

На правах рукописи

ПОЖАЛОСТИН Алексей Алексеевич

РАЗРАБОТКА ПРИБЛИЖЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ
МЕТОДОВ РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ
КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК С ЖИДКОСТЬЮ

01.02.06. – Динамика, прочность машин,
приборов и аппаратуры

01.02.05.- Механика жидкости , газа и плазмы

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени доктора
технических наук



Москва - 2004

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана

Официальные оппоненты:
д.ф.м.н., проф. Горшков А.Г.
д.т.н., проф. Докучаев Л.В.
д.т.н., проф. Аринчев С.В.

Ведущая организация:
ФГУП "НПО машиностроения" г. Реутов.

Защита состоится " 17 " июня _____ 2004г. 14-30

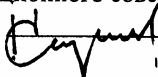
часов на заседании диссертационного совета Д.212.141.03

при МГТУ им. Н.Э. Баумана по адресу:

107005, Москва, 2-я Бауманская д. 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана

Автореферат разослан " ____ " _____ 2004.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.м. н.  А.Ю. Карпачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы.

Современные ракетно-космические системы представляют собой сложные упругие тонкостенные конструкции, содержащие жидкие массы.

Ракетное топливо, находящееся в баках составляет по весу не менее 80% от веса всей конструкции. В связи с этим при расчетах на прочность и анализе динамики движения и динамической прочности таких систем приходится учитывать динамическое взаимодействие (в частности колебания) конструкции с заполняющими ее полости жидкостью.

Такие расчеты необходимо проводить при определении нагрузок при старте летательного аппарата (ЛА), при управлении на активном участке его движения, при расчетах на устойчивость динамики движения системы.

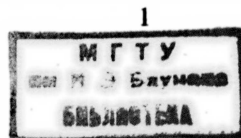
На практике оказалось, что вследствие относительно больших масс жидкости нельзя не учитывать волновые колебания жидкости совместно с упругими колебаниями сосудов, в которых она находится, а вместе с ними и динамические нагрузки на корпус ЛА от данного типа колебаний. Ошибка от неучета колебаний жидкости может быть весьма существенной и приводить к качественно не верным результатам. Кроме форм и частот собственных колебаний, необходимо уметь рассчитывать вынужденные колебания конструкции на каждой секунде ее полета на активном участке траектории.

Ракето-носитель представляет собой сложную многостепенную гидро-механическую систему с мощным источником энергии в виде жидкостного ракетного двигателя. В этой системе кроме вынужденных колебаний могут возникать явления, связанные с параметрическим резонансом.

Среди работ, посвященных вопросам динамики упругих и твердых тел и конструкций, взаимодействующих с жидкостью, в первую очередь следует отметить труды: Моисеева Н.Н., Румянцева В.В., Охочимского Д.Е., Рабиновича Б.И., Нариманова Г.С., Колесникова К.С., Горшкова А.Г., Луковского И.А., Шмакова В.П., Шклярчука Ф.Н., Лампера Р.Е., Докучаева Л.В., Ганиева Р.Ф., Самойлова Е.А., Богоряда И.Б., Алексеева Л.И., Цурикова Ю.А. и других авторов.

Отличие данной работы от работ перечисленных авторов состоит в том, что:

1. Применены гармонические полиномы Лапласа, строго удовлетворяющие как уравнению Лапласа так и главному граничному условию в задаче Неймана на свободной поверхности жидкости.



2. Получены аналитические решения для безмоментных оболочек, частично заполненных жидкостью, как для свободных так и для вынужденных осесимметричных и неосесимметричных форм колебаний.

3. Найдены случаи аналитических решений как для односвязных, так и для двухсвязных упругих полостей заполненных жидкостью.

4. Рассмотрены случаи параметрических колебаний, колебаний при слабой гравитации, колебаний ракетной конструкции “пакетной” схемы деления, получено аналитическое решение и выражение для передаточной функции гидравлического демпфера.

Следует отметить, что в задаче САПРа конструкций возникает необходимость разработки приближенных, но эффективных с точки зрения времени расчета подходов к решению сложных краевых задач, описывающих динамику рассматриваемых систем.

В связи с вышеизложенным разработка методов расчета динамических характеристик жидкостных ракетных конструкций является актуальной проблемой механики деформируемого твердого тела с полостями, заполненными жидкостью, имеющей важное народнохозяйственное значение, например, в нефтехимии, при проектировании зернохранилищ и некоторых биомеханических моделях человека, например, моделью глаза может служить система двух, связанных между собой сферических оболочек.

Цель работы:

Создание методов расчета собственных и вынужденных колебаний в линейной постановке ограниченного упругого объема с жидкостью.

Анализ динамики в случае параметрического резонанса, малой гравитации, линейно вязкого сопротивления построение передаточной функции гидравлического демпфера, определение форм и частот собственных и вынужденных колебаний жидкостных ракет продольной и поперечной схемы разделения.

Научная новизна и значимость результатов исследований заключается в создании методов расчета динамических характеристик жидкостных ракетных конструкций с учетом упругости оболочечных конструкций и колебаний жидкости в упругих полостях.

Получение модельных решений для задач гидроупругих колебаний в одно и двухсвязных упругих полостях частично заполненных жидкостью.

Анализ динамики упругого сосуда с жидкостью при малой гравитации, и в случае параметрического возбуждения колебаний.

Разработка метода расчета для анализа динамических характеристик жидкостной ракеты в случае продольного и поперечного разделения.

Достоверность основных научных результатов состоит в том, что динамические характеристики упругого сосуда с жидкостью сравниваются с результатами эксперимента и результатами, полученными в работах других авторов. Кроме этого она подтверждается тем, что в работе корректно используются фундаментальные методы математики и математической физики.

Практическая ценность работы заключается в том, что разработана эффективная методика для расчета форм и частот собственных и вынужденных колебаний жидкостной ракеты типа "пакет" с учетом упругости оболочечных конструкций с жидким наполнением.

Построены для определенных форм баков модельные решения задачи о свободных и вынужденных малых колебаниях односвязных и двухсвязных оболочек, частично заполненных жидкостью.

Изложенный в работе метод решения красовой задачи Неймана-определения частот и форм свободных колебаний упругой полости с жидкостью используется на предприятиях соответствующего профиля, а также в учебном процессе университета.

Апробация работы.

Отдельные фрагменты работы были доложены на Всесоюзной юбилейной конференции по теории оболочек и пластинок в 1969г. в г. Днепропетровске; на Всес. семинарах и симпозиумах в г. Томск в НИИПММ, в г. Новосибирск в СИБНИА с 1970 по 1992г. по динамике упругих конструкций, взаимодействующих с жидкостью; на юбилейной конф. в МАИ в 1975г.; доклад с обзором работ был сделан в г. Киеве в НИИПММРУ в 1989г. на Всес. школе-семинаре по динамике конструкций, взаимодействующих с жидкостью; на международном семинаре МВТУ- Варшавская политехника на I-м и II-м межд. симпозиумах в МГТУ (актуальные проблемы фундаментальных наук) в 1991, 1994г.; доложена на кафедре "Теоретическая механика" МГТУ им. Н.Э.Баумана.

Публикации. Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в 47 научных статьях, а 4 статьи за рубежом.

Структура диссертации.

Изложение материала собственных исследований автора строится последовательно, таким образом, чтобы раскрыть решение

поставленной в работе проблемы, а именно, разработки методов для анализа динамики жидкостных ракет с учетом жидкости и упругости оболочечных конструкций (в частности жидкостных ракет пакетной схемы разделения элементов конструкции). В связи с этим вначале работы обсуждаются некоторые теоретические вопросы, связанные с применением развиваемого в работе метода решения поставленной задачи. Предлагается оригинальный аналитический способ построения потенциала скорости для жидкости. Определяются формы и частоты собственных и вынужденных колебаний упругих сосудов с жидкостью различной геометрической конфигурации (в том числе и двухсвязной полости) по безмоментной и по моментной технической теории тонких оболочек.

С целью наглядности и упрощения учета колебаний жидкости в баках с помощью введенной нормировки для форм колебаний последние заменены механическим аналогом в виде системы осцилляторов. Причем, сумма масс аналога равна физической массе жидкости в баке.

Для проверки полученные результаты сравниваются с результатами проведенного в работе эксперимента и данными других авторов.

Кроме указанного способа реакция на корпус ЛА от колебаний жидкости в упругом сосуде учитывается с помощью разработанной методики определения коэффициента динамичности. После этого приводится методика расчета форм свободных и вынужденных колебаний корпуса ЛА с продольным и поперечным ("пакет") разделением элементов корпуса. В приложении приведены документы о внедрении результатов данной работы в учебный процесс и практику расчетов по динамике ЛА.

Объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, основных результатов и выводов, списка литературы, приложения и содержит 292 страницы машинописного текста, 31 рисунок. Библиографический список включает 151 наименование литературных источников.

Диссертационная работа выполнена на кафедре "Теоретическая механика" МГТУ им.Н.Э.Баумана.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении на основе обзора работ, относящихся к анализу динамики упругих конструкций, взаимодействующих с жидкостью и задач, стоящих перед исследователями в области ракетно- и самолетостроения, а также при решении задач, связанных с анализом прочности сооружений в химической, нефтедобывающей и газовой промышленности, при проектировании зернохранилищ в сельском хозяйстве, в морской, железнодорожной, космической технике и

дирижаблестроении, раскрывается актуальность проблемы анализа динамики конструкций и наполняющей ее полости жидкостью. Формулируется цель и задачи исследования. Кратко излагается содержание диссертации.

Обосновывается необходимость учета динамической реакции от жидкости при взаимодействии упругой конструкции с заполняющей ее полости жидкостью. Ставится задача о разработке методики расчета для анализа динамических характеристик жидкостных ракет с продольным и поперечным ("пакетная" схема) разделением ступеней с учетом упругости оболочечных конструкций.

В настоящей работе использованы методы (метод собственных функций), позволяющие получить приближенные решения в аналитическом виде, которые при их практическом применении (например, в САПР изделий) для анализа динамических характеристик системы дают возможность апробировать и сравнивать между собой численные решения.

Используя традиционную постановку задачи о малых колебаниях упругого бака с жидкостью найдены и даны решения практически для всех случаев частично заполненных жидкостью безмоментных оболочек разной геометрической формы, для которых возможно получение аналитического решения задачи об определении форм и частот собственных колебаний как симметричных так и неосесимметричных.

Для общего случая малых колебаний моментной оболочки и заполняющей ее жидкости используется численно-аналитический способ решения, предусматривающий разложение решения в ряд по гармоническим полиномам Лапласа, каждый член которого точно удовлетворяет главному граничному условию задачи Неймана.

С целью создания методики расчета для определения форм и частот колебаний изделия пакетной схемы решается задача о вынужденных колебаниях упругого сосуда с жидкостью. Движение жидкости заменяется механическим аналогом в виде системы линейных осцилляторов, суммарная масса которых равна физической массе жидкости в баке. Кроме этого в работе в достаточно общем виде получено выражение для коэффициента динамичности, с помощью которого можно вычислить динамическую реакцию от колебаний упругого сосуда с жидкостью, действующую на корпус ЛА. Следует отметить, что предварительное знание форм собственных колебаний системы в данном случае необязательно.

Поскольку в эксперименте часто наблюдаются неосесимметричные колебания в работе рассмотрены и такие типы колебаний. Для них разработан способ построения потенциала скорости и получены аналитические решения для ряда безмоментных оболочек, частично

заполненных жидкостью.

С целью доказательства существования осесимметричных типов колебаний и проверки правильности полученных результатов по определению форм и частот собственных колебаний упругих сосудов с жидкостью в работе был создан динамический стенд и экспериментально получены их динамические характеристики.

В линейной постановке рассмотрены колебания жидкости в сосуде при малой гравитации, а в связи с этим и колебания бака с мембраной на свободной поверхности.

Для борьбы с возникновением продольных автоколебаний в системе подачи топлива в ЖРД используется гидравлический демпфер. В работе рассмотрена математическая модель этого устройства и дано аналитическое выражение для передаточной функции последнего.

Для проведения проектировочных расчетов в рамках САПР получены аналитические формулы (на основе идеи метода Граммеля) для приближенного определения первой и второй частоты собственных колебаний упругого сосуда, наполненного жидкостью.

Рассмотренные в работе вопросы динамического взаимодействия упругого бака с жидкостью позволяют провести анализ динамических характеристик жидкостных ракет с продольным и поперечным разделением ее ступеней с учетом колебаний жидкости в баках и упругости оболочечных конструкций.

Кроме этого рассмотрены некоторые специфические вопросы колебаний упруго-жидкостной системы. Получены уравнения для анализа параметрических колебаний упругого бака с жидкостью, а также показана возможность параметрического взаимодействия продольно-поперечных колебаний тонкостенного стержня с полостями, наполненными жидкостью. Последнее дает возможность понять причину, связанную с трудностями возбуждения симметричных форм колебаний упругого бака с жидкостью в эксперименте.

Во второй главе диссертации излагаются особенности используемого вариационного принципа для решения задач гидроупругости. С этой целью используется принцип Гамильтона для малых колебаний упругого бака с жидкостью.

В качестве предварительных граничных условий для координатных функций, аппроксимирующих потенциал скорости частиц жидкости Φ , выбираются силовые граничные условия на смоченной поверхности сосуда и главное граничное условие (для задачи Неймана) на свободной поверхности жидкости. После соответствующих преобразований, получаем, что потенциал не обязательно предварительно должен удовлетворять уравнению

Лапласа и геометрическим граничным условиям (например, условия непротекания) краевой задачи. Далее устанавливается, что применение используемого в работе вариационного принципа (аналогичного методу Галеркина) приводит к проблеме собственных значений с симметричными матрицами. Доказывается вещественность спектра собственных значений задачи о малых колебаниях упругого безмоментного сосуда частично заполненного жидкостью. Последнее следует из самосопряженности и положительной определенности оператора $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}}$ для рассматриваемой краевой задачи. Здесь $\bar{n}$ -

внешняя нормаль к смоченной поверхности сосуда. Считается, что смоченная поверхность является поверхностью типа Ляпунова. Частотное уравнение краевой задачи о малых колебаниях упругого сосуда с жидкостью представляет собой систему уравнений левая часть которой - бесконечный определитель. Поскольку доказано, что оператор рассматриваемой краевой задачи положительно определенный и самосопряженный, то для приближенного решения частотный определитель можно усекать. Справедливость такого рода действий следует из соответствующих теорем функционального анализа для рассматриваемого типа операторов.

В качестве иллюстрации метода решения краевой задачи, рассматриваются свободные симметричные колебания безмоментного цилиндрического бака со сферическим днищем, наполненного идеальной, несжимаемой жидкостью, движение которой считается потенциальным.

Потенциал скорости ищется в виде совокупности двух потенциалов

$$\phi_1 \text{ и } \phi_2: \phi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \phi_j^{(1)}(r, x) \cos \omega t, \phi_2 = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \phi_j^{(2)}(\zeta, \psi) \cos \omega t \quad (1)$$

Здесь B_j - неизвестные постоянные, $\phi_j^{(1)}$ - потенциал в цилиндрической, а $\phi_j^{(2)}$ в сферической части бака, ω - частота колебаний, t - время.

Координатные функции ϕ_j выбираются так, чтобы они заранее точно удовлетворяли главному краевому условию задачи Неймана, уравнению Лапласа $\Delta(\Phi) = 0$ в объеме жидкости и условиям на плоскости, разграничивающей цилиндрическую и сферическую части сосуда. Вычислив динамическое давление на стенки бака с помощью (1) находим прогибы оболочки (инерция не учитывается) в виде:

$$w_1 = \omega \sum_1^{\infty} B_j w_{1j}(x) \sin \omega t; \quad w_2 = \omega \sum_1^{\infty} B_j w_{2j}(\psi) \sin \omega t \quad (2)$$

где x - координата вдоль образующей цилиндра, ψ - угловая координата сферического днища. Так как $L(\Phi) = 0$, то умножив последнее равенство на ϕ_i и применив формулу Грина, с учетом того, что $\Phi = 0$ на Σ (свободная поверхность жидкости), будем иметь:

$$\iint_s \left(\phi_i \dot{w} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right) ds = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

Здесь учтено условие непротекания на смоченной стенке бака:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\dot{w} \quad \text{на } s$$

$$\text{или } \sum_1^{\infty} B_j (\alpha_{ij} - \omega^2 v_{ij}) = 0, \quad \text{где (3)}$$

$$\alpha_{ij} = \iint_s \left(\phi_j \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right) |_s ds, \quad v_{ij} = \iint_{s_1} \phi_i^{(1)} w_{1j} ds + \iint_{s_2} \phi_i^{(2)} w_{2j} ds \quad (4)$$

Уравнение (3) может быть представлено так: $(A - \lambda C) \bar{B} = 0$, где

$$\lambda = 1 / \omega^2, \quad A = (v_{ij}), \quad C = (\alpha_{ij}).$$

Симметричность матрицы A следует из принципа взаимности работ Бетти, а C на основании выражения кинетической энергии частиц жидкости. Нетрудно показать, что число λ вещественно и ему соответствует вещественный собственный вектор $\bar{B}$. Потенциал скорости Φ ищется в виде разложения по функциям $\phi_i^{(k)}$ ($k = 1, 2$), $i = 1, 2, \dots, m$. Каждая координатная функция представляет собой гармонический полином Лапласа. Она удовлетворяет главному граничному условию на Σ , а условие непротекания - естественное граничное условие.

Далее в диссертации излагается способ построения системы координатных функций ϕ_i . Известно, на основании теоремы Вейерштрасса, что любая непрерывная функция на $[a, b]$, может быть приближена равномерно с произвольной точностью полиномом, а также и в среднем. Аналогичное утверждение справедливо и для функций из множества $L_2(a, b)$ (L_2 - гильбертово пространство функций интегрируемых с квадратом в области G).

Таким образом, для нашего (плоского) случая достаточно

использовать функции
$$\sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^q a_{ik} x_1^i x_2^k$$

Применим эти функции для построения потенциала скорости Φ :
 а) для случая симметричных колебаний односвязного бака, образованного вращением некоторого контура относительно его оси симметрии. Например, для конического бака со сферическим днищем. Функцию ϕ_1 (в конической части сосуда) ищем в виде:

$$\phi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} B_j [r^a P^a(\cos \varphi) + \sum_{v=0}^{j-1} a_{2v,a} r^{2v} P_{2v} \cos \varphi],$$

где P_a - полиномы Лежандра степени a , $a = 2j - 1$; r, φ - полярные координаты с началом в вершине конуса O . Нетрудно видеть, что ϕ_1 удовлетворяет уравнению Лапласа. Константы $a_{2v,a}$ находятся из динамического условия на Σ - $\Phi_{tt} + g\Phi_x = 0$, где g - ускорение

свободного падения, $\Phi_t = \partial \Phi / \partial t$, x - декартова координата. Вводя вспомогательную систему координат OXY - $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, используя разложение $P_a(\cos \varphi)$ по степеням $\cos \varphi$ найдем все $a_{2v,a}$ для данного номера j , сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y . Для $a_{2v,2j-1}$ получается система линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей так, что каждый следующий коэффициент $a_{2v,2j-1}$ выражается через предыдущие, имеющие больший первый индекс. Таким образом, можно принципиально построить любое j -е слагаемое функции Φ . Например, для $j=1$ $\Phi_1 = B_1 \left[r P_1(\cos \varphi) - \left(h_1 - 1 / \Omega^2 \right) \right]$, где

$$\Omega^2 = R\omega^2 / g, \quad h_1 = H_1 / A, \quad A - \text{характерный размер сосуда,} \\ r = R / A.$$

Определение функции ϕ_2 . Введем сферическую систему координат $O_1 \in \Psi$ с началом в геометрическом центре сферического днища.

Функции ϕ_1 и ϕ_2 должны удовлетворять граничным условиям на плоскости $x = h$, разграничивающей коническую и сферическую

части бака. $\phi_{1r} = \phi_{2r}$, $\phi_{1x} = \phi_{2x}$. Потенциал ϕ_2 ищем в виде:

$$\phi_2 = \sum_1^{\infty} B_j [\beta_{a,a} \zeta^a P_a(\cos \psi) + \sum_{k=0}^{a-1} \beta_{k,a} \zeta^k P_k(\cos \psi)].$$

Константы $\beta_{k,a}$ определяем из условий на плоскости $x = h$ последовательно для $j = 1, 2, \dots$. Пусть $j = 2$. Подставим в эти условия слагаемые ϕ_1 и ϕ_2 с $j = 2$, учитывая формулы преобразования координат $O r \phi$ и $O_1 \zeta \psi$ в декартову систему координат $O x y$. Для $O_1 \zeta \psi$ имеем $\zeta \cos \psi = x - h_2$, $\zeta \sin \psi = y$. Используя представление полиномов Лежандра, сравним коэффициенты при одинаковых степенях y . Тогда для определения констант β получим систему линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей: $\beta_{03} + \beta_{13} a_{12} + \beta_{23} a_{13} + \beta_{33} a_{14} + A_1 = 0$,
 $\beta_{13} + \beta_{23} a_{23} + \beta_{33} a_{24} + A_2 = 0$,
 $\beta_{23} + \beta_{33} a_{34} + A_3 = 0$,
 $\beta_{33} = 1$.

Выражения для констант a и A не приводятся.

Рассмотрим случай цилиндрического бака со сферическим днищем. Потенциал скорости Φ ищем в виде двух функций ϕ_1 и ϕ_2 . ϕ_1 описывает движение жидкости в объеме, ограниченном поверхностями $x = 0$, $r = r_2$, $x = h$, а ϕ_2 в полости сферического днища бака.

Функцию ϕ_1 представим в виде:

$$\phi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} B_j f_j(x, r) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \left[\sum_{i=1}^j a_{ij} (h-x)^b r^c \right], \text{ где } b = 2j - 1 - 2(i -$$

$1)$, $c = 2(i - 1)$. Потенциал ϕ_1 удовлетворяет точно условию на Σ при $g = 0$ - $\Phi = 0$. B_j - неизвестные, подлежащие определению постоянные.

Константы a_{ij} находятся аналитически из системы линейных алгебраических уравнений, так как последняя имеет треугольную матрицу. Для этого достаточно ϕ_1 подставить в уравнение Лапласа, в цилиндрической системе координат и решить полученное функциональное уравнение сравнением коэффициентов при одинаковых степенях $h - x$. Например, первые две функции имеют вид: $f_1 = h - x$, $f_2 = (h - x)^3 - (h - x)r^2(3/2)$ и так далее.

Определение функции ϕ_2 . Потенциал скорости ϕ_2 ищем в виде:

$$\Phi_2 = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \Psi_j(\zeta, \psi) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \left[\beta_{a,a} \zeta^a P_a(\psi) + \sum_{j=0}^{a-1} \beta_{V,a} \zeta^j P_j(\psi) \right].$$

Используя преобразования координат и разложения функций P_V , примерно так, как это сделано в случае конического бака, получим, что ψ_1 и ψ_2 имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_1(\zeta, \psi) = & \zeta \cos \psi + h - h, \quad \psi_2(\zeta, \psi) = \zeta^3 P^3(\cos \psi) + \\ & + \zeta^2 P^2(\psi) [3(h - h_1) + \zeta P_1(\psi) [3(h^2 - h_1^2) - 6 h_1 (h - h_1)]] + \\ & + h^3 + h_1^3 - 3 h_1 [h^2 - h_1^2 - h_1 (h - h_1)]. \end{aligned}$$

б) Неосесимметричные колебания. Рассмотрим методику определения потенциала скорости Φ в этом случае на примере конического бака со сферическим днищем. Согласно решения уравнения Лапласа для внутренней задачи Неймана потенциалы Φ_1 и Φ_2 ищем в виде:

$$\Phi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} B_n^{(m)} \Psi_n^{(m)}(n, \varphi) \cos m \theta, \quad \Phi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} B_n^{(m)} X_n^{(m)}(\zeta, \psi) \cos m \theta$$

где $B_n^{(m)}$ неизвестные постоянные, θ - окружная координата m - количество волн в окружном направлении, в выражения функций Ψ и X входят присоединенные функции Лежандра - $P_k^{(m)}(\cos \varphi)$.

Функцию Ψ примем в виде:

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(m)} = & r^a P_a^{(m)}(\cos \zeta) + \sum_{j=0}^{n-m} r_{2V,n}^{(m)} r^b P_b^{(m)}(\cos \varphi), \quad \text{где } a = 2n - m + 1, \quad b = 2n \\ & + m. \quad \text{Пусть } \Phi_1 = 0 \text{ на } \Sigma, \text{ тогда подставляя } \Psi_n^{(m)}, \text{ для данных значений } n \\ & \text{и } m \text{ получим систему алгебраических уравнений с треугольной} \\ & \text{матрицей. Например, пусть } m = 1, n = 2 \text{ тогда с учетом выражения для} \\ & P_k^{(m)}(\varphi) \text{ получим: } r_{2,2}^{(1)} = -5 h_1, \quad r_{0,2}^{(1)} = 15 h_1 (9 h_1^2 + 1) / 2. \end{aligned}$$

Аналогично определяются функции $\Psi_n^{(1)}$ для любого номера n .

Потенциал Φ_2 ищем в виде: $\Phi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} B_n^{(m)} X_n^{(m)}(\xi, \psi) \cos m \theta$, где функцию $X_n^{(m)}(\xi, \psi)$ примем в виде, чтобы удовлетворить условиям аналитического продолжения функции Φ_1 из конической в сферическую часть бака.

$$X_n^{(m)} = \alpha_{a_1, a_1}^{(m)} \zeta^{b_1} P_{b_1}^{(m)}(\psi) + \sum_{k=0}^{2(n-m)} \alpha_{k, 2n-1}^{(m)} \zeta^{k+m} P_{k+m}^{(m)}(\psi),$$

где $a_1 = 2n - 1$, $b_1 = 2n - m + 1$.

Пусть $m = 1$, $n = 2$, тогда, вводя вспомогательные прямоугольные декартовы координаты (как это делалось выше), из условий на плоскости $x = h$, получим для определения констант α

систему уравнений с треугольной матрицей четвертого порядка. Последняя за неимением места здесь не приводится.

Используя вышеизложенное, рассмотрим некоторые примеры определения частот и форм собственных осесимметричных колебаний (элементов частотного определителя) для случая моментной и безмоментной теории оболочек, частично заполненных жидкостью.

Случай 1 - осесимметричные колебания безынерционного конического бака со сферическим дном, частично заполненного жидкостью.

Уравнения движения оболочки с учетом динамического давления жидкости интегрируются аналитически и частотное уравнение системы приводится к виду (бак полностью заполнен жидкостью)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ r_1^2 \chi_{j\zeta} + \frac{\sin \varphi_0 P_{2j-1}(\varphi_0) d P_{2\zeta-1}}{2j+2\zeta-1} \frac{d P_{2\zeta-1}}{d \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} - \Omega^2 \left[(1+\mu) \eta \lambda_{j\zeta} - \text{tg}^3 \varphi_0 \theta_{j\zeta} / r_1^3 \right] \right\} = 0 \quad \zeta=0,1,$$

$$\Omega^2 = \rho \omega^2 R_1^3 / E \delta, \quad \text{где } \rho - \text{плотность жидкости, } \delta - \text{толщина оболочки,}$$

R - радиус дна бака, ω - частота свободных колебаний, E - модуль упругости 1-го рода.

Во втором примере рассмотрено определение частот малых свободных неосесимметричных колебаний конической оболочки, частично заполненной жидкостью. Уравнения движения безынерционной оболочки имеют вид:

$$N_g = P_r s \text{tg } a_0, \quad \partial(N_{sg} s) / \partial s + (\partial N_g / \partial g) / \sin a_0 + N_{sg} = 0,$$

$$\partial(N_s s) / \partial s + (\partial N_{sg} / \partial g) / \sin a_0 - N_g = 0.$$

Здесь N_g , N_s , N_{sg} - безразмерные окружное, меридиональное и усилие сдвига соответственно, a_0 - угол полураствора конуса, s - безразмерная координата вдоль по образующей конуса, g - окружная координата, p_r - безразмерное динамическое давление жидкости.

Используя закон Гука для оболочек, выражение потенциала скорости, приведенное выше можно проинтегрировать эти уравнения и

получить прогиб w_m ($w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \cos m g$) смоченной части

поверхности
оболочки:

$$\dot{w}_m = -\omega^2 \sum_{n=m}^{\infty} B_n^{(m)} [a_m s^{a-1} + \sum_{v=0}^{n-m} \gamma_{2v,n}^{(m)} \alpha_m s^{k+2} + C_m]$$

временной множитель опущен, $\dot{w} = dw/dt$. Для констант $B_n^{(m)}$ получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=m}^{\infty} B_n^{(m)} [b_{nk} - \omega^2 a_{nk}] = 0 \quad k = m, m+1, \dots, \text{ где}$$

$$b_{nk} = \iint_F \Psi_n^{(m)} \frac{\partial \Psi_n^{(m)}}{s \partial \varphi} dF, \quad a_{nk} = \iint_F \Psi_k^{(m)} [\alpha_m s^{a-1} + \\ + \sum_{v=0}^{n-m} \gamma_{2v,n}^{(m)} \alpha_m s^{k-2} + C_m] dF, \quad F - \text{смоченная поверхность}$$

оболочки. Аналитические выражения коэффициентов a_{nk} , b_{nk} не приводятся. Например, в случае $m = 1$ с учетом одного члена ряда в потенциале скорости получим:

$$\omega^2 = \sin^2 \alpha_0 [(9/10) \cos^2 \alpha_0 - 9(2 \cos^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha_0) / 8 + \\ (3/2) \cos^2 \alpha_0 / [(3/2) \sin^2 \alpha_0 (\alpha_1/56 + c_1/12 + d_1 \cos \alpha_0/14)] s_c^3,$$

выражения для α_1 , c_1 , d_1 не приводятся. При $\mu = 0,3$, $\alpha_0 = \pi/6$ ($m = 1$, $n = 1$) имеем: $s_c = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$, $\omega_{11}^2 = 52,8; 8,85; 4,23; 2,61; 1,8$.

С целью уточнения полученных аналитических решений для форм и частот собственных колебаний безмоментных оболочек с жидкостью и более полного удовлетворения граничных условий закрепления контура оболочки (учета краевого эффекта) в работе рассмотрен случай моментной теории оболочек. Аналитические методы решения задачи в этом случае дополняются численными методами, а единственное отличие от рассмотренного выше способа решения заключается в том, что прогибы оболочек под действием динамического давления жидкости $P_r = \rho \partial \Phi / \partial t$ находятся численно. Потенциал скорости аппроксимируется в виде ряда по гармоническим полиномам Лапласа (гл. 1 данной работы). Решение для прогибов оболочки разыскивается для каждого слагаемого в потенциале Φ отдельно одно от другого. В этом случае уравнения движения оболочки представляются в известном виде в форме Коши и для симметричных типов колебаний являются системой обыкновенных уравнений 6-го порядка $L(\bar{c}) = [G] \bar{c} + \bar{F}$, где $L = d/ds$, s - дуговая координата (5)

вдоль по меридиану оболочки, $\bar{F}^T = [0, 0, 0, f_4, f_5, 0]$ - вектор динамической нагрузки на оболочку от жидкости,

$f_4 = -\rho \sin \theta \partial^2 \Phi / \partial t^2$, $f_5 = \rho \cos \theta \partial^2 \Phi / \partial t^2$, θ - угол, а G - матрица, зависящие от конкретной геометрической формы оболочки.

Используя известный в литературе способ численного интегрирования уравнений (5), например, метод Рунге-Кутты и

построения линейно независимых решений по методу С.К.Годунова, находим, разбивая интервал интегрирования по всей длине меридиана оболочки на n участков, решение этой неоднородной краевой задачи, учитывая условия закрепления стенок сосуда. Пусть (не вдаваясь в детали процесса интегрирования) вектор решения для точки k ($k = 1, \dots, n$) равен $\bar{y}_k$. Тогда прогиб стенки бака вычисляется по формуле

$$w_{kj} = y_{1j} \sin \theta - y_{2j} \cos \theta, \quad y_{1j}, y_{2j} - \text{компоненты вектора } \bar{y}_k; j -$$

номер слагаемого в потенциале Φ . Если инерция стенок не учитывается, то следует считать $\omega = 1$, в противном случае для проведения вычислений следует задаваться каким то произвольным значением параметра. Окончательно на этом этапе расчета мы

определяем $w(s) = \sum_{j=1}^M B_j w_j(s)$, M - число учитываемых слагаемых в

разложении потенциала скорости. Зная $w(s)$, вычисляем коэффициенты матриц - a_{ij} и g_{ij} по вышеприведенным формулам и

определяем систему алгебраических уравнений m -го порядка для

$$\text{нахождения констант } B_j. \sum_{j=1}^M B_j (a_{ij} - w^2 g_{ij}) = 0, i = 1, 2, \dots, m.$$

(6)

Вычисляя значения w_i ($i = 1, \dots, m$), при которых det

$|a_{ij} - w^2 g_{ij}| = 0$ мы получаем величины частот собственных колебаний системы. В случае, когда собственные значения w_i простые форма

$\Psi_e(x, r)$ потенциала скорости Φ в l -ном главном колебании

имеет вид: $\Psi_e(x, r) = \sum_{j=1}^M \lambda_{ej} f_j(x, r)$, λ_{ej} - коэффициенты формы

собственных колебаний системы, определяемые из (6) по известным правилам. Случай кратных частот рассмотрен ниже.

Для односвязной оболочки, образованной вращением некоторого произвольного контура относительно ее оси симметрии важно правильно определить $r(s)$, $\cos \theta(s)$, $\sin \theta(s)$ - радиус параллельного круга оболочки и величины угла θ , определяющих геометрию срединной поверхности оболочки. Аппроксимация этих функций может быть выполнена с помощью сплайнов. Так, например, сплайн $s_{\cos \theta}(s)$ можно найти, используя выражение сплайна дуги

$$\text{меридиана } s - S_s(t) = \int_{t_1}^t [x'^2(t) + r'^2(t)] dt \text{ и}$$

$\cos \theta_i(t_i) = x'_i(t_i) / \sqrt{x'_i(t_i)^2 + r'_i(t_i)^2}$, где t - некоторый параметр (выражение для которого не приводится), x_i - значение координаты вдоль оси симметрии бака в i -м сечении его плоскостью перпендикулярной оси сосуда.

$r'_i(t_i) = (r_{i+1} - r_i) / (t_{i+1} - t_i)$. Дальнейший ход решения задачи не отличается от процедуры, изложенной выше.

Получено аналитическое решение задачи о свободных осесимметричных колебаниях упругого двухсвязного объема, состоящего из двух концентрических сфер, заполненного сжимаемой жидкостью, по безмоментной теории. Оно найдено для случая полного и половинного заполнения сосуда. Разрешающие уравнения для оболочек имеют вид: $\nabla^2 \vartheta_{i\tau} + 2 \vartheta_{i\tau} = (-1)^i (1 + \mu_i) \Phi_{\tau\tau}$, $i = 1, 2$, $\vartheta_{i\tau}$ - производная по безразмерному времени τ от вспомогательной функции, μ - коэффициент Пуассона. Потенциал скорости Φ ищется в виде:

$$\Phi = R_1^{-2} \alpha^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-\frac{1}{2}} [C_{1n} J_\nu(z) + C_{2n} J_{-\nu}(z)] P_n(\psi) e^{i\omega\tau},$$

где $P_n(\psi)$ - полиномы Лежандра, J_ν функции Бесселя степени ν

$$\nu^2 = n(n+1) + 1/4 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Решая уравнения для оболочек, удовлетворяя условию непротекания и граничным условиям закрепления оболочек (подробности опущены), получим частотное уравнение данной задачи

$$\text{в виде } \left[\sum_{n=2}^{\infty} d_{1n}(\omega) - 1 \right] \left[\sum_{n=2}^{\infty} d_{2n}(\omega) - 1 \right] - \sum_{n=2}^{\infty} d_{3n}(\omega) \sum_{n=2}^{\infty} d_{4n}(\omega) = 0$$

Выражения для d не приводятся. Частотное уравнение представляет собой мероморфную функцию, коэффициенты которой представляют собой быстроходящиеся бесконечные ряды.

В случае неосесимметричных колебаний оболочки с жидкостью система дифференциальных уравнений движения имеет вид $L(\bar{\xi}(m)) = [G(m)] \bar{\xi}(m) + \bar{F}(m)$, где m - число волн в окружном направлении. Вектор $\bar{F}_m$ определяется с помощью потенциала скорости, выражение для которого приведено выше. Дальнейшее решение задачи (поскольку отделена окружная координата) принципиально не отличается от случая осесимметричных колебаний. Найденное выше, выражение для потенциала скорости жидкости Φ позволяет получить аналитические выражения для элементов частотного определителя в случае неосесимметричных колебаний

упругого цилиндрического бака со сферическим днищем, наполненного жидкостью. Оболочки сосуда рассматриваются по моментной теории В.З. Власова и технической моментной теории цилиндрической оболочки:

$$\alpha \nabla^2 \nabla^2 (\nabla^2 + 4) w_2 + (\nabla^2 + 2) w_2 = \rho R_1^2 [(1-\mu) + \nabla^2] \frac{\partial \Phi}{\partial t} / E \delta$$

$$\nabla_1^4 \nabla_1^4 \varphi + \frac{(1+\mu^2)}{r_2^4 C^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = R_2^4 \frac{\partial \Phi}{\partial t} / r_2^2 D, \text{ где } \nabla - \text{оператор}$$

Лапласа на сфере, $\nabla_1^4 = \partial^4 / \partial x^4$, w_2 - прогиб днища, φ - "основная" функция для обечайки, R_1 - радиус кривизны днища, R_2 - радиус обечайки. Достаточно подробно рассмотрены детали построения потенциала скорости Φ . Получены аналитические выражения для прогибов оболочек под действием жидкости.

Далее представлена методика решения задачи о колебаниях упругого сосуда с мембраной на свободной поверхности жидкости. Последняя проиллюстрирована на примере жесткой цилиндрической обечайки с упругим плоским днищем в форме мембраны. В этом случае потенциал скорости ищется в виде:

$$\Phi = [A_0 + B_0 \frac{x}{H} + \sum_{i=1}^{\infty} \{A_i \operatorname{ch}(k_i \frac{x}{H}) + B_i \operatorname{sh}(k_i \frac{x}{H}) J_0(k_i \frac{r}{H})\}] e^{i \omega t}, \text{ где}$$

A_0, B_0, A_i, B_i - константы, подлежащие определению, H - высота столба жидкости, r, x - радиальная и осевая координаты соответственно, k_i - корни трансцендентного уравнения.

$J_1(k_i R/H) = 0$, где R - радиус обечайки. Найдено два типа решения: а) В первом - левая часть частотного уравнения представляет бесконечный определитель; б) Во втором случае - мероморфную функцию, коэффициенты которой являются быстро сходящимися бесконечными рядами по функциям Бесселя.

Далее в диссертации рассмотрены вынужденные колебания упругих оболочек с жидкостью. С помощью установленных в работе условий ортогональности форм собственных колебаний, например, при $g = 0$ и пренебрежении инерцией оболочки они имеют вид:

$$\iint_s \Phi_i w_k d s = 0 \text{ при } i \neq k, \text{ выведены уравнения вынужденных}$$

движений оболочки с жидкостью в главных координатах, опорный шпангоут которой совершает гармонические колебания в вертикальном направлении по закону $u(t) = u_0 \cos p t$, u_0 - амплитуда перемещения, p - его частота. Потенциал абсолютной скорости частиц жидкости Φ примем в виде: $\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}$, $\Phi^{(1)} = (H -$

$x) du/dt, \Phi^{(2)} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \Phi_i^{(2)} \dot{T}_i(t)$, здесь A_i - нормирующий множитель,

$\Phi_i^{(2)}$ - форма собственного колебания системы i -го тона, $T_i(t)$ -

функции, подлежащие определению. Показано, что если A_i выбрать соответствующим образом, то механическим аналогом колебаний жидкости в упругом сосуде будет являться система параллельных

осцилляторов с массами m_i , а сумма последних $\sum_{i=1}^{\infty} m_i = m$ будет

равна физической массе жидкости в баке. Следует отметить, что этот ряд достаточно хорошо сходится. Найдены модельные решения задачи о вынужденных колебаниях для некоторых форм баков, частично заполненных жидкостью при гармоническом возбуждении методом без разложения искомого решения в ряд по формам собственных колебаний системы.

Идея этого метода взята из опубликованной монографии К.С. Колесникова. В нашей работе она применена для подсчета коэффициента динамической жесткости упругого сосуда с жидкостью и получения аналитических решений для вынужденных колебаний рассматриваемой системы. В работе найдено шесть случаев геометрических форм сосудов, для которых получены точные решения. Например, для жесткого цилиндрического сосуда с упругим днищем в виде мембраны потенциал абсолютных скоростей жидкости (при $g = 0$) принимается в виде:

$$\Phi = \dot{u} [(H-x)^2 - g/p^2] + [A_0 + B_0 \frac{x}{H} + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i ch \lambda_i \frac{x}{H} + B_i sh \lambda_i \frac{x}{H}) *$$

$$J_0(\alpha r)] p \sin p t.$$

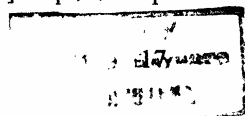
Окончательно, выражение для прогиба мембраны ϑ имеет вид:

$$\vartheta = u_0 \gamma_0 [d_0 + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \{th \lambda_i (\bar{p}^2 th \lambda_i - \lambda_i^3 / \chi^3)\} J_0(\frac{\lambda_i}{H})] \cos p t$$

Выражения для констант γ, d_0, d_i не приводятся, u_0 - амплитуда колебаний опорного шпангоута.

Разработана методика для определения коэффициента динамичности κ_{∂} упругого цилиндрического бака со сферическим днищем, частично заполненного жидкостью. Показано, что формула

$$\text{для } \kappa_{\partial} \text{ имеет вид: } \kappa_{\partial} = \rho p^2 \iint_{s_1} [x-H + \sum_{j=1}^M \bar{D}_j f_j(x,r)] ds_1, \text{ где } s_1$$



- плоскость, разделяющая цилиндрическую и сферическую полости бака, $f_j(x, r)$ - функции, удовлетворяющие линеаризованному граничному условию на Σ , $\bar{D}_j$ - константы, определяемые численно из граничных условий при решении неоднородной краевой задачи для заданного значения p . Кроме этого, может быть предложен и другой, приближенный способ определения κ_∂ . А именно,

$$\kappa_\partial = \rho p^2 \iint_{s_1} [(x-H)\alpha_j + \bar{D}_j f_j(x, r)] ds_1, \text{ где } \alpha_j = 90^\circ / \pi^4 j^4$$

($j = 1, 2, \dots, M$)

$$\text{Тогда } \kappa_\partial = \sum_{j=1}^m \kappa_{\partial j}, \text{ а реакция бака } R(t) = u_0(\cos pt) \sum_{j=1}^m \kappa_{\partial j}.$$

Построены уравнения для анализа параметрических колебаний упругой оболочки с жидкостью. Данная задача является обобщением классической задачи о параметрических колебаниях жидкости в жестком сосуде со свободной поверхностью, впервые рассмотренной в монографии Н.Н.Моисеева на случай упругого сосуда с жидкостью. Параметрические колебания рассмотрены на примере цилиндрического бака с жесткой обечайкой и упругим плоским днищем в виде мембраны.

В этом случае потенциал абсолютных скоростей жидкости ищется в виде: $\Phi = \dot{u} \left[H - x - \frac{g}{p^2} \right] + \varphi(x, r, t)$, где u - вертикальное

перемещение шпангоута, φ - потенциал относительных скоростей в системе координат, связанной с опорным кольцом сосуда. Пусть $u(t) = \varepsilon g p^{-2} \cos pt$; $\varepsilon \ll 1$. Тогда краевая задача для φ имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g(1 - \varepsilon \cos pt)\zeta = 0 \quad \text{при } x = H$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{в } \tau, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{при } x = 0.$$

$\dot{\varphi}$ относительная скорость прогиба мембраны. φ_n - форма собственного колебания n -го тона для φ считается известной. Пусть

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n p_n(t), \quad \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n q_n(t), \text{ где } p_n, q_n - \text{неизвестные,}$$

подлежащие определению функции времени. Тогда после некоторых преобразований, получим уравнения для определения q_n уравнение:

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 (1 - \chi_{nn} \varepsilon \cos pt) q_n = -\gamma_n \varepsilon \cos pt + \omega_n^2 \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \varepsilon^*$$

$$\chi_{nk}(\cos pt) q(t) \quad n=1,2..$$

Вид констант χ_{nk} , γ_n не приводится, ω_n - частота колебаний жидкости в упругом баке. Уравнения границ основной области параметрического резонанса по 1-му приближению имеют вид

$$\Omega^2 - \nu_k^2 \left(1 \mp \frac{\varepsilon_1 k}{2} \varepsilon\right) = 0 \quad k=1,2,...$$

При $k=1$ и $R=2$ м, $\delta=3 \cdot 10^{-3}$ м - радиуса цилиндрического бака и толщины днища соответственно, результаты расчетов по определению границ области параметрического резонанса приведены в таблице:

	$\Omega^2 = \bar{\omega}_1^2 (1 \mp \varepsilon \chi_n / 2 \eta_1)$
4 м	4,73 (1 $\mp$ ε 0,138)
1,5 м	5,41 (1 $\mp$ ε 0,126)

Рассмотрены вынужденные осесимметричные колебания неподвижной оболочки с жидкостью от переменного давления $p_r(t)$ на свободной поверхности жидкости. Дифференциальные уравнения для переменных $T_m(t)$ в потенциале скорости имеют вид:

$$(\ddot{T}_m + \omega_m^2 T_m) \rho \iint_{s+\Sigma} \Phi_m \Phi_{m\bar{n}} ds = \iint_{\Sigma} p_r(t) \Phi_{m\bar{n}} d\Sigma \quad m=1,2..$$

$\Phi_{m\bar{n}} = \partial \Phi_m / \partial \bar{n}$, S - смоченная поверхность жидкости.

В третьей главе диссертации рассмотрены некоторые специальные задачи динамики упругого объема с жидкостью. Получено точное решение внутренней задачи Неймана в двухсвязной цилиндрической упругой полости.

Разработана методика для приближенного определения коэффициента демпфирования при колебаниях жидкости в упругом сосуде. Приведенный коэффициент демпфирования для колебаний жидкости по k -му тону определяется по формуле

$$\mu_k = b_k / \beta_k q_k^{(рез.)}, \quad \text{где } \beta_k = \iint_s \Phi_k \Phi_{k\bar{n}} ds. \quad b_k - \text{некоторый}$$

известный коэффициент, $q_k^{(рез.)}$ - величина резонансной амплитуды при колебаниях жидкости в жестком сосуде. Численное значение последней можно получить на основании соответствующих данных эксперимента приведенных в известной монографии К.С. Колесникова [50].

Используя эти данные можно получить для поперечных колебаний жидкости в жестком цилиндрическом сосуде по нашей теории логарифмический декремент колебаний равным $-9 = 0,022$, что на 8 % отличается от величины декремента колебаний, вычисленной

по эмпирической формуле приведенной в [50]. Для первого тона симметричных колебаний упругого цилиндрического бака со сферическим днищем логарифмический декремент получается равным – 0,0145.

Далее рассматриваются малые осесимметричные колебания упругой оболочки с жидкостью при слабой гравитации. Считается что давление на поверхности жидкости определяется по формуле Лапласа, а свободная поверхность слабо искривлена в состоянии равновесия и при колебаниях системы. Пренебрегается также условиями прилипания на границе стенка-жидкость. В этом случае даже для цилиндрического бака с упругим плоским днищем не удастся получить замкнутого решения задачи. Рассмотрен пример о колебаниях жесткого цилиндрического сосуда с днищем в виде плоской мембраны. Получено частотное уравнение задачи, левая часть которого представляет собой бесконечный определитель. Усекая полученную систему уравнений можно определить условия при которых свободная поверхность жидкости будет неустойчивой.

В конце главы рассмотрены особенности применения метода Рэлея для получения аналитических зависимостей для приближенного определения частот первого и второго тона колебаний упругого цилиндрического бака со сферическим днищем. Для приближенного определения частоты первого тона колебаний потенциалы Φ_1 и Φ_2 принимаются в виде:

$$\Phi_1 = b (H - x) \cos \omega t, \quad \Phi_2 = b [z \cos \psi + H - H_1] \cos \omega t,$$

где H - высота столба жидкости в цилиндрической части бака, b - неизвестная постоянная. Расчеты показывают, что ошибка в определении величины частоты первого тона колебаний не превышает 10%.

Поскольку применяется модификация метода Рэлея, предложенная Граммелем, а именно, задаются приближенно не прогибы, а внутренние силы, то формула для частоты

$$\omega_1 \text{ имеет вид: } \omega_1 = \sqrt{\frac{M_0}{C_0}}. \text{ Выражения для } M \text{ и } C \text{ здесь не}$$

приводятся. Для определения частоты ω_2 второго тона колебаний потенциал скорости $\Phi^{(2)}$ выбирается в

$$\text{виде: } \Phi_1^{(2)} = k_{12} (h-x) + (h-x)^3 - (3/2)(h-x) r^2 \text{ для цилиндрической}$$

$$\text{части, а } \Phi_2^{(2)} = k_{12} [\zeta \cos \psi + h - h_1] + \zeta^3 P_3 (\cos \psi) +$$

$$+ 3(h-h_1)\zeta^2 P_2 (\cos \psi) + \beta_{13} \zeta P_1 (\cos \psi) + \beta_{03} - \text{ для}$$

сферической части бака. Коэффициент k_{12} находится из условий ортогональности форм колебаний (первой и второй) системы.

Формула для ω_2 имеет вид $-\omega_2^2 = \beta/\alpha$, для β и α в работе получены аналитические, но громоздкие выражения. Ошибка при вычислении величины частоты колебаний сравнивалась с результатами эксперимента и она не превышает 15%.

В четвертой главе приведено описание методики проведения эксперимента по определению частот и форм осесимметричных колебаний упругого сосуда с жидкостью, доказано существование таких форм колебаний и приведены результаты эксперимента. Исследовались целлулоидные модели баков и металлическая модель бака из дюралюминия. Анализ симметричных колебаний выполняется методом возбуждения резонансных вынужденных колебаний. Эксперименты проведены на электродинамических вибростендах. Модели баков подвешиваются на резиновых амортизаторах. Показано, что при резонансе угол сдвига фаз между колебаниями силы и соответствующего перемещения равен $\pi/2$.

В пятой главе диссертации получено новое точное решение неоднородной краевой задачи гидроупругости. Получено с использованием метода собственных функций уравнения Лапласа выражение для передаточной функции по давлению для гидравлического демпфера системы подачи топлива жидкостного ракетного двигателя. Рассмотренная динамическая расчетная схема представляет собой сосуд в виде двух концентрических цилиндров. Внешний цилиндр- упругая тонкостенная оболочка высоты H , а внутренний цилиндр- жесткая труба, по которой протекает жидкость. В этом трубопроводе в месте расположения упругой оболочки сделаны отверстия.

По внутренней трубе протекает жидкость, при этом она наполняет и пространство между цилиндрами. В работе сформулирована краевая задача (постановка ее принадлежит К.С. Колесникову) и найдено ее точное решение в случае интегрального граничного условия на цилиндрической поверхности с отверстиями, разделяющей объем жидкости во внешней и внутренней полостях трубопровода. Найдено аналитическое выражение передаточной функции по давлению W для этой системы. Она состоит из суммы действительной U и мнимой V части.

Каждое из этих слагаемых является бесконечным быстро сходящимся рядом. Приведен график функции $U(z)$, z -расстройка p/ω_0

. Далее рассмотрены колебания связанных одномерных стержневых конструкций с полостями, заполненными жидкостью с продольным разделением элементов. В этой части работы разработана методика расчета вынужденных продольных колебаний неоднородного тонкостенного стержня с полостями, заполненными жидкостью при

гармоническом возбуждении методом без разложения искомого решения в ряд по формам собственных колебаний системы. Этим методом получены аналитические решения задачи в случае следующих геометрических форм упругих полостей, частично заполненных жидкостью: 1. Односвязные полости – а) жесткий цилиндрический сосуд с упругим плоским дном в виде мембраны или пластины; б) жесткий цилиндрический сосуд с упругим дном в виде полой сферической оболочки; в) упругий цилиндрический бак с упругим плоским дном; г) сферический сосуд, полностью или наполовину заполненный жидкостью; 2. Двухсвязная полость - бак, состоящий из двух упругих концентрических сферических оболочек, пространство между которыми полностью или наполовину заполнено жидкостью. Таким образом, на основании этого решения вычислены аналитически элементы матрицы перехода, через опорное кольцо бака, учитывающей реакцию на стержень от колебаний упругого сосуда с жидкостью. Расчетная модель тонкостенного стержня принимается в виде схемы неоднородного стержня.

Уравнение движения последнего имеет вид:

$$(EF(x)u_x)_x = \mu(x)u_{tt} + \sum_{j=1}^M R_j(t) \delta_j(x - x_j) + F(t) \delta(x - x_F)$$

Граничные условия на концах не приводятся. Здесь $u_x = \partial u(x, t) / \partial x$, $u_t = \partial u / \partial t$; EF , μ - погонные жесткость и масса стержня соответственно; $R(t)$ - реакция от j -ой полости с жидкостью, $F(t) = F_0$

$\cos pt$ - возмущающая сила, F_0 - амплитуда, p - ее частота, δ - дельта функция Дирака. В работе предложено искать решение этой задачи в виде: $u(x, t) = X(x) \cos pt$, где $X(x)$ - искомая форма вынужденных колебаний системы. Реакция от жидкости R_j учитывается с помощью

соответствующей матрицы перехода. $F_j = \chi_j X(x_j) \cos pt$, где $X(x_j)$ - значение формы в сечении x_j , где расположено опорное кольцо упругого бака с жидкостью. Используя метод прогонки имеем: $X_k(x_k) = C_{1k} \cos \lambda_{pk} x_k + C_{2k} \sin \lambda_{pk} x_k$, x_k - координата вдоль оси стержня на k -м однородном участке длиной l_k ($k = 1, 2, \dots, n$), C_{1k}, C_{2k} - неизвестные постоянные, $\lambda_{pk}^2 = \mu_k p^2 / EF_k$ - постоянные погонные

масса и жесткость k -го участка стержня. Очевидно, что

$$\bar{C}_{k+1} = M_{k,k+1} \bar{C}_k, \text{ где } \bar{C}_k - \text{вектор столбец } \bar{C}_k = \begin{bmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{bmatrix}.$$

$M_{k,k+1}(\beta_{i,j})$, $i, j = 1, 2$ - матрица перехода от k -го к $k+1$ -му участку.

Например, если $k = j$, то она имеет вид:

$$\beta_{11} = \cos Z_{pj}, \quad \beta_{12} = \sin Z_{pj},$$

$$\beta_{21} = -(\lambda_{pj} EF_j \sin Z_{pj} + \chi_j \cos Z_{pj}) / EF_{j+1} \lambda_{pj+1}$$

$$\beta_{22} = (\lambda_{pj} EF_j \cos Z_{pj} - \chi_j \sin Z_{pj}) / EF_{j+1} \lambda_{pj+1}.$$

$Z_{pj} = \lambda_{pj} l_j$. Расчет проводится в два приема. Один раз, если $\chi_j = l$, расчет ведется в направлении от $x = 0$ до $x = 1$ и из

неоднородного граничного условия находятся константы C_{1n} и C_{2n} .

Повторяя весь расчет в обратном направлении окончательно вычисляются все $\bar{C}_k$ по формуле $\bar{C}_k = M_{k,k+1}^{-1} \bar{C}_{k+1}$, $k = n-1, n-2, \dots, 1$.

Приведен пример аналитического определения χ_j для случая жесткого цилиндра, закрытого упругой мембраной и заполненного жидкостью. Найдено точное решение этой неоднородной краевой задачи. Используется разложение искомого решения по функциям Бесселя первого рода нулевого порядка $J_0(\alpha_i r)$, α_i , находясь из краевого условия $J_{0r}(r=R) = 0$. Окончательно

$$\chi_j = \pi \bar{H} T_0 \bar{P}^2 [D_0 + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \frac{J_1(\alpha_i R)}{J_0(\alpha_i R)} \frac{1}{\lambda_i (\bar{P}^2 \text{th} \lambda_i - \lambda_i^3 / \bar{H}^3)}]$$

Вид D и d не приводится. Следует отметить, что ряды в χ_j

сходятся как $1/\lambda_i^4$, то-есть достаточно быстро. Далее рассмотрены продольно-поперечные колебания тонкостенного стержня с полостями, заполненными жидкостью. Продольные колебания жидкости в упругом сосуде заменены механическим аналогом в виде системы параллельных линейных осцилляторов. Считается, что на стержень действует в продольном направлении возмущающая сила, изменяющаяся по времени по гармоническому закону. Очевидно, что эта сила возбуждает и поддерживает в системе продольные колебания. В работе показано, что при наличии возмущений в поперечном направлении вследствие изгибных колебаний стержня могут возникнуть параметрические изгибные колебания из-за продольных колебаний жидкости в упругом баке, не смотря на численное отличие спектров поперечных и продольных колебаний системы примерно на порядок. Если аппроксимировать продольные и поперечные колебания стержня одним членом ряда и учесть только первый тон колебаний жидкости в баке то уравнение границ зон неустойчивости по первому приближению имеет вид:

$$\Omega^4 - \frac{\Omega^2}{4} (\omega_{1u}^2 + 4\omega_{1y}^2 \mp 2\beta\omega_{1y}^2) + \omega_{1u}^2 \omega_{1y}^2 / 4 = 0$$

$\beta = \beta_0 F_0$ - глубина пульсации, F_0 - амплитуда внешней силы.

Вид константы β_0 не приводится. При $\beta = 0$ численные значения Ω для точек пересечения областей зон неустойчивости с осью абсцисс: $\Omega_1 = \omega_{1y}$, $\Omega_2 = \omega_{1x} / 2$. Где ω_{1y} , ω_{1x} - собственные частоты изгибных и продольных колебаний системы соответственно.

В шестой главе диссертации разработана методика расчета системы связанных стержней пакетной схемы деления с жидкостью.

Методом прогонки решены задачи о продольных, изгибно-крутильных и изгибно-продольных колебаниях связки стержней с жидкостью.

Приведены аналитические выражения для частотных уравнений.

В Ы В О Д Ы

1. В диссертации разработан приближенный аналитический метод определения частот и форм собственных колебаний упругой оболочки, частично заполненной идеальной жидкостью. Эта механическая система является важной в конструкции ракеты носителя на жидком топливе, а поэтому ее динамические характеристики являются главными при расчете форм и частот продольных и поперечных колебаний корпуса.

Сформулирована краевая задача с естественными граничными условиями. Решение последней сведено к проблеме собственных значений с симметричными матрицами.

Этот метод дает возможность на стадии проектирования ракеты – носителя рассчитать динамические характеристики упругого корпуса, не используя сложные вычислительные системы и может служить основой для разработки численных методов расчета, обеспечивает предварительный анализ вариантов многопараметрических задач, и позволяет проникнуть в существо дела при первоначальном изучении проблемы гидроупругости оболочек и понять физику колебательных процессов рассматриваемых механических систем.

2. Найдено большое количество случаев решения задачи о свободных колебаниях упругих баков различной конфигурации, для которых частотный определитель системы, левая часть которого представляет бесконечную систему уравнений суммируется и, таким образом, задача сводится к вычислению корней одного единственного трансцендентного уравнения.

Полученные решения можно рассматривать как модельные решения, и использовать их для отработки численных методов с одной стороны, а с другой может быть рекомендована для изучения гидроупругости молодым специалистам, которые в будущем будут являться разработчиками сложных вычислительных комплексов.

Так, например, аналитическое решение для соосных цилиндрических оболочек (модель реактора ВВР 1000) позволяет сделать важное заключение о необходимости учета жидкого наполнения.

Аналитические решения в отличие от численных позволяют оптимизировать систему и выбрать наилучшие соотношения ее параметров.

3. Разработана методика расчета вынужденных колебаний для определения динамической реакции при продольных колебаниях упругого бака с жидкостью.

Предложенная нормировка собственных функций позволяет построить простой механический аналог для вертикальных колебаний упругого сосуда с жидкостью в виде системы параллельных осцилляторов, сумма масс которых равна физической массе жидкости в баке.

Это представление дает возможность наглядно представить механику колебаний бака с жидкостью и упростить расчет вынужденных колебаний корпуса ракеты.

Для модели корпуса ракеты-носителя вычислены формы и частоты собственных и формы вынужденных колебаний. Получено аналитическое решение для форм вынужденных колебаний одноступенчатой ракеты.

4. Спроектирована и создана лабораторная установка для частотных испытаний баков, заполненных жидкостью. На основе проведенных виброиспытаний на моделях цилиндрического и конического бака получены частоты двух первых осесимметричных форм колебаний этих конструкций. Результаты частотных испытаний удовлетворительно согласуются с расчетными данными.

5. В работе приведены решения для различных типов колебаний упругого ограниченного объема с жидкостью. В частности рассмотрены свободные и вынужденные колебания упругого сосуда с жидкостью со свободной поверхностью.

6. Данная работа может быть рекомендована в НИИ и КБ при проектировании и расчетах продольных колебаний ракет, а также специалистам, желающим разобраться в «физике явления», в механике колебаний жидкости в упругой полости и для изучения гидроупругости в качестве учебного курса.

Основное содержание диссертации изложено в следующих публикациях:

1. Пожалостин А.А. Осесимметричные колебания упругих баков с жидкостью // Теория оболочек и пластинок: Тр УП всес. конф. – Днепропетровск, Изд. Наука. - 1969. – С. 483-487.

2. Пожалостин А.А. Экспериментальное определение частот и форм осесимметричных колебаний упругого бака с жидкостью // Известия высших учебных заведений. Авиатехника. Казань, Изд.

Каи. – 1970. – №3. – С. 90-94.

3. Пожалостин А.А. Точные решения задачи о вынужденных колебаниях оболочек с жидкостью // Известия высших учебных заведений. Авиатехника. Казань, Изд. Каи. – 1988. – N 4. – С. 112-117.

4. Пожалостин А.А. Некоторые вопросы вынужденных колебаний оболочек с жидкостью // Прикладная механика: Труды II-го межд. симп. – Москва, изд. МВТУ, 1978. – С. 93-99.

5. Пожалостин А.А. Построение системы гармонических функций для расчета осесимметричных колебаний жидкости в упругом цилиндрическом баке со сферическим днищем // Изв. АН СССР. МТТ. Изд. Наука. – 1972. – №1. – С. 71-74.

6. Пожалостин А.А. Осесимметричные колебания цилиндрического бака со сферическим днищем, частично заполненного жидкостью // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью: Труды НИИПММ при ТГУ – Томск, Изд. ТГУ. – 1972. – С. 126-135.

7. Пожалостин А.А. Вынужденные осесимметричные колебания жидкости в упругом баке // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Сб. трудов II-го Всес. симп. – Новосибирск, Изд. НЭТИ. – 1974. – С. 120-124.

8. Пожалостин А.А. Осесимметричные параметрические колебания оболочки, частично заполненной жидкостью // Известия высших учебных заведений., Авиатехника., Казань., Изд. Каи., – 1990. – № 3. – С. 58-63.

9. Пожалостин А.А. Свободные колебания двухсвязного объема, заполненного сжимаемой жидкостью // Реф.сб.ЦНТИ «Волна». – М., – 1984. – С. 218-222.

10. Пожалостин А.А. К теории собственных малых осесимметричных колебаний упругих баков, частично заполненных жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Труды НЭТИ. – Новосибирск, Изд. НЭТИ. – 1970. – С. 153-164.

11. Пожалостин А.А. Построение системы гармонических функций для неосесимметричных колебаний конического бака, заполненного жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Тр. II-го Всес. симп. – Новосибирск, Изд. НЭТИ. – 1974. – С. 229-231.

12. Пожалостин А.А., Каменский О.А. Осесимметричные колебания чечевицеобразной оболочки, частично заполненной жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Тр. II-го Всес. симп. – Новосибирск, Изд. НЭТИ. – 1974. – С. 231-233.

13. Пожалостин А.А. Неосесимметричные колебания конической оболочки, частично заполненной жидкостью // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью: Тр. I Всес. сем.

-Томск, Изд. ТГУ.-1975. – С. 85-93.

14.Пожалостин А.А. Малые колебания жидкости в упругом баке с мембраной на свободной поверхности жидкости // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Тр. Ш-го Всес. симп. – Новосибирск , Изд. НЭТИ.- 1976. - С. 225-228.

15.Пожалостин А.А. Неосесимметричные колебания цилиндрической оболочки со сферическим днищем, частично заполненной жидкостью // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью: Тр. П Всес. сем. – Томск, Изд. ТГУ.-1975. – С. 121 – 123.

16.Пожалостин А.А. Точные решения задачи о колебаниях двухсвязных оболочек с жидкостью // Тр. МВТУ, Изд. МВТУ – 1979. - № 306 . – С. 20 –30.

17.Пожалостин А.А. Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде с упругим плоским дном // Известия высших учебных заведений., Авиатехника, Казань. Изд. Каи. – 1963. - N 4. – С. 21 – 26.

18.Пожалостин А.А. Определение параметров механического аналога для осесимметричных колебаний упругого цилиндрического сосуда с жидкостью //Изв. АН СССР. МТТ., Изд Наука. – 1966. – N 5. – С. 157 – 159.

19.Пожалостин А.А. Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде с упругим дном в виде пологой сферической оболочки // Известия высших учебных заведений., Авиатехника, Казань,Изд. Каи. – 1967. – N 2. – С. 21 – 26.

20.Пожалостин А.А. Метод Рэлея в гидроупругости // Тр. МВТУ., Изд.МВТУ. – 1985. – N 442. – С. 11 – 24.

21.Пожалостин А.А. Вынужденные колебания тонкостенного стержня с полостями, заполненными жидкостью // Тр. МВТУ, Изд МВТУ., – 1988. – N 515. - С. 118 – 134.

22.Пожалостин А.А. Об одном методе расчета вынужденных колебаний конструкций с жидким наполнением // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Тр. VI Всес.симп. – Новосибирск ,Изд. НЭТИ.- 1990. - С. 216-218.

23.Пожалостин А.А. О некоторых решениях в задаче о колебаниях двухсвязного объема с жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Сб.докл.IV Всес. симп., Изд.НЭТИ. – Новосибирск , 1980. - С. 334-336.

24.Пожалостин А.А. Продольно-поперечные колебания упругого стержня с жидкостью // Известия высших учебных заведений., Авиатехника, Казань,Изд. Каи. – 1995. - № 1. – С. 76-79.

25.Пожалостин А.А.Определение передаточной функции

гидравлического демпфера системы подачи топлива ЖРД // Известия
высших учебных заведений., Авиатехника, Казань, Изд. Кан. -.1997.
-№3. – С 102-106.

Подписано к печати 12.04.2004г. Зак. 51 т.
объем 1.75 тир. 100

Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана