для нея по § 68, многоугольникъ силъ (черт. 141с), и помощью

произвольнаго полюснаго разстоянія H_1 —веревочную линію, черт. 141с. Эту линію будемъ называть *второй веревочной линіей*.

Примемъ крайнюю касательную w этой линіи, соотвѣтствующую закреплённому концу b , за ось абсциссъ и означимъ ординаты ея точекъ черезъ η . Если m —моментъ въ сѣченіи, которому соотвѣтствуетъ ордината η , произведенный грузомъ=1, то грузъ $\eta_1 dx$ производитъ въ немъ моментъ $m\eta_1 dx$, а вся нагрузка представленная линіей $\alpha\beta\gamma\delta$ —моментъ,

$$\int_0^1 m\eta_1 dx.$$

Такъ какъ этотъ моментъ= $H_1\eta$, то имѣемъ уравненіе,

$$H_1\eta = \int m\eta_1 dx$$

и подставивъ для η_1 значеніе,

$$H_1\eta = \int m \frac{M}{HJ} dx$$

откуда

$$HH_1\eta = \int \frac{Mm}{J} dx \quad (323)$$

Если f —ордината упругой линіи, то

$$f = \frac{1}{E} \int \frac{Mm}{J} dx$$

поэтому по (323)

$$f = \frac{HH_1}{E} \eta \quad (324)$$

откуда

$$\eta = \frac{E}{HH_1} f = Cf \quad (325)$$

гдѣ

$$C = \frac{E}{HH_1}$$

Изъ (325) слѣдуетъ: *Ординаты второй веревочной линіи пропорціональны ординатамъ упругой линіи*. Если ординаты второй веревочной линіи уменьшимъ въ C разъ, то получимъ упругую линію.

Съченіе длинныхъ балокъ измѣняютъ обыкновенно не постепенно но внезапно, такъ что балка получаетъ ступенчатый видъ. Построеніе упругой линіи для этого случая уяснимъ примѣромъ.

Положимъ что балка состоитъ изъ четырехъ призматическихъ частей ac , cd , df и fb (черт. 142 α), имѣющихъ различныя сѣченія; пусть J , J_1 , J_2 и J_3 —моменты инерціи этихъ сѣченій. (черт. 142 β).

На балку дѣйствуютъ сосредоточенные грузы G_1 , G_2 и G_3 , и непрерывная нагрузка gl , распределенная равномерно на всю длину ея.

Помощію произвольнаго полюснаго растоянія H и многоугольниковъ силъ OP и $P1$ (черт. 142 γ_1) строимъ для непрерывной нагрузки веревочную линію $\varepsilon c_1 d_1 f_1 b_1$, и для системы отдѣльныхъ грузовъ G_1 , G_2 и G_3 —веревочную линію $b_1 f_2 d_2 c_2 \varphi$. Площадь фигуры, образованной этими обѣими линіями и вертикалью $\varepsilon\varphi$ принимаемъ за площадь непрерывной неравнобѣрной нагрузки, строимъ для нея многоугольникъ силъ $mc' d' f' b'$ (черт. 142 δ), принимаемъ

для нагрузки mc' , представленной площадью $\varepsilon c_1 c_2 \varphi$ (соотвѣтствующей отрѣзку ac балки) полюсное разстояніе= J ; для нагрузки $c' d'$, представленной площадью $c_1 d_1 d_2 c_2$ (соотвѣтствующей отрѣзку cd), полюсное разстояніе= J_1 (=моменту инерціи сѣченій этого отрѣзка) и т. д.

и строимъ веревочную линію черт. 142 δ .

Если приемъ за ось абсциссъ продолженіе крайней касательной этой веревочной линіи, соотвѣтствующей закрѣпленному концу, и означимъ ея ординаты по отношенію къ этой оси черезъ η , а ординаты упругой линіи—черезъ f , то

$$f = \frac{H}{E} \eta.$$

Когда сѣченіе балки постоянно, то для построенія второй веревочной линіи принимаемъ за линію нагрузки первую веревочную линію безъ измѣненія. Въ этомъ случаѣ будетъ:

$$\eta = \frac{M}{H}$$

$$H_1 \eta = \int m \eta dx = \int m \frac{M}{H} dx$$

$$H_1 H \eta = \int m M dx$$

Ордината упругой линіи (стрѣлка прогиба)

$$f_q = \frac{1}{EJ} \int M m_q dx = \frac{1}{EJ} H_1 H \eta$$

или

$$f = \frac{\eta_1}{C_1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (326)$$

гдѣ

$$C_1 = \frac{EJ}{HN_1}$$

§ 109.

Балки постояннаго сопротивленія.

Наибольшее напряженіе, проявляющееся въ крайнихъ волокнахъ, пропорціонально сгибающему моменту, а такъ какъ этотъ моментъ для различныхъ точекъ оси не одинаковъ, то изъ формулы

$$\sigma_1 = \frac{M e_1}{J}$$

слѣдуетъ что въ призматической балкѣ, (для которой $\frac{e_1}{J}$ — постоянная величина) крайнія волокна испытываютъ на различныхъ мѣстахъ различныя напряженія. Когда поэтому напряженіе на томъ мѣстѣ, гдѣ моментъ M наибольшій, равняется предѣльному напряженію k , то въ другихъ мѣстахъ оно тѣмъ меньше, чѣмъ меньше соотвѣтственный моментъ M , и во всѣхъ этихъ мѣстахъ сѣченіе могло-бы быть уменьшено не нарушая прочности балки. Изъ этого слѣдуетъ что балка, имѣющая такой видъ, что напряженіе крайнихъ волоконъ достигаетъ предѣла одновременно во всѣхъ сѣченіяхъ, требовала-бы, при одной и той-же формѣ сѣченія, наименьшаго количества матеріала. Такая балка называется *балкой постояннаго сопротивленія*.

Въ балкѣ постояннаго сопротивленія напряженіе достигаетъ предѣла только въ крайнихъ волокнахъ; во всѣхъ другихъ волокнахъ оно тѣмъ меньше, чѣмъ они ближе къ нейтральной оси. Поэтому и въ такихъ балкахъ сопротивленіе распредѣляется на сѣченіе неравномѣрно.

Если для какихъ-либо двухъ сѣченій означимъ черезъ

M и M_1 —сгибающіе моменты

J и J_1 —моменты инерціи,

e и e_1 —разстоянія наиболѣе напряженныхъ волоконъ, отъ нейтральной оси,

k —предѣльное (допускаемое) напряженіе, то для балки постояннаго сопротивленія должны быть исполнены условія:

$$k = \frac{Me}{J} \quad k = \frac{M_1 e_1}{J_1}$$

Форма таких балок получается поэтому из уравнения:

$$k = \frac{Me}{J} = \frac{M_1 e_1}{J_1} \quad (327)$$

Опредѣлимъ формы балокъ постояннаго сопротивленія закрѣпленныхъ однимъ концомъ и свободныхъ на другомъ, для случаевъ всего чаще встрѣчаемыхъ на практикѣ.

А. Балка прямоугольнаго сѣченія нагружена у свободного конца отдѣльнымъ грузомъ G .—Моментъ въ этомъ случаѣ имѣетъ наибольшее значеніе въ сѣченіи у плоскости задѣлки; вслѣдствіе того отнесемъ величины M_1 , J_1 и e_1 къ закрѣпленному, а M , J и e къ произвольному другому сѣченію и означимъ ширину и высоту перваго черезъ b_1 и h_1 , а послѣдняго черезъ b и h . Считая абсциссы отъ свободного конца будемъ имѣть (чер. 143).

$$M = Gx \quad e = \frac{1}{2}h \quad J = \frac{1}{12}bh^3$$

$$M_1 = Gl \quad e_1 = \frac{1}{2}h_1 \quad J_1 = \frac{1}{12}b_1h_1^3$$

Слѣдовательно, по (327)

$$\frac{Gx \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{12}bh^3} = \frac{Gl \cdot \frac{h_1}{2}}{\frac{1}{12}b_1h_1^3}$$

откуда

$$\frac{x}{l} = \frac{bh^2}{b_1h_1^2} \quad (328)$$

Частные случаи.

1) Ширина b постоянна, т. е.

$$b = b_1.$$

Тогда по (328)

$$\frac{x}{l} = \frac{h^2}{h_1^2} \quad h = h_1 \sqrt{\frac{x}{l}}$$

Этому уравненію соотвѣтствуетъ параболическій тупой клинъ (черт. 144).

2) Высота h постоянна, ($h = h_1$).

Для этого случая получаемъ изъ (328)

$$b = \frac{b_1}{l}x.$$

Балка имѣетъ форму клина (черт. 145).

3) *Сѣченія подобны между собою.*—Такъ какъ для подобныхъ сѣченій

$$\frac{h}{h_1} = \frac{b}{b_1}$$

то по (328)

$$x : l = h^3 : h_1^3$$

откуда

$$h = h_1 \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$$

Балка имѣетъ форму тупой кубическо-параболической пирамиды (черт. 146).

Если означимъ объемъ призматической балки черезъ V , а объемы балокъ, представленныхъ на чертежахъ 144, 145 и 146—черезъ V_1 , V_2 и V_3 , то

$$V = b_1 h_1 l \quad V_1 = \frac{2}{3} b_1 h_1 l \quad V_2 = \frac{1}{2} b_1 h_1 l \quad V_3 = \frac{3}{5} b_1 h_1 l.$$

Поэтому

$$V : V_1 : V_2 : V_3 = 1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{3}{5} = 30 : 20 : 15 : 18.$$

Изъ этой пропорціи видно, что наименѣе матеріала требуетъ балка, изображенная на черт. 145, которая кромѣ того отличается простотой своей формы.

Прогибъ балокъ постояннаго сопротивленія.—Когда призматическая балка нагружена на свободномъ концѣ грузомъ G , то прогибъ этого конца

$$f_0 = \frac{Gl^3}{3EJ}.$$

Для закрѣпленнаго сѣченія

$$M = Gl = \frac{kJ}{e_1},$$

поэтому

$$f_0 = Gl \cdot \frac{l^2}{3EJ} = \frac{kJ}{e_1} \cdot \frac{l^2}{3EJ} = \frac{k}{3} \cdot \frac{l^2}{Ee_1}$$

откуда

$$\frac{k}{E} = \frac{3e_1 f_0}{l^2}.$$

Для балки переменнаго сѣченія

$$f = \frac{1}{E} \int \frac{Mm}{J} dx$$

Если грузъ приложенъ къ свободному концу то (черт. 147)

$$f_q = \frac{1}{E} \int_v^l \frac{M}{J} (x-v) dx$$

или, такъ какъ для балки постоянного сѣченія.

$$\frac{M}{J} = \frac{k}{e}$$

то

$$f_q = \frac{k}{E} \int_v^l \frac{(x-v) dx}{e} = \frac{3f}{l^2} \int_v^l \frac{e_1 (x-v) dx}{e}$$

Когда сѣченіе—прямоугольное, то

$$\frac{e_1}{e} = \frac{h_1}{h}$$

и тогда

$$f_q = \frac{3f_0}{l^2} \int_v^l \frac{h_1}{h} (x-v) dx \quad (329)$$

Частные случаи.

1) *Ширина балки постоянна* ($b_1 = b$).

Въ этомъ случаѣ

$$\frac{h_1}{h} = \sqrt{\frac{l}{x}}$$

слѣдовательно

$$f_q = \frac{3f_0}{l^2} \int_v^l \sqrt{\frac{l}{x}} (x-v) dx = \frac{3f_0 \sqrt{l}}{l^2} \cdot \frac{2}{3} \left[\sqrt{l} (l-3v) + 2v\sqrt{v} \right]$$

$$f_q = 2f_0 \left[1 - \frac{3v}{l} + 2 \sqrt{\left(\frac{v}{l}\right)^3} \right].$$

2) *Высота постоянна.*

Для $h = h_1$ уравненіе (329) получаетъ видъ

$$f = \frac{3f_0}{l^2} \int_v^l (x-v) dx = \frac{3f_0}{l^2} \cdot \frac{1}{2} (l-v)^2$$

$$f = \frac{3}{2} f_0 \left(1 - \frac{v}{l} \right)^2.$$

3) Стыченія подобны между собою.

Такъ какъ

$$\frac{h_1}{h} = \sqrt[3]{\frac{l}{x}}$$

то по (329)

$$f = \frac{3f_0}{l^2} \int_v^1 \sqrt[3]{l} \frac{(x-v)}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3f_0 l^{\frac{1}{3}}}{l^2} \left[\frac{x^{\frac{2}{3}} (x-v)}{\frac{5}{3}} + \frac{-v}{\frac{5}{3}} \int_v^1 x^{-\frac{1}{3}} dx \right]$$

$$= \frac{3f_0 l^{\frac{1}{3}}}{l^2} \left[\frac{3}{5} l^{\frac{2}{3}} (l-v) - \frac{9}{10} v l^{\frac{2}{3}} + \frac{9}{10} v^{\frac{5}{3}} \right]$$

или

$$f = \frac{9}{5} f_0 \left[1 - \frac{5}{2} \frac{v}{l} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{\left(\frac{v}{l}\right)^5} \right]$$

Примѣръ свободнаго конца. Для $v=0$ получаемъ

въ случаѣ 1, $f_1=2f_0$

въ случаѣ 2 : $f_2=3/2 f_0$

въ случаѣ 3 : $f_3=9/5 f_0$.

Поэтому

$$f_1 : f_2 : f_3 = 20 : 15 : 18.$$

Изъ этого уравненія легко узнать что отношеніе прогибовъ свободнаго конца равно отношенію соответственныхъ объемовъ.

Б. Балка прямоугольнаго сѣченія нагружена равномерно по всей длинѣ.

Въ этомъ случаѣ (черт. 148)

$$M = \frac{gx^2}{2} \quad M_1 = \frac{gl^2}{2}$$

слѣдовательно по (327)

$$\frac{\frac{1}{2} gx^2}{\frac{1}{6} bh^2} = \frac{\frac{1}{2} gl^2}{\frac{1}{6} b_1 h_1^2}$$

откуда

$$x^2 : l^2 = bh^2 : b_1 h_1^2 \quad \dots \quad (330)$$

Частные случаи.

1) Высота балки постоянна ($h=h_1$).

Ширина сѣченія, отстоящаго отъ свободнаго конца на разстояніи x , получается изъ уравненія:

$$b = \frac{b_1}{l^2} x^2$$

изъ котораго видно, что балка имѣетъ видъ заостреннаго параболическаго клина (черт. 149).

2) *Ширина постоянна.*

Для $b=b_1$ получаемъ изъ (329)

$$h = \frac{h_1}{l} x$$

Этому уравненію соотвѣтствуетъ форма клина (черт. 150).

3) *Когда сѣченія балки подобны то можно написать*

$$h = \frac{1}{n} h_1 \quad b = \frac{1}{n} b_1$$

и тогда, по (329)

$$h = h_1 \sqrt[3]{\left(\frac{x}{l}\right)^2}$$

Балка имѣетъ видъ пирамиды, которой грани пересѣкаются по параболамъ Нейля.

Если V_1 , V_2 и V_3 —объемы этихъ балокъ, и V —объемъ балки постояннаго сѣченія, то

$$V = b_1 h_1 l \quad V_1 = \frac{1}{3} b_1 h_1 l \quad V_2 = \frac{1}{2} b_1 h_1 l \quad V_3 = \frac{3}{7} b_1 h_1 l$$

Поэтому

$$V : V_1 : V_2 : V_3 = 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{3}{7} = 42 : 14 : 21 : 18$$

Прогибъ балокъ постояннаго сопротивленія, нагруженныхъ равномерно по всей длинѣ.

Прогибъ своднаго конца призматической балки

$$f_0 = \frac{gl^4}{8EJ}$$

Если M_1 —моментъ закрѣпленнаго сѣченія, то

$$M_1 = -\frac{gl^2}{2}$$

поэтому

$$f_0 = \frac{M_1 l^2}{4 E J}$$

Такъ какъ

$$M_1 = \frac{k J_1}{1/2 h_1}$$

то

$$f_0 = \frac{2k}{h_1} \frac{l^2}{4 E} = \frac{k l^2}{2 h_1 E}$$

откуда

$$\frac{k}{e} = \frac{h}{1/2 h} = 4 E \frac{f_0 h_1}{l^2 h}$$

и по (327)

$$\frac{M}{J} = \frac{4 E f_0 h_1}{l^2 h} \dots \dots \dots (331)$$

Величина прогиба сѣченія, отстоящаго отъ свободного конца на разстояніи x , получается изъ уравненія упругой линіи:

$$f = \frac{1}{E} \int \frac{M}{J} \cdot m dx.$$

Такъ какъ

$$m = x - v,$$

то (черт. 150)

$$f = \frac{1}{E} \int_v^l \frac{4 E f_0}{l^2} \cdot \frac{h_1}{h} (x - v) dx$$

или

$$f = \frac{4 f_0}{l^2} \int_v^l \frac{h_1}{h} (x - v) dx \dots \dots \dots (332)$$

1) Ширина балки постоянна. ($b = b_1$)

Въ этомъ случаѣ, по (332)

$$\frac{h_1}{h} = \frac{l}{x},$$

поэтому, по (332)

$$f = \frac{4 f_0}{l^2} \int_v^l l \left(\frac{x - v}{x} \right) dx = \frac{4 f_0}{l} \int_v^l \left(dx - v \frac{dx}{x} \right)$$

$$f = 4 f_0 \left(1 - \frac{v}{l} + \frac{v}{l} \lg \text{nat} \frac{v}{l} \right)$$

2) Высота постоянна. ($h=h_1$)

$$f = \frac{4f_0}{l^2} \int_v^1 (x-v) dx = \frac{4f_0}{l^2} \left[\frac{x^2}{2} - vx \right]_v^1$$

$$f = 2f_0 \left(1 - \frac{v}{l} \right)^2$$

3) Сѣченія подобны.

$$\frac{h}{h_1} = \left(\frac{x}{l} \right)^{2/3}$$

$$f = \frac{4f_0}{l^2} \int_v^1 \frac{l^{2/3} (x-v)}{x^{2/3}} dx$$

$$\int_v^1 x^{-2/3} (x-v) dx = \frac{x^{1/3} (x-v)}{\frac{4}{3}} + \frac{-v}{\frac{4}{3}} x^{-2/3} dx.$$

Помощію этого уравненія получаемъ легко

$$\int_v^1 x^{-2/3} (x-v) dx = \frac{3}{4} l l^{1/3} \left[1 - 4 \frac{v}{l} + \frac{3v}{l} \frac{1}{l^{1/3}} \right]$$

Поэтому

$$f = \frac{4f_0}{l^2} l^{2/3} \frac{3}{4} l l^{1/3} \left[1 - \frac{4v}{l} + \frac{3v}{l^{1/3}} \right]$$

$$f = 3f_0 \left[1 - \frac{4v}{l} + \frac{3v}{l} \sqrt[3]{\frac{v}{l}} \right]$$

Изъ предыдущихъ формулъ получаемъ что прогибъ свободнаго конца ($v=0$)

въ случаѣ 1 : $f_1 = 4f$

въ случаѣ 2 : $f_2 = 2f$

въ случаѣ 3 : $f_3 = 3f$

Графическимъ путемъ прогибъ этихъ балокъ опредѣляется по способу, указанному въ § 108.

§ 109_a.

Примѣчаніе.—Во всѣхъ случаяхъ, разсмотрѣнныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, мы пренебрегали скалывающими усилиями, стремящимися сдвинуть одно сѣченіе вдоль другого. Въ § 98 получено что наибольшее скалывающее напряженіе проявляется въ нейтральной оси, и по (294) оно равно

$$\max t = \frac{TS_m}{\beta_0 J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (294)$$

гдѣ

T —равнодѣйствующая всѣхъ вѣшнихъ силъ (включая сопротивленія опоръ) дѣйствующихъ по одну сторону разсматриваемаго сѣченія,

S_m —статическій моментъ половины сѣченія

β_0 —ширина сѣченія на оси центра тяжести

J —моментъ инерціи.

Если допускаемое напряженіе скалыванію означимъ черезъ k_s , то прочность требуетъ чтобы было исполнено условіе

$$k_s = \frac{TS_m}{\beta_0 J}.$$

Для прямоугольнаго сѣченія, котораго ширина b и высота h

$$J_m = \frac{bh}{2} \cdot \frac{1}{4} h = \frac{bh^2}{8} \quad \beta_0 = b$$

$$J = \frac{1}{12} bh^3$$

слѣдовательно

$$k_s = \frac{T \cdot \frac{bh^2}{8}}{\frac{1}{12} bh^3}$$

откуда

$$bh = \frac{3}{2} \frac{T}{k_s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (333)$$

По (305)

$$bh^2 = \frac{6M}{k}$$

$$bh = \frac{6M}{h} \frac{1}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (334)$$

Балка должна получить такіе размѣры, чтобы всякое сѣченіе ея удовлетворяло уравненіямъ (333) и (334). Такъ какъ моментъ M увеличивается отъ свободнаго конца, на которомъ онъ $=0$, къ закрѣпленному, то формулу (334) слѣдуетъ употреблять начиная съ сѣченія t , для котораго

$$\frac{3}{2} \frac{T}{k_s} = \frac{6}{h} \frac{M}{k}$$

или

$$M = \frac{1}{4} \frac{k}{k_s} T h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (335)$$

Сѣченія между t и свободнымъ концомъ нужно разсчитывать по формулѣ (333).

Когда грузъ G приложенъ къ свободному концу, то

$$T = G \quad M = Gx.$$

Если x_1 —разстояніе отъ свободнаго конца того сѣченія, до котораго слѣдуетъ употреблять формулу 333, то по (335)

$$Gx_1 = \frac{1}{4} \frac{k}{k_s} Gh.$$

Для желѣза

$$\frac{k}{k_s} = \frac{5}{4}$$

слѣдовательно

$$x_1 = \frac{5}{16} h. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (336)$$

Когда балка нагружена равномерно, то

$$T = gx \quad M = \frac{gx^2}{2}$$

поэтому, для желѣза

$$\frac{gx_1^2}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} gx_1 h$$

откуда

$$x_1 = \frac{5}{8} h. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (337)$$

Изъ (336) и (337) видно, что въ обоихъ случаяхъ сѣченія, начиная съ котораго слѣдуетъ употреблять формулу изгиба, находится на весьма близкомъ разстояніи отъ свободнаго конца.

§ 110.

Примѣры.

1.—Опредѣлить нагрузку дубовой балки длиной 1·4 метр., закрѣпленной однимъ концомъ и свободной на другомъ, которой прямоугольное сѣченіе имѣетъ ширину 11 см., и высоту 20 см.

По (305)

$$M = Gl = k \frac{bh^2}{6}$$

Принимая

$$k = 120 \text{ кил. на 1 квадрат. см.}$$

получимъ

$$G \cdot 140 = \frac{120 \cdot 11 \cdot 20^2}{6}$$

откуда

$$G = 628 \cdot 6 \text{ кил.}$$

2.—Опредѣлить высоту поперечнаго сѣченія желѣзной полосы, которой длина 1·5 мтр., и ширина 3 см., закрѣпленной однимъ концомъ, и нагруженной на другомъ концѣ грузомъ = 1000 кил.

По (305), для $k = 800$ кил. на 1 кв. см.

$$1000 \times 150 = \frac{800 \cdot 3 \cdot h^2}{6}$$

откуда

$$h = 19 \cdot 4 \text{ см.}$$

Опредѣлить величину прогиба свободного конца этой полосы.

По формулѣ

$$f = \frac{Gl^3}{3EJ}$$

имѣемъ

$$f = \frac{1000 \cdot 150^3}{3 \cdot 20000000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 19 \cdot 4^3} = 0 \cdot 31 \text{ см.}$$

3.—На концахъ колѣнчатого желѣзнаго рычага AOB (черт. 251) дѣйствуетъ сила 500 кил. попеременно въ ту и другую сторону. Сѣченіе рычага прямоугольное, котораго высота втрое меньше ширины. Опреѣлить размѣры опаснаго сѣченія (черт. 251)

Такъ какъ предѣльныя науряженія равны и противоположны, то по (67)

$$k = \frac{7}{1 + 0 \cdot 4} = 5 \text{ кил. на 1 } qmm$$

$$M=k \frac{bh^2}{6} = \frac{kh^3}{18}$$

$$\frac{500 \times 450}{5} = \frac{h^3}{18}$$

$$h=93mm \quad b=\frac{1}{3}h=31mm.$$

4.—Опредѣлить напряженіе зубцовъ чугунной шестерни, передающей давленіе 1600 кил., если длина зуба 120, ширина 40, и высота—60 миллиметровъ. (черт. 252)

Наибольшій моментъ

$$M_{max}=1600 \times 60$$

поэтому

$$k=\frac{Me}{J}=\frac{1600.60.20}{\frac{1}{12}120.40^3}=3 \text{ кил. на } 1 qmm$$

5.—Требуется опредѣлить величину безопасной равномерной нагрузки для сосновой балки, которой свободная длина 3 метр., а сѣченіе имѣетъ высоту 20 см. и ширину 15 см.

Кромѣ искомой нагрузки G балка должна нести также собственный вѣсъ Q . Если γ —удѣльный вѣсъ дерева,

то

$$Q=\gamma bhl$$

и по формулѣ

$$M=(G+\gamma bhl)\frac{l}{2}=\frac{kbh^2}{6}$$

получимъ, принимая $k=70$ кил. на $1qcm$

$$(G+0.4.3.0.15.0.20)\frac{300}{2}=\frac{70.15.20^2}{6}$$

откуда

$$G=430.6 \text{ кил.}$$

Прогибъ свободного конца

$$f=\frac{(G+Q)l^3}{8EJ}=\frac{466.300^3}{8.20000000.\frac{15.20^3}{12}}=1.3 \text{ см.}$$

6.—Опредѣлить равномерную нагрузку для чугунной балки, которой, сѣченіе представлено на черт. 253. Длина балки 1 метр.

Разстояніе оси центра тяжести отъ верхняго крайняго волокна, по правилу статическихъ моментовъ,

$$e_1 = \frac{12.2.1 + 28.2. \left(\frac{28}{2} + 2 \right)}{12.2 + 28.2} = 11.5 \text{ ст.}$$

$$e_2 = 30 - 11.5 = 18.5$$

$$J = \frac{1}{3} (12.11.5^3 - 10.9.5^3 + 2.18.5^3) = 7447$$

Напряженіе крайнихъ верхнихъ волоконъ

$$\sigma_1 = \frac{Me_1}{J}$$

а крайнихъ нижнихъ

$$\sigma_2 = -\frac{Me_2}{J}$$

Если k_1 —допускаемое напряженіе растяженію, и k_2 —сжатію, то должно

$$\sigma_1 \leq k_1 \text{ и } \sigma_2 \leq k_2$$

слѣдовательно, одновременно должны быть исполнены условія:

$$\frac{Me_1}{J} \leq k_1 \text{ и } \frac{Me_2}{J} \leq k_2$$

или

$$\frac{M}{J} \leq \frac{k_1}{e_1} \text{ и } \frac{M}{J} \leq \frac{k_2}{e_2}$$

Если $\frac{k_1}{e_1} < \frac{k_2}{e_2}$, то оба условія будутъ исполнены, когда

$$\frac{M}{J} = \frac{k_1}{e_1}$$

въ противномъ случаѣ должно

$$\frac{M}{J} = \frac{k_2}{e_2}$$

Принимая для чугуна

$$k_1 = 250 \text{ и}$$

$$k_2 = 500 \text{ кил. на 1 } qcm$$

будемъ имѣть для даннаго сѣченія (черт. 253) предполагая, что горизонтальный фланецъ находится на сторонѣ растяженія,

$$\frac{k_1}{e_1} = \frac{250}{11.5} \sim 21.7 \quad \frac{k_2}{e_2} = \frac{500}{18.5} \sim 27$$

Такъ какъ въ этомъ случаѣ $\frac{k_1}{e_1} < \frac{k_2}{e_2}$, то искомая нагрузка получится по формулѣ

$$M = \frac{Gl}{2} = \frac{k_1 J}{e_1}$$

$$G \cdot \frac{100}{2} = \frac{250.7447}{11.5}$$

откуда

$$G = 3236 \text{ кил.}$$

7.—Вывести формулы для расчета пружины постоянного сопротивленія.

Пружина находится въ состояніи балки, закрѣпленной однимъ концомъ, и нагруженной на другомъ. Такъ какъ толщина пружины постоянная ($h=h_1$), то для постоянного сопротивленія она должна получить треугольный видъ (черт. 254). Основаніе b этого треугольника получается изъ уравненія:

$$Gl = \frac{k b h^2}{6}$$

Прогибъ свободнаго конца

$$f = \frac{Gl^3}{2EJ} = \frac{Gl^3}{2E \frac{1}{12} b h^3} = \frac{6Gl^3}{E b h^3} = \frac{k l^2}{E h}$$

Раздѣлимъ основаніе b на $2n$ равныхъ частей, и разобьемъ треугольникъ сѣченіями $aa_1, bb_1, cc_1, \dots$, проведенными черезъ точки дѣленія перпендикулярно къ основанію, на полосы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Сложимъ полосы γ и γ_1 въ одну полосу C , и положимъ ее подъ δ ; полосы β и β_1 —въ полосу B , и положимъ ее подъ C , и т. д. Такимъ образомъ получимъ пружину, представленную на (черт. 154b) которой крѣпость будетъ очевидно точно такая, какъ данной треугольной пружины. Если означимъ ширину полосу $A, B, \dots$ черезъ b_1 , а толщину—черезъ h , то

$$Gl = \frac{k n b_1 h^2}{6}$$

Изъ этой формулы можно при данныхъ b_1 и h опредѣлить число n полосъ. Длины отдѣльныхъ полосъ получаются построениемъ треугольника (черт. 154).

Прогибъ

$$f = \frac{k l^2}{E h}$$

Если прогибъ данъ, то изъ послѣдней формулы опредѣляютъ h , и затѣмъ, принявъ соотвѣтственно ширину e —число полосъ n .

Изображенную на (черт. 155) рессору можно себѣ представить состоящей изъ двухъ такихъ пружинъ, и разсчитать каждую половину по предыдущимъ формуламъ.

§ 111.

Подвижная нагрузка. Инфлуэнтная линия сгибающихъ моментовъ.—Напряженіе крайнихъ волоконъ опредѣляется выраженіемъ

$$\sigma = \frac{Me}{J}$$

въ которомъ при измѣненіи положенія нагрузки, измѣняется только моментъ M . Въ данномъ сѣченіи будетъ, поэтому, дѣйствовать наибольшее или наименьшее напряженіе тогда, когда нагрузка имѣетъ на балкѣ такое положеніе, что производимый ее въ этомъ сѣченіи моментъ достигнетъ своихъ предѣльныхъ значеній. Это положеніе опредѣляется всего проще помощію инфлуэнтной линіи.

Когда грузъ $=1$ находится между сѣченіемъ q , для котораго требуется построить инфлуэнтную линію, и свободнымъ концомъ, то производимый имъ въ q моментъ (черт. 156).

$$m = v - \xi$$

а когда между этимъ сѣченіемъ и закрѣпленнымъ концомъ, то

$$m = 0$$

Инфлуэнтная линія моментовъ есть, поэтому, прямая, проходящая черезъ точку q , которой ордината на свободномъ концѣ равна v .

Изъ формы инфлуэнтной линіи легко вывести слѣдующія заключенія:

1) Система сосредоточенныхъ грузовъ производитъ въ сѣченіи наибольшій моментъ тогда, когда наиболѣе тяжелые грузы находятся по возможности близко къ свободному концу балки, и когда на балкѣ лежитъ возможно большое число грузовъ.

2) Нагрузка, находящаяся между сѣченіемъ и закрѣпленнымъ концомъ, не имѣетъ на моментъ въ сѣченіи никакого вліянія.

3) Непрерывная равномерная нагрузка, покрывающая всю длину балки, производитъ одновременно во всѣхъ сѣченіяхъ наибольшіе моменты.

4) Такъ какъ грузъ, гдѣ-бы онъ ни находился на балкѣ, производитъ въ сѣченіи только положительный (или только отрицательный) моментъ, то наименьшіе моменты сѣченій равны нулю.

ПРИЛОЖЕНІЯ.

ТАБЛИЦА I.
модулей упругости Е.

МАТЕРІАЛЪ.	Модуль упругости.	
	Въ килогр. на 1 квд. сантимет.	Въ пудахъ на 1 кв. дюймъ.
Алюминій	675000	266000
Бронза	690000	272000
Букъ.	92100	36400
Дубъ, по направл. волоконъ .	117000	
порядіальному напр.	1300	46200
" по касательному напр. .	800	513
Желъзо полосовое	2000000	316
" листовое	1800000	780000
Желъзная проволока	2100000	710000
Золото	800000	830000
Кожанные ремни	730	316000
Латунь.	640000	288
Латунная проволока	987000	252000
Мѣдь красная	1070000	389000
Мѣдные листы.	1070000	422000
Мѣдная проволока	1200000	422000
Олово, литое и прокатное . .	400000	470000
Платина	1600000	158000
Свинець	50000	631000
Свинцовая проволока	70000	20000
Сосна, ель, по напр. волоконъ.	100000	27500
" " " " радіальн	1100	39000
" " " " касательн.	650	430
Стекло	700000	165
Сталь, не закаленная	2046780	275000
" закаленная	2250000	810000
" литая, незакаленная . .	2500000	890000
" " закаленная.	3000000	980000
Серебро	730000	1180000
Цинкъ, литой	950000	288000
Чугунъ, при растяженіи . . .	1000000	375000
" при сжатіи	990000	395000
Ясень	98500	390000
		38800

ТАБЛИЦА П.
степеней прочности.

МАТЕРІАЛЪ.	Времен- ныя, крат- ко срочныя постройки.	Зданія и постройки вообще.	Строитель- ныя и мос- товыя соо- руженія.	Сооруже- нія подвер- гаемыя сильнымъ сотрясені- ямъ (части машинъ).
Желѣзо полосовое	3	4	5—6	7—8
„ листовое	—	4—6	5—7	7—8
Сталь (вообще)	3	4	5—6	7—8
Чугунъ	4	5 7	7—9	10
Дерево.	6	9—10	10—12	15
Камень естественный.	10	20	30	35
„ искусственный.	8	15	20	25
Канаты и ремни.	4	5	6	10

ТАБЛИЦА III.

а) Въ килгр. на квадр. миллиметръ.

МАТЕРІАЛЫ.	Временныя краткосрочныя постройки.			Зданія и постройки вообще.			Стропильныя и мостовыя сооруженія вообще.			Сооруженія подвергаемыя сильнымъ сотресе- ниямъ [детали ма- шинъ].		
	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.
Желѣзо полосовое. . . .	11	11	9	8·5	8·5	7·5	7—6	7—6	6—5	5	5	4
„ листовое. . . .	—	—	—	7·5	7·5	6	7—6	7—6	5·5—4·5	3	3	2·4
Желѣзная проволока. . .	—	—	—	12	—	—	12—10	—	—	8	—	—
Сталь обыкновен. мягкая.	—	—	—	13	13	8	10—9	10—9	8—7	7	7	5·5
„ закаленная.	—	—	—	—	—	—	15—12	15—12	12—9·5	10	10	8
„ литая.	—	—	—	25	25	—	18—13	18—13	15—12	14	14	11
Чугунъ.	3	7·5	2·4	2·5	5	2	2—1·6	10—5	2·2—1·5	1·3	3	1
Дубъ } по направ.	1·3	1·2	0·15	0·9	0·7	0·1	0·8	0·65	0·08	0·6	0·5	0·06
Хвойный лѣсъ } волоконъ.	1·2	1	0·1	0·7	0·6	0·07	0·6	0·5	0·05	0·5	0·4	0·04
Кладка изъ известника .	—	0·5	—	—	0·25	—	—	0·15	—	—	0·1	—
„ „ песчаника. . .	—	0·2	—	—	0·1	—	—	0·07	—	—	0·05	—
„ „ кирпича. . .	—	0·06	—	—	0·03	—	—	0·02	—	—	—	—

б) Въ пудахъ на квадр. дюймъ.

МАТЕРІАЛЫ.	Временныя краткосрочныя сооруженія.			Зданія и постройки вообще.			Стропильныя и мостовыя сооруженія вообще.			Сооруженія подвергаемыя сильнымъ сотресе- ниямъ [детали ма- шинъ].		
	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.
Желѣзо полосовое. . . .	430	430	360	330	330	300	270—230	270—230	230—200	200	200	160
„ листовое. . . .	—	—	—	300	300	240	270—230	270—230	220—180	120	120	195
Желѣзная проволока. . .	—	—	—	470	—	—	470—400	—	—	320	—	—
Сталь обыкновен., мягкая	—	—	—	510	510	320	400—350	400—350	320—280	280	280	220
„ закаленная	—	—	—	—	—	—	590—470	590—470	470—370	400	400	320
„ литая.	—	—	—	1000	1000	—	710—510	710—510	590—470	550	550	430
Чугунъ.	120	300	95	100	200	79	79—63	400—200	87—59	51	120	40
Дубъ } по напр.	51	47	6	35	28	4	32	26	3·2	24	20	2·4
Хвойный лѣсъ } волоконъ.	47	40	4	28	24	2·8	24	20	2	20	16	1·6
Кладка изъ известняка. .	—	20	—	—	10	—	—	6	—	—	4	—
„ „ песчаника. . .	—	8	—	—	4	—	—	2·8	—	—	2	—
„ „ кирпича. . .	—	2·4	—	—	1·2	—	—	0·8	—	—	—	—

ТАБЛИЦА III а)
а) Въ килогр. на 1 квдр. миллиметръ

Материаль.	Допускаемое напряжение.			Предѣлъ упру- гости.			Модуль крѣ- пости.			Модуль уп- ругости.		Измѣненіе длины при предѣлѣ уп- ругости.		Удѣльн. вѣсъ.
	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе и сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	
Металлы.														
Алюминій . . .	—	—	—	—	—	—	20·3	—	—	6750	2531	—	—	2·5
Бронза	—	—	—	2·1	—	—	23	—	—	6900	—	—	—	8·4
Желѣзо полосовое	7	7	5·8	14	14	10·7	40	38	35	20000	7600	0·0007	0·0007	7·78
„ лист., прок.	7	7	5·8	14	14	10·7	33	30	27·5	18000	6600	0·0008	0·0008	7·78
„ ⊥ прок.	—	—	—	12·5	12·5	9·4	33	29	26	18000	—	—	—	7·78
Желѣзная прово- лока.	12	—	—	26	—	—	63	—	—	21000	7600	0·0012	—	7·75
Латунь	2·5	—	1·9	4·85	—	3·64	12·5	7·6	—	6400	2500	0·00076	—	8·55
Латунная прово- лока	6·6	—	5	13·3	—	—	36·5	—	—	9870	—	0·00135	—	8·53
Мѣдь красная . .	6·6	6·6	5	14	14	10·5	21	41	—	10700	4010	0·0013	0·0013	8·88
Мѣдная проволока	6·6	—	—	12	—	—	40·6	—	—	12000	4840	0·001	—	8·89
Мѣдные листы . .	2·5	2	1·5	3	2·75	2	—	—	—	10700	4280	0·00028	0·00025	8·79
Олово литое. . .	0·6	—	—	—	—	—	3·3	—	—	4000	1400	—	—	7·24
Свинецъ.	0·17	—	—	1·03	—	—	1·3	5·1	—	500	187	0·0021	—	11·4
Свинцовая прово- лока.	—	—	—	0·47	—	—	2·2	—	—	700	262·5	0·00067	—	11·4
Сталь обыкновен- ная, цементная .	13·5	13·5	10·3	28	28	23	63	60	43	22000	8400	0·0012	—	7·6
Сталь литая. . .	30	30	22	51	—	40	80	100	65	25000	10400	0·0022	—	7·85
„ пружинная. .	32·2	32·2	24·2	64	—	48	—	—	—	21500	8600	—	—	7·85
Стальная прово- лока.	19·2	—	—	40	—	—	100	—	—	28000	11200	—	—	7·8
Цинкъ литой . .	0·87	—	—	2·3	—	—	5·3	—	—	9500	3600	0·00024	—	7·03
Чугунъ сѣрый. .	2·5	5—7	1·9	6·8	15	5	12·7	75	18	10000	3800	0·00075	0·0015	7·25
Дерево.														
Букъ 	1·2	0·66	0·06	1·72	1·8	—	10	6·3	0·66	921	120	0·00176	0·0016	0·74—0·98
„ ⊥	—	0·36	—	—	—	—	0·73	3·5	—	—	—	—	—	—
Дубъ 	1·1	0·66	0·07	2·7	1·8	—	10	6	0·79	1170	76	0·00233	0·0015	0·74—8·97
„ ⊥	—	0·36	—	—	—	—	0·51	3·5	0·9	—	—	—	—	—
Ель 	0·7	0·44	—	2·6	1·9	—	8·9	4·6	0·42	1270	67	0·0018	0·00145	0·56—0·89
„ ⊥	—	0·22	—	—	—	—	0·48	2·2	0·67	—	—	—	—	—
Лиственница . .	—	—	—	3·2	2·4	—	11·3	5·65	—	1300	—	0·0024	0·0018	0·56
Пихта 	—	—	—	2·3	1·7	—	8	4	—	1200	—	0·0019	0·0014	0·48—0·7
Сосна 	0·7	0·44	0·04	2·56	2·15	—	11	5	0·42	1000	70	0·00213	0·0017	0·48—0·7
„ ⊥	—	0·22	—	—	—	—	0·48	2·2	—	—	—	—	—	—
Ясень 	1·2	0·66	—	2·58	—	—	11	6·6	—	985	—	0·0026	—	0·753
„ ⊥	—	0·36	—	—	—	—	—	3·5	—	—	—	—	—	—

Въ килограммахъ на 1 квадрат. миллиметръ.

МАТЕРІАЛЫ.

МАТЕРІАЛЫ.	Допускаемое напря- женіе.			Предѣлъ упруго- сти.			Модуль крѣпости.			Модуль упруго- сти.			Измѣн. дли- ны при пред- ѣлѣ упру- гости.	Удѣль- ный вѣсъ
	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе и сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.		
Камни, растворы, каменная кладка.														
Базальтъ	—	0·76	—	—	—	—	—	10·20	—	—	—	—	—	3·05
Бетонъ на ра- створѣ изъ гид- равлич. изве- сти	—	0·04	—	—	—	—	—	0·4	—	—	—	—	—	2·3
Гипсъ	—	0·06	—	—	—	—	—	0·6	—	—	—	—	—	2·3
Гнейсъ	—	0·45	—	—	—	—	—	4—8·7	—	—	—	—	—	2·75
Гранитъ	—	0·45	—	—	—	—	—	4—10	—	—	—	—	—	2·75
Доломитъ	—	0·4	—	—	—	—	—	4·5	—	—	—	—	—	2·86
Известнякъ . . .	—	0·3	—	—	—	—	—	3·6—16	—	—	—	—	—	2·65
Кирпичъ кра- сный	—	0·08—0·16	—	—	—	—	—	0·61—1·6	—	—	—	—	—	1·85—2·2
Кирпичъ машин- ный	—	0·3	—	—	—	—	—	2—2·3	—	—	—	—	—	2—2·2
Клинкеръ	—	0·15	—	—	—	—	—	1·5—7	—	—	—	—	—	1·52—2·29
Кладка изъ кир- пича	—	0·1	—	—	—	—	—	0·4—2	—	—	—	—	—	1·63
Кладка изъ из- вестняка	—	0·3	—	—	—	—	—	1·46—4	—	—	—	—	—	2·12
Кладка изъ пе- счаника	—	1·5	—	—	—	—	—	1·5—5	—	—	—	—	—	2·085
Лабрадоръ	—	0·8	—	—	—	—	—	8	—	—	—	—	—	—
Мраморъ	—	0·2	—	—	—	—	—	2·3—8	—	—	—	—	—	2·68
Песчаникъ	—	0·2	—	—	—	—	0·6	1·5—7	—	—	—	—	—	2·3
Порфиръ	—	0·4	—	—	—	—	—	8—20	—	—	—	—	—	2·4—2·8
Растворъ возду- шный	—	0·04	—	—	—	—	0·04	0·4	—	—	—	—	—	1·75
Растворъ гид- равлическій . . .	—	0·04	—	—	—	—	0·07—0·15	0·4	—	—	—	—	—	1·75
Растворъ цемен- тный	0·02	0·15	—	—	—	—	0·09—0·2	1·5	—	—	—	—	—	1·75
Растворъ изъ пущоланы	—	0·03	—	—	—	—	—	0·37	—	—	—	—	—	1·7
Стекло	—	—	—	—	—	—	2·48	2·5	—	70	—	—	—	2·64—3·78
Канаты, цѣпи, ремни.														
Пеньковые ка- наты	0·8—11	—	—	—	—	—	6·1—0·025d	—	—	—	—	—	—	—
Проволочные, железные ка- наты	6·75—12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Обыкновенные железные цѣ- пи	6·3	—	—	—	—	—	20	—	—	—	—	—	—	—
Кожанные, ма- шинные ремни.	0·225	—	—	1·6	—	—	2·0	—	—	17·5	—	—	—	—

6) Въ пудахъ на 1 квадр. дюймъ.

МАТЕРІАЛЫ.	Допускаемое на- пряженіе.			Предѣлъ упругости.			Модуль крѣпости.			Модуль упру- го- сти.	
	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе и сжатіе.	Скалываніе.
МЕТАЛЛЫ.											
Алюминій	—	—	—	—	—	—	800	—	—	266000	100000
Бронза	—	—	—	88	—	—	867	—	—	272000	—
Желѣзо полосовое	276	276	230	550	550	420	1580	1500	1400	790000	300000
„ листовое по прокатк.	276	276	230	550	550	420	1300	1200	1100	710000	260000
„ „ ⊥ по прокатк.	—	—	—	490	490	370	1300	1140	1020	710000	—
Желѣзная проволока	470	—	—	1000	—	—	2500	—	—	830000	300000
Латунь	1000	—	750	190	—	144	490	300	—	252000	100000
Латунная проволока	260	—	200	520	—	—	1050	—	—	389000	155000
Мѣдь красная	260	260	200	550	550	414	830	1600	—	422000	158000
Мѣдная проволока	260	—	—	470	—	—	1600	—	—	470000	190000
Мѣдные листы	100	79	59	120	109	79	—	—	—	422000	169000
Олово литое	24	—	—	—	—	—	130	—	—	158000	55000
Свинець	6·7	—	—	40	—	—	51	200	—	20000	7400
Свинцовая проволока	—	—	—	18·5	—	—	87	—	—	27600	6650
Сталь цементная	530	530	400	1100	1100	900	2500	2360	1700	865000	330000
„ литая	1180	1180	870	2000	—	1600	3200	4000	2500	980000	410000
„ пружинная	1270	1270	990	2500	—	1900	—	—	—	850000	340000
Стальная проволока	750	—	—	1580	—	—	4000	—	—	1100000	440000
Цинкъ литой	34	—	—	90	—	—	210	—	—	370000	140000
Чугунъ сѣрый	98	200—270	79	270	600	200	500	2960	700	394000	150000
ДЕРЕВО.											
Букъ волокн.	47	26	2·5	67	71	—	400	250	26	36400	4700
„ ⊥	—	14	—	—	—	—	29	138	—	—	—
Дубъ 	48	26	2·7	180	71	—	400	240	31	46200	3000
„ ⊥	—	14·4	—	—	—	—	20	138	35	—	—
Ель 	27·6	17·4	—	105	75	—	350	180	16·6	50000	2640
„ ⊥	—	8·7	—	—	—	—	19	87	26·4	—	—
Лиственница	—	—	—	126	94	—	445	222	—	51000	—
Пихта 	—	—	—	91	67	—	316	158	—	47000	—
Сосна 	27·6	17·4	1·6	100	85	—	430	200	16·5	39000	2760
„ ⊥	—	8·7	—	—	—	—	19	87	—	—	—
Ясень 	47	26	—	110	—	—	440	260	—	38800	—
„ ⊥	—	14·4	—	—	—	—	—	13·8	—	—	—

Въ пудахъ на 1 квадрат. дюймъ.

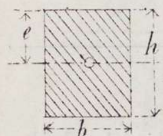
Материалъ.	Допускаемое на- пряженіе.			Предѣлъ упругости			Модуль крѣпости.			Модуль упру- гости.	
	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе.	Сжатіе.	Скалываніе.	Растяженіе и сжатіе.	Скалываніе.
Камни, растворы каменная кладна.											
Базальтъ.	—	30	—	—	—	—	—	400—800	—	—	—
Бетонъ на растворѣ изъ гидравл. извести. . . .	—	1·6	—	—	—	—	—	16	—	—	—
Гипсъ	—	2·4	—	—	—	—	—	24	—	—	—
Гнейсъ	—	18	—	—	—	—	—	160—340	—	—	—
Гранитъ	—	18	—	—	—	—	—	160—400	—	—	—
Доломитъ	—	17	—	—	—	—	—	170	—	—	—
Известнякъ	—	12	—	—	—	—	—	180—630	—	—	—
Кирпичъ красный	—	3—6	—	—	—	—	—	24—63	—	—	—
„ машинный	—	12	—	—	—	—	—	79—91	—	—	—
Клинкеръ	—	5·9	—	—	—	—	—	59—270	—	—	—
Кладка изъ кирпича. . .	—	4	—	—	—	—	—	16—79	—	—	—
„ „ известняка.	—	12	—	—	—	—	—	57—160	—	—	—
„ „ песчаника.	—	59	—	—	—	—	—	60—200	—	—	—
Лабрадоръ	—	32	—	—	—	—	—	320	—	—	—
Мраморъ	—	7·9	—	—	—	—	—	90—320	—	—	—
Песчаникъ	—	7·9	—	—	—	—	24	59—280	—	—	—
Порфиръ	—	16	—	—	—	—	—	320—790	—	—	—
Растворъ воздушный. . .	—	1·6	—	—	—	—	1·6	16	—	—	—
„ гидравлическ.	—	1·6	—	—	—	—	2·7—6	16	—	—	—
„ цементный.	0·8	5·9	—	—	—	—	3·5—7·9	59	—	—	—
„ изъ пуццоланы.	—	1·2	—	—	—	—	—	15	—	—	—
Стекло.	—	—	—	—	—	—	98	—	—	2760	—
Канаты, цѣпи, ремни.											
Пеньковые канаты. . . .	32—43	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Желѣзные проволочные ка- наты.	266—470	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Обыкновенныя желѣзныя цѣпи.	250	—	—	—	—	—	790	—	—	—	—
Кожаные машинные ремни.	8·3	—	—	59	—	—	79	—	—	—	—

Т а б л и ц а VIII.

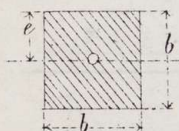
J — моментъ инерціи по отношенію къ оси центра тяжести

e — разстояніе верхняго вологна отъ той же оси

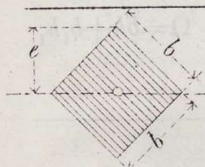
Ω — площадь.



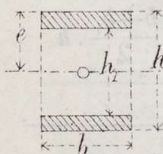
$$J = \frac{1}{12} b h^3 \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = b h$$



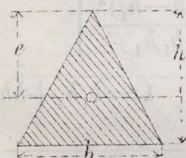
$$J = \frac{1}{12} b^4 \quad e = \frac{b}{2} \quad \Omega = b^2$$



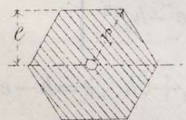
$$J = \frac{1}{12} b^4 \quad e = \frac{b}{\sqrt{2}} \quad \Omega = b^2$$



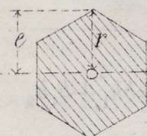
$$J = \frac{1}{12} b (h^3 - h_1^3) \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = b(h - h_1)$$



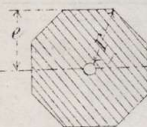
$$J = \frac{b h^3}{36} \quad e = \frac{2}{3} h \quad \Omega = \frac{b h}{2}$$



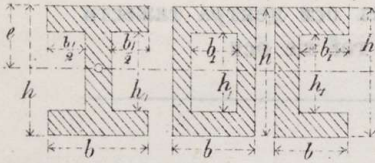
$$J = 0.5413 r^4 \quad e = 0.866 r \quad \Omega = 2.598 r^2$$



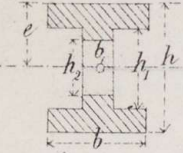
$$J = 0.5413 r^4 \quad e = r \quad \Omega = 2.598 r^2$$



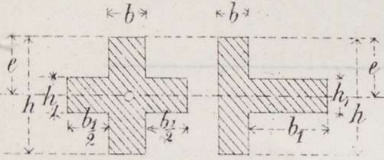
$$J = 0.638 r^4 \quad e = 0.924 r \quad \Omega = 2.828 r^2$$



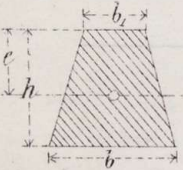
$$J = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12} \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = bh - b_1h_1$$



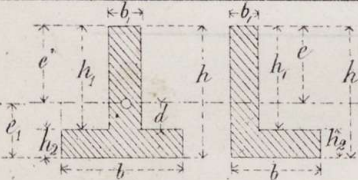
$$J = \frac{1}{12} [bh^3 - (b - b_1)h_1^3] \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = bh - (b - b_1)h_1$$



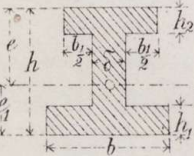
$$J = \frac{1}{12} (bh^3 + b_1h_1^3) \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = bh + b_1h_1$$



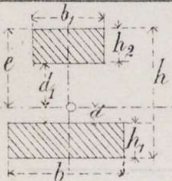
$$J = \frac{b^2 + 4bb_1 + b_1^2}{36(b + b_1)} \quad e = \frac{2b + b_1}{b + b_1} \cdot \frac{h}{3} \quad \Omega = \frac{b + b_1}{2} \cdot h$$



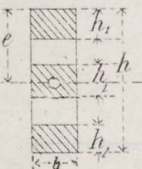
$$J = \frac{1}{12} \left[\frac{(bh^2 - b_1h_1^2)^2}{bh - b_1h_1} - \frac{4bb_1h_1(h - h_1)^2}{bh - b_1h_1} \right] \\ e_1 = \frac{bh_2^2 + b_1h_1(h + h_2)}{2[bh - (b - b_1)h_1]} \quad e = h - e_1 \quad \Omega = b_1h_1 + bh_2$$



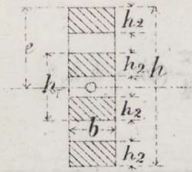
$$J = \frac{1}{3} \left[(b + \delta)e_1^3 - b(e_1 - h_1)^3 + (b_1 + \delta)e^3 - b_1(e - h_2)^3 \right] \\ e_1 = \frac{\delta h^2 + 2b_1hh_2 + bh_1^2 - b_1h_2^2}{2(\delta h + bh_1 + b_1h_2)} \quad \Omega = bh_1 + b_1h_2 + \delta h \quad e = h - e_1$$



$$J = \frac{b}{3} (e_1^3 - d^3) + \frac{b_1}{3} (e^3 - d_1^3) \\ e_1 = \frac{b_1h_2(2h - h_2) + bh_1^2}{2(bh_1 + b_1h_2)} \quad e = h - e_1 \quad \Omega = bh_1 + b_1h_2$$

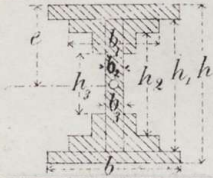


$$J = \frac{b}{12} [9h_1^3 + 6kh_1(h - 2h_1)] \\ e = \frac{h}{2} \quad \Omega = 3bh_1$$



$$J = \frac{b}{12} \left[16h_2^3 + 6bh_2(h - 2h_2) + 6h_1h_2(h_1 - 2h_2) \right]$$

$$e = \frac{h}{2} \quad \Omega = 4bh_2$$



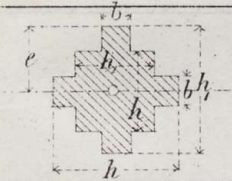
$$J = \frac{1}{12} \left[b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3) + b_2(h_2^3 - h_3^3) + b_3h_3^3 \right]$$

$$e = \frac{h}{2} \quad \Omega = b(h - h_1) + b_1(h_1 - h_2) + b_2(h_2 - h_3) + b_3h_3$$



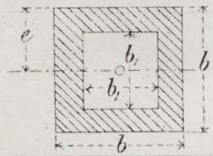
$$J = \frac{1}{12} \left[bh^3 - (b - b_2)h_1^3 + b_1h_2^3 \right]$$

$$e = \frac{h}{2} \quad \Omega = bh - (b - b_2)h_1 + b_1h_2$$

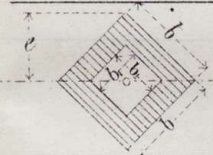


$$J = \frac{1}{12} \left[bh^3 + (h_1 - b)h_1^3 + (h - h_1)b^3 \right]$$

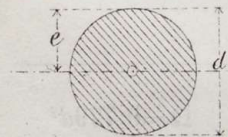
$$e = \frac{h}{2} \quad \Omega = bh + (h_1 - b)h_1 + (h - h_1)b$$



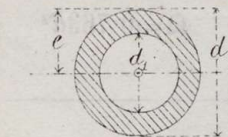
$$J = \frac{b^4 - b_1^4}{12} \quad e = \frac{b}{2} \quad \Omega = b^2 - b_1^2$$



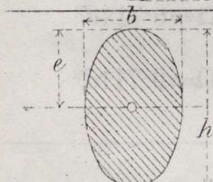
$$J = \frac{b^4 - b_1^4}{12} \quad e = \frac{b}{2} \sqrt{2} \quad \Omega = b^2 - b_1^2$$



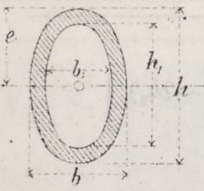
$$J = \frac{\pi}{64} d^4 - 0.0491d^4 \quad e = \frac{d}{2} \quad \Omega = \frac{\pi}{4} d^2$$



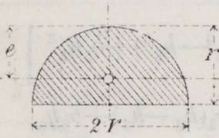
$$J = 0.0491(d^4 - d_1^4) \quad e = \frac{d}{2} \quad \Omega = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)$$



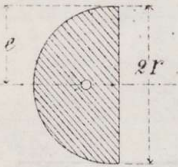
$$J = \frac{\pi}{64} bh^3 - 0.0491bh^3 \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = \frac{\pi}{4} bh$$



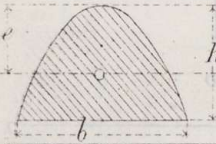
$$J = 0.0491(bh^3 - b_1h_1^3) \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = \frac{\pi}{4}(bh - b_1h_1)$$



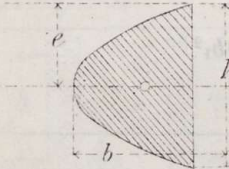
$$J = 0.1098r^4 \quad e = 0.5765r \quad \Omega = \frac{\pi}{2}r^2$$



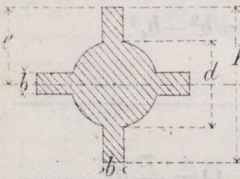
$$J = 0.3927r^4 \quad e = r \quad \Omega = \frac{\pi}{2}r^2$$



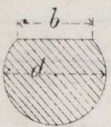
$$J = \frac{8}{175}bh^3 \quad e = \frac{3}{5}h \quad \Omega = \frac{2}{3}bh$$



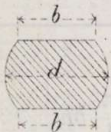
$$J = \frac{1}{30}bh^3 \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = \frac{2}{3}bh$$



$$J = \frac{1}{12} \left[\frac{3\pi}{16}d^4 + b(h^3 - d^3) + b^3(h - d) \right] \quad e = \frac{h}{2} \quad \Omega = \frac{\pi}{4}d^2 + 2b(h - d)$$



$$\begin{aligned} b = \frac{d}{3} & \quad J = 0.048d^4 \quad e_1 = 0.476d \quad \Omega = 0.779d^2 \\ b = \frac{d}{2} & \quad J = 0.044d^4 \quad e_1 = 0.447d \quad \Omega = 0.763d^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b = \frac{d}{3} & \quad e = 0.471d \quad J = 0.047d^4 \quad \Omega = 0.714d^2 \\ b = \frac{d}{2} & \quad J = 0.043d^4 \quad e = 0.433d \quad \Omega = 0.711d^2 \end{aligned}$$

СОЧИНЕНІЯ

М. ЧЕРЕПАШИНСКАГО:

Упрощенная теорія статически неопредѣленныхъ строительныхъ сооружений. С.-Петербургъ, 1886. 1 р. 50 к.

Новый методъ вычисленія размѣровъ желѣзныхъ и стальныхъ сооружений. С.-Петербургъ, 1883.—50 к.

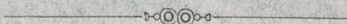
Краткій историческій очеркъ строительной механики. Москва, 1888.—30 к.

Крѣпость склепанныхъ соединеній. (Сочиненіе Унвайна, перев. съ англійскаго). С.-Петербургъ, 1883.—75 к.

Результаты новѣйшихъ опытовъ надъ сопротивленіемъ желѣза и стали. 1886.—20 к.

Мостовыя Лондона. С.-Петербургъ, 1885.—30 коп.

Руководство къ употребленію счетной линейки новой системы. С.-Петербургъ, 1886.—50 коп.



ТЕОРІЯ СООРУЖЕНІЙ.

АНАЛИТИЧЕСКІЙ и ГРАФИЧЕСКІЙ РАЗСЧЕТЪ
СООРУЖЕНІЙ
ПО НОВѢЙШИМЪ МЕТОДАМЪ

СОСТАВИЛЪ

М. Черепашинскій,

Профессоръ Императорскаго Техническаго Училища
и Приватъ-Доцентъ Университета въ Москвѣ.

Атласъ съ 8 листами чертежей.

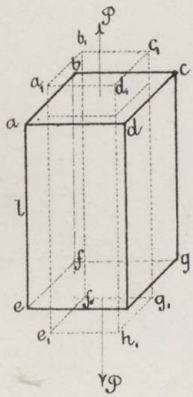
Выпускъ I.

МОСКВА.

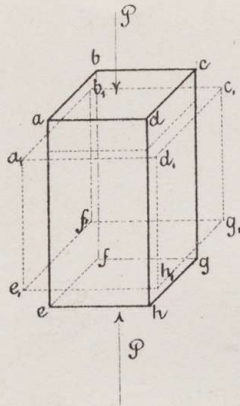
Типографія Общества распростран. полезн. книгъ. Моховая, д. Торлецкой.

1889.

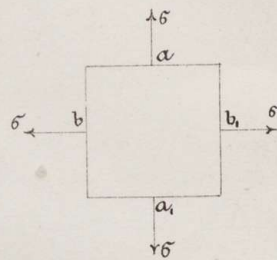
1a.



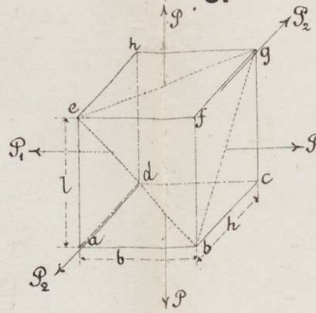
1b.



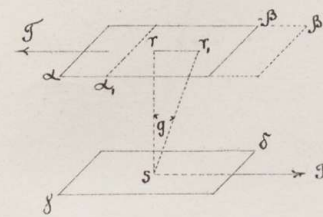
2.



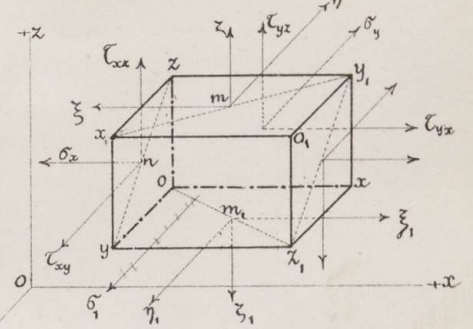
3.



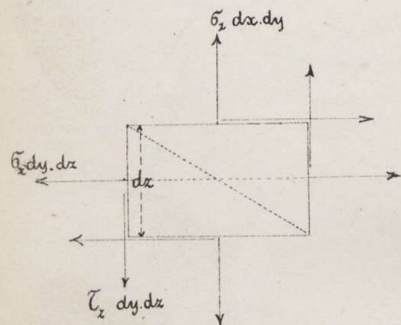
4.



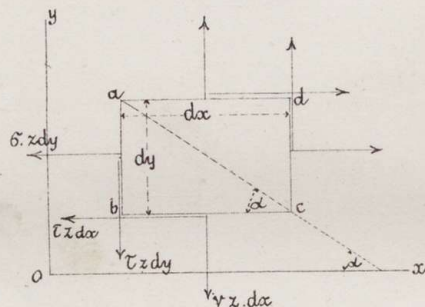
5.



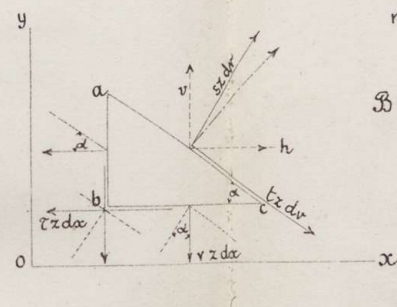
6.



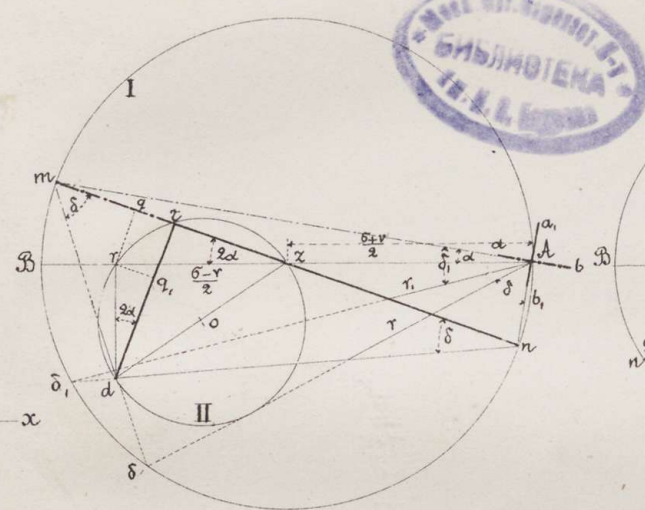
7.



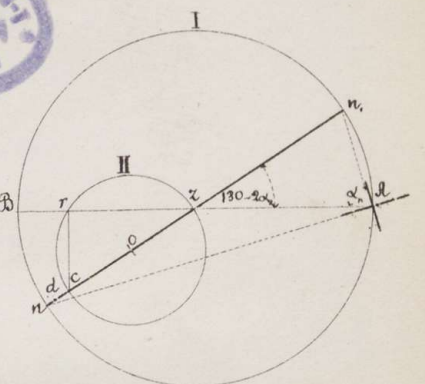
8.



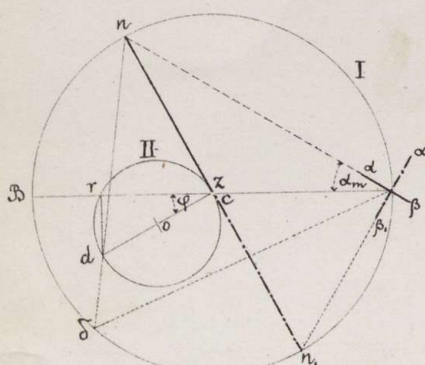
9.



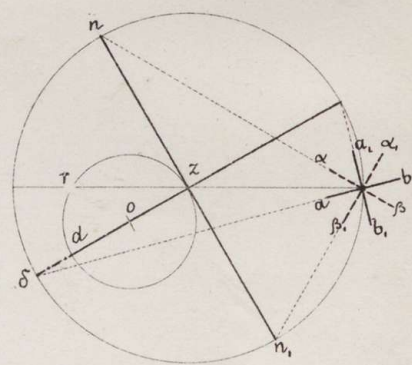
10.



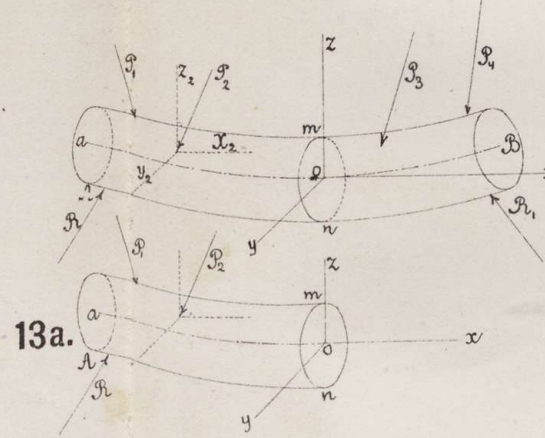
11.



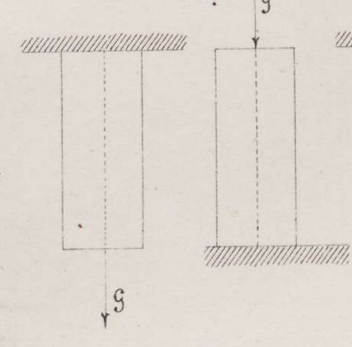
12.



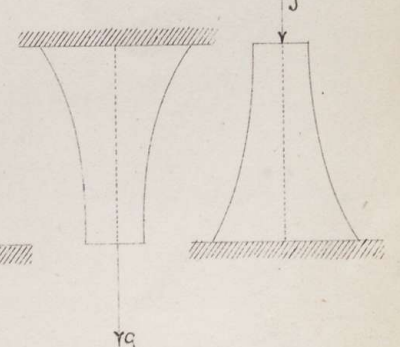
13.

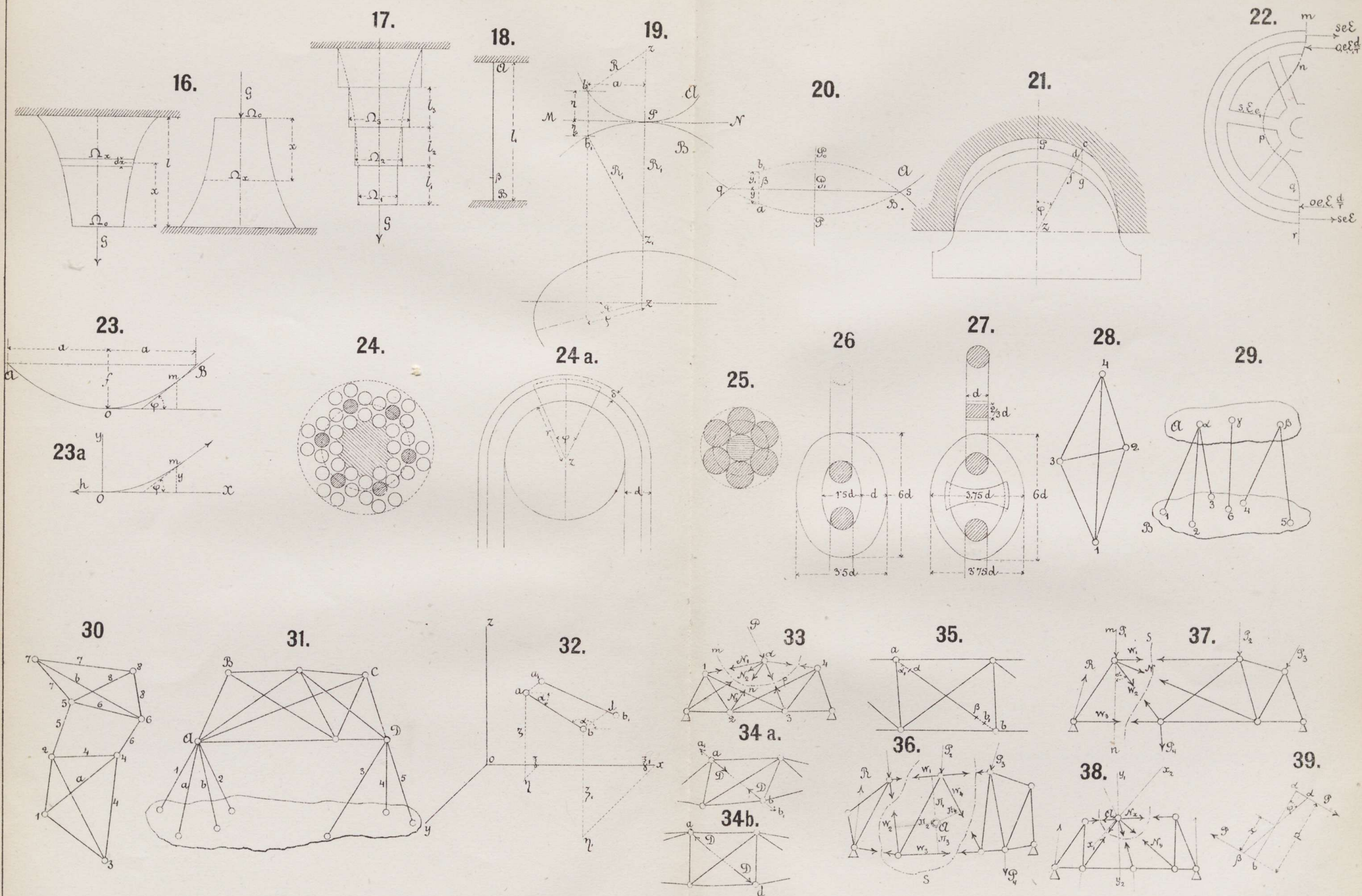


14.



15.

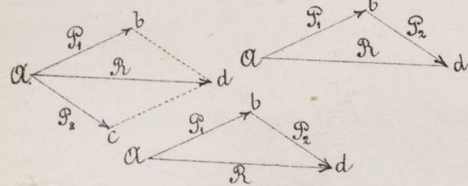




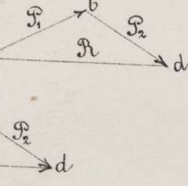
40.

$m \mid 1 \mid n$

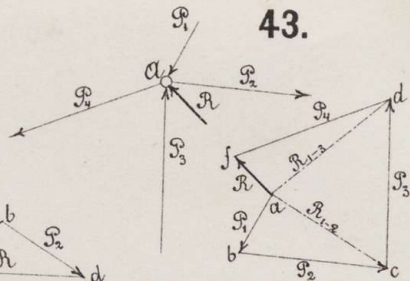
41.



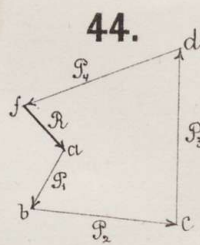
42.



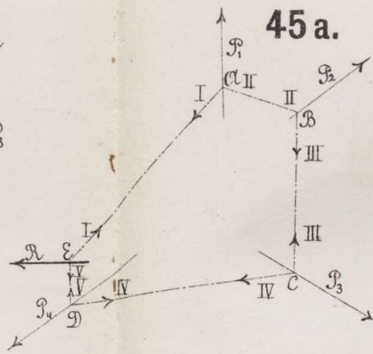
43.



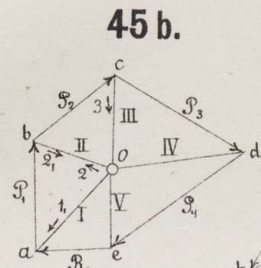
44.



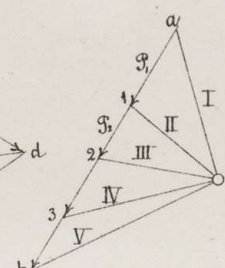
45 a.



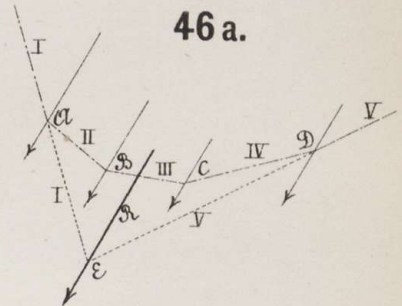
45 b.



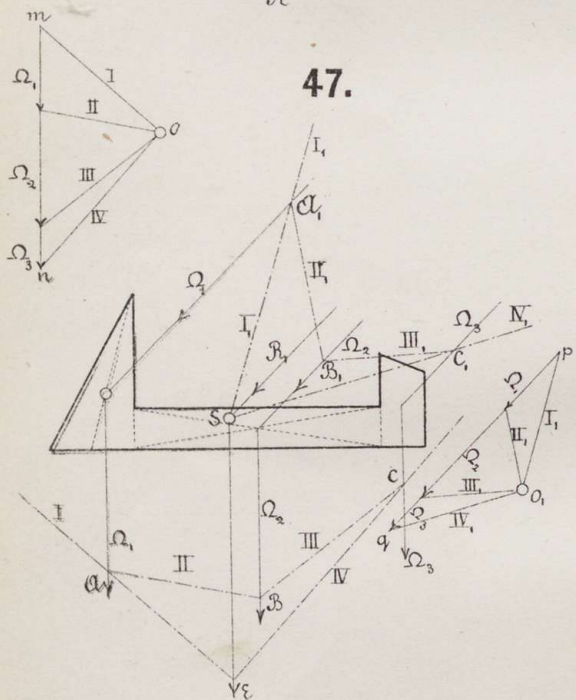
46 b.



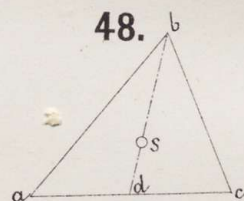
46 a.



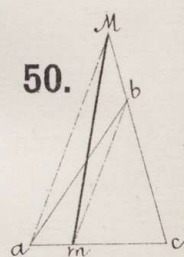
47.



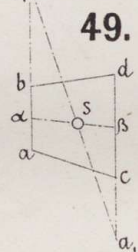
48.



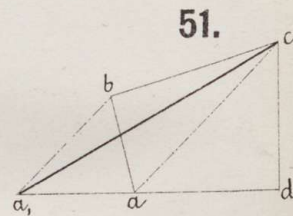
50.



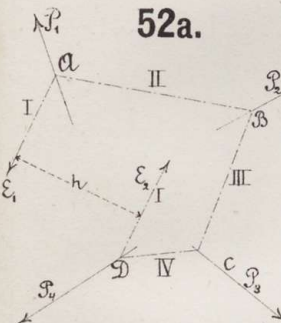
49.



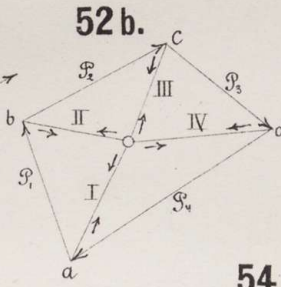
51.



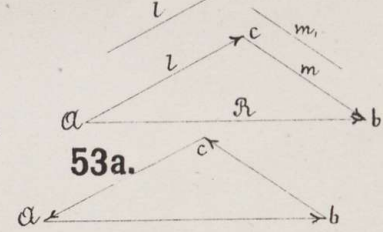
52 a.



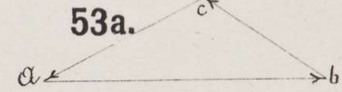
52 b.



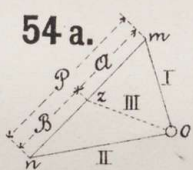
53.



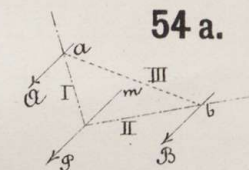
53 a.



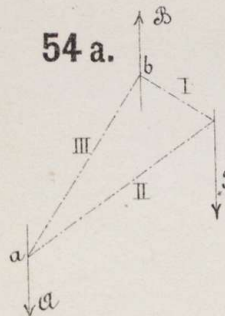
54 a.



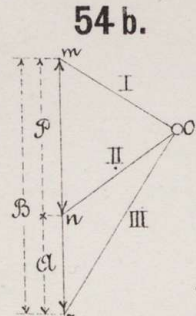
54 b.



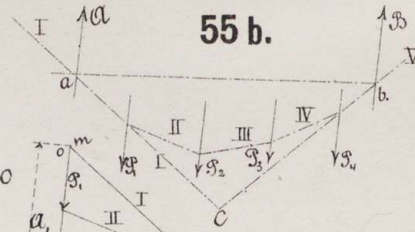
54 a.



54 b.



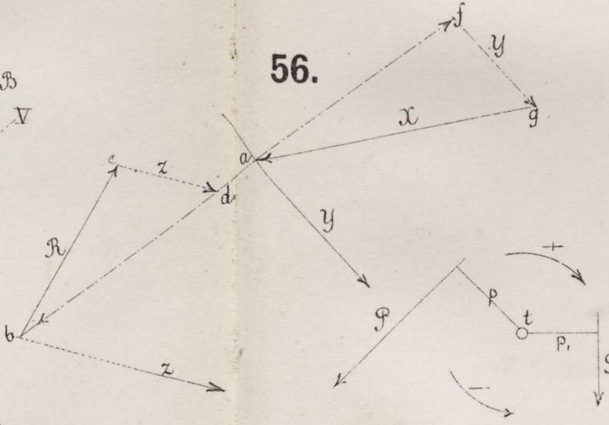
55 b.



55 a.



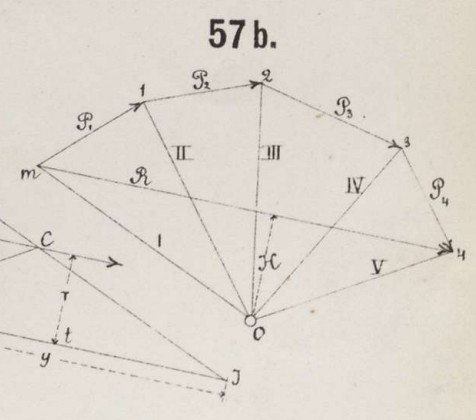
56.

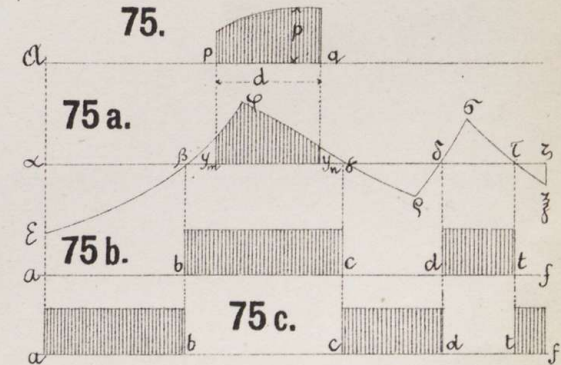
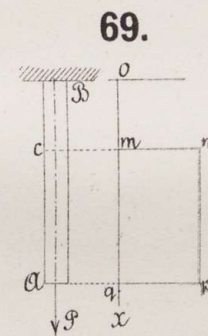
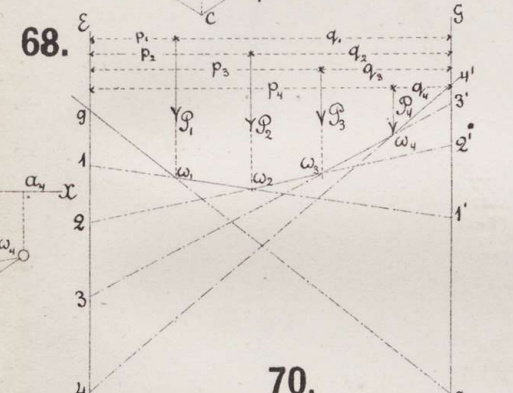
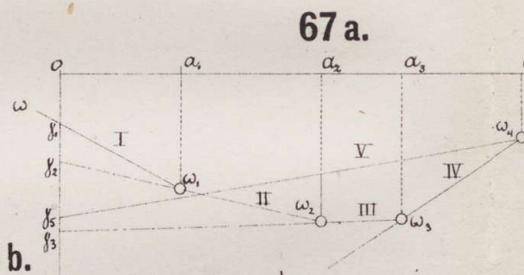
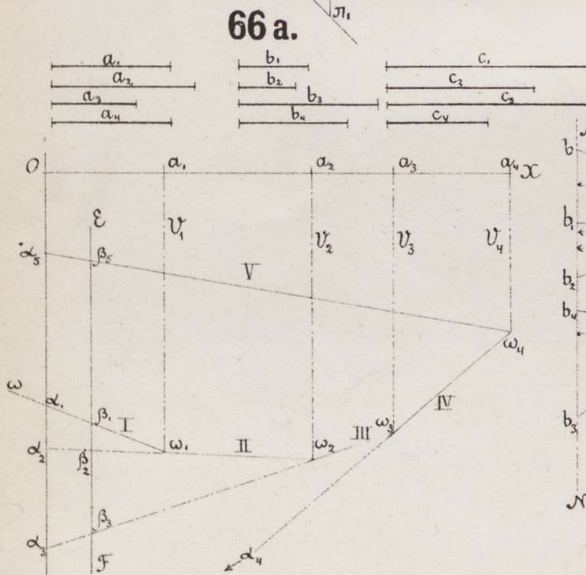
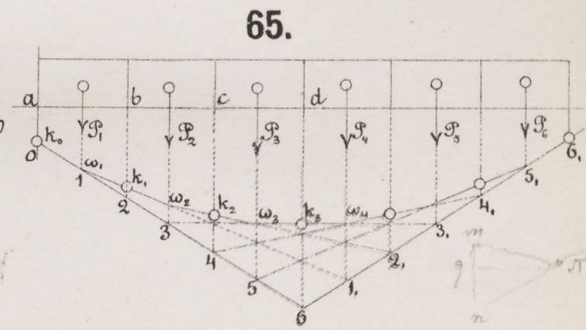
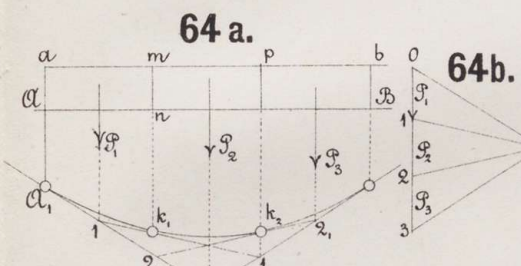
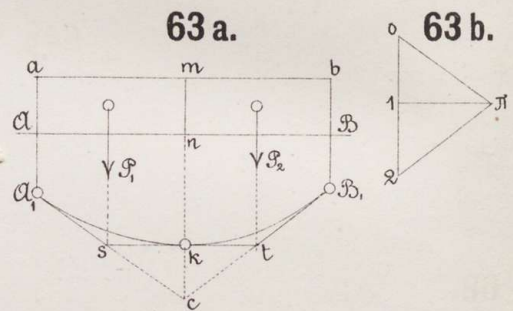
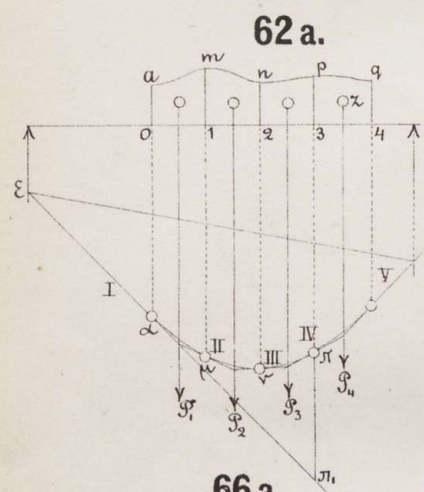
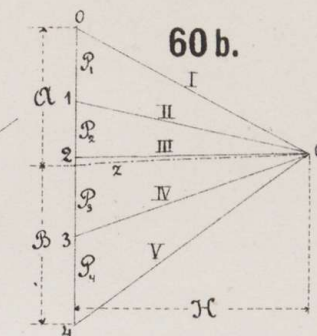
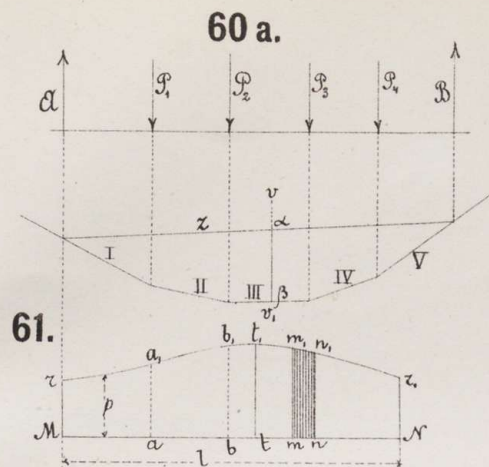
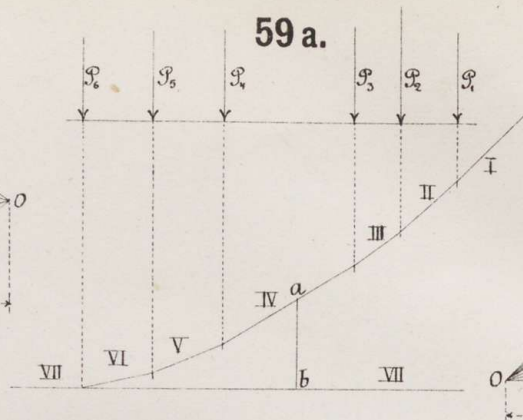
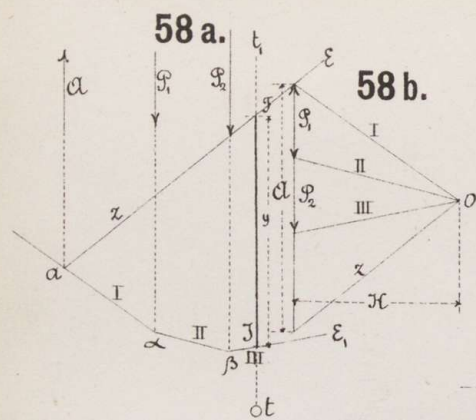


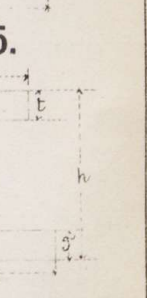
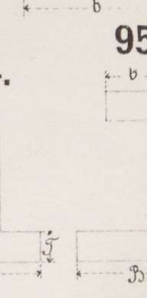
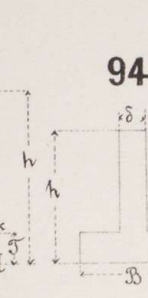
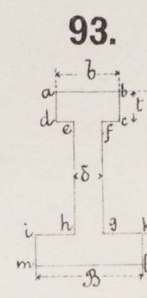
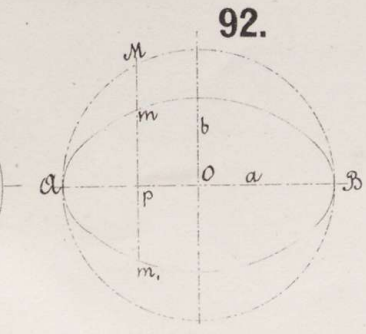
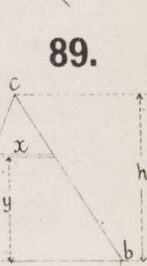
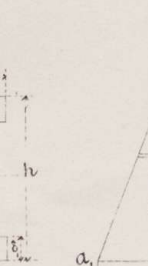
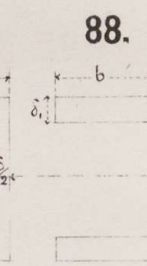
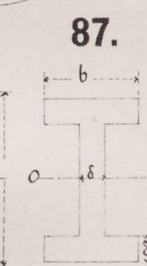
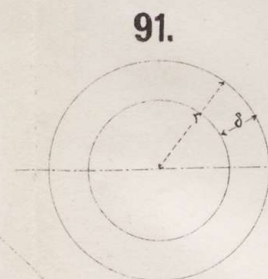
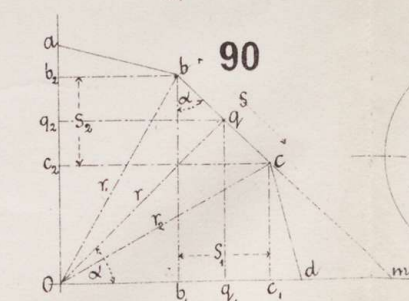
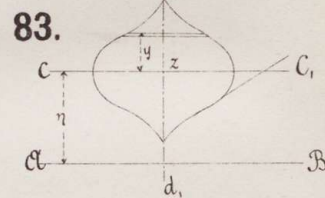
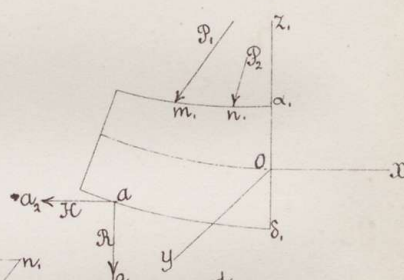
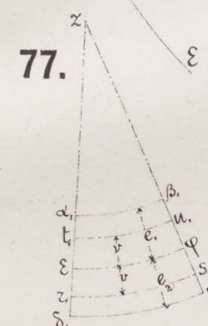
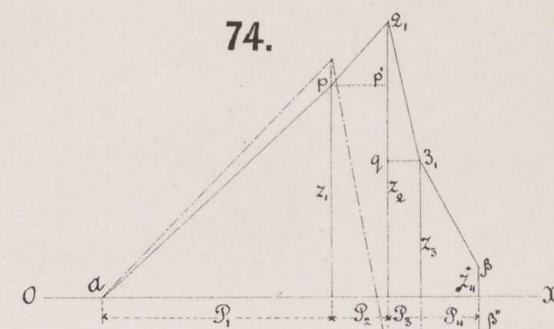
57 a.

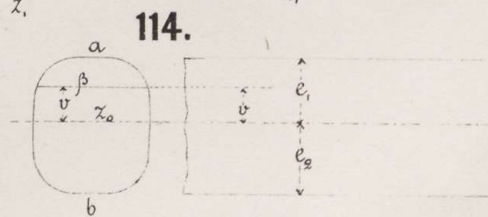
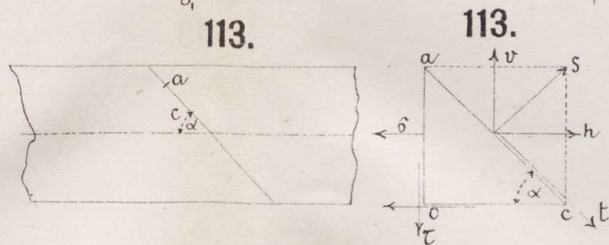
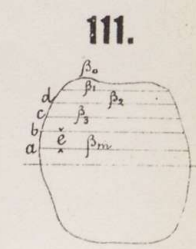
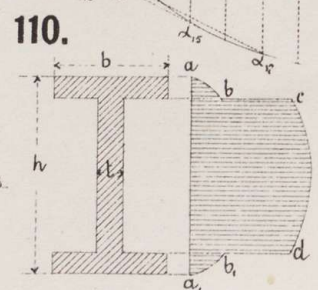
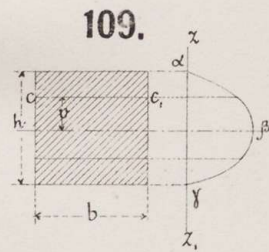
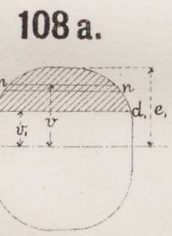
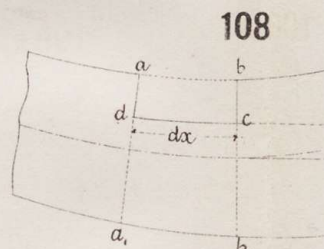
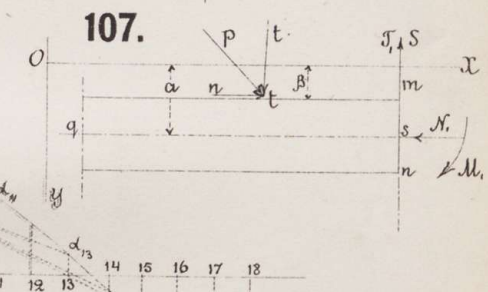
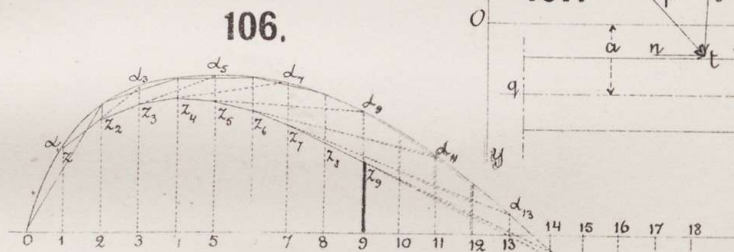
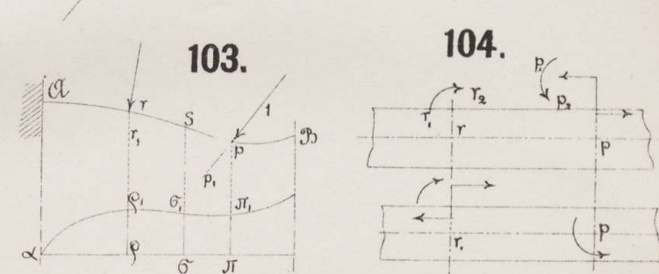
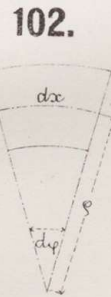
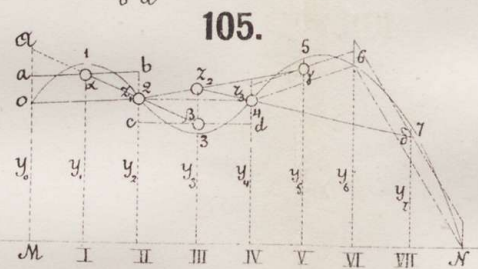
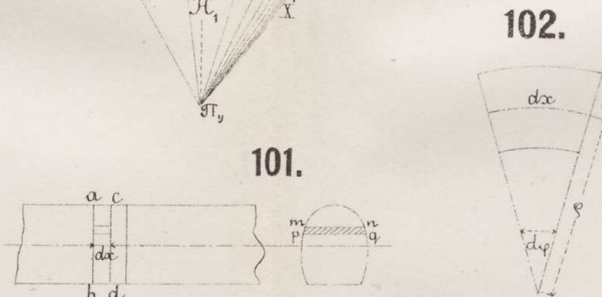
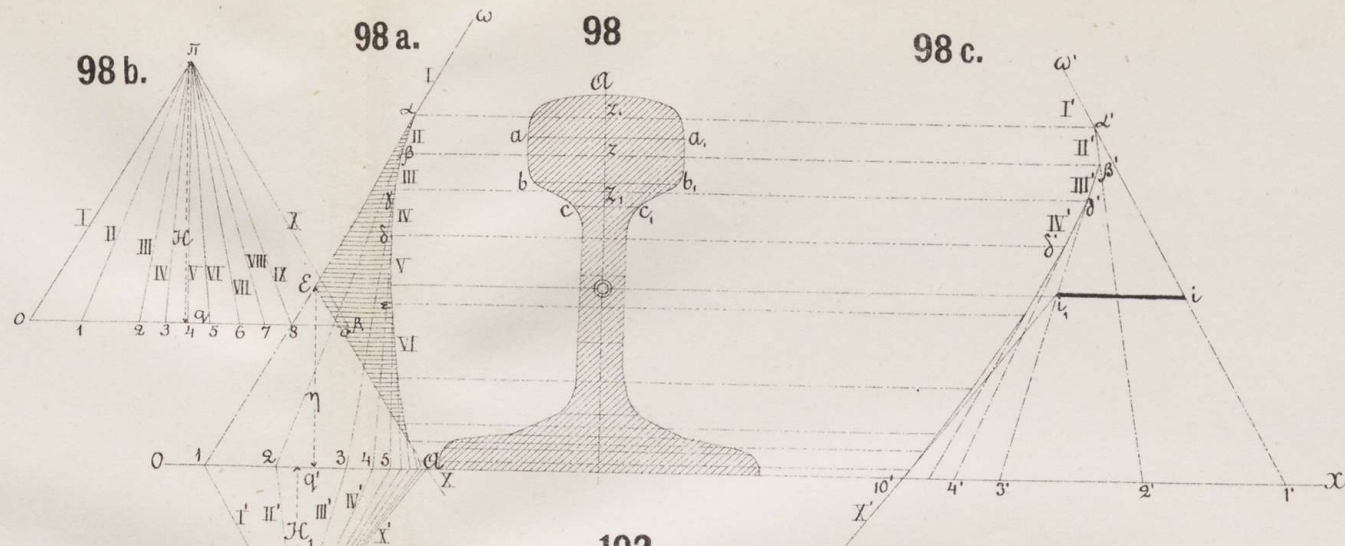
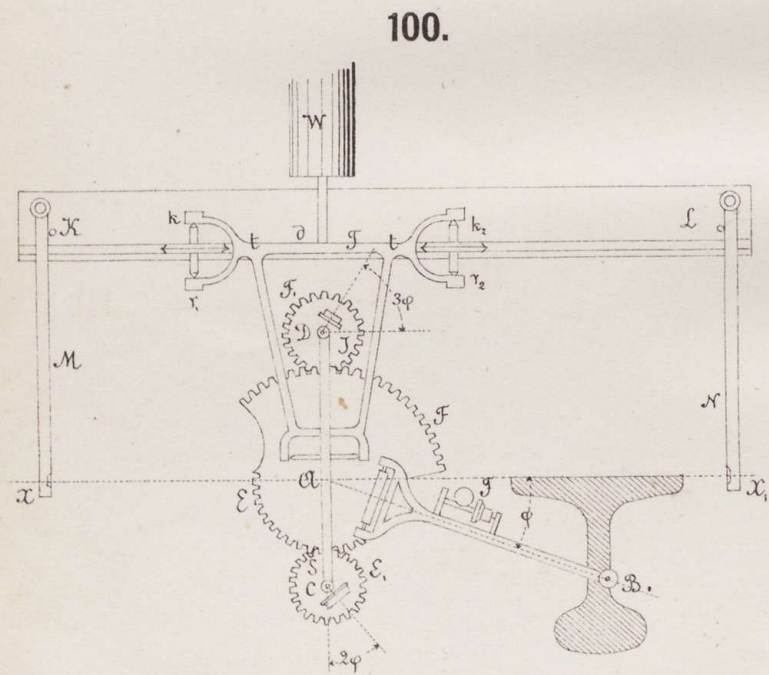
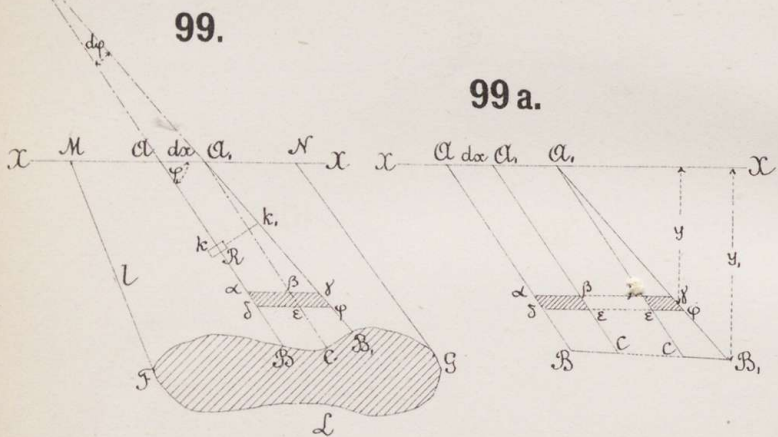
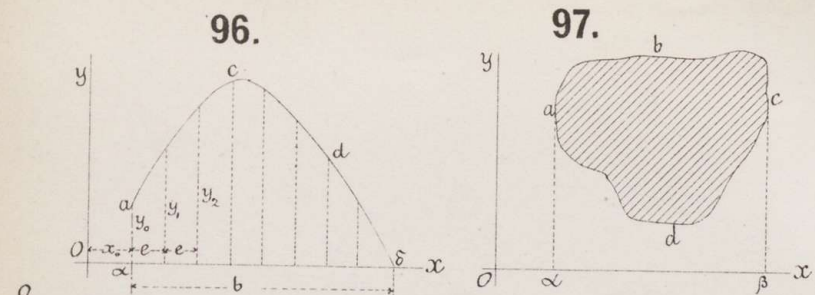


57 b.

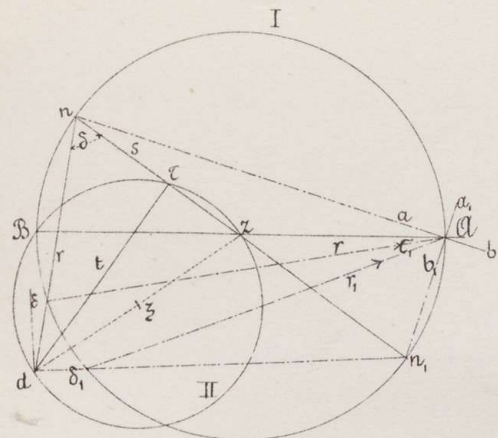




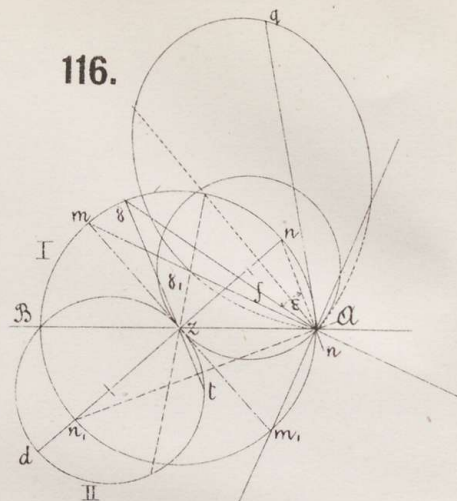




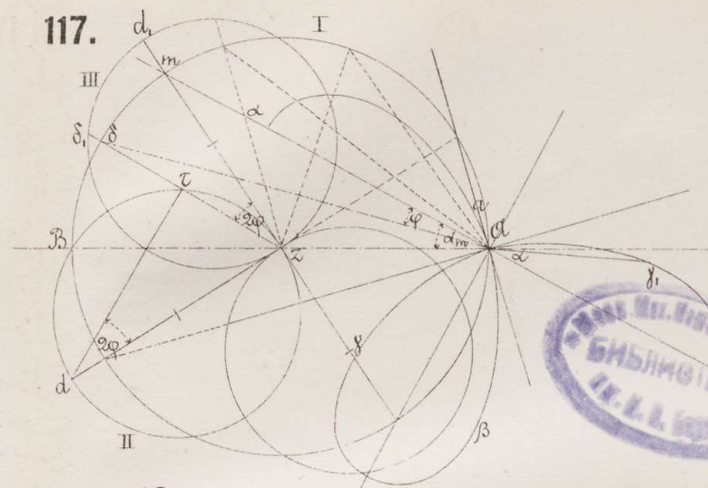
115.



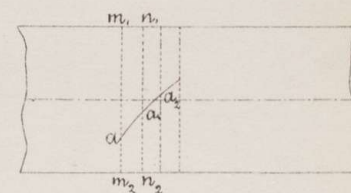
116.



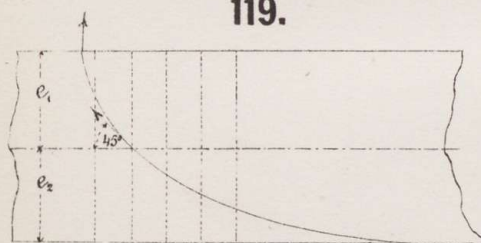
117.



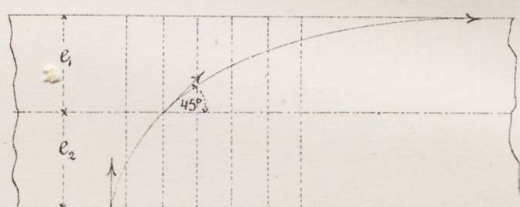
118.



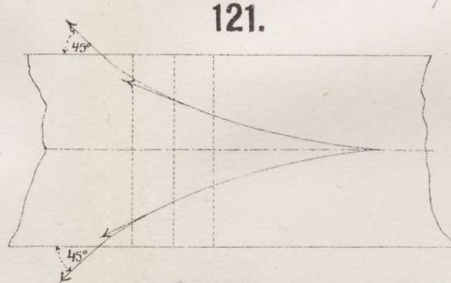
119.



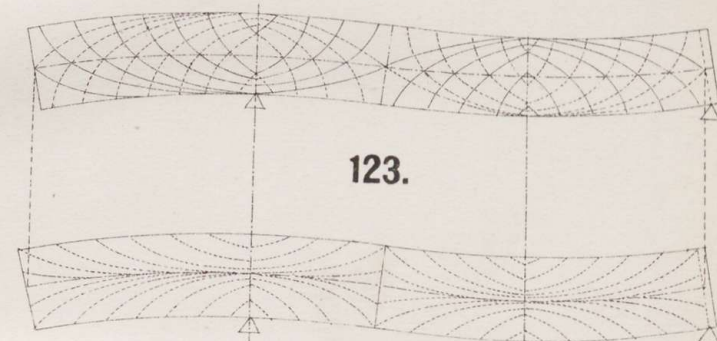
120.



121.



122.

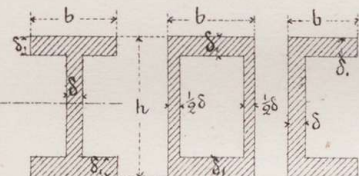


123.

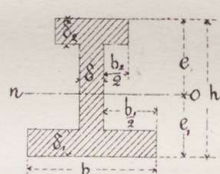
124.



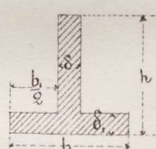
125.



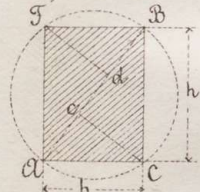
126.



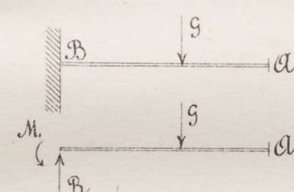
127.



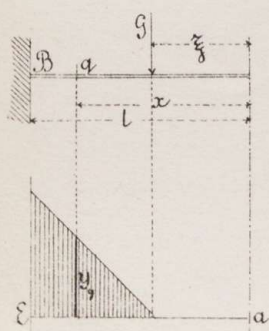
128.



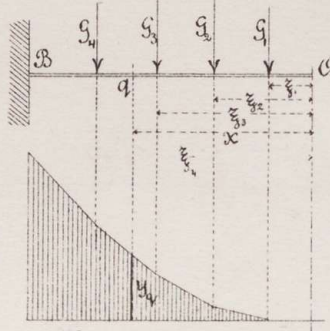
129.



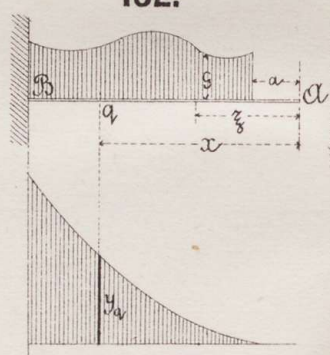
130.



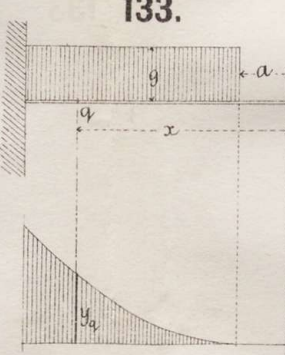
131.



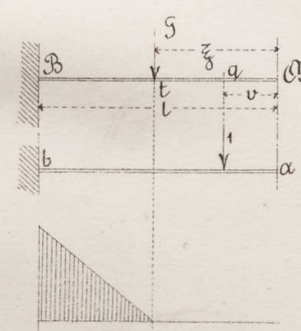
132.



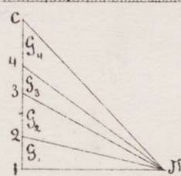
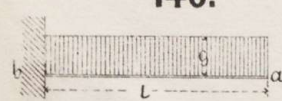
133.



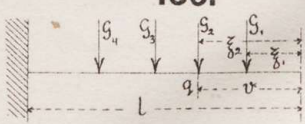
134.



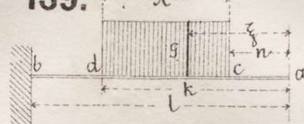
140.



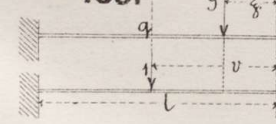
136.



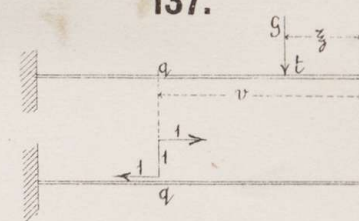
139.



135.



137.



138.

