



На правах рукописи

Ткачев Сергей Борисович

**СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕМИНИМАЛЬНО ФАЗОВЫХ
АФФИННЫХ СИСТЕМ
МЕТОДОМ ВИРТУАЛЬНЫХ ВЫХОДОВ**

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление
и обработка информации

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2010

2

Работа выполнена в Государственном образовательном
учреждении высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана».

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Григоренко Н.Л.

доктор физико-математических наук,
профессор Яковенко Г. Н.

доктор физико-математических наук,
профессор Раппопорт Л.Б.

Ведущая организация: Вычислительный центр
имени А. А. Дородницына РАН

НТБ МГТУ им. Н. Э. Баумана



1942278
Ткачев С.Б. Стабилизация

Защита диссертации состоится «20» апреля 2010 года
в 11 часов 00 мин. на заседании диссертационного совета
Д 212.141.15 при Московском государственном техническом универ-
ситете имени Н. Э. Баумана по адресу: 105005, Москва, 2-я Бау-
манская ул., д. 5.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью
организации, просим высылать по адресу: 105005, Москва, 2-я Бау-
манская ул., д. 5, МГТУ им. Н. Э. Баумана, ученому секретарю
совета Д 212.141.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского
государственного технического университета имени Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан «10» мая 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
к.т.н., доцент

Аттетков А.В.

ам. пен.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория нелинейных динамических систем с управлением активно развивается последние тридцать лет и в ней получен ряд важных теоретических результатов, позволяющих для достаточно широкого класса систем решать задачи стабилизации положений равновесия или задачи стабилизации заданных программных движений. Эти результаты нашли свое применение при разработке алгоритмов управления различными техническими системами (например, летательными и космическими аппаратами, робототехническими системами, химическими реакторами). Основой для этих результатов послужил аппарат дифференциальной геометрии, с использованием которого оказалось удобным исследовать и описывать свойства нелинейных систем. Основное внимание при этом уделялось аффинным системам — нелинейным системам, линейным по управлению. Среди таких систем были выделены специальные виды, для которых разработаны методы решения задачи стабилизации и с использованием дифференциально-геометрического подхода получены условия эквивалентности аффинных систем и систем специального вида.

Среди систем специального вида выделены канонические и квазиканонические виды стационарных и нестационарных аффинных систем со скалярным и векторным управлением (Жевнин А.А., Крищенко А.П., Brockett R.W., Hunt L.R., Su R., Meyer G., Jancubczyk B., Respondek W.). Для аффинных систем, преобразуемых к регулярному каноническому виду, решение задачи стабилизации положения равновесия известно и один из подходов заключается в преобразовании исходной системы в линейную управляемую систему с помощью нелинейной замены переменных и введения нового управления.

Известен подход к преобразованию нелинейной системы с управлением в линейную систему, основанный на расширении пространства состояний путем рассмотрения в качестве дополнительных переменных производных от управления и введении новых управлений (Aranda-Bricaire E., Moog C. H., Pomet J.-B., Fliess M., Lévine J., Четвериков В.Н.).

Условия приводимости аффинной системы к каноническому виду выполнены не всегда, и довольно часто система может быть преобразована только к квазиканоническому виду (Крищенко А.П.).

Отметим, что функцию, определяющую преобразование аффинной системы к квазиканоническому виду, часто удобно рассматривать как выход системы.

Для стационарных аффинных систем с выходом введены нормальные формы (Butnes C., Isidori A.). Отличие задачи преобразования аффинной системы к квазиканоническому виду от задачи преобразования к нормальной форме заключается в том, что в первом случае соответствующую функцию необходимо найти, а во втором случае эта функция (выход) задана.

Для решения задачи стабилизации положения равновесия стационарной аффинной системы, преобразованной к квазиканоническому виду или нормальной форме, существенным является наличие свойства минимальной фазовости. Для минимально фазовых систем известно решение задачи стабилизации положения равновесия статическими и динамическими обратными связями по состоянию (Butnes C., Isidori A.).

В случае, если аффинная система не является минимально фазовой, проблема стабилизации ее положения равновесия оказалась достаточно сложной и подходы к ее решению известны в частных случаях. В результате, несмотря на наличие различных подходов (Allgower F., Tornambe A., Zou Q., Devasia S., Kravaris C., Fliess M., Sira-Ramirez H., Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V., Kazantzis N. и др.), проблема разработки достаточно общих методов стабилизации неминимально фазовых аффинных систем остается актуальной.

Задача стабилизации программного движения аффинной системы сводится к задаче стабилизации нулевого положения равновесия нестационарной аффинной системы. Однако известные для стационарных аффинных систем понятия и результаты, связанные с использованием квазиканонического вида и нормальной формы для решения задач стабилизации положения равновесия в минимально фазовом случае, до настоящего времени не были обобщены на нестационарные аффинные системы из-за важных особенностей нестационарного случая. Поэтому актуальной оказалась проблема разработки для нестационарных аффинных систем теории нормальной формы и ее использования при решении задач стабилизации.

Целью работы является разработка теоретических основ и метода стабилизации положений равновесия стационарных неминимально фазовых систем и нестационарных аффинных систем.

Задачами исследования являются:

- разработка метода стабилизации положений равновесия для стационарных неминимально фазовых аффинных систем;
- создание теории нормальной формы для нестационарных аффинных систем;
- обобщение метода стабилизации положений равновесия стационарных систем на случай нестационарных аффинных систем на основе преобразования к нестационарной нормальной форме;
- применение метода стабилизации положений равновесия нестационарных аффинных систем для стабилизации программных движений стационарных аффинных систем на основе преобразования к нормальной форме;
- обоснование принципа разделения задач наблюдения и глобальной стабилизации положения равновесия.

Методы исследования. В диссертации применяются методы математической теории управления, теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и дифференциальной геометрии.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные новые результаты, которые выносятся на защиту:

1. Теоретические основы преобразования стационарных аффинных систем к нормальной форме с асимптотически устойчивой нулевой динамикой.
2. Теория нормальной формы нестационарных аффинных систем с выходом.
3. Метод виртуальных выходов стабилизации положений равновесия стационарных аффинных систем, равномерной стабилизации положений равновесия нестационарных систем и программных движений стационарных аффинных систем.
4. Обоснование принципа разделения задач наблюдения и глобальной стабилизации для стационарных аффинных систем, допускающих построение наблюдателя состояния с линейной динамикой ошибки.

Результаты диссертации носят теоретический характер и являются развитием математической теории управления.

Достоверность результатов подтверждена строгими доказательствами и результатами численных расчетов.

Практическая ценность полученных результатов состоит в том, что теоретические результаты доведены до конструктивных

методов, позволяющих решать задачи локальной и глобальной стабилизации стационарных неминимально фазовых и нестационарных аффинных систем.

Разработанные методы позволяют существенно расширить множество стабилизируемых аффинных систем и могут быть использованы в задачах управления техническими системами.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на заседаниях Всероссийского научного семинара под рук. акад. С.В. Емельянова и акад. С.К. Коровина (Москва, ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006 и 2008 гг.), на VI международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (2000, Москва, Россия), на втором международном конгрессе "Нелинейный динамический анализ" (2002, Москва, Россия), на XIV международной научно-технической конференции "Process Control'02", (2002, Kouti-nad-Desnoi, Чехия), на международном семинаре им. Е.С. Пятницкого "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (2002, Москва, Россия), на XV всемирном конгрессе IFAC (2002, Барселона, Испания), на XV международной научно-технической конференции "Process Control 03" (2003, Strebsko Pleso, Словакия), на международной научно-технической конференции "Physics and Control'03" (2003, Санкт-Петербург, Россия), на VI симпозиуме IFAC "Nonlinear Control Systems'04" (2004, Штутгарт, Германия), на II международной конференции "Physics and Control'05" (2005, Санкт-Петербург, Россия), на I международной конференции "Системный анализ и информационные технологии (САИТ-2005)" (2005, Переяславль-Залеский, Россия), на IX международном семинаре им. Е.С.Пятницкого "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (2006, Москва, Россия), на III международной конференции "Physics and Control'07" (2007, Потсдам, Германия), на II международной конференции "Системный анализ и информационные технологии (САИТ-2007)" (2007, Обнинск, Россия), на X международном семинаре им. Е.С. Пятницкого "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (2008, Москва, Россия), на международной конференции "Дифференциальные уравнения и топология", посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (2008, Москва, Россия), на международной конференции "Управление динамическими системами" (2009, Москва, Россия), на международной конференции "Математическая теория систем" (2009, ИПУ РАН, Москва, Россия).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 02-01-00704, № 05-01-00840, № 06-07-89265, № 07-07-00223, № 08-01-00203, № 09-07-00468, проекта УР.03.01.018 программы "Университеты России — фундаментальные исследования" Министерства образования РФ, проекта УР.03.01.141 раздела 1.2. программы "Университеты России" подпрограммы "Фундаментальные исследования", проекта 2.1.1.2381 аналитической ведомственной программы "Развитие научного потенциала высшей школы на 2006–2008 г.", проекта 2.1.1/227 аналитической ведомственной программы "Развитие научного потенциала высшей школы на 2009–2010 г." и проекта 1.13 программы ОИТВС РАН "Фундаментальные основы информационных технологий и вычислительных систем".

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 23 научных статьях [2, 3, 5, 7–16, 18–26, 30], в том числе в 13 статьях [2, 3, 8, 11, 13, 14, 18–21, 25, 26, 30], опубликованных в журналах из Перечня ведущих научных журналов и изданий ВАК, и 9 тезисах докладов [1, 4, 6, 17, 27–29, 31, 32].

Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, выводов, списка литературы и одного приложения. Работа изложена на 258 страницах, содержит 34 иллюстрации. Библиография включает 174 наименования.

Автор выражает глубокую признательность д.ф.-м.н., профессору Крищенко Александру Петровичу за научные консультации и поддержку.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цели и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертации.

В первой главе рассматривается задача о преобразовании стационарной аффинной системы со скалярным управлением к квазиканоническому виду и к нормальной форме, а также приводятся

основные сведения о построении стабилизирующей обратной связи для аффинных систем, преобразуемых к нормальной форме с асимптотически (экспоненциально) устойчивой нулевой динамикой.

В разделе 1.1 содержится введение к главе.

В разделе 1.2 для гладкой стационарной аффинной системы со скалярным управлением

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x) + B(x)u, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^1, \\ A(x) &= (a_1(x), \dots, a_n(x))^T, B(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))^T, \\ a_i(x), b_i(x) &\in C^\infty(\Omega), i = \overline{1, n}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, (\cdot) = d(\cdot)/dt,\end{aligned}\quad (1)$$

где t — независимое переменное, приводятся основные сведения о преобразовании к квазиканоническому виду (А.П. Крищенко), а при наличии выхода у системы (1) — к нормальной форме (Burgnes C., Isidori A.).

Пусть в качестве выхода выбрана произвольная функция $y = \phi(x)$, где $\phi(x) \in C^\infty(\Omega)$. Такую функцию будем называть *виртуальным выходом* системы (1). Предположим, что существует такое $\rho \geq 1$, что¹

$$L_B L_A^i \phi(x) = 0, i = \overline{0, \rho - 2}, \quad (2)$$

и

$$L_B L_A^{\rho-1} \phi(x^0) \neq 0. \quad (3)$$

Такое число ρ называют относительной степенью аффинной системы (1) с (виртуальным) выходом $y = \phi(x)$ в точке x^0 .

Предположим, что для системы (1) задан выход $y = \phi(x)$, относительная степень которого в точке x^0 равна ρ . Тогда в силу выполнения условия регулярности (3) для системы (1) в окрестности точки x^0 существует преобразование к виду

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \dots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho, \dot{z}_\rho = f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta), \\ y &= z_1\end{aligned}\quad (4)$$

с необращающимся в ноль коэффициентом при управлении.

Систему (4) называют нормальной формой системы (1) с выходом $y = \phi(x)$.

¹Здесь $L_X \lambda(x)$ — производная Ли функции $\lambda(x)$ по векторному полю X .

В дальнейшем будем для системы (1) с некоторым виртуальным выходом использовать терминологию теории нормальной формы.

Поскольку для фиксированной аффинной системы могут рассматриваться несколько виртуальных выходов, будем говорить об относительной степени фиксированного выхода системы в некоторой точке.

В разделе 1.3 рассматривается задача стабилизации положения равновесия минимально фазовой системы. Пусть у системы (1) точка $x = 0$ является положением равновесия и найден виртуальный выход $y = \phi(x)$, $\phi(0) = 0$, относительная степень которого в точке $x = 0$ равна ρ и $\rho < n$. Тогда в окрестности этой точки существует такая гладкая невырожденная замена переменных

$$z = \Phi(x), \quad \eta = \Psi(x), \quad z \in \mathbb{R}^\rho, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-\rho}, \quad (5)$$

где $\Phi(x) = (\phi(x), L_A \phi(x), \dots, L_A^{\rho-1} \phi(x))^T$, $\Phi(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$, что в переменных z, η система (1) запишется в нормальной форме (4).

Систему уравнений

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) \quad (6)$$

называют уравнениями нулевой динамики (нулевой динамикой). Если ее положение равновесия $\eta = 0$ асимптотически устойчиво, то аффинную систему (1) с виртуальным выходом $y = \phi(x)$ называют минимально фазовой (в точке $x = 0$).

Пусть в положении равновесия $x = 0$ система (1) является минимально фазовой. Тогда в окрестности точки $x = 0$ определено управление в виде

$$u = \left(-L_A^\rho \phi(x) - \sum_{k=0}^{\rho-1} c_k L_A^k \phi(x) \right) / L_B L_A^{\rho-1} \phi(x), \quad (7)$$

где коэффициенты c_k , $k = 0, \dots, \rho - 1$, выбраны так, что корни уравнения $\lambda^\rho + \sum_{k=0}^{\rho-1} c_k \lambda^k = 0$ имеют отрицательные действительные части. Система (1), замкнутая управлением (7), в переменных z, η примет вид

$$\dot{z} = Az, \quad \dot{\eta} = q(z, \eta), \quad (8)$$

причем действительные части собственных чисел матрицы A отрицательны. В результате нулевое положение системы (8) оказывается² асимптотически устойчивым.

²См. Khalil H.K. Nonlinear systems. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002. 750 p.

В данном разделе также получены достаточные условия, при выполнении которых положение равновесия замкнутой системы в переменных z, η локально экспоненциально устойчиво и экспоненциально устойчиво в целом.

В разделе 1.4 приведены примеры построения стабилизирующих управлений путем выбора различных виртуальных выходов, относительно которых аффинные системы имеют асимптотически или экспоненциально устойчивую нулевую динамику.

Во второй главе для аффинных систем со скалярным управлением рассматривается задача нахождения таких виртуальных выходов, для которых в положении равновесия определена относительная степень и при которых аффинная система является минимально фазовой. Полученные результаты применяются для решения задач стабилизации положения равновесия аффинных систем.

Раздел 2.1 является вводным. В данном разделе приведен обзор основных подходов к решению задачи стабилизации положения равновесия неминимально фазовых систем, который показывает, что указанную задачу удастся решить лишь в частных случаях. Поставлена задача поиска таких новых виртуальных выходов, для которых нулевая динамика асимптотически устойчива, что позволяет применять для стабилизации систем с такими выходами методы, известные для минимально фазовых систем.

В разделе 2.2 решена задача нахождения такого виртуального выхода, имеющего в положении равновесия системы относительную степень $\rho = 1$, что соответствующая этому выходу нормальная форма имеет асимптотически устойчивую нулевую динамику.

Для аффинной системы (1) (с положением равновесия $x = 0$) фиксируем некоторый виртуальный выход $y = h(x)$, $h(0) = 0$, при котором относительная степень системы (1) в точке $x = 0$ равна 1. Запишем систему (1) с этим выходом в соответствующей нормальной форме

$$\dot{z} = f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \quad \dot{\eta} = q(z, \eta), \quad y = z. \quad (9)$$

В (9) $z \in \mathbb{R}^1$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{m-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) \neq 0$, $q(0, 0) = 0$, $z = h(x)$, $\eta = \Psi(x)$, $\Psi(0) = 0$.

Теорема 1. Для того, чтобы аффинная система (1) имела виртуальный выход с относительной степенью $\rho = 1$ в точке $x = 0$ и

асимптотически устойчивой нулевой динамикой, необходимо и достаточно, чтобы положение равновесия $\eta = 0$ нелинейной системы

$$\dot{\eta} = q(v, \eta) \quad (10)$$

с управлением v было стабилизируемо гладкой обратной связью $v = v(\eta)$. Каждой такой стабилизирующей обратной связи в системе (10) соответствует виртуальный выход $\phi = z - v(\eta) = h(x) - v(\Psi(x))$ аффинной системы (1) относительной степени $\rho = 1$ в точке $x = 0$ и асимптотически устойчивая нулевая динамика.

Показана связь с методом обратного хода³ стабилизации положения равновесия. На примере аффинной системы второго порядка проведено сравнение управлений, полученных методом виртуальных выходов и методом обратного хода.

Приведен пример стабилизации положения равновесия одной из систем Спрота⁴.

В разделе 2.3 установлены условия, при которых удастся получить обратные связи, обеспечивающие асимптотическую и экспоненциальную устойчивость в целом положения равновесия замкнутой системы. Рассмотрены примеры.

В разделе 2.4 предложено использование линеаризации нормальной формы по части переменных η для нахождения виртуальных выходов, которым соответствует локально асимптотически устойчивая нулевая динамика.

В разделе 2.5 решена задача построения минимально фазовых систем в случае $\rho = 2$. Для аффинной системы (1) фиксируем некоторый виртуальный выход $y = h(x)$, при котором относительная степень системы (1) в точке $x = 0$ равна 2. Запишем систему (1) с указанным выходом в соответствующей нормальной форме

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \quad \dot{\eta} = q(z, \eta). \quad (11)$$

В (11) $z = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-2})^T \in \mathbb{R}^{n-2}$, $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) \neq 0$, $q(0, 0) = 0$, $z_1 = h(x)$, $z_2 = L_A h(x)$, $\eta = \Psi(x)$, $\Psi(0) = 0$.

Теорема 2. Пусть система (1) с виртуальным выходом ϕ , $\phi|_{x=0} = 0$, имеет в точке $x = 0$ относительную степень $\rho = 2$, а нулевая

³Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. Nonlinear and adaptive control design. New York: John Wiley and Sons, 1995. 563 p.

⁴Sprott, J.C. Some simple chaotic flows // Phys. Rev. E. 1994. V. 50. P. 647–650.

динамика асимптотически устойчива. Если в переменных z, η нормальной формы (11) $\phi'_{z_1}|_{z=0, \eta=0} \neq 0$, то существуют функции $v_1(\eta)$, $v_2(\eta)$, $v_i(0) = 0$, $i = 1, 2$, стабилизирующее положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$\dot{\eta} = q(v_1, v_2, \eta) \quad (12)$$

с управлениями v_1, v_2 , причем

$$\left. \frac{dv_1(\eta)}{dt} \right|_{\dot{\eta}=q(v_1(\eta), v_2(\eta), \eta)} = v_2(\eta). \quad (13)$$

Теорема 3. Пусть управления $v_1 = v_1(\eta)$, $v_2 = v_2(\eta)$ стабилизируют положение равновесия $\eta = 0$ системы (12) и удовлетворяют условию (13). Если система (11) с виртуальным выходом $\phi(z, \eta) = z_1 - v_1(\eta)$ имеет относительную степень $\rho = 2$ в точке $(z, \eta) = 0$, то нулевая динамика, соответствующая виртуальному выходу ϕ , асимптотически устойчива в точке $\eta = 0$.

Если в нормальной форме (11) аффинной системы (1) с фиксированным виртуальным выходом $y = \phi(x)$ $q'_{z_2}(0, 0) = 0$, то:

- 1) в формулировке теоремы 2 условие $\phi'_{z_1}|_{z=0, \eta=0} \neq 0$ можно опустить, так как оно следует из того, что система (1) с виртуальным выходом ϕ имеет в точке $x = 0$ относительную степень $\rho = 2$;
- 2) в формулировке теоремы 3 можно опустить условие того, что система (11) с виртуальным выходом $\phi(z, \eta) = z_1 - v_1(\eta)$ имеет относительную степень $\rho = 2$ в точке $(z, \eta) = 0$, так как в данном случае оно будет выполнено;
- 3) теоремы 2, 3 в этом случае утверждают, что для существования у аффинной системы (1) виртуального выхода ϕ , $\phi|_{x=0} = 0$, при котором она имеет в точке $x = 0$ относительную степень $\rho = 2$ и асимптотически устойчивую нулевую динамику, необходимо и достаточно, чтобы система (12) с управлениями v_1, v_2 была стабилизируема в состоянии $\eta = 0$ обратными связями $v_1(\eta)$, $v_2(\eta)$, удовлетворяющими условию (13), причем одним из таких виртуальных выходов является $\phi = z_1 - v_1(\eta) = h(x) - v_1(\Psi(x))$.

Приведены примеры построения стабилизирующей обратной связи с использованием теоремы 3.

Теорема 4. Пусть нормальная форма аффинной системы (1) с виртуальным выходом $y = h(x)$ в окрестности точки $x = 0$, имеет

вид (11), причем $q(z, \eta) \equiv p(z_1, \eta)$. Для того, чтобы для аффинной системы (1) существовал виртуальный выход ϕ , $\phi|_{x=0} = 0$, при котором в точке $x = 0$ относительная степень $\rho = 2$, а нулевая динамика асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$\dot{\eta} = p(v_1, \eta) \quad (14)$$

с управлением v_1 было стабилизируемо обратной связью $v_1 = v_1(\eta)$. Одним из таких виртуальных выходов является $\phi = z_1 - v_1(\eta) = h(x) - v_1(\Psi(x))$.

Получены также условия, при которых удается построить обратную связь, стабилизирующую положение равновесия в целом.

Одной из особенностей применения метода виртуальных выходов при $\rho = 2$ является поиск стабилизирующих обратных связей $v_1(\eta)$ и $v_2(\eta)$, которые связаны соотношением (13). Поиск таких стабилизирующих управлений из-за соотношений (13) является достаточно сложной задачей. В разделе 2.6 показано, что для ее решения можно воспользоваться линеаризованными уравнениями подсистемы, отвечающей за нулевую динамику. В качестве примера рассмотрена задача стабилизации верхнего неустойчивого положения равновесия перевернутого маятника, установленного на тележке. В этом примере управлением является сила f , прикладываемая к тележке. Одновременно с положением маятника стабилизируется и положение тележки в точке $x = 0$, $\dot{x} = 0$. Приведены результаты численного моделирования.

В разделе 2.7 рассмотрены аффинные системы третьего порядка специального вида, для которых в явном виде построено управление, стабилизирующее положение равновесия.

В разделе 2.8 рассмотрены задачи построения минимально фазовых систем и стабилизации в случае $\rho = r > 2$. В случаях, когда подсистема, определяющая нулевую динамику, имеет вид $\dot{\eta} = q(z_1, \eta)$ или $\dot{\eta} = q(z_1, z_2, \eta)$, получены необходимые и достаточные условия существования таких виртуальных выходов, имеющих в положении равновесия относительную степень $\rho = r$, с которыми система будет минимально фазовой.

Установлены условия, при выполнении которых существует управление, глобально стабилизирующее положение равновесия.

Таким образом, во второй главе для стационарных аффинных систем со скалярным управлением разработан метод виртуальных выходов построения обратных связей по состоянию, стабилизирующих положение равновесия системы. Метод заключается в нахождении таких (виртуальных) выходов аффинной системы, при которых она является минимально фазовой, и построении стабилизирующего управления с использованием указанного свойства.

Реализация метода включает построение нормальной формы аффинной системы относительно некоторого фиксированного выхода, поиск нового виртуального выхода, относительно которого система является минимально фазовой, построение нормальной формы относительно нового выхода и стабилизирующего управления в переменных этой нормальной формы, а также запись полученного управления в исходных переменных аффинной системы.

Проведено теоретическое обоснование разработанного метода и указаны классы аффинных систем с выходом, к которым этот метод применим.

В третьей главе на аффинные системы с векторным управлением обобщается метод виртуальных выходов стабилизации положения равновесия неминимально фазовых систем, развитый для аффинных систем со скалярным управлением.

Раздел 3.1 содержит вводные замечания и постановку задачи.

В разделе 3.2 приводятся основные сведения о преобразовании стационарной аффинной системы с векторным управлением к квазиканоническому виду и определяется векторная относительная степень выхода.

Рассмотрим стационарную аффинную систему с векторным управлением

$$\dot{x} = A(x) + \sum_{i=1}^m B_i(x)u_i, \quad (15)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $A(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))^T$, $A(0) = 0$, $B(x) = (B_1(x), \dots, B_m(x))$, $B_j(x) = (b_j^1(x), \dots, b_j^n(x))^T$, $j = \overline{1, m}$, $\text{rang} B(0) = m$, $m \geq 2$, $a_i(x)$, $b_j^i(x) \in C^\infty(\Omega)$, Ω — открытое множество, содержащее положение равновесия $x = 0$, и векторную функцию $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_m(x))^T$, где $\phi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, $\phi_i(0) = 0$, $i = \overline{1, m}$ в качестве m -мерного виртуального выхода аффинной системы (15).

Предположим, что существуют такие числа $\rho_i \geq 1$, $i = \overline{1, m}$, что выполнены следующие два условия:

1) при $k < \rho_i - 1$ функции $L_{B_j} L_A^k \phi_i(x)$, $1 \leq j \leq m$, равны нулю в некоторой окрестности точки $x = 0$;

2) матрица

$$A_\rho(x) = \begin{pmatrix} L_{B_1} L_A^{\rho_1-1} \phi_1(x) & \dots & L_{B_m} L_A^{\rho_1-1} \phi_1(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{B_1} L_A^{\rho_m-1} \phi_m(x) & \dots & L_{B_m} L_A^{\rho_m-1} \phi_m(x) \end{pmatrix} \quad (16)$$

невырождена в точке $x = 0$. В этом случае кортеж $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$ называют (А. Isidori) векторной относительной степенью аффинной системы (15) с векторным виртуальным выходом $y = \phi(x)$ в точке $x = 0$.

Поскольку будут рассматриваться различные виртуальные выходы для одной и той же системы, будем говорить о векторной относительной степени виртуального выхода системы.

Для любого векторного виртуального выхода векторная относительная степень в точке $x = 0$ или не определена, или равна $\rho_1 + \dots + \rho_m = |\rho|$, $|\rho| \leq n$. Если существует виртуальный m -мерный выход $\phi(x)$, при котором относительная степень в точке $x = 0$ равна $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$, $|\rho| < n$, и распределение $G = \text{span}\{B_1, \dots, B_m\}$, порожденное векторными полями B_j , $j = \overline{1, m}$, системы (15), инволютивно, то в окрестности точки $x = 0$ существует такая замена переменных

$$z^i = \Phi^i(x), \quad 1 \leq i \leq m, \quad \eta = \Psi(x), \quad (17)$$

где $z^i = (z_1^i, \dots, z_{\rho_i}^i)^T$, $1 \leq i \leq m$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-|\rho|})^T$, $\Phi^i(x) = (\phi_i(x), L_A \phi_i(x), \dots, L_A^{\rho_i-1} \phi_i(x))^T$, $\Phi^i(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$, после выполнения которой аффинная система (15) с векторным виртуальным выходом $y = \phi(x)$ будет записана в нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^k &= z_2^k, \dots, \dot{z}_{\rho_k-1}^k = z_{\rho_k}^k, \\ \dot{z}_{\rho_k}^k &= f_k(z, \eta) + \sum_{i=1}^m g_{ki}(z, \eta) u_i, \quad k = \overline{1, m}, \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta), \\ y &= (z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^m)^T, \end{aligned} \quad (18)$$

$f_i(0, 0) = 0$, $i = \overline{1, m}$, $q(0, 0) = 0$, $z = (z^1, z^2, \dots, z^m)^T$, а матрица $(g_{ij}(0, 0))_{i,j=\overline{1,m}}$ невырождена.

Системе (18) соответствует система

$$\dot{\eta} = q(0, \eta), \quad (19)$$

которую называют нулевой динамикой. Если ее положение равновесия $\eta = 0$ асимптотически устойчиво, то аффинную систему (15) с векторным выходом $y = \phi(x)$ называют минимально фазовой (в точке $x = 0$).

Если для аффинной системы (15) найден такой векторный виртуальный выход $y = \phi(x)$, $\phi(0) = 0$, при котором система имеет относительную степень $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$ в положении равновесия $x = 0$ и она минимально фазовая в этой точке, то управление

$$u = A_\rho^{-1}(x) \begin{pmatrix} -L_A^{\rho_1} \phi_1(x) - \sum_{k=0}^{\rho_1-1} c_{1k} L_A^k \phi_1(x) \\ \dots \\ -L_A^{\rho_m} \phi_m(x) - \sum_{k=0}^{\rho_m-1} c_{mk} L_A^k \phi_m(x) \end{pmatrix} \quad (20)$$

локально стабилизирует положение равновесия $x = 0$ этой системы при соответствующем выборе постоянных коэффициентов c_{ij} .

Далее в разделе приведены с необходимыми уточнениями результаты⁵, полученные Панфиловым Д.Ю. для аффинных систем с векторным управлением, для которых фиксирован виртуальный выход ϕ с векторной относительной степенью $\rho = (1, \dots, 1)$ в точке $x = 0$. Они обобщают на указанный случай результаты, полученные во второй главе для аффинных систем со скалярным выходом при $\rho = 1$.

В разделе 3.4 результаты теорем 2 и 3 обобщаются на векторный случай. Для аффинной системы (15) фиксируем некоторый векторный виртуальный выход $\phi(x)$, для которого векторная относительная степень в точке $x = 0$ равна $\rho = (2, \dots, 2)$, где $|\rho| = 2m$, т.е. $\rho_i = 2$, $i = \overline{1, m}$. Пусть распределение $G = \text{span}\{B_1, \dots, B_m\}$ инволютивно. Тогда в окрестности точки $x = 0$ существуют новые переменные, в которых система (15) запишется в виде нормальной формы

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^k &= z_2^k, \quad \dot{z}_2^k = f_k(z, \eta) + \sum_{i=1}^m g_{ki}(z, \eta) u_i, \quad k = \overline{1, m}, \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta), \\ y &= (z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^m)^T, \end{aligned} \quad (21)$$

⁵Панфилов Д.Ю. Построение минимально фазовых систем и задача стабилизации. // Автоматика и телемеханика. 2004. № 10. С. 25–39.

где $z = (z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^m, z_2^1, z_2^2, \dots, z_2^m)^T$, $q(0, 0) = 0$, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, $f(0, 0) = 0$, $\det(g_{ij}(0, 0)) \neq 0$.

Пусть $z^1 = (z_1^1, \dots, z_1^m)^T$, $z^2 = (z_2^1, \dots, z_2^m)^T$, $u = (u_1, \dots, u_m)^T$. Тогда система (21) запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= z^2, \quad \dot{z}^2 = f(z^1, z^2, \eta) + g(z^1, z^2, \eta)u, \\ \dot{\eta} &= q(z^1, z^2, \eta), \\ y &= z^1. \end{aligned} \quad (22)$$

Теорема 5. Пусть система (15) с виртуальным выходом ϕ , $\phi|_{x=0} = 0$, имеет в точке $x = 0$ векторную относительную степень $\rho = (2, \dots, 2)$, а нулевая динамика асимптотически устойчива. Если в переменных (z, η) нормальной формы (22) $\det \frac{\partial \phi}{\partial z^1}|_{z=0, \eta=0} \neq 0$, то существуют функции $v^1(\eta)$, $v^2(\eta)$, $v^i(0) = 0$, $i = 1, 2$, стабилизирующее положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$\dot{\eta} = q(v^1, v^2, \eta) \quad (23)$$

с управлениями v^1, v^2 , причем

$$\left. \frac{dv^1(\eta)}{dt} \right|_{\dot{\eta}=q(v^1(\eta), v^2(\eta), \eta)} = v^2(\eta). \quad (24)$$

Здесь $v^1(\eta) = (v_1^1(\eta), \dots, v_m^1(\eta))^T$, $v^2(\eta) = (v_1^2(\eta), \dots, v_m^2(\eta))^T$.

Теорема 6. Пусть управления $v^1 = v^1(\eta)$, $v^2 = v^2(\eta)$ стабилизируют положение равновесия $\eta = 0$ системы (23) и удовлетворяет условию (24). Если система (22) с виртуальным выходом $\phi(z, \eta) = z^1 - v^1(\eta)$ имеет векторную относительную степень $(2, \dots, 2)$ в точке $(z, \eta) = 0$, то нулевая динамика, соответствующая виртуальному выходу ϕ , асимптотически устойчива в точке $\eta = 0$.

В разделе 3.5 рассмотрен случай, когда нормальная форма имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= z^2, \quad \dot{z}^2 = f(z^1, z^2, \eta) + g(z^1, z^2, \eta)u, \\ \dot{\eta} &= A\eta + B_1 z^1 + B_2 z^2, \\ y &= z^1, \end{aligned} \quad (25)$$

где $z^1, z^2 \in \mathbb{R}^m$, $\eta \in \mathbb{R}^l$, $l = n - 2m$, A — матрица типа $l \times l$, B_1, B_2 — матрицы типа $l \times m$, одно из возможных решений задачи стабилизации можно получить методом виртуальных выходов с использованием линейной обратной связи.

Теорема 7. Пусть система (25) с выходом y имеет в точке $(z, \eta) = (0, 0)$ относительную степень $\rho = (2, \dots, 2)$ и существует матрица K , такая, что матрица $E + KB_2$ невырождена, а управления

$$\begin{aligned} v^1 &= -K\eta, \\ v^2 &= (E + KB_2)^{-1}K(B_1K - A)\eta \end{aligned} \quad (26)$$

стабилизируют положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$\dot{\eta} = A\eta + B_1v^1 + B_2v^2. \quad (27)$$

Тогда виртуальный выход $\phi = z^1 + K\eta$ имеет векторную относительную степень $\rho = (2, \dots, 2)$, а система нулевой динамики, соответствующая этому выходу, асимптотически устойчива.

В разделе 3.6 показано, что линеаризацию системы, отвечающей за нулевую динамику, можно использовать для нахождения виртуальных выходов с асимптотически устойчивой нулевой динамикой для системы (22).

В разделе 3.7 методом виртуальных выходов решена задача стабилизации заданного положения вертолета в режиме висения. Рассматриваются перемещения вертолета в вертикальной плоскости. Для описания движения вертолета используется аффинная система восьмого порядка с двумя управлениями. В качестве управлений выбраны скорость изменения силы тяги несущего винта и скорость изменения угла его перекоса.

Показано, что при использовании в качестве компонент векторного выхода координат центра масс соответствующая нормальная форма не является минимально фазовой. Найден новый виртуальный векторный выход, относительная степень которого равна $(2, 2)$, а соответствующая четырехмерная нулевая динамика асимптотически устойчива. Приведены результаты численного моделирования, демонстрирующие стабилизацию заданного положения по всем переменным.

В разделе 3.8 проведено обобщение результатов, полученных в разделе 3.4, на случай, когда для аффинной системы (15) заданы m виртуальных выходов $h_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, $h(0) = 0$, $m \geq 2$, таких, что для системы в некоторой окрестности точки $x = 0$ определена векторная относительная степень $\rho = (\underbrace{1, \dots, 1}_l, \underbrace{2, \dots, 2}_{m-l})$, $l < m$.

В четвертой главе разрабатывается теория нормальной формы нестационарных аффинных систем. Исследуются условия сохранения равномерной асимптотической устойчивости при нестационарных заменах переменных. На основе теории нестационарной нормальной формы на нестационарный случай распространяется метод виртуальных выходов стабилизации положений равновесия.

Раздел 4.1 является вводным. В нем отмечается, что для нестационарных аффинных систем теория нормальной формы до настоящего времени отсутствует.

В разделе 4.2 для гладкой нестационарной аффинной системы со скалярным управлением

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x, t) + B(x, t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^1, \\ A(x, t) &= (a_1(x, t), \dots, a_n(x, t))^T, \\ B(x, t) &= (b_1(x, t), \dots, b_n(x, t))^T, \\ a_i(x, t), b_i(x, t) &\in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)), i = \overline{1, n}\end{aligned}\quad (28)$$

приведены основные сведения о преобразовании к квазиканоническому виду⁶ в окрестности точки (x^0, t_0) .

В разделе 4.3 на основе теории квазиканонического вида разрабатывается теория нормальной формы нестационарной системы.

Пусть для системы (28) задан выход $y = \phi(x, t)$, где ϕ — достаточно гладкая функция, определенная в некоторой окрестности точки (x^0, t_0) .

Определение 1. Число ρ будем называть относительной степенью выхода $y = \phi(x, t)$ нестационарной аффинной системы (28) в точке (x^0, t_0) , если 1) $L_B L_A^i \phi(x, t) = 0$ в окрестности точки (x^0, t_0) ; 2) $L_B L_A^{\rho-1} \phi(x^0, t_0) \neq 0$.

Относительная степень в точке (x^0, t_0) может быть неопределена, если такого $\rho \leq n$ не существует.

Определение 2. Систему

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \dots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho, \dot{z}_\rho = f(z, \eta, t) + g(z, \eta, t)u, \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta, t), \\ y &= z_1\end{aligned}\quad (29)$$

будем называть нормальной формой нестационарной аффинной системы (28) с выходом $y = \phi(x, t)$ в точке (x^0, t_0) , если

⁶Крищенко А.П. Преобразование нелинейных систем и стабилизация программных движений // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. 1988. № 512. С. 69–83.

1942 2288

- 1) в точке (x^0, t_0) определена относительная степень ρ выхода;
- 2) соотношения

$$z_i = L_A^{i-1} \phi(x, t), \quad i = \overline{1, \rho}, \quad \eta_k = \eta_k(x, t), \quad k = \overline{1, n - \rho}, \quad t = t \quad (30)$$

задают в окрестности точки (x^0, t_0) расширенного пространства состояний невырожденную сохраняющую время замену переменных $(z, \eta) = \Psi(x, t)$, $t = t$, преобразующую систему (28) к виду (29).

Определения 1 и 2 обобщают соответствующие понятия, известные для стационарных систем.

Существенным отличием в нестационарном случае является существование нормальной формы в некоторой окрестности точки (x^0, t_0) расширенного пространства состояний, что приводит к локальности по времени и препятствует использованию нормальной формы в нестационарном случае для решения задачи стабилизации. Поэтому в нестационарном случае введем следующие понятия.

Определение 3. Если относительная степень выхода $y = \phi(x, t)$ системы (28) определена и постоянна во всех точках множества $\{(x, t) | x = x^0, t \in [0, +\infty)\}$, будем говорить, что в точке x^0 определена его равномерная (по t) относительная степень. Если относительная степень ρ , равномерная по t , определена и постоянна во всех точках из $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, то будем говорить, что выход системы (28) имеет равномерную относительную степень ρ в Ω .

Определение 4. Систему (29) будем называть равномерно определенной нормальной формой нестационарной аффинной системы (28) с выходом $y = \phi(x, t)$ в окрестности точки x^0 , если:

- 1) в некоторой окрестности $O(x^0) \subseteq \mathbb{R}^n$ точки x^0 этот выход имеет равномерную относительную степень ρ ;
- 2) соотношения (30) задают невырожденную сохраняющую время замену переменных $(z, \eta, t) = \tilde{\Psi}(x, t) = (\Psi(x, t), t)$ в области U расширенного пространства состояний, содержащей множество $O(x^0) \times [0, +\infty)$, которая преобразует систему (28) к виду (29);
- 3) $\tilde{\Psi}(x^0, t) = (z^0, \eta^0)$ при $t \geq 0$;
- 4) $\tilde{\Psi}(O(x^0) \times [0, +\infty)) \supseteq O(z^0, \eta^0) \times [0, +\infty)$, где $O(z^0, \eta^0)$ — некоторая окрестность точки (z^0, η^0) в пространстве состояний системы (29).

Достаточные условия существования равномерно определенной нормальной формы задает следующая теорема.

Теорема 8. Пусть 1) для системы (28) с выходом $y = \phi(x, t)$ в некоторой окрестности $O(x^0)$ точки x^0 определена равномерная относительная степень ρ ; 2) область определения $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ системы (28) содержит множество $O(x^0) \times [0, +\infty)$; 3) непрерывное отображение $(z, \eta, t) = \tilde{\Psi}(x, t)$ (30), где $\tilde{\Psi}(x, t) = (\Psi(x, t), t)$, задает при $t \geq 0$ невырожденную сохраняющую время замену переменных, преобразующую в области U систему (28) к виду (29); 4) $\tilde{\Psi}(x^0, t) = (z^0, \eta^0, t)$ при всех $t \geq 0$.

Если отображение $\tilde{\Psi}^{-1}(z, \eta, t)$ является равномерно (по t) непрерывным в точке (z^0, η^0) , то (29) — равномерно определенная нормальная форма в окрестности точки x^0 .

В разделе 4.4 введено понятие равномерно минимально фазовой нестационарной системы.

Пусть x^0 — положение равновесия системы (28) и $A(x^0, t) = 0$, $B(x^0, t) \neq 0$ при $t \geq 0$. Далее будем полагать, что в окрестности положения равновесия x^0 системы (28) существует равномерно определенная нормальная форма (29), причем $\tilde{\Psi}(x^0, t) = (0, 0, t)$ при $t \geq 0$. Тогда в (29) при $t \geq 0$ $f(0, 0, t) = 0$, $q(0, 0, t) = 0$. Именно такие нормальные формы будем рассматривать в дальнейшем.

Определение 5. Систему уравнений $\dot{\eta} = q(0, \eta, t)$ будем называть системой нулевой динамики (нулевой динамикой) равномерно определенной нормальной формы (29).

Определение 6. Если точка покоя $\eta = 0$ системы нулевой динамики равномерно асимптотически устойчива, то нестационарную систему (29) с выходом $y = z_1$ будем называть равномерно минимально фазовой. Если точка покоя $\eta = 0$ экспоненциально устойчива, то систему (29) с выходом $y = z_1$ будем называть экспоненциально минимально фазовой.

В разделе 4.5 решена задача стабилизации положения равновесия нестационарной минимально фазовой системы. Установлены достаточные условия, при выполнении которых нулевое положение равновесия системы (29), замкнутой управлением

$$u = -(f(z, \eta, t) + \sum_{i=1}^{\rho} c_{i-1} z_i) / g(z, \eta, t), \quad (31)$$

где коэффициенты c_j , $j = \overline{0, \rho-1}$ таковы, что корни многочлена $\lambda^{\rho} + \sum_{i=0}^{\rho-1} c_i \lambda^i$ имеют отрицательные действительные части, равномерно асимптотически устойчиво. Также установлены достаточные

условия, при которых положение равновесия замкнутой системы локально экспоненциально устойчиво и экспоненциально устойчиво в целом.

В разделе 4.6 исследуется равномерная асимптотическая устойчивость в разных переменных. Поскольку для построения равномерно стабилизирующего управления для системы (28) используется приведение к равномерно определенной нормальной форме вида (29) и именно в переменных этой нормальной формы обеспечивается равномерная стабилизация положения равновесия, то возникает вопрос о равномерной асимптотической устойчивости положения равновесия $x^0 = 0$ замкнутой исходной системы.

Получены достаточные условия, при которых сохраняется равномерная асимптотическая устойчивость положения равновесия при невырожденных заменах переменных, сохраняющих время.

Теорема 9. Пусть

1) гладкая система

$$\dot{s} = r(s, t), \quad (32)$$

где $r(0, t) = 0$ при $t \geq 0$, определена в области $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ расширенного пространства состояний, причем $U \supseteq O(0) \times [0, +\infty)$, где $O(0)$ — окрестность положения равновесия $s = 0$ в пространстве состояний;

2) $\tilde{F} : U \rightarrow \tilde{F}(U)$ — обратимая замена переменных, сохраняющая время, где $\tilde{F}(s, t) = (F(s, t), t)^T$, $\bar{s} = F(s, t)$, $F(0, t) = 0$ при $t \geq 0$, $\bar{s} \in \mathbb{R}^n$, а $\tilde{F}^{-1}(\bar{s}, t) = (F^{-1}(\bar{s}, t), t)$ обратная к $\tilde{F}$ замена переменных;

3) система (32) в новых переменных имеет вид

$$\dot{\bar{s}} = p(\bar{s}, t), \quad (33)$$

$p(0, t) = 0$ при $t \geq 0$, определена в области $\tilde{F}(U)$, причем $\tilde{F}(U) \supseteq O_1(0) \times [0, +\infty)$, где $O_1(0)$ — некоторая окрестность точки $\bar{s} = 0$;

4) положение равновесия $\bar{s} = 0$ системы (33) равномерно асимптотически устойчиво.

Если отображение $F(s, t)$ непрерывно в окрестности O точки $s = 0$ равномерно по t , а $F^{-1}(\bar{s}, t)$ липшицево в окрестности O_1 точки $\bar{s} = 0$ равномерно по t , то положение равновесия $s = 0$ системы (32) равномерно асимптотически устойчиво.

Следствие 1. Пусть система (29) — равномерно минимально фазовая, управление (31) — равномерно стабилизирующее положение равновесия $(z, \eta) = (0, 0)$, а замена переменных (30), приводящая систему (28) с выходом $y = \phi(x)$ к равномерно определенной в

окрестности положения равновесия x^0 нормальной форме (29), удовлетворяет условиям теоремы 9.

Если система (28), замкнутая управлением (31), записанным в переменных x и имеющем вид

$$u = - \frac{L_A^\rho \phi(x, t) + \sum_{i=1}^{\rho} c_{i-1} L_A^{i-1} \phi(x, t)}{L_B L_A^{\rho-1} \phi(x, t)}, \quad (34)$$

и система (29), замкнутая управлением (31), удовлетворяют условиям теоремы 9, то управление (34) есть решение задачи равномерной стабилизации положения равновесия x^0 для системы (28).

Если система (29) не является равномерно минимально фазовой, то проблема равномерной стабилизации положения равновесия остается открытой, поскольку управление вида (31) может не быть стабилизирующим для нулевого положения равновесия системы (29).

В разделе 4.7 метод виртуальных выходов построения стабилизирующей обратной связи, разработанный для стационарных аффинных систем, обобщается на нестационарные системы, для которых виртуальный выход имеет в окрестности положения равновесия x^0 равномерную относительную степень $\rho = 1$, а система (28) преобразуется к равномерно определенной нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z, \eta, t) + g(z, \eta, t)u, & \dot{\eta} &= q(z, \eta, t), \\ y &= z, \end{aligned} \quad (35)$$

где $f(0, 0, t) = 0$, $q(0, 0, t) = 0$ при $t \geq 0$, причем система (35) не является равномерно минимально фазовой.

Теорема 10. Пусть для виртуального выхода $y = \vartheta(z, \eta, t)$ системы (35) в окрестности точки $(z, \eta) = (0, 0)$ определена равномерная относительная степень $\rho = 1$ и система (35) с этим выходом заменой переменных

$$\bar{z} = \vartheta(z, \eta, t), \quad \bar{\eta} = \eta, \quad t = t \quad (36)$$

преобразуется к равномерно определенной нормальной форме с равномерно асимптотически устойчивой нулевой динамикой. Тогда существует такая функция $v(\eta, t)$, что точка покоя $\eta = 0$ нелинейной системы

$$\dot{\eta} = q(v, \eta, t) \quad (37)$$

с управлением v равномерно стабилизируется гладкой обратной связью $v = v(\eta, t)$, $v(0, t) = 0$, $t \geq 0$.

Теорема 11. Пусть обратная связь $v = v(\eta, t)$, $v(0, t) = 0$, равномерно стабилизирует точку покоя $\eta = 0$ системы (37).

Если система (35) с виртуальным выходом $\vartheta(z, \eta, t) = z - v(\eta, t)$ имеет равномерно определенную относительную степень $\rho = 1$ в окрестности точки $(z, \eta) = (0, 0)$ и сохраняющей время заменой переменных

$$\bar{z} = \vartheta(z, \eta, t) = z - v(\eta, t), \quad \bar{\eta} = \eta, \quad t = t \quad (38)$$

преобразуется к равномерно определенной нормальной форме, то нулевая динамика, соответствующая этой нормальной форме, равномерно асимптотически устойчива.

Одна из особенностей нестационарного случая проявляется в том, что требования к замене переменных включены в формулировки теорем.

Если обратная связь $v(\eta, t)$, стабилизирующая положение покоя $\eta = 0$ системы (37), локально липшицева равномерно по t , а область определения U системы (35) включает в себя множество $O(0, 0) \times [0, +\infty)$, где $O(0, 0)$ — окрестность точки $(z, \eta) = (0, 0)$, то содержащиеся в определении 4 требования к замене переменных (38) в теореме 11 можно опустить.

В разделе 4.8 рассматривается случай, когда найдется такой виртуальный выход $\phi(x, t)$, что для него в точке x^0 определена равномерная относительная степень $\rho = 2$, а аффинная система (28) приводится невырожденной сохраняющей время заменой переменных $\Phi(x, t) = (z, \eta)$, $t = t$, где $\Phi(x^0, t) = (0, 0)$, $t \geq 0$, в точке x^0 к равномерно определенной нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \quad \dot{z}_2 = f(z, \eta, t) + g(z, \eta, t)u, \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta, t), \end{aligned} \quad (39)$$

где $z = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-2})^T \in \mathbb{R}^{n-2}$, $g(0, 0, t) \neq 0$, $z_1 = \phi(x, t)$, $z_2 = L_A \phi(x, t)$, $\eta = \eta(x, t)$.

Теорема 12. Пусть виртуальный выход $y = \vartheta(z, \eta, t)$ системы (39) имеет в точке $(z, \eta) = (0, 0)$ равномерную относительную степень 2, $\vartheta(0, 0, t) = 0$, $t \geq 0$, и система (39) с этим выходом невырожденной сохраняющей время заменой переменных

$$\bar{z}_1 = \vartheta(z, \eta, t), \quad \bar{z}_2 = \vartheta_1(z, \eta, t), \quad \bar{\eta} = \eta, \quad t = t, \quad (40)$$

где

$$\vartheta_1(z_1, z_2, \eta, t) = \frac{d\vartheta}{dt} \Big|_{(39)}$$

преобразуется к равномерно определенной нормальной форме с равномерно асимптотически устойчивой нулевой динамикой.

Тогда существуют функции $v_1(\eta, t)$, $v_2(\eta, t)$, $v_1(0, t) = v_2(0, t) = 0$, равномерно стабилизирующие положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$\dot{\eta} = q(v_1, v_2, \eta, t) \quad (41)$$

с управлениями v_1 , v_2 , причем

$$\frac{dv_1(\eta, t)}{dt} \Big|_{\dot{\eta}=q(v_1(\eta, t), v_2(\eta, t), \eta, t)} = v_2(\eta, t). \quad (42)$$

Теорема 13. Пусть управления $v_1 = v_1(\eta, t)$, $v_2 = v_2(\eta, t)$, $v_1(0, t) = 0$, $v_2(0, t) = 0$, равномерно стабилизируют положение равновесия $\eta = 0$ системы (41) и удовлетворяют условию (42). Если система (39) с виртуальным выходом $\vartheta(z, \eta, t) = z_1 - v_1(\eta, t)$ имеет равномерно определенную относительную степень $\rho = 2$ в точке $(z, \eta) = 0$ и соотношения

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= \vartheta(z, \eta, t) = z_1 - v_1(\eta, t), \\ \bar{z}_2 &= \frac{d\vartheta(z, \eta, t)}{dt} \Big|_{(39)} = z_2 - v'_{1\eta}(\eta, t)q(z_1, z_2, \eta, t) - v'_{1t}(\eta, t), \\ \bar{\eta} &= \eta, \quad t = t \end{aligned} \quad (43)$$

задают невырожденную сохраняющую время замену переменных, приводящую систему (39) с выходом ϑ к равномерно определенной нормальной форме, то нулевая динамика этой нормальной формы равномерно асимптотически устойчива.

В разделе 4.9 приведен пример решения задачи стабилизации положения равновесия нестационарной системы с выходом, для которого в $\mathbb{R}^3$ определена равномерная относительная степень $\rho = 2$.

В разделе 4.10 рассмотрен специальный случай, когда в равномерно определенной нестационарной нормальной форме аффинной системы функция $q(z, \eta, t)$ не зависит от z_2 , т.е. $q(z, \eta, t) = p(z_1, \eta, t)$, и получены теоремы, обобщающие на нестационарный случай теорему 4.

В разделе 4.11 рассмотрены нестационарные аффинные системы с векторным управлением. Для векторного случая вводится понятие равномерно определенной векторной относительной степени и равномерно определенной нормальной формы. Аналогично скалярному случаю определяется равномерная минимально фазовая система. На векторный случай обобщаются установленные для скалярного нестационарного случая условия равномерной асимптотической устойчивости замкнутой системы.

В разделе 4.12 исследован случай однородной векторной относительной степени, когда $\rho_i = 1$. На этот случай обобщаются теоремы 10 и 11, а также другие результаты, полученные для скалярного нестационарного случая при $\rho = 1$.

В разделе 4.13 исследован случай однородной векторной относительной степени, когда $\rho_i = 2$, а в разделе 4.14 — случай неоднородной векторной относительной степени, когда для системы в некоторой окрестности точки x^0 определена равномерная векторная относительная степень $\rho = (\underbrace{1, \dots, 1}_l, \underbrace{2, \dots, 2}_{m-l})$, $l < m$.

На нестационарный векторный случай обобщены теоремы 12, 13, а также другие аналогичные результаты, доказанные для стационарного случая.

В пятой главе метод виртуальных выходов стабилизации положения равновесия нестационарных систем применяется для решения задачи стабилизации заданного программного движения стационарной аффинной динамической системы со скалярным управлением и выходом.

Раздел 5.1 является вводным. В нем приводится обзор подходов к стабилизации программного движения и заданного изменения выхода для аффинной стационарной динамической системы (1) со скалярным управлением в случаях, когда система приводится только к квазиканоническому виду или нормальной форме с нетривиальной нулевой динамикой, которая не является асимптотически устойчивой.

В разделе 5.2 исследуется задача стабилизации программного движения методом виртуальных выходов. Показано, что эту задачу можно свести к задаче стабилизации нулевого положения нестационарной нормальной формы системы в отклонениях от программного движения. Если нулевая динамика этой нормальной формы не является равномерно асимптотически устойчивой, то для построения

управления, равномерно стабилизирующего положение равновесия, можно применить результаты, полученные в четвертой главе.

Аналитическое нахождение программной траектории по переменным η и программного управления в общем случае затруднительно. В разделе 5.3 описан метод численного нахождения программного движения для случая, когда исходная стационарная система записана в квазиканоническом виде.

В разделах 5.4 и 5.5 рассмотрены примеры стабилизации заданных программных движений системы второго порядка типа Лотки-Вольтерра, описывающей гипотетическую химическую реакцию с управлением в одном уравнении. Эти примеры иллюстрируют случай $\rho = 1$. Приведены результаты численного моделирования.

В разделе 5.6 представлен пример стабилизации программного движения стационарной аффинной системы третьего порядка с одномерной нулевой динамикой (случай $\rho = 2$). Указан класс программных движений, для которых у системы в отклонениях от программного движения существует равномерно определенная нормальная форма. Методом виртуальных выходов для нестационарной системы в отклонениях построена обратная связь, равномерно стабилизирующая нулевое положение равновесия.

В разделе 5.7 приведен специальный вид нормальной формы стационарной системы со скалярным управлением, для которого получены достаточные условия равномерной устойчивости нулевой динамики системы в отклонениях от программной траектории.

В разделе 5.8 рассматривается задача стабилизации программного движения стационарной аффинной системы с векторным управлением. Здесь для векторного случая получена равномерно определенная нормальная форма системы в отклонениях от программного движения и указаны особенности, присущие векторному случаю.

При построении методом виртуальных выходов управления, стабилизирующего положение равновесия аффинной системы, предполагалось, что известен полный вектор состояния системы. Однако в общем случае могут быть известны только значения реальных выходов — доступных измерению функций от вектора состояния.

Поэтому в шестой главе приводится обзор результатов по применимости принципа разделения задач наблюдения и стабилизации и обосновывается принцип разделения задач наблюдения и глобальной стабилизации для стационарных аффинных систем, допускающих построение наблюдателя состояния с линейной динамикой

ошибки⁷, работающего глобально.

В разделе 6.1 содержится постановка задачи и приведен обзор основных публикаций, содержащих описание методов построения наблюдателей.

В разделе 6.2 приведены основные известные результаты, касающиеся справедливости принципа разделения задач наблюдения и управления для задачи локальной стабилизации, стабилизации в заданной области и глобальной стабилизации. Как правило, доказательства справедливости принципа разделения опираются на конкретный вид наблюдателя (наблюдатель с высоким коэффициентом усиления⁸, наблюдатель Арсака-Кокотовича⁹) для аффинной системы, а доказательство справедливости глобального принципа разделения¹⁰ при достаточно общих предположениях относительно свойств наблюдателя использует ряд предположений о свойствах аффинной системы, проверка которых достаточно трудна.

В разделе 6.3 получены достаточные условия, при которых принцип разделения остается справедливым для задач глобальной асимптотической стабилизации положений равновесия аффинных систем со скалярными входом и выходом, допускающим построение наблюдателя с линейной динамикой ошибки, работающего глобально.

Выполнение установленных достаточных условий, при которых справедлив принцип разделения для задач глобальной асимптотической стабилизации аффинных систем с выходом, допускающих построение работающего глобально наблюдателя с линейной динамикой ошибки, позволяет гарантировать, что при замене в обратной связи, построенной методом виртуальных выходов, вектора состояния аффинной системы на его оценку, сохранится асимптотическая устойчивость в целом положения равновесия замкнутой системы.

Полученные условия могут использоваться для глобально стабилизирующих обратных связей, построенных другими методами.

В приложении решается задача нахождения управлений, реализующих движение мобильного робота по заданной линии, в точках которой задана скорость движения.

⁷Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Нелинейные $k(x)$ -двойственные системы // Автоматика и телемеханика. 1995. № 2. С. 21 - 34.

⁸Gauthier J.P., Kupka I. Observability and observers for nonlinear systems // SIAM J. Control and Optimization. 1994. V. 32, № 4. P. 975-994.

⁹Arcak M., Kokotović P.V. Observer-based control of systems with slope-restricted nonlinearities // IEEE Trans. on Autom. Control. 2001. V. 46, № 7. P. 1146-1150.

¹⁰Голубев А.Е. Глобальная стабилизация нелинейных динамических систем при экспоненциальной оценке вектора состояния // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2004. № 2. С. 38 - 60.

Используется модель движения робота на подвижной колесной платформе с автомобильной компоновкой колес, учитывающая эффект псевдоскольжения, связанный с деформацией периферии колес.

В разделе П1 обосновывается актуальность задачи реализации заданного программного движения для робототехнической системы на колесной платформе.

В разделе П2 выводятся уравнения движения четырехколесного мобильного робота с автомобильной компоновкой колес, где передние колеса являются управляющими, а задние — ведущими. Особенностью является использование модели качения колеса с деформируемой периферией, описывающей эффект поперечного псевдоскольжения (поперечного увода) колеса.

За основу взята "велосипедная модель", которую с учетом предположения о малости углов скольжения, угла поворота передних колес и с использованием гипотезы Рокара можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= -\frac{c_f \alpha_f + c_r \alpha_r}{mv} - \omega + \frac{c_f}{v} u_1 - \frac{\beta}{v} u_2, \\ \dot{\omega} &= -\frac{l_f}{J} c_f \alpha_f + \frac{l_r}{J} c_r \alpha_r + \frac{l_f}{J} c_f u_1, \\ \dot{v} &= u_2, \quad \dot{\psi} = \omega, \\ \dot{x} &= v \cos(\beta + \psi), \quad \dot{y} = v \sin(\beta + \psi).\end{aligned}\tag{44}$$

Здесь m — масса робота, J — момент инерции робота вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс, l_f и l_r — расстояния от центра масс до оси переднего колеса и до оси заднего колеса соответственно, v — линейная скорость центра масс, β — угол бокового скольжения робота, ψ — угол между осью $O'x'$ системы координат, связанной с корпусом, и осью Ox неподвижной системы координат, ω — угловая скорость вращения вокруг центра масс, c_f и c_r — коэффициенты, определяющие боковые силы, действующие на переднее и заднее колеса, α_f — угол, определяющий (совместно с углом поворота передних колес) угол скольжения передних колес, α_r — угол скольжения задних колес, управление u_1 — угол поворота передних колес, а u_2 — изменение величины скорости.

В разделе П3 исследуется возможность преобразования аффинной системы (44) к каноническому или квазиканоническому видам. По результатам исследования строится нормальная форма для выходов, имеющих в области определения системы относительную степень (2, 2). В качестве выходов выбраны координаты центра масс робота в неподвижной системе координат.

В разделе П4 для заданного программного движения, порожденного заданным изменением выхода, на основе результатов пятой главы строится нестационарная нормальная форма системы в отклонениях от программного движения. Система нулевой динамики имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\eta}_1 &= -c_0 v^*(t) \Delta \eta_1 - c_0 \Delta \eta_2, \\ \Delta \dot{\eta}_2 &= \gamma_1(t) \Delta \eta_1 + \gamma_2(t) \Delta \eta_2,\end{aligned}\tag{45}$$

где $v^*(t)$ — программное изменение скорости, $\gamma_1(t) = c_1 - c_0 v^*(t) \delta(t)$, $\gamma_2(t) = -c_0 \delta(t)$, $\delta(t) = \left(\frac{c_2}{v^*(t)} - v^*(t) \right)$, а c_0, c_1, c_2 — положительные константы, определяемые по параметрам робота.

Для полученной линейной нестационарной системы указан класс траекторий, когда ее положение равновесия будет равномерно асимптотически устойчиво.

В разделе П5 получены уравнения движения четырехколесной модели при тех же предположениях, которые были сделаны для велосипедной модели, и найдена нормальная форма. Выходы взяты из велосипедной модели. Показано, что в уравнениях подсистемы, отвечающих за нулевую динамику, нельзя избавиться от управления. Тем не менее, численная процедура получения программного движения, разработанная в главе 5, и в этом случае позволяет найти программное движение по всем переменным. Отметим, что и асимптотическую устойчивость уравнений нулевой динамики системы в отклонениях от заданного программного движения удастся исследовать только численно.

В разделе П6 для велосипедной модели при конкретных числовых значениях параметров робота найдены программные движения, для которых соответствующая нестационарная нулевая динамика системы в отклонениях равномерно асимптотически устойчива. Приведены результаты численного моделирования.

Для четырехколесной модели также приведены результаты расчетов, показывающие асимптотическую устойчивость соответствующей нестационарной нулевой динамики.

В разделе П7 проведено сравнение велосипедной и четырехколесной моделей и указаны их особенности.

Основные результаты и выводы работы

В диссертации получены следующие результаты:

1. Разработаны теоретические основы преобразования стационарных аффинных систем к нормальной форме с асимптотически устойчивой нулевой динамикой.

2. Создана теория нормальной формы нестационарных аффинных систем.

3. Разработан метод виртуальных выходов стабилизации положений равновесия стационарных аффинных систем, равномерной стабилизации положений равновесия нестационарных систем и программных движений стационарных аффинных систем.

4. Обоснована применимость принципа разделения задач наблюдения и глобальной стабилизации для стационарных аффинных систем со скалярным выходом, допускающих построение наблюдателя состояния с линейной динамикой ошибки.

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Разработанный метод виртуальных выходов позволяет решать задачи стабилизации положений равновесия и программных движений аффинных систем со скалярным и векторным управлением и может быть применен для технических систем, моделями которых являются аффинные системы.

2. Разработанные в диссертации теоретические положения и метод позволяют существенно расширить множество гладких обратных связей, стабилизирующих положения равновесия и программные траектории аффинных систем.

**Основные результаты диссертации
опубликованы в работах**

1. Голубев А.Е., Кавинов А.В., Ткачев С.Б. Стабилизация положения равновесия аффинной системы с использованием наблюдателя // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тез. докл. VI Межд. сем. М., 2000. С. 34.
2. Голубев А.Е., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Принцип разделения для аффинных систем // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 11. С. 1468–1475.
3. Алексеенков С. Г., Ткачев С. Б. Оценка концентрации продукта химической реакции с использованием наблюдателя // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2001. № 2. С. 93–104.
4. Голубев А.Е., Ткачев С.Б. Стабилизация класса нелинейных систем при неполном измерении состояния // Нелинейный динамический анализ: Тез. докл. II Межд. конгр. М., 2002. С. 110.
5. Alexseenkov S.G., Tkachev S.B. Analytical and numerical algorithms for output control of chemical reactors // Process Control'02: Proc. of XIV Int. Scient.-Tech. Conf. Pardubice, 2002. CD-ROM.
6. Панфилов Д.Ю., Ткачев С.Б. Реализация программного движения аффинной системы по части переменных // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тез. докл. Межд. сем. им. Е.С. Пятницкого. М., 2002. С. 148–149.
7. Golubev A.E., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Separation principle for a class of nonlinear systems // Preprints of 15-th IFAC World Congress. Barcelona, 2002. CD-ROM.
8. Крищенко А.П., Панфилов Д.Ю., Ткачев С.Б. Построение минимально фазовых аффинных систем // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 11. С. 1483–1489.
9. Panfilov D. U., Tkachev S. B. Tracking of reference trajectory for wheeled mobile robot // Process Control 03: Proc. of XV Int. Conf. Strebsko Pleso, 2003. CD-ROM.
10. Tkachev S. B., Alexeenkov S. G. Numerical algorithms for nonlinear observer-based control // Physics and Control: Proc. of Int. Conf. Saint-Petersburg, 2003. P. 1278–1283.
11. Крищенко А.П., Панфилов Д.Ю., Ткачев С.Б. Глобальная стабилизация аффинных систем с помощью виртуальных выходов // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 1503–1510.

12. Output maps with associated asymptotically stable zero dynamics / A.P. Krishchenko, D.U. Panfilov, K.E. Starkov, S.B. Tkachev // Nonlinear Control Systems'04: Proc. of VI IFAC Symp. Stuttgart, 2004. V. 1. P. 329–334.
13. Голубев А.Е., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотическим наблюдателем (обзор) // Автоматика и телемеханика. 2005. № 7. С. 3–42.
14. Output tracking for a class of nonlinear nonminimum-phase systems using observer backstepping /A. Golubev, R. Johansson, A. Robertsson, S. Tkachev // Vestnik. J. Bauman Moscow State Technical University. Natural Science and Engineering. 2005. Special Issue. P. 63–80.
15. Tkachev S.B., Panfilov D.U. Multy-output maps with associated asymptotically stable zero dynamics // Physics and Control'05: Proc. of II Int. Conf. Saint-Petersburg, 2005. P. 898–903.
16. Ткачев С. Б. Стабилизация программных движений нелинейных систем с использованием виртуальных выходов // Системный анализ и информационные технологии (САИТ-2005): Труды I Межд. конф. М., 2005. Т. 1. С. 135–138.
17. Ткачев С.Б. Экспоненциальная стабилизация заданного изменения выхода аффинной системы // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тез. докл. IX Межд. сем. им. Е.С. Пятницкого. М., 2006. С. 251–253.
18. Крищенко А.П., Ткачев С.Б., Фетисов Д.А. Управление движением робота по лестнице // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2006. № 1. С. 38–64.
19. Ткачев С.Б. Стабилизация программного движения, соответствующего заданному изменению выхода // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2006. № 4. С. 43–60.
20. Ткачев С.Б. Стабилизация нестационарных аффинных систем с помощью виртуальных выходов // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1145.
21. Ткачев С.Б. Стабилизация программных движений методом виртуальных выходов // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 6. С. 753–759.
22. Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Virtual outputs with uniformly asymptotically stable zero dynamics and feedback design // Physics

- and Control'07: Proc. of III Int. Conf. Potsdam, Germany, 2007.
<http://lib.physcon.ru/?item=1259>
23. Ткачев С.Б. Метод виртуальных выходов стабилизации положения равновесия нестационарной системы // Системный анализ и информационные технологии (САИТ-2007): Труды II Межд. конф. М., 2007. Т. 1. С. 55-56.
 24. Ткачев С.Б. Реализация программных траекторий виртуальных мобильных объектов // Системный анализ и информационные технологии (САИТ-2007): Труды II Межд. конф. М., 2007. Т. 1. С. 57-58.
 25. Ткачев С.Б. Стабилизация нестационарных аффинных систем методом виртуальных выходов // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 11. С. 1507-1517.
 26. Ткачев С.Б. Реализация движения колесного робота по заданной траектории // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2008. № 2. С. 33-55.
 27. Ткачев С.Б. Стабилизация движения судна на воздушной подушке методом виртуальных выходов // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тез. докл. X Межд. сем. им. Е.С. Пятницкого. М., 2008. С. 313-315.
 28. Ткачев С.Б., Торгашев М.А. Управление виртуальным мобильным роботом // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тез. докл. X Межд. сем. им. Е.С. Пятницкого. М., 2008. С. 315-317.
 29. Ткачев С.Б. Стабилизация систем с линейной нулевой динамикой методом виртуальных выходов // Дифференциальные уравнения и топология: Тез. докл. Межд. конф., посв. 100-летию со дня рожд. Л.С. Понтрягина. М., 2008. С. 405-406.
 30. Ткачев С.Б. Метод виртуальных выходов в задачах стабилизации // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 8. С. 1147-1148.
 31. Ткачев С.Б. Построение минимально фазовых нелинейных систем и стабилизация положения равновесия // Управление динамическими системами: Тез. докл. Межд. конф. М., 2009. С. 86.
 32. Ткачев С.Б. Стабилизация нелинейных систем с векторным управлением методом виртуальных выходов // Математическая теория систем: Тез. докл. Межд. конф. М., 2009. С. 30-31.