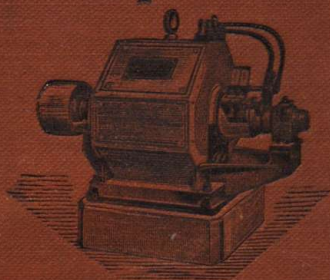


4
НА ДОМ
НЕ ВЫДАЕТСЯ

Теоретич. и Практическіи
Курсъ
Электротехники



Л. Войнаровскаго

Ч. I.

Основатѣлнѣя

высшей математики

необходимыя

электротехнику

Р. 1.5080.

ИЗДАНИЕ

И. И. ИККЕРА С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Изданія К. Л. Риккера въ С.-Петербургѣ.

Невскій пр., № 14.

Практическое руководство къ примѣненію электричества въ промышленности. Единицы измѣренія. — Батареи и электрическія машины. — Электрическое освѣщеніе. — Гальванопластика и металлургія. — Телефонія. Составили **Е. Кадіа** и **Л. Дюбость**. Съ 257-ю чертежами въ текстѣ. Перев. съ 4-го франц. изданія **Н. де-Шаріеръ**. Русское изданіе 3-е. 1894. Цѣна 5 р., съ перепл. 5 р. 75 к.

Заслуживаетъ вниманія то обстоятельство, что на русскомъ языкѣ предстоящая книга, чисто специальная по содержанию, выдерживаетъ уже третье изданіе. Такой успѣхъ, очевидно, кромѣ интереса, внушаемаго самымъ предметомъ, не въ малой мѣрѣ зависитъ и отъ присущихъ книгѣ Кадіа и Дюбоста достоинствъ. И въ самомъ дѣлѣ, по широтѣ программы, ясности и обстоятельности изложенія — трудно что-то сказать о специальномъ руководствѣ.

понятій и

практиче

описаніе

передачи

телефон

ствъ и

силь из

нынѣшн

сводъ

Вообще

ственно

ническо

Сп

ставили

мец. и

80 к.,

Изг

и Штр

роткое

вѣстис

Дѣйст

полны

ничес

свѣдѣ

мающ

отъ т

P. 1. 5080

НТБ МГТУ им. Н.Э.Баумана



1.5080

Войнаровский П.Д. Теоретиче

Изданія К. Л. Рихтера въ С-Петербургѣ.

Невскій пр., № 14

Практическое руководство къ построению динамо-машинъ съ постояннымъ токомъ, Инженеръ-технолога Л. А. Боровича. 2 исправл. и значительно дополненное издание. Съ 164 рис. 1894. Ц. 3 р., въ переплетѣ 3 р. 50 к.

Введение въ учение объ электричествѣ. Читенія Б. Ю. Кольбе, препод. физики въ училищѣ св. Анны въ Спб. 1 часть. Статическое электричество. Съ 75 рис. 1893. Цѣна 1 р. 20 к., 2 часть. Динамическое электричество. Съ 75 рис. 1896. Цѣна 1 р. 40 к.

Читая введение Б. Ю. Кольбе, мы не могли не почувствовать глубокаго различія между популярно-элементарною книжкою — сборникомъ общихъ фразъ — и талантливымъ учебникомъ, научнымъ и въ то же время вполне начальнымъ, автору котораго удастся вложить въ умъ читателя, научить его.

(Журналъ Электричество, 1893. № 15, 16).

Популярныя лекціи о гальваническомъ токѣ и его примѣненіяхъ. Гейнр. Вебера. Переводъ Н. Дрентельна. Содержание: 1) Общій взглядъ на происхожденіе и дѣйствіе гальваническаго тока. 2) Телеграфія и телефонія. 3) Электромагнитныя и пр. машины. 4) Гальваноопластика и электрической свѣтъ. 5) (Прибавленіе). О вѣчномъ движеніи. Съ 86 рис. 1888. 1 р. 20 к., въ перепл. 1 р. 60 коп.

Изложены лекціи вполне популярно изящнымъ, увлекательнымъ языкомъ; по своей ясности, живости и мѣстами образности языка, наконецъ, по своей сжатости и вмѣстѣ съ тѣмъ серьезности значенія, эти лекціи могутъ быть поставлены на ряду съ извѣстными лекціями Тиндала.

(Ремесленная Газета, 1888, № 34).

Карманная книжка для установщиковъ электрическаго освѣщенія. Инженера С. Ф. Гайсберга. Перев. съ 10-го нѣм. изд. В. Н. Лебединскаго. Съ 131 рис. Русское изданіе 3-е. 1895. Въ перепл. 1 р. 20 к.

Отзывъ о 2 изданіи:

Изъ новостей противъ стараго изданія укажемъ на указанія относительно укладки свинцовыхъ кабелей и таблицы для расчета проводовъ. Въ прибавленіи къ русскому изданію присоединены Временныя Правила относительно мѣръ предосторожности при устройствѣ и пользованіи электрическимъ освѣщеніемъ, разработанныя комиссіей при VI отдѣлѣ Техническаго Общества. Уже въ рецензіи на первое изданіе были указаны достоинства этого небольшого сочиненія; относительно втораго изданія мы могли бы только повторить то-же, присовокупивъ, что ее дѣйствительно можно смѣло рекомендовать всякому работающему электротехнику.

(Журналъ «Электричество», 1891, № 21).

З. X-261

ТЕОРЕТИЧЕСКІЙ И ПРАКТИЧЕСКІЙ КУРСЪ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.

Ч. I.

Основныя свѣдѣнія изъ высшей математики,
необходимыя электротехнику.

48.03
621.3
621.3
ТЕОРЕТИЧЕСКІЙ И ПРАКТИЧЕСКІЙ КУРСЪ

ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.

СОСТАВИЛЪ

П. Д. Войнаровскій,

Преподаватель Электротехническаго Инстатута, Инженеръ-Электрикъ
Института Montefiore, Телеграфный инженеръ.

Часть I.

Основные свѣдѣнія изъ высшей математики, необходимыя для электротехника.

Съ 31 рисункомъ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
ИЗДАНИЕ К. Л. РИККЕРА.
Невскій проспектъ, 14.
1897.

ОСНОВНЫЯ СВѢДѢНІЯ
ИЗЪ
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ,
НЕОБХОДИМЫЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКУ.

СОСТАВИЛЪ

П. Д. Войнаровскій,

Преподаватель Электротехническаго Института, Инженеръ-Электрикъ
Института Montefiore, Телеграфный инженеръ.

Часть I.

Теорет. и практич. курса электротехники.

Съ 31 рисункомъ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Издание К. Л. Риккера.

Невскій проспектъ, 14.

1897.

ПРОВЕРЕНО
1940

ПРОВЕРЕНО
1952



Доволено цензурою. С.-Петербургъ, 7-го апрѣля 1897 года.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Не такъ давно еще примѣненіе такъ называемаго сильнаго электрическаго тока ограничивалось лишь электрическимъ освѣщеніемъ. Все вниманіе обращалось на способы питанія вольтовыхъ дугъ и лампочекъ накаливанія, на устройство динамомашинъ, какъ генераторовъ освѣтительнаго тока, и, конечно, главнымъ образомъ разсматривался постоянный токъ, теорія котораго была разработана довольно подробно. Но въ настоящее время электротехника успѣла уже пробраться во всѣ отрасли промышленности и съ каждымъ днемъ эта наука завоевываетъ все новыя и новыя мѣста. На фабрикахъ и заводахъ она даетъ возможность болѣе экономно и болѣе раціонально распредѣлить механическую силу, въ городахъ электрическою энергіею замѣняютъ паровую и конную тягу, кромѣ того эта наука даетъ средство переносить живую энергію съ пунктовъ, гдѣ эту послѣднюю можно получить дешево, въ центры, гдѣ въ ней ощущается настоятельная необходимость. Наконецъ, потребность въ освѣщеніи большихъ центровъ настолько уже разрослась, что постоянный токъ не въ состояніи удовлетворить всѣмъ требованіемъ техники. Всѣ эти новыя примѣненія потребовали изслѣдованія новыхъ типовъ генераторовъ, электродвигателей и въ особенности поставили на очередь болѣе серьезное изученіе переменнаго тока.

Тогда какъ для болѣе или менѣе основательнаго ознакомленія съ примѣненіями по-

стояннаго тока достаточно сравнительно элементарныхъ свѣденій изъ теоріи электричества и магнетизма, не совсѣмъ такъ съ примѣненіями переменнаго тока. Тутъ читателю необходимо заручиться нѣкоторыми вспомогательными свѣденіями изъ области математики, необходимыми для того, чтобы разобратъ въ чрезвычайно сложныхъ явленіяхъ переменнаго состоянія магнетизма и электричества. И если такія популярныя руководства, какъ Кадіа и Дюбость могли хотя бы нѣсколько удовлетворить читателя, то едва-ли возможно сообщить что-нибудь существенное изъ области разнородныхъ примѣненій переменнаго тока, если придерживаться лишь популярнаго изложенія.

Имѣя въ виду читателей, которые желаютъ почерпнуть основательныя свѣденія изъ области всеохватывающихъ примѣненій электричества, мы полагаемъ, что цѣль будетъ лучше достигнута, если мы предварительно подготовимъ читателя, сообщивъ ему необходимые элементы изъ вспомогательныхъ наукъ, тѣсно связанныхъ съ электротехникою. Наша практика въ дѣлѣ преподаванія этой послѣдней намъ показала, что изложеніе нѣкоторыхъ изъ ея отдѣловъ едва-ли возможно безъ посредства высшей математики и что желаніе обойти эту послѣднюю не только не способствуетъ болѣе доступному и ясному представленію о сущности явленій, но часто, усложняя способъ изложенія, приводитъ къ отрицательнымъ результатамъ. Вотъ почему, предлагая настоящее сочиненіе, мы прежде всего поставили себѣ задачею познакомить читателя съ основаніями высшей математики. При этомъ, конечно, мы ограничились лишь самымъ необходимымъ и постарались изложить

весь объемъ свѣденій въ возможно доступной формѣ, поступаясь строгими методами и избравъ лишь такіе изъ этихъ послѣднихъ, которые можно признать достаточно точными въ предѣлахъ, заключающихъ намѣченные нами примѣненія. Словомъ мы изложили основы высшей математики не съ точки зрѣнія чистой и строгой науки, а съ точки зрѣнія чисто практическаго примѣненія ея основъ къ техникѣ вообще.

Самую же теорію электрическихъ и магнитныхъ явленій, а также и примѣненія этихъ послѣднихъ мы старались изложить такъ, чтобы читатель могъ вполне самостоятельно и безъ затрудненій не только уяснить себѣ прочитанное имъ, но и получилъ бы возможность, не прибѣгая къ посторонней помощи, рѣшать нѣкоторые вопросы, съ которыми онъ встрѣтится на практикѣ.

Положивъ въ основу подобную задачу и для лучшаго выполненія ея, мы сочли рациональнымъ составить предлагаемое руководство по слѣдующему плану:

Весь курсъ будетъ раздѣленъ на 10 выпусковъ. 1-й выпускъ посвященъ всецѣло изложенію основныхъ свѣденій изъ высшей математики, необходимыхъ для изученія электротехники. Эти основы заключаютъ во 1-хъ элементы дифференціального исчисленія, во 2-хъ элементы алгебраическаго и графическаго анализа, въ 3-хъ основанія интегральнаго исчисленія и въ 4-хъ примѣненія интегральнаго и дифференціальнаго исчисленій къ вопросамъ тѣсно связаннымъ съ электротехникою.

Весь приведенный выше матеріалъ изложенъ въ возможно элементарной формѣ и при томъ, такъ, чтобы всякій, кто знакомъ съ элементарною математикой въ объемѣ 6-ти клас-

совъ реальныхъ училищъ, могъ бы безъ затрудненія усвоить всѣ вышеперечисленные отдѣлы. Для большей наглядности мы не поскупились иллюстрировать теорію примѣрами, а въ концѣ выпуска привели нѣсколько задачъ для упражненій.

При составленіи этого выпуска мы больше всего руководствовались чисто практическимъ направленіемъ, а потому, не выходя изъ предѣловъ точности, мы выбрали методы, примѣнимые только къ функціямъ непрерывнымъ и всегда разлагающимся въ сходящіеся ряды, т. е. какъ разъ къ тѣмъ функціямъ, съ которыми приходится имѣть дѣло въ техническихъ наукахъ. Для облегченія изученія, при выводѣ основанномъ на одной изъ предъидущихъ статей указаны номера этихъ послѣднихъ, такъ-что читатель безъ затрудненія можетъ припомнить пройденное имъ раньше и тѣмъ самымъ облегчить себѣ значительно разъясненіе послѣдующихъ вопросовъ.

Пособіемъ для перваго выпуска намъ служило главнымъ образомъ сочиненіе, *Notions élémentaires du calcul différentiel et du calcul integral par Pauly*, составленное специально для техникувъ и инженеровъ, а также записки, собранныя нами во время слушанія курса высшей математики въ Марсельскомъ физикоматематическомъ факультетѣ (*Faculté des Sciences de Marseille*).

2-й выпускъ обниметъ теорію электрическихъ и магнитныхъ явленій. Тутъ опять мы придерживаемся чисто практическаго направленія и по возможности элементарнаго изложенія, прибѣгая къ посредству высшей математики только тамъ, гдѣ слишкомъ элементарное объясненіе можетъ черезчуръ усложнить способъ изложенія.

3-мъ выпускомъ начнется уже практическая электротехника. Этотъ выпускъ посвященъ теоретическому и практическому изученію динамомашинъ, какъ постояннаго, такъ и переменнаго тока. Въ его теоретической части разсматриваются принципы и теорія дѣйствія динамомашинъ, практическая-же часть заключается, какъ въ конструктивныхъ расчетахъ, такъ и въ описаніи различныхъ наиболѣе употребительныхъ типовъ машинъ и ихъ конструктивныхъ деталей. Этотъ выпускъ закончится изложеніемъ правилъ касательно ухода за динамомашинами.

Въ 4-мъ выпускѣ будетъ изложено объ электродвигателяхъ постояннаго и переменнаго тока, причемъ будетъ обращено особое вниманіе на изученіе многофазныхъ двигателей.

Въ 5-мъ выпускѣ будутъ разсмотрѣны трансформаторы постояннаго и переменнаго тока, причемъ мы относимъ къ первымъ изъ нихъ также аккумуляторы.

Въ 6-мъ выпускѣ будутъ приведены всѣ данныя, касающіяся электрическаго освѣщенія, какъ то: источники свѣта канализація и установки, съ необходимыми расчетами.

7-й выпускъ будетъ посвященъ примѣненію электричества къ передачѣ и распредѣленію энергии, а также къ электрической тягѣ (электрическіе трамваи и желѣзныя дороги).

Предметъ 8-го выпуска составятъ электрическія измѣренія.

Въ 9-мъ выпускѣ будутъ собраны остальные примѣненія электричества, какъ то: гальванопластика, электрометаллургія, электрическая пайка и т. п.

Наконецъ, въ 10-мъ и послѣднемъ выпускѣ будутъ приведены: 1) примѣрные проекты ди-

наомашинъ, электродвигателей, трансформаторовъ, 2) проекты со смѣтами по электрическому освѣщенію и 3) проекты по передачѣ электрической энергіи и по электрической тягѣ. Въ концѣ этого выпуска будутъ приведены нѣкоторыя практическія данныя относительно паровыхъ котловъ, машинъ, газомоторовъ, а также будутъ помѣщены необходимыя для проектированія справочныя таблицы и примѣрныя цѣны на матеріалы у насъ въ Россіи.

Такимъ образомъ каждый выпускъ будетъ представлять собою подробную разработку того или другого вполне самостоятельнаго отдѣла электротехники.

Въ концѣ cadaго выпуска мы сочли не лишнимъ помѣстить списокъ наиболѣе извѣстныхъ и новѣйшихъ, какъ русскихъ, такъ и иностранныхъ сочиненій, относящихся къ вопросамъ, разбираемымъ въ соотвѣтствующемъ выпускѣ.

При составленіи такого обширнаго спеціальнаго сочиненія, конечно, не избѣжны нѣкоторыя пробѣлы. Мы будемъ весьма благодарны тѣмъ изъ читателей, которые намъ укажутъ на тѣ или другіе недостатки и на пробѣлы, которые желательно пополнить, и постараемся восполнить недостающее выпускомъ отдѣльнаго дополненія.

Разсчитывая на благосклонное содѣйствіе читателей, смѣемъ надѣяться, что нашъ трудъ явится полезнымъ пособіемъ для всѣхъ, кто интересуется многоразличными примѣненіями электричества къ промышленности и обыденной жизни.

П. Войнаровскій.

1-го Ноября 1896 года.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Введеніе.

ГЛАВА I.

Понятіе о переменныхъ величинахъ и функціяхъ.

	§§	Стр.
Опредѣленія	1	1
Явныя и неявныя функціи	2	2
Функція функціи	3	4
Показательныя и логариѳмическія функціи .	5	5
Круговыя функціи	6	5

ГЛАВА II.

Понятіе о предѣлахъ и бесконечно малыхъ величинахъ.

Предѣлы	7	8
Предѣлъ выраженія $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	8	8
Ряды или строки	9	12
Бесконечно малыя	10	13
Основные положенія о бесконечно малыхъ .	11	14

ОТДѢЛЪ I.

Основы дифференціального исчисленія.

ГЛАВА III.

Дифференцированіе функцій.

Функціи возрастающія и убывающія . . .	12	16
Дифференціалы	13	16
Производныя функціи	14	17

	§§	Стр.
Производная и дифференціалъ функціи		
$y = x^m$	15	18
Производная и дифференціалъ функціи		
$y = \lg x$	16	23
Производная и дифференціалъ функціи		
$y = \sin x$	17	24

Основные правила дифференцированія.

Производная и дифференціалъ постоянной величины	18	25
Производная и дифференціалъ суммы или разности функціи	19	26
Производная произведенія нѣсколькихъ функцій	20	27
Производная дроби	21	30
Производная и дифференціалъ функціи отъ функціи	22	31
Производныя и дифференціалы показательныхъ функцій	23	33
Производныя и дифференціалы круговыхъ функцій	24	34
Производныя и дифференціалы обратныхъ круговыхъ функцій	25	36
Дифференціалъ и производная функціи отъ нѣсколькихъ переменныхъ	26	37
Производная неявныхъ функцій	27	39
Дифференцированіе часто примѣняемыхъ въ математикѣ функцій	28	40

ГЛАВА IV.

Понятіе о дифференціалахъ и производныхъ высшаго порядка.

Производныя и дифференціалы [высшаго порядка функцій отъ одной переменной	29	42
---	----	----

ОТДѢЛЪ II.

Алгебраическій анализъ.

ГЛАВА V.

Основныя теоремы.

	§§	Стр.
Опредѣленія	31	48
Теорема I	32	48
Теорема II	33	48
Теорема III	34	49
Теорема IV	35	50
Теорема V	36	50
Теорема VI	37	51

ГЛАВА VI.

<i>Истинное значеніе неопредѣленностей видовъ</i>	38	52
$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, 0^0, 0^\infty, 1^\infty$	39	53
	40	54

ГЛАВА VII.

Разложеніе функций въ ряды.

Строка Тейлора	41	57
Рядъ Маклорена	42	58
Разложеніе въ рядъ функции $f(x) = a^x$	43	59
Разложеніе въ рядъ функций e^x и e^{-x}	44	60
Разложеніе въ рядъ $\sin x$ и $\cos x$	45	60
Разложеніе функций: $\lg e(1+x)$ и $\lg e(1-x)$	46	61
Биномъ Ньютона	47	62

ГЛАВА VIII.

<i>Опредѣленіе наибольшаго и наименьшаго значенія функций</i>	48	62
	49	63
	50	66

ОТДѢЛЪ III.

Графическій анализъ.

ГЛАВА IX.

Графическое изображеніе функций.

	§§	Стр.
Опредѣленія	51	67
Теорема	52	73
Уравненіе прямой линіи	54	76
Уравненіе круга	55	78
Уравненіе эллипса	56	81
Уравненіе гиперболы	57	85
Уравненіе параболы	58	86
Кривая функции $y = e^x$	59	88
Кривая функции $y = \sin x$	60	90

ОТДѢЛЪ IV.

Основы интегральнаго исчисленія.

ГЛАВА X.

Опредѣленія и основныя теоремы.

Предметъ интегральнаго исчисленія	61	94
Теорема I	62	94
Геометрическое значеніе интеграла	63	100
Теорема II	64	102
Теорема III	65	104

ГЛАВА XI.

Основныя правила интегрированія функций.

Основныя формулы	66	105
Интегралъ суммы	67	106
Постоянный множитель	68	108
Способъ замѣщенія	69	109
Интегрированіе по частямъ	70	112

ГЛАВА XII.

Интегрирование наупотребительнѣйшихъ функцій.

	§§	Стр.
Интегрирование раціональныхъ функцій . .	71	115
Интегрирование ирраціональныхъ функцій	72	122
Интегрирование логариѣмическихъ функцій .	73	129
Интегрирование показательныхъ функцій . .	74	132
Интегрирование круговыхъ функцій	75	134
Интегрирование обратныхъ круговыхъ функцій	76	141

ГЛАВА XIII.

Интегрирование дифференціальныхъ уравненій.

Дифференціальныя уравненія	77	142
Дифференціальныя уравненія перваго порядка и первой степени	78	144
Дифференціальныя уравненія перваго порядка высшихъ степеней	79	148
Линейныя дифференціальныя уравненія вто- раго порядка	80	151

ОТДѢЛЪ V.

**Примѣненіе дифференціального и интегрального
исчисленій.**

ГЛАВА XIV.

Примѣненія къ алгебрѣ и геометріи.

Вычисленія длины кривыхъ	82	159
Вычисленіе площадей	83	164

ГЛАВА XV.

Примѣненія къ механикѣ.

Общее выраженіе работы	84	167
Основныя уравненія динамики и теорема жи- выхъ силъ	85	170
Моменты инерціи	86	178

ПРИБАВЛЕНІЕ.

Упражненія	185
Литература	192

ВВЕДЕНІЕ.

ГЛАВА I.

Понятіе о переменныхъ величинахъ и функціяхъ.

1. Определенія. Въ такихъ наукахъ, какъ математика, физика, механика и другія, приходится очень часто разсматривать измѣненія одной величины въ зависимости отъ измѣненій другой или нѣсколькихъ другихъ. Такъ изъ физики извѣстно, что при нагреваніи всякое тѣло расширяется и расширяется тѣмъ болѣе, чѣмъ выше температура нагреванія, иначе говоря объемъ тѣла въ данномъ случаѣ находится въ зависимости отъ температуры: больше будетъ эта послѣдняя, больше будетъ и объемъ. При движеніи какой-нибудь матеріальной точки, пространство, пройденное этою послѣднею отъ того пункта, отъ котораго точка начала перемѣщаться, зависитъ во 1-хъ отъ продолжительности движенія, а во 2-хъ отъ скорости движенія. Площадь круга точно также находится въ непосредственной зависимости отъ радіуса этого круга. Всѣ вышепоименованныя величины связаны между собою такъ, что, если одна пріобрѣтаетъ какое-нибудь опредѣленное значеніе, то и другая становится вполнѣ опредѣленною. Такія величины называются переменными и, если одна изъ нихъ измѣняется произвольно, то ее называютъ независимую переменною, а другую, связанную съ нею и измѣняющеюся въ зависимости отъ первой,

называютъ функціею первой. Такъ въ вышеприведенныхъ примѣрахъ температура будетъ независимою переменною, а объемъ функціею температуры, точно также пространство, проходимое движущеюся точкою, площадь круга будутъ функціями — первое времени и скорости, а вторая радиуса круга. Математически зависимость одной величины отъ другой выражается уравненіемъ. Такъ уравненіе равномернаго движенія точки будетъ:

$$s = v \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ s пройденное пространство, v скорость движенія, а t продолжительность этого послѣдняго.

Уравненіе площади круга будетъ:

$$S = \pi r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ S площадь круга, r его радиусъ, а π нѣкоторое постоянное число $= 3, 14 \, 15 \dots$

Тѣ изъ величинъ, входящихъ въ уравненіе, которыя не измѣняются, называются постоянными. Такъ въ уравненіи (2) π будетъ постоянною.

2. Явныя и неявныя функціи. Если уравненіе, показывающее зависимость двухъ величинъ, даетъ непосредственно значеніе функціи, то въ такомъ случаѣ функція называется явною. Такъ въ уравненіяхъ (1) и (2) функціи s и S будутъ явными. Всякую явную функцію символически принято обозначать общимъ уравненіемъ вида:

$$y = f(x)$$

показывающимъ, что y есть функція переменнѣйшей x .

Такъ, если бы намъ не нужно было бы точно выразить зависимость площади круга отъ его радиуса, а лишь показать, что эта площадь есть функція радиуса, то мы написали бы:

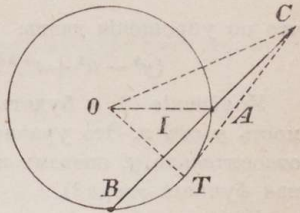
$$S = f(r).$$

Если уравненіе не рѣшено по отношенію къ функціи, то такая функція называется неявною.

Примѣръ: Пусть дана окружность O (фиг. 1) и точ-

ка C внѣ этой окружности на разстояніи a отъ центра. Найти зависимость длины сѣкущей CB отъ ея разстоянія до центра.

Изъ центра O опустимъ перпендикуляръ на сѣкущую AB и продолжимъ этотъ перпендикуляръ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ T . Соединимъ CT , прямая CT будетъ касательною къ окружности. Назовемъ x разстояніе OI отъ центра до касательной и y длину сѣкущей CB .



Фиг. 1.

Намъ нужно найти зависимость между x и y . Пусть r радиусъ окружности. Изъ прямоугольника OAI имѣемъ:

$$AI^2 = r^2 - x^2$$

но

$$AI = \frac{AB}{2}$$

слѣдовательно:

$$\frac{AB^2}{4} = r^2 - x^2$$

но

$$AB = CB - AC = y - AC$$

откуда:

$$\frac{(y - AC)^2}{4} = r^2 - x^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

но

$$AC \cdot CB = CT^2 = OC^2 - OT^2 = a^2 - r^2$$

или

$$AC \cdot y = a^2 - r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

отсюда

$$AC = \frac{a^2 - r^2}{y}$$

Подставляя это выраженіе въ уравненіе (1) найдемъ:

$$\frac{\left(y - \frac{a^2 - r^2}{y}\right)^2}{4} = r^2 - x^2$$

что по упрощеніи даетъ:

$$(y^2 - a^2 + r^2)^2 = 4y^2(r^2 - x^2). \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Уравненіе (3) и будетъ выражать искомую зависимость y отъ x . Это уравненіе, какъ видно, не рѣшено относительно y , поэтому и говорятъ, что y есть неявная функція отъ x ¹⁾.

Неявную функцію изображаютъ общимъ уравненіемъ вида

$$f(x, y) = 0$$

Функція можетъ зависѣть отъ нѣсколькихъ переменныхъ; такую функцію символически обозначаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$u = f(x, y, z)$$

или

$$f(u, x, y, z) = 0$$

что показываетъ, что u есть функція отъ трехъ переменныхъ x, y, z .

3. Функція функціи. Если какая-нибудь величина зависитъ отъ другой, которая въ свою очередь находится въ зависимости отъ третьей величины, то первая называется функціею функціи.

Примѣръ: Если выразить объемъ конуса въ зависимости отъ площади его основанія и высоты, то этотъ объемъ будетъ функціею функціи по отношенію къ радіусу основанія. Дѣйствительно, площадь основанія конуса есть функція его радіуса.

4. Сложная функція. Если какая-нибудь функція зависитъ отъ нѣсколькихъ величинъ, являющихся въ свою очередь функціями нѣкоторой переменной, то

¹⁾ Уравненіе (3) 4-й степени по отношенію къ y . Это показываетъ, что для даннаго значенія x мы получимъ всегда 4 значенія y .

такая функція называется сложною функцією. Такъ если

$$y = f(u, v)$$

гдѣ u и v функціи нѣкоторой величины x , то y будетъ сложною функцією.

5. Показательныя и логариѳмическія функціи. Функція вида:

$$y = a^x$$

гдѣ a постоянная и гдѣ независимая переменная входитъ показателемъ, называется показательною функцією.

Функція называется логариѳмическою, когда она будетъ вида:

$$y = a \log x$$

гдѣ a постоянная.

6. Круговыя функціи: прямыя и обратныя. Такія функціи, какъ:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x \\ y = \operatorname{cotg} x, \quad y = \sec x, \quad y = \operatorname{cosec} x$$

называются прямыми круговыми функціями или тригонометрическими функціями.

Функціи же:

$$y = \operatorname{arc} \sin x \quad y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \\ y = \operatorname{arc} \cos x \quad \text{и т. п.}$$

Называются обратными круговыми функціями.

Выраженіе $y = \operatorname{arc} \sin x$ обозначаетъ, что y есть дуга, синусъ которой есть x , слѣдовательно уравненіе:

$$y = \operatorname{arc} \sin x$$

можетъ быть замѣнено уравненіемъ

$$x = \sin y$$

На томъ же основаніи, вмѣсто:

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

можно написать:

$$x = \operatorname{tg} y \quad \text{и т. д.}$$

покажемъ нѣкоторыя основныя дѣйствія надъ обратными круговыми функціями:

I. Докажемъ слѣдующія равенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \sin (\sin x) &= x, & \operatorname{arc} \cos (\cos x) &= x \\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{tg} x) &= x, & \operatorname{arc} \operatorname{cotg} (\operatorname{cotg} x) &= x \end{aligned}$$

Дѣйствительно изъ опредѣленія круговой функціи слѣдуетъ, что $\operatorname{arc} \sin (\sin x)$ есть такая дуга, синусъ которой равенъ $\sin x$, а это очевидно и есть дуга x . Тоже можно сказать и относительно другихъ равенствъ

II. Доказать равенство:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + x'}{1 - xx'}$$

Положимъ:

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, \quad y' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x'$$

Слѣдовательно:

$$x = \operatorname{tg} y, \quad x' = \operatorname{tg} y' \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Извѣстно, что

$$\operatorname{tg} (y + y') = \frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y'}{1 - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} y'}$$

или замѣняя $\operatorname{tg} y$ и $\operatorname{tg} y'$ ихъ выраженіями изъ формулы (1), найдемъ:

$$\operatorname{tg} (y + y') = \frac{x + x'}{1 - xx'}$$

откуда

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} [\operatorname{tg} (y + y')] = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + x'}{1 - xx'}$$

Но на основаніи равенствъ примѣра I:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} [\operatorname{tg} (y + y')] = y + y'$$

слѣдовательно:

$$y + y' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + x'}{1 - xx'}$$

а такъ какъ мы положили:

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \quad y' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x'$$

то и найдемъ окончательно:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + x'}{1 - xx'}$$

III. Показать, что:

$$\operatorname{arc} \sin x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Положимъ:

$$\operatorname{arc} \sin x = y$$

тогда

$$x = \sin y$$

И слѣдовательно:

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin y}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin y}{\cos y} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{tg} y). \end{aligned}$$

Но на основаніи равенствъ примѣра I

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{tg} y) = y$$

слѣдовательно:

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Но мы положили:

$$y = \operatorname{arc} \sin x$$

поэтому:

$$\operatorname{arc} \sin x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Упражненія.

Доказать, что:

$$1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x - x'}{1 + xx'}$$

$$2) \operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin x' = \operatorname{arc} \sin \left[x \sqrt{1 - x'^2} + x' \sqrt{1 - x^2} \right]$$

$$3) 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{1 - x^2}.$$

ГЛАВА II.

Понятіе о предѣлахъ и о бесконечно малыхъ величинахъ.

7. Предѣлы. Если послѣдовательныя значенія какой-нибудь переменнѣй величины x приближаются все болѣе и болѣе къ опредѣленной постоянной величинѣ a , такъ что разность между этой послѣдней и переменнѣй величиною можетъ сдѣлаться и оставаться менѣе любого даннаго количества, то говорить, что a есть предѣлъ переменнѣй x .

Мы примемъ за аксіому слѣдующее основное положеніе, справедливость котораго очевидна:

Если двѣ переменныя величины всегда остаются равными одна другой, то и ихъ предѣлы равны. Элементарная геометрія уже даетъ намъ понятіе о предѣлахъ. Такъ, извѣстно, что площадь круга есть предѣлъ, къ которому приближается площадь описаннаго или вписаннаго многоугольника, когда число сторонъ этого послѣдняго бесконечно увеличивается.

Многія изъ функцій, рассматриваемыхъ въ математикѣ, при измѣненіи независимой переменнѣй, приближаются постепенно къ опредѣленнымъ предѣламъ, которые можно вычислить.

Приведемъ нѣсколько характерныхъ примѣровъ, съ которыми намъ придется встрѣчаться впослѣдствіи.

8. Предѣлъ выраженія $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ для x равнаго ∞ . Предѣлъ этой функціи служитъ основаніемъ для Неперовыхъ логарифмовъ и имѣетъ большое значеніе во многихъ примѣненіяхъ математическаго анализа. Этотъ предѣлъ называютъ буквою e .

Для того, чтобы опредѣлить значеніе этого предѣла, предположимъ сначала, что x цѣлое и положительное количество.

Развернувъ выраженіе $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ по формулѣ бинѣма Ньютона, мы получимъ:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= 1 + x \frac{1}{x} + \frac{x(x-1)}{1.2} \frac{1}{x^2} + \\ &+ \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} \frac{1}{x^3} + \dots \\ &\dots + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} \frac{1}{x^{x-3}} + \\ &+ \frac{x(x-1)}{1.2} \frac{1}{x^{x-2}} + \frac{x}{1} \frac{1}{x^{x-1}} + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Что, по упрощеніи, можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1 - \frac{1}{x}}{1.2} + \\ &+ \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{1.2.3} + \dots \\ &\dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{1.2.3} \frac{1}{x^{x-6}} + \\ &+ \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{1.2} \frac{1}{x^{x-4}} + \frac{1}{x^{x-2}} + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

предъидущее выраженіе будетъ вѣрно для всякаго цѣлаго и положительнаго значенія x , какъ бы велико это значеніе ни было. Значить оно вѣрно и для $x =$ бесконечности. Но когда x становится $= \infty$, выраженія

$$1 - \frac{1}{x}, \quad 1 - \frac{2}{x} \dots \dots \dots 1 - \frac{n}{x}$$

и т. д., будутъ приближаться къ единицѣ. Слѣдовательно всѣ члены первой половины выраженія будутъ въ предѣлѣ равны конечнымъ числамъ, всѣ же члены второй половины сдѣлаются равными нулю, такъ-какъ вторые множители этихъ членовъ вида $\frac{1}{n}$, которые при $x = \infty$, будутъ $= 0$.

Слѣдовательно при $x = \infty$ предѣлъ $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ будетъ равенъ, принимая во вниманіе предъидущія замѣчанія:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{1.2.3.4 \dots n} + \dots$$

т. е. суммѣ съ безконечнымъ числомъ членовъ, образующихся по вполне опредѣленному закону.

Если x цѣлое, но отрицательное, то предѣлъ выраженія $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ будетъ тотъ же, что и выше. Покажемъ это.

Пусть $x = -x'$, гдѣ x' цѣлое положительное число. Тогда, замѣняя x его значеніемъ $-x'$, предъидущее выраженіе будетъ:

$$\left(1 - \frac{1}{x'}\right)^{-x'}$$

Что можно написать еще въ видѣ:

$$\left(\frac{x' - 1}{x'}\right)^{-x'} = \left(\frac{x'}{x' - 1}\right)^{x'}$$

Это можно написать еще въ видѣ:

$$\left(1 + \frac{1}{x' - 1}\right)^{x'}$$

или еще

$$\left(1 + \frac{1}{x' - 1}\right)^{x'} - 1 \quad \left(1 + \frac{1}{x' - 1}\right).$$

Но первый множитель будетъ приближаться къ предѣлу найденному выше, такъ-какъ x' цѣлое и положительное число. Второй же множитель сдѣлается равнымъ единицѣ.

Если x дробное число, то всегда можно найти два цѣлыхъ послѣдовательныхъ числа, между которыми заключается x . Пусть q и $q + 1$ эти послѣднія. Тогда каждое изъ выраженій

$$\left(1 + \frac{1}{q}\right)^q \text{ и } \left(1 + \frac{1}{q+1}\right)^{q+1}$$

будетъ приближаться къ вышенайденному предѣлу, а такъ-какъ выраженіе $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x'}$ будетъ всегда между ними заключаться, то и его предѣлъ будетъ то же самое число.

Численное значеніе предѣла $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ будетъ равняться суммѣ членовъ найденнаго нами выраженія

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots \\ \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots n} + \dots$$

Что можно еще представить въ видѣ:

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots n} + \dots\right).$$

Но сумма членовъ второй части меньше суммы членовъ геометрической прогрессіи

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

такъ-какъ каждый членъ этой прогрессіи больше каждаго изъ членовъ предыдущей суммы.

Но сумма членовъ приведенной прогрессіи, остановленной на членѣ $\frac{1}{2^n}$, будетъ:

$$S = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Если $n = \infty$, то $\frac{1}{2^n}$ будетъ $= 0$ и S тогда будетъ равно

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Предѣлъ $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ слѣдовательно больше $\left(1 + \frac{1}{1}\right)$, т. е. больше 2 и меньше $\left(1 + \frac{1}{1}\right) + 1$, т. е. 3.

Если взять 14 первыхъ членовъ выраженія $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots$, то найдемъ, что:

пред. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$ приблизительно числу
2,7182818284.

Этотъ предѣлъ обозначаютъ буквою e .

Число e , какъ это понятно изъ предъидущаго и какъ это можно доказать, есть несоизмѣримая величина, иначе говоря

$$e = 2,71828 \dots$$

9. Ряды или строки. Выше мы видѣли, что предѣлъ выраженія $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ можно было написать въ видѣ суммы безконечнаго числа членовъ, образующихся по вполне опредѣленному и легко подмѣчаемому закону. Совокупность такихъ членовъ называютъ рядомъ или строкою.

Если сумма членовъ строки приближается къ опредѣленному конечному предѣлу, когда число ея членовъ безконечно увеличивается, то строка называется сходящеюся; если сумма членовъ при тѣхъ же условіяхъ увеличивается безпредѣльно или то увеличивается, то уменьшается, не приближаясь ни къ какому конечному числу, то такая строка называется расходящеюся.

Такъ строка, найденная нами выше:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots$$

будетъ сходящеюся, такъ какъ предѣлъ суммы ея членовъ будетъ конечное e .

Строка же:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots$$

будетъ расходящеюся.

10. Безконечномаля. Если предѣломъ переменнѣй величины будетъ нуль, то такая переменная называется безконечномалою величиною или просто безконечномалою.

Такъ какъ безконечномаля — переменная величины, то однѣ изъ нихъ могутъ быть независимыми или главными переменными, а другія ихъ функціями. Поэтому безконечномаля дѣлится на порядки, которые различаются слѣдующимъ образомъ.

Говорятъ, что безконечномалая перваго порядка когда предѣлъ отношенія ея къ главной безконечномалой есть конечное число. Такъ, если главная безконечномалая α , то безконечномалая β будетъ 1-го порядка, когда:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = k \text{ *)}$$

гдѣ k конечное число.

Безконечномалая β будетъ втораго порядка, когда:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = k'$$

гдѣ k' величина безконечномалая перваго порядка, иначе говоря, гдѣ $k' = k\alpha$.

Слѣдовательно для безконечномалой втораго порядка отношеніе къ главной безконечно малой будетъ:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = k\alpha$$

и т. д.

Такъ что безконечно малая n -го порядка будетъ характеризоваться отношеніемъ:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = k\alpha^{n-1}$$

откуда

$$\beta = k\alpha^{n-1} + \epsilon$$

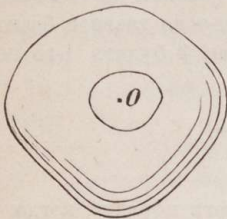
гдѣ k число конечное, α безконечно малая перваго по-

*) Обозначеніе $\lim$ значитъ предѣлъ.

рядка, а ε бесконечно малая величина порядка высшего, чѣмъ β . Покажемъ на примѣрахъ, что отношеніе между бесконечно малыми величинами можетъ быть конечною величиною, точно также, какъ и сумма бесконечно малыхъ можетъ дать конечное количество.

Возьмемъ какое нибудь неоднородное тѣло и выберемъ въ этомъ тѣлѣ какую нибудь точку O (фиг. 2). Выдѣлимъ вокругъ точки O нѣкоторый объемъ V . Если

P вѣсъ этого объема, то частное $\frac{P}{V} = D$ будетъ сред-



Фиг. 2.

нею плотностью или точнѣе среднимъ удѣльнымъ вѣсомъ. Очевидно, что, такъ какъ тѣло неоднородное, то предъидущее отношеніе будетъ зависеть отъ величины объема V . Вообразимъ теперь, что этотъ объемъ постепенно уменьшается вокругъ точки O , приближаясь къ нулю, вѣсъ P также

будетъ измѣняться, причемъ отношеніе $\frac{P}{V}$ будетъ стремиться къ опредѣленному предѣлу, называемому плотностью тѣла въ точкѣ O .

Предъидущее тѣло можно разсматривать, какъ состоящее изъ бесконечнаго числа точекъ, т. е., бесконечно малыхъ объемовъ. Поэтому конечный объемъ можно разсматривать, какъ сумму бесконечно малыхъ объемовъ.

11. Основныя положенія о бесконечно малыхъ.

I. Сумма опредѣленнаго числа бесконечно малыхъ одного и того же порядка будетъ также бесконечно малою величиною того же порядка. Пусть будутъ бесконечно малыя второго порядка.

$$k_1 \alpha^n, k_2 \alpha^n, k_3 \alpha^n, \dots, k_m \alpha^n$$

Ихъ сумма будетъ:

$$\left(k + k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m \right) \alpha^n$$

Сумма въ скобкахъ будетъ нѣкоторое конечное число K , слѣдовательно предъидущая сумма будетъ вида:

$K\alpha^n$, т. е. бесконечно малая второго порядка. Тоже самое можно сказать и о разности двухъ бесконечно малыхъ одного и того же порядка.

II. Отношеніе двухъ бесконечно малыхъ одного и того же порядка вообще конечное число и только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ можетъ равняться нулю или бесконечности.

III. Можно всегда пренебречь бесконечно малою передъ конечною величиною. Дѣйствительно, если имѣемъ $a + \alpha$, гдѣ a конечное число, а α бесконечно малое, то въ предѣлѣ α будетъ равно 0 и, слѣдовательно, останется только величина a .

Точно также всегда можно пренебречь бесконечно малою второго порядка передъ бесконечно малою $(n - 1)$ -го или болѣе нисшаго порядка.

ОТДѢЛЪ I.

Основы дифференціального исчисленія.

ГЛАВА III.

Дифференцирование функцій.

12. Функціи возрастающія и убывающія. Пусть будетъ функція

$$y = f(x)$$

Если увеличить независимую переменную на положительную величину Δx *), то вообще функція $f(x)$ измѣнится на нѣкоторую величину (увеличится или уменьшится) такъ что будетъ уже не y , а $y + \Delta y$, гдѣ Δy имѣетъ положительное или отрицательное значеніе. Когда Δy положительно, то говорятъ, что функція $y = f(x)$ есть возрастающая функція, когда же Δy отрицательно, то $f(x)$ называется убывающею функціею.

13. Дифференціалы. Измѣненія Δx и Δy называются разностями, но если Δx и Δy бесконечно малы величины, то ихъ называютъ дифференціалами и обозначаютъ тогда вмѣсто буквы Δ буквою d , такъ диф-

*) Въ математикѣ принято обозначать ту величину, на которую измѣнилась данная величина, греческою буквою Δ , приписывая рядомъ данную измѣняемую величину.

ференціалъ $x - a$ будетъ dx , дифференціалъ $y - a$ будетъ dy .

Если, для какого угодно значенія независимой переменной x , при бесконечно маломъ измѣненіи этой послѣдней, функція измѣняется также на бесконечно малую величину, то говорятъ, что функція непрерывна. Такъ функція:

$$y = f(x)$$

будетъ непрерывною, если

$$dy = f(x + dx) - f(x)$$

для какого угодно значенія x .

Мы будемъ разсматривать только такія функціи, такъ какъ въ электротехникѣ приходится имѣть дѣло лишь съ непрерывными функціями.

14. Производная функція. Положимъ, что при измѣненіи независимой переменной x на Δx , функція $y = f(x)$ измѣнилась на Δy , т. е. что:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

возьмемъ отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, оно будетъ равно: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Предположимъ теперь, что Δx приближается къ нулю, тогда, такъ какъ функція $f(x)$ непрерывна, то (§ 13) и Δy будетъ стремиться къ нулю, отношеніе же $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, какъ увидимъ дальше, будетъ приближаться къ нѣкоторому опредѣленному предѣлу; этотъ предѣлъ будетъ также функціею переменной x , такъ какъ его значеніе будетъ зависѣть отъ выбраннаго значенія для x . Дѣйствительно:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Предѣлъ отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx приближается къ

ную называютъ производною функціею или просто производною.

Такъ какъ въ предѣлѣ Δy и Δx становятся безконечно малыми, т. е. равными dy и dx , то мы имѣемъ право обозначить производную отношеніемъ:

$$\frac{dy}{dx}$$

Кромѣ этого обозначенія употребляютъ еще два слѣдующія: y' и $f'(x)$, показывающія, что эти вѣличины есть производныя функціи y или $f(x)$.

Такъ какъ:

$$(1) \dots \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

то:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \epsilon$$

гдѣ ϵ есть безконечно малая.

Изъ выраженія (1) слѣдуетъ, что для нахожденія производной какой нибудь функціи $f(x)$ надо независимую переменную x замѣнить въ этой функціи величиною $x + \Delta x$, затѣмъ изъ результата замѣщенія вычесть $f(x)$, послѣ чего раздѣлить полученную разность на Δx и найти предѣлъ этого частнаго при $\Delta x = 0$.

Изъ предъидущаго также слѣдуетъ, что, если производная функціи будетъ $f'(x)$ то ея дифференціалъ dy будетъ:

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

такъ какъ:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Примѣнимъ теперь предъидущія правила къ опредѣленію производныхъ и дифференціаловъ нѣсколькихъ основныхъ функцій.

15. Производная и дифференціалъ функціи $y = x^m$.
Для того чтобы найти производную, рассмотримъ нѣсколько случаевъ:

1) показатель m цѣлое и положительное число.

Примѣняя предыдущее правило, найдемъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x}$$

или развертывая $(x + \Delta x)^m$ по биному Ньютона:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \\ &= \frac{x^m + mx^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \cdot \Delta x^2 + \dots + \Delta x^m - x^m}{\Delta x} \end{aligned}$$

Что по упрощеніи даетъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \cdot \Delta x + \dots + \Delta x^{m-1}$$

Въ предѣлѣ Δx будетъ равно нулю, слѣдовательно во 2-й части предыдущаго выраженія останется только первый членъ, если x не равно ∞ , а потому:

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \dots \dots \dots (1)$$

откуда

$$dy = mx^{m-1} \cdot dx \dots \dots \dots (1')$$

Отсюда правило:

Для того чтобы получить производную функціи x^m , надо показатель функціи уменьшить на единицу и полученную степень умножить на показателя самой функціи.

Примѣры:

Для $y = x^4$ получимъ $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ и $dy = 4x^3 dx$

„ $y = x^7$ „ $\frac{dy}{dx} = 7x^6$ и $dy = 7x^6 dx$

„ $y = x$ „ $\frac{dy}{dx} = x^0 = 1$ и $dy = dx$

2) Показатель m дробное положительное число:
пусть:

$$m = \frac{p}{q}$$

тогда:

$$y = x^{\frac{p}{q}}$$

Возводя обѣ части въ степень q получимъ:

$$y^q = x^p$$

Положимъ:

$$z = y^q = x^p$$

Тогда на основаніи предъидущаго:

$$dz = qy^{q-1} \cdot dy = px^{p-1} \cdot dx$$

Слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}$$

Но

$$x^{p-1} = \frac{x^p}{x}, \quad y^{q-1} = \frac{y^q}{y}$$

А потому:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^p y}{xy^q}$$

Но:

$$x^p = y^q$$

Иначе:

$$\frac{x^p}{y^q} = 1,$$

Слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{y}{x}$$

Но:

$$y = x^{\frac{p}{q}}$$

Откуда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q} - 1}$$

и

$$dy = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q} - 1} \cdot dx$$

Отсюда слѣдуетъ, что предъидущее правило вѣрно и для дробнаго показателя.

Примѣры:

Производная функции $y = \sqrt{x}$

Извѣстно, что:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = x^{\frac{5}{4}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{4} x^{\frac{5}{4} - 1} = \frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}}$$

$$dy = \frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}} \cdot dx$$

3) Показатель m число отрицательное.

Пусть:

$$m = -n$$

Тогда:

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Откуда:

$$\frac{1}{y} = x^n$$

Примѣняя правило параграфа 14, можемъ написать:

$$\frac{1}{y + \Delta y} = (x + \Delta x)^n$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{y + \Delta y} - \frac{1}{y} &= (x + \Delta x)^n - x^n \\ - \frac{\Delta y}{y^2 + y\Delta y} &= (x + \Delta x)^n - x^n \end{aligned}$$

раздѣливъ же на Δx ; получимъ:

$$- \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{1}{y^2 + y\Delta y} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Когда Δx будетъ приближаться къ нулю, то и Δy будетъ также приближаться къ нулю, отношеніе же $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ сдѣлается $= \frac{dy}{dx}$, въ знаменателѣ первой части $y\Delta y$ въ предѣлѣ будетъ равно нулю, а потому переходя къ предѣламъ, получимъ:

$$- \frac{dy}{dx} \frac{1}{y^2} = nx^{n-1}$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = - nx^{n-1} y^2$$

$$\text{Но } y^2 = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$$

слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = - n \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = - nx^{-n-1}$$

и

$$dy = - nx^{-n-1} dx.$$

Слѣдовательно правило остается вѣрнымъ и при отрицательномъ показателѣ.

Примѣры:

$$y = x^{-2}, \quad \frac{dy}{dx} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$y = x^{-1}, \quad \frac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

16. Производная и дифференціалъ функціи $y = \lg x$.
Примѣняя правило параграфа 14, найдемъ:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\lg(x + \Delta x) - \lg x}{\Delta x} = \\ &= \frac{\lg\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \\ &= \frac{\lg\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Если мы будемъ брать предѣлъ для $\Delta x = 0$, то получимъ неопредѣленное выраженіе $\frac{0}{0}$. Для того, чтобы избѣжать это, положимъ

$$\Delta x = \frac{x}{m}$$

гдѣ для того, чтобы Δx было безконечно-мало, необходимо, чтобы m было бы безконечно велико. Замѣняя Δx его новымъ значеніемъ, найдемъ:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\lg\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\frac{x}{m}} = \frac{m}{x} \lg\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \\ &= \frac{\lg\left(1 + \frac{1}{m}\right)m}{x} \end{aligned}$$

Переходя къ предѣлу, m будетъ $= \infty$, выраженіе же $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ (см. § 8) будетъ имѣть предѣломъ число

$e = 2,7182 \dots$ служащее основаніемъ Неперовыхъ логариѣмовъ.

Слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{lge}{x} \dots \dots \dots (2)$$

$$dy = \frac{dx}{x} lge \dots \dots \dots (2')$$

Это въ томъ случаѣ, когда логариѣмъ взятъ при какомъ угодно основаніи. Если же взяты Неперовы логариѣмы, основаніе которыхъ e , то $lge = 1$. Неперовы логариѣмы въ отличіе отъ простыхъ логариѣмовъ, мы будемъ обозначать черезъ Lg (большое L) или черезъ lg_e . Такимъ образомъ, если

$$y = lg_e x$$

то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \dots \dots \dots (3)$$

откуда

$$dy = \frac{dx}{x} \dots \dots \dots (3')$$

выраженіе $\frac{dx}{x}$ называется логариѣмическимъ дифференціаломъ.

17. Производная и дифференціалъ функціи $y = \sin x$. Примѣняя къ этой функціи правило параграфа 14, найдемъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

Переобразовывая разность синусовъ въ числитель въ произведеніе по формулѣ:

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{1}{2} (p - q) \cos \frac{1}{2} (p + q)$$

найдемъ

$$\begin{aligned} & \sin (x + \Delta x) - \sin x = \\ & = 2 \sin \frac{1}{2} (x + \Delta x - x) \cos \frac{1}{2} (x + \Delta x + x). \end{aligned}$$

Упрощая, получимъ

$$\sin (x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cos \left(x + \frac{1}{2} \Delta x \right)$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cos \left(x + \frac{1}{2} \Delta x \right)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cos \left(x + \frac{1}{2} \Delta x \right).$$

Переходя къ предѣламъ, т. е. дѣлая $\Delta x = 0$, увидимъ,

что предѣлъ перваго множителя $\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x}$ есть 1, такъ-

какъ изъ тригонометріи извѣстно, что предѣлъ отношенія синуса къ его дугѣ равенъ 1-цѣ, когда дуга приближается къ нулю; второй же множитель будетъ имѣть предѣломъ $\cos x$, а потому:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

и

$$dy = \cos x \cdot dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4').$$

Основные правила дифференцированія.

18. Производная и дифференціалъ постоянной величины равны нулю, пусть даны двѣ функціи:

$$y = f(x) \text{ и } y_1 = f(x) + C$$

разнящіяся одна отъ другой только на постоянную величину C . Достаточно будетъ доказать, что производныя и дифференціалы этихъ двухъ функцій равны.

Первая даетъ:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

вторая:

$$y_1 + \Delta y_1 = f(x + \Delta x) + C.$$

Слѣдовательно:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y_1 = f(x + \Delta x) + C - f(x) - C.$$

т. е.

$$\Delta y_1 = f(x + \Delta x) - f(x)$$

а потому:

$$\Delta y = \Delta y_1.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x}$$

и это для какого угодно значенія x и Δx , а потому переходя къ предѣламъ будетъ также имѣть

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} \text{ и } dy = dy_1$$

Отсюда слѣдуетъ, что производная и дифференціалъ постоянной величины C равны нулю.

19. Производная и дифференціалъ суммы или разности функцій равны суммѣ или разности производныхъ и дифференціаловъ этихъ функцій.

Пусть дано:

$$y = u \pm v$$

гдѣ:

$$u = f(x) \quad v = f_1(x).$$

Если x измѣнится на Δx , то будетъ имѣть:

$$u + \Delta u = f(x + \Delta x)$$

$$v + \Delta v = f_1(x + \Delta x)$$

а слѣдовательно и y получить приращеніе Δy такое, что:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)$$

или:

$$y + \Delta y = (u \pm v) + (\Delta u \pm \Delta v)$$

но:

$$y = u \pm v$$

поэтому:

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v.$$

Переходя къ предѣламъ, найдемъ:

$$dy = du \pm dv \dots \dots \dots (5)$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \dots \dots \dots (5').$$

Примѣръ:

$$y = x^m + \lg_e x$$

полагая:

$$u = x^m \quad v = \lg_e x.$$

Найдемъ:

$$dy = mx^{m-1} dx + \frac{dx}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} + \frac{1}{x}.$$

Замѣчаніе. Предъидущее правило вѣрно для суммы какого угодно числа функцій.

20. Производная произведенія нѣсколькихъ функцій равна суммѣ произведеній, составленныхъ черезъ умноженіе производной каждой функціи на сумму остальныхъ функцій.

1) Возьмемъ сначала произведеніе двухъ функцій одной и той же переменнѣй x

$$y = u \cdot v$$

гдѣ:

$$u = f(x) \quad v = f_1(x).$$

Измѣняя x на Δx , получимъ:

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) = \\ &= uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v. \end{aligned}$$

Замѣняя во 2-й части uv посредствомъ y , получимъ:

$$y + \Delta y = y + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v$$

откуда, сокращая:

$$\Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v.$$

Раздѣливъ на Δu , получимъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v$$

Переходя къ предѣламъ:

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} \cdot dv.$$

Но членомъ $\frac{du}{dx} \cdot dv$ можно пренебречь, такъ-какъ онъ будетъ безконечно малымъ, по отношенію къ остальнымъ конечнымъ членамъ ¹⁾, слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \dots \dots \dots (6)$$

и

$$dy = v \cdot du + u dv \dots \dots \dots (6')$$

2) Если имѣемъ произведеніе болѣе чѣмъ 2-хъ функций, на примѣръ:

$$y = r \cdot s \cdot v$$

то, полагая сначала:

$$r \cdot s = u,$$

можно написать:

$$y = uv$$

откуда на основаніи предъидущаго:

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

и такъ какъ:

$$u = r \cdot s$$

то:

$$\frac{du}{dx} = r \frac{ds}{dx} + s \frac{dr}{dx}$$

Замѣняя въ предъидущемъ равенствѣ $\frac{du}{dx}$ его значеніемъ, точно также, какъ и $u = r \cdot s$ найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = rs \frac{dv}{dx} + v \left(r \frac{ds}{dx} + s \frac{dr}{dx} \right)$$

¹⁾ Предполагается, что предѣлы $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ конечныя величины.

или:

$$\frac{dy}{dx} = rs \frac{dv}{dx} + vr \frac{ds}{dx} + vs \frac{dr}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

и

$$dy = rs dv + vr ds + vs dr. \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

Примѣръ:

$$y = x^m \lg x \cdot \sin x$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^m \lg x \cdot \cos x + \lg_e x \cdot \sin x \cdot m x^{m-1} + \\ &+ x^m \cdot \sin x \cdot \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy &= x^m \lg x \cdot \cos dx + \lg_e \sin \cdot m x^{m-1} \cdot dx + \\ &+ x^m \sin \cdot \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Примѣчаніе. Если одинъ изъ множителей произведенія постоянная величина, то онъ войдетъ, какъ коэффициентъ въ производныя и дифференціалы. Такъ, если имѣемъ произведеніе $y = a \cdot u \cdot v$, то примѣняя формулы (7) и (7'), найдемъ:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= au \frac{dv}{dx} + av \frac{du}{dx} + uv \frac{da}{dx} \\ dy &= au dv + au du + uv da \end{aligned}$$

Но такъ какъ (см. § 18) $\frac{da}{dx}$ и da равны нулю, то:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a \left(u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \right) \\ dy &= a (u dv + v du) \end{aligned}$$

Примѣръ:

$$\begin{aligned} 1) \quad y &= 8x^m \\ \frac{dy}{dx} &= 8 \cdot m x^{m-1} \\ dy &= 8m x^{m-1} \cdot dx \end{aligned}$$

$$2) \quad y = 5 \cdot x^p \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 (px^{p-1} \sin x + x^p \cos x)$$

$$dy = 5 (px^{p-1} \sin x + x^p \cos x) dx$$

21. Производная дроби равна разности произведенія знаменателя на производную числителя минусъ произведение числителя на производную знаменателя, раздѣленной на квадратъ знаменателя. Такъ, если дана дробь:

$$y = \frac{u}{v}$$

гдѣ u и v функціи переменнѣй x , то:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\text{Дѣйствительно, если } y = \frac{u}{v}$$

то $u = v \cdot y$

Но тогда на основаніи формулы (6) параграфа 20:

$$\frac{du}{dx} = y \frac{dv}{dx} + v \frac{dy}{dx}$$

откуда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - y \frac{dv}{dx}}{v}$$

а такъ какъ $y = \frac{u}{v}$, то, замѣняя въ предыдущемъ равенствѣ y его значеніемъ найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - \frac{u}{v} \frac{dv}{dx}}{v}$$

или, упрощая числитель:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} \cdot v - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \dots (8)$$

и

$$dy = \frac{v \, du - u \, dv}{v^2} \dots \dots \dots (8')$$

Примѣръ:

$$y = \frac{\lg_e x}{\sin x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cdot \frac{1}{x} - \lg_e x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$dy = \frac{\sin x \cdot \frac{dx}{x} - \lg_e x \cdot \cos x \, dx}{\sin^2 x}$$

Примѣчаніе. Если знаменатель v величина постоянная, то $\frac{dv}{dx} = 0$ точно также, какъ и dv , а потому тогда формулы (8) и (8') дадутъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{v} \quad dy = \frac{du}{v}$$

Если же въ дробѣ $y = \frac{u}{v}$ числитель постоянная величина, то $\frac{du}{dx} du$ равны нулю, а потому формулы (8) и (8') дадутъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v^2} \cdot \frac{dv}{dx}, \quad dy = -\frac{u}{v^2} dv.$$

22. Производная и дифференціалъ функціи отъ функцій.

1) Пусть:

$$y = f(u)$$

гдѣ

$$u = F(x)$$

Мы всегда имѣемъ право написать тождество:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Переходя къ предѣламъ, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} {}^1) \dots \dots \dots (9)$$

Слѣдовательно производная функціи y равна произведенію производной этой функціи по отношенію къ переменнѣй u на производную переменнѣй u по отношенію къ независимой переменнѣй x . То же и для дифференціала:

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx \dots (9')$$

2) Пусть:

$$y = f(v)$$

гдѣ

$$v = f_1(u), \text{ а } u = f_2(x)$$

Изъ тождества:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} \dots (10)$$

То же правило будетъ примѣнимо и для функцій, связанныхъ съ независимюю переменною посредствомъ какого угодно числа функцій.

Примѣръ:

Найти производную и дифференціалъ функціи:

$$y = \lg_e \sin x$$

Полагая:

$$u = \sin x$$

Получимъ:

$$y = \lg_e u$$

Слѣдовательно, примѣняя формулы 10 и 10', найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

¹⁾ На выраженія $\frac{dy}{du}$, $\frac{du}{dx}$ не слѣдуетъ смотрѣть, какъ на частныя, а какъ на предѣлы, вотъ почему въ произведеніи $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ нельзя сокращать на du :

Но:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \quad (\text{см. § 16})$$

а

$$\frac{du}{dx} = \cos x \quad (\text{см. § 17}).$$

Слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \cos x$$

или, такъ какъ $u = \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cotg x$$

и

$$dy = \cotg x \cdot dx$$

23. Производныя и дифференціалы показательныхъ функцій.

1) Пусть дана функція $y = a^x$ Логариѣмируя, получимъ:

$$\lg y = x \lg a$$

Беря производную обѣихъ частей равенства, получимъ на основаніи §§ 16, 21, 15, 22.

$$\frac{\lg e}{y} \frac{dy}{dx} = \lg a$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lg a}{\lg e} y = \frac{\lg a}{\lg e} a^x \dots \dots \dots (11)$$

и

$$dy = \frac{\lg a}{\lg e} a^x \cdot dx \dots \dots \dots (11)$$

если вмѣсто обыкновеннаго логариѣма возьмемъ Неперовы логариѣмы, то (§ 16) $\lg_e e = 1$ и слѣдовательно

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot \lg_e a$$

2)

$$y = e^x$$

Подобно предыдущему найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{lge}{lge} e^x = e^x$$

т. е. производная функции e^x равна самой функции.

24. Производныя и дифференціалы круговыхъ (тригонометрическихъ) функций.

$$1) \quad y = \sin x$$

мы уже нашли (§ 17), что:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$dy = \cos x \cdot dx.$$

$$2) \quad y = \cos x$$

мы знаемъ, что $\cos x = \sin (90^\circ - x)$

Полагая

$$u = 90^\circ - x$$

можемъ написать:

$$y = \sin u$$

Откуда:

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Но:

$$\frac{du}{dx} = -1 \quad (\S 15 \text{ и } \S 18)$$

Слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = -\cos u$$

подставляя вмѣсто u его значеніе, получимъ

$$\frac{dy}{dx} = -\cos (90^\circ - x) = -\sin x \quad (12)$$

$$dy = -\sin x \, dx \quad (12')$$

2)

$$y = \operatorname{tg} x$$

можемъ написать:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Поэтому на основаніи §§ 21, 17 и формулы (12), найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Но:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (13)$$

$$dy = \frac{dx}{\cos^2 x} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (13')$$

3) Точно также найдемъ, что для $y = \cotg. x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (14)$$

и

$$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (14')$$

4) Для:

$$y = \sec x$$

имѣемъ, такъ какъ:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (15)$$

$$dy = \frac{\sin x \cdot dx}{\cos^2 x} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (15)$$

5) Для:

$$y = \operatorname{cosec} x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (16)$$

ТАКЪ КАКЪ:

$$\operatorname{Cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

25. Производныя и дифференціалы обратныхъ круговыхъ функцій.

1) $y = \arcsin x$

Можно написать (§ 6)

$$x = \sin y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

откуда, принимая y за независимую переменную, на основаніи § 17.

$$\frac{dx}{dy} = \cos y,$$

и слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

Но изъ уравненія (α) $x = \sin y$

Слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \dots \dots (17)$$

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (17')$$

2) Точно также найдемъ, что для $y = \arccos x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \dots (18)$$

$$dy = - \sqrt{\frac{dx}{1-x^2}} \cdot \cdot \cdot (18')$$

3) $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$

отсюда: (§ 6)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

но:

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$$

Слѣдовательно:

$$\frac{dx}{dy} = 1 + \operatorname{tg}^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$$

и такъ какъ $\operatorname{tg} y = x$, то:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \quad \dots \quad (19)$$

$$dy = \frac{dx}{1 + x^2} \quad \dots \quad (19')$$

$$4) \quad y = \operatorname{arc} \cotg x$$

Подобно предъидущему найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2} \quad \dots \quad (20)$$

$$dy = -\frac{dx}{1 + x^2} \quad \dots \quad (20')$$

26. Дифференціалъ и производная функцій отъ нѣсколькихъ переменныхъ. Пусть будетъ функція:

$$u = f(x, y)$$

въ которой x и y двѣ независимыхъ переменныхъ. Измѣняя x на дифференціалъ dx и предполагая y постояннымъ, получимъ для u соотвѣтственное измѣненіе, которое называется частнымъ дифференціаломъ функціи, взятымъ по отношенію къ x и который будетъ равенъ произведенію частной производной, взятой по x , на дифференціалъ dx .

Частная производная, изображается либо обозначеніемъ $f'_x(x, y)$ либо обозначеніемъ $\frac{\partial f}{\partial x}$, гдѣ буква d берется круглою для того, чтобы не принимать выраженіе $\frac{df}{dx}$ какъ частное приращенія df на дифферен-

ціаль dx , иначе говоря въ выраженіи частнаго дифференціала

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx$$

Нельзя сокращать множитель dx съ знаменателемъ dx

Точно также, предполагая x постояннымъ, а y переменнымъ, найдемъ для частнаго дифференціала du по y :

$$du = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = f'_y \cdot dy$$

гдѣ $\frac{\partial f}{\partial y}$ или f'_y есть частная производная по y функции $f(x, y)$. Полнымъ дифференціаломъ функции $f(x, y)$ будетъ измѣненіе, которое получитъ функция, когда обѣ переменныя x и y измѣнятся на ихъ дифференціалы dx и dy ; иначе говоря полный дифференціаль будетъ:

$$du = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$$

прибавимъ и вычтемъ изъ второй части этого выраженія:

$$f = f(x, y + dy)$$

тогда получимъ:

$$du = f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy) + f(x, y + dy) - f(x, y)$$

Но $f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy)$ есть частный дифференціаль по x функции $f(x, y + dy)$, или функции $f(x, y)$, такъ какъ безконечно малымъ dy можно пренебречь. Иначе говоря, первые два члена, указанные выше представляютъ дифференціаль:

$$f'_x(x, y) dx \text{ или } \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx$$

точно также $f(x, y + dy) - f(x, y)$ представляютъ частный дифференціаль

$$f'_y(x, y) \cdot dy \text{ или } \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\left. \begin{aligned} du &= f'_x(x, y) \cdot dx + f'_y(x, y) \cdot dy \\ du &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy \end{aligned} \right\} (21)$$

Полный дифференціалъ функции нѣсколькихъ переменныхъ равенъ суммѣ частныхъ дифференціаловъ, взятыхъ по каждой изъ переменныхъ.

$$f(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$
$$f(x + dx, y + dy) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$
$$f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = 0$$
$$-\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \bar{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

и

$$dy = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \cdot dx \dots \dots \dots (22')$$

28. Дифференцирование нѣкоторыхъ часто примѣняемыхъ въ математикѣ функцій. Изложенныя выше нами правила достаточны для дифференцированія какихъ угодно функцій явныхъ и неявныхъ съ одною или нѣсколькими независимыми переменными. Мы приведемъ въ заключеніе этой главы дифференціалы нѣкоторыхъ болѣе или менѣе сложныхъ функцій, съ которыми намъ придется имѣть дѣло въ различныхъ примѣненіяхъ высшей математики при изученіи электричества и магнетизма.

$$1) \quad y = a^{mx}$$

гдѣ m постоянный множитель.

Положимъ:

$$v = mx$$

тогда:

$$y = a^v$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \text{ (см. § 22).}$$

Но:

$$\frac{dy}{dv} = \frac{lga}{lge} a^v \text{ (§ 23 формула (11)}$$

и

$$\frac{dv}{dx} = m \text{ (§ 15)}$$

а потому:

$$\frac{dy}{dx} = m \frac{lga}{lge} a^{mx} \dots \dots \dots (23).$$

$$2)$$

$$y = x^x$$

взявъ Неперовъ логариемъ обѣихъ частей, получимъ:

$$\lg_e y = x \lg_e x.$$

Полагая:

$$z = \lg_e y$$

найдемъ:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} \quad (\S 22).$$

Но производная произведения $x \lg_e x$ будетъ (§ 20):

$$\lg_e x + x \frac{1}{x} = \lg_e x + 1.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \lg_e x + 1.$$

Откуда:

$$\frac{dy}{dx} = y (\lg x + 1).$$

Но:

$$y = x^x.$$

Поэтому окончательно:

$$\frac{dy}{dx} = x^x (\lg x + 1) \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

3)

$$y = \cos ax.$$

Полагаемъ:

$$ax = v$$

тогда:

$$y = \cos v$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= - \sin v \cdot \frac{dv}{dx} = - a \cdot \sin v = \\ &= - a \sin ax. \quad . \quad . \quad . \quad (25). \end{aligned}$$

Точно также для:

$$y = \sin ax$$

$$\frac{dy}{dx} = a \cos ax \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

$$4) \quad y = \arccos \frac{x}{a}.$$

Полагая $\frac{x}{a} = u$ и применяя правило § 22, а также формулу (18) § 25, найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \dots \dots \dots (27)$$

то же самое и для функций:

$$y = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \dots \dots \dots (28)$$

$$y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

ГЛАВА IV.

Понятіе о дифференціалахъ и производныхъ высшаго порядка.

29. Производныя дифференціалы высшаго порядка функций отъ одной переменнѣй. Производная какой-нибудь функции $f(x)$ есть также функция этой же переменной x , а потому она тоже можетъ имѣть свою производную. Эта послѣдняя называется второю производною функции $f(x)$. Производная же второй производной получаетъ названіе третьей производной функции $f(x)$ и т. д.

Первую производную мы обозначали черезъ $f'(x)$ или черезъ $\frac{df}{dx}$, вторая производная обозначается черезъ $f''(x)$ или черезъ $\frac{d^2f}{dx^2}$. Послѣднее обозначеніе при-

нято потому, что, если первая производная функции $f(x)$ будетъ $\frac{df}{dx}$, то производная функции $\frac{df}{dx}$ будетъ, согласно опредѣленію производныхъ функций:

$$\frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx}$$

что въ болѣе упрощенномъ видѣ можно написать:

$$\frac{d^2f}{dx^2}$$

Точно также для обозначеній производныхъ 3-го, 4-го и т. д. порядковъ будемъ имѣть:

$$\frac{d^3f}{dx^3} \text{ или } f'''(x)$$

$$\frac{d^4f}{dx^4} = f^{IV}(x)$$

.

$$\frac{d^nf}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

Дифференціалы высшихъ порядковъ получатся чрезъ умноженіе производныхъ соотвѣтствующаго порядка на dx въ степени равной порядку дифференціала. Такъ дифференціалъ 2-го порядка функции $y = f(x)$ будетъ:

$$d^2y = \frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx^2$$

дифференціалъ 3-го порядка

$$d^3y = \frac{d^3f}{dx^3} \cdot dx^3$$

или же еще

$$d^2y = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx^2$$

$$d^3y = \frac{d^3y}{dx^3} \cdot dx^3.$$

Множители dx^2 , dx^3 не слѣдуетъ сокращать съ знаменателемъ выражений $\frac{d^2f}{dx^2} \frac{d^3f}{dx^3}$, такъ-какъ эти послѣднія не суть частныя отъ дѣленія d^2f на dx^2 и d^3f на dx^3 , а символически обозначаютъ производныя 2-го, 3-го и т. д. порядковъ отъ функціи $f(x)$.

Покажемъ на примѣрѣ, какъ найти производныя и дифференціалы различныхъ порядковъ какой-нибудь функціи съ одною переменною.

Пусть дана функція:

$$y = x^m$$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ будетъ уже производная отъ функціи $m^{x^{m-1}}$, слѣдовательно:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

точно также $\frac{d^3y}{dx^3}$ будетъ производною отъ функціи

$$m(m-1)x^{m-2}$$

т. е.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

.

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)x^{m+n}$$

Если возьмемъ функцію:

$$y = e^x$$

то:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \text{ (§ 23).}$$

Слѣдовательно:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^x$$

т. е. всѣ производныя функціи e^x равны самой функціи.

30. Дифференціалы и производныя высшаго порядка функцій отъ нѣсколькихъ переменныхъ. Пусть будетъ функція отъ двухъ переменныхъ

$$u = f(x, y).$$

Мы уже показали, что такое частныя производныя такой функціи и обозначали ихъ символически черезъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Каждая изъ этихъ производныхъ представляетъ собою также функцію отъ переменныхъ x и y ; если взять послѣдовательно производныя различныхъ порядковъ по x функціи $\frac{\partial f}{\partial x}$, то получимъ выраженія:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$$

точно также, если взять послѣдовательныя производныя по y функціи $\frac{\partial f}{\partial y}$, то будемъ имѣть:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^n}.$$

Если возьмемъ производную отъ функціи $\frac{\partial f}{\partial x}$ не по x , а по y , то такую производную изображаютъ символически обозначеніемъ:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Вообще же символъ $\frac{\partial^{n+m} f}{\partial^n x \partial^m y}$ обозначаетъ, что отъ функции $f(x, y)$ взяли сначала n разъ производную по x , а затѣмъ m разъ производную по y .

Докажемъ, что конечный результатъ не зависитъ отъ порядка дифференцированія по той и другой переменнѣй, если функция дифференцируется одинаковое число разъ по обѣимъ переменнымъ, иначе говоря, надо доказать, что:

$$\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} = \frac{\partial^{2n} f}{\partial y^n \partial x^n}.$$

Докажемъ это для производной втораго порядка, т. е. что:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Пусть:

$$u = f(x, y)$$

тогда первая частная производная по x будетъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f(x + dx, y) - f(x, y)}{dx}.$$

Беря производную по y отъ функции $\frac{\partial u}{\partial x}$, найдемъ:

$$\begin{aligned} & (\alpha). \quad \dots \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \\ & = \frac{f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy) - f(x + dx, y) + f(x, y)}{dx dy}. \end{aligned}$$

Если теперь сдѣлаемъ наоборотъ и возьмемъ сначала отъ функции $f(x, y)$ производную по x , то получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{f(x, y + dy) - f(x, y)}{dy}.$$

Затѣмъ возьмемъ производную по x функции $\frac{\partial u}{\partial y}$, тогда найдемъ:

$$(\beta). \quad \dots \dots \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \\ = \frac{f(x+dx, y+dy) - f(x+dx, dy) - f(x, y+dy) + f(x, y)}{dy dx}.$$

Замѣтимъ, что во 2-хъ частяхъ выраженій (а) и (β) dx и dy входятъ въ знаменатели, какъ множители, а не какъ символическія обозначенія. Тогда не трудно видѣть, что эти вторыя части одинаковы, и различіе только состоитъ въ порядкѣ размѣщенія слогаемыхъ и множителей, а потому:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Точно также докажемъ и для производныхъ $2n$ -го порядка.

Примѣръ.

Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ функціи:

$$u = x^2 - xy + y^2.$$

Разсматривая y какъ постоянную, найдемъ для частной производную x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - y.$$

Разсматривая теперь въ функціи $\frac{\partial u}{\partial x} x$, какъ постоянную и беря производную отъ $\frac{\partial u}{\partial x}$ по y , получимъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1.$$

Сдѣлаемъ теперь наоборотъ:

Возьмемъ производную по y , разсматривая x , какъ постоянную:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + 2y$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -1.$$

ОТДѢЛЪ II.

Алгебраическій анализъ.

ГЛАВА V.

Основные теоремы.

31. Алгебраическимъ анализомъ называется та часть математики, которая занимается изслѣдованіемъ различныхъ свойствъ и измѣненій функций, выраженныхъ алгебраически. Основою для анализа служатъ нѣсколько теоремъ, къ изложенію которыхъ мы сначала и перейдемъ.

32. Теорема I. Если производная какой нибудь непрерывной функции все время равна нулю, то эта функция есть величина постоянная.

Мы уже доказали (§ 18), что производная всякой постоянной величины равна нулю, а также, что двѣ функции, имѣющія одинаковыя производныя, различаются между собою только на постоянное количество. Изъ этихъ двухъ положеній не трудно вывести предъидущую теорему.

33. Теорема II. Если, при измѣненіи переменн^{ой} x отъ x_0 до $x_0 + \bar{h}$, производная функции остается все время положительною, то функция будетъ возрастать, если же производная будетъ отрицательною, то функция будетъ убывать.

Пусть данная функция $f(x)$.

Намъ извѣстно, что производная $f'(x)$ есть предѣлъ отношенія (§ 14)

$$\frac{f(x + \bar{h}) - f(x)}{\bar{h}}.$$

Когда $\bar{h}$ стремится къ нулю. Слѣдовательно:

$$\frac{f(x + \bar{h}) - f(x)}{\bar{h}} = f'(x) + \varepsilon$$

гдѣ ε бесконечно малая величина. Подставимъ въ этомъ равенствѣ, которое будетъ вѣрно для всякаго x , вмѣсто x x_0 , тогда получимъ:

$$\frac{f(x_0 + \bar{h}) - f(x_0)}{\bar{h}} = f'(x_0) + \varepsilon. \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha).$$

Такъ какъ ε бесконечно мало, то изъ этого равенства видно, что, если $f'(x_0)$ величина положительная, то и отношеніе $\frac{f(x_0 + \bar{h}) - f(x_0)}{\bar{h}}$ будетъ также величиною

положительною, а слѣдовательно для $\bar{h}$ положительнаго и достаточно малаго $f(x_0 + \bar{h}) - f(x_0)$ будетъ тоже положительнымъ, иначе говоря $f(x_0 + \bar{h})$ будетъ $> f(x_0)$, что значитъ, что функція $f(x)$ будетъ возрастать въ предѣлахъ отъ x_0 до $x_0 + \bar{h}$. Если $\bar{h}$ не есть величина бесконечно малая, то это $\bar{h}$ можно разбить на бесконечно малыя $\bar{h}'$, $\bar{h}''$, $\bar{h}'''$ и т. д. и доказать возрастаніе функціи для cadaго $\bar{h}'$, $\bar{h}''$ и т. д.

А тогда если функція будетъ возрастать послѣдовательно при измѣненіи x отъ x_0 до $x_0 + \bar{h}'$, затѣмъ отъ $x_0 + \bar{h}'$ до $x_0 + 2\bar{h}'$ и т. д., то слѣдовательно она будетъ возрастающею въ промежуткѣ отъ x_0 до $x_0 + \bar{h}$.

Точно также докажемъ, что, если $f'(x)$ будетъ отрицательно для значеній x , заключающихся между x_0 и $x_0 + \bar{h}$, то функція $f(x)$ будетъ убывать.

34. Теорема III. Наоборотъ, если, при измѣненіи x отъ x_0 до $x_0 + \bar{h}$ функція будетъ возрастать, то произ-
Войнаровскій. Ручов. по электротехн.

водная $f'(x)$ будетъ положительною, если $f'(x)$ будетъ убывать, то $f'(x)$ будетъ отрицательною.

Это слѣдуетъ изъ равенства (α) предыдущей теоремы.

35. Теорема IV. Если функція $f(x)$ равна нулю для двухъ значеній x , a и b , то производная будетъ равна нулю для значенія x , заключающагося между a и b .

Пусть $a < b$. Если $f(x)$ при $x = a$ равна нулю, то для слѣдующихъ значеній x функція будетъ либо увеличиваться, либо уменьшаться, а затѣмъ наоборотъ если она уменьшалась, то будетъ увеличиваться, если же увеличивалась, то будетъ уменьшаться по мѣрѣ приближенія x къ b ; по этому при измѣненіи x отъ a до b $f'(x)$ сначала будетъ одного знака, а затѣмъ другого, на примѣръ, сначала будетъ положительною, а затѣмъ отрицательною. А такъ какъ мы предполагаемъ, что производная, какъ и ея функція, есть функція непрерывная, то такой переходъ можетъ совершиться лишь когда $f'(x)$ пройдетъ черезъ нуль. И такъ $f'(x)$ будетъ равна нулю для нѣкотораго значенія x , заключающагося между a и b .

36. Теорема V. Для всякой непрерывной функціи имѣемъ:

$$\dots f(x_0 + \bar{h}) - f(x_0) = \bar{h} f'(x_0 + \theta h)$$

гдѣ θ есть величина, заключающаяся между нулемъ и единицею т. е. $\theta > 0$ и < 1 . Положимъ, что:

$$f(x_0 + \bar{h}) - f(x_0) = \bar{h} \cdot A \dots (α)$$

гдѣ A есть опредѣленное значеніе нѣкоторой функціи отъ x_0 и $\bar{h}$; опредѣлимъ эту величину A .

Переносъ всѣ члены равенства (α) въ 1-ю часть получимъ:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - h A = 0 \dots (β)$$

Положимъ, что $\bar{h}$ есть переменная величина, замѣнимъ её буквою x и обозначимъ тогда черезъ y функцію

$$y = f(x_0 + x) - f(x_0) - x A \dots (γ)$$

ея производная будетъ:

$$y' = f' (x_0 + x) - A$$

такъ-какъ $f (x_0)$ есть постоянная и A тоже.

Но функція y , какъ видно изъ уравненія (γ), при $x = 0$, будетъ равна нулю и также, какъ это видно изъ уравненія (β), будетъ равна нулю при $x = \bar{h}$.

Слѣдовательно ея производная y' сдѣлается равною нулю для x , заключающагося между 0 и $\bar{h}$ (§ 35), т. е. для нѣкотораго значенія $\theta \bar{h}$, гдѣ $\theta > 0$ и < 1 ; поэтому:

$$f' (x_0 + \theta h) - A = 0.$$

Откуда:

$$A = f' (x_0 + \theta h)$$

что и требовалось доказать.

37. Теорема VI. Если функціи $F' (x)$ и $f (x)$ непрерывны, точно также какъ и ихъ производныя, то:

$$\frac{f (x_0 + \bar{h}) - f (x_0)}{F (x_0 + \bar{h}) - F (x_0)} = \frac{f' (x_0 + \theta \bar{h})}{F' (x_0 + \theta \bar{h})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

Пусть:

$$\frac{f (x_0 + h) - f (x_0)}{F (x_0 + \bar{h}) - F (x_0)} = A$$

и рассмотримъ функцію:

$y = f (x_0 + x) - f (x_0) - A [F (x_0 + x) - F (x_0)]$
мы найдемъ, что:

$$y' = f' (x_0 + x) - AF' (x_0 + x).$$

Но:

$$y = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и при } x = h.$$

Слѣдовательно $y' = 0$ для $x = \theta h$ (§ 35), а потому:

$$f' (x_0 + \theta h) - AF' (x_0 + \theta h) = 0$$

откуда $A = \frac{f' (x_0 + \theta h)}{F' (x_0 + \theta h)}$ ч. и т. д.

Если производныя $f' (x)$ и $F' (x)$ равны нулю для

$x = x_0 + \theta h$, то подобно предыдущему, можно доказать, что:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + \bar{h}) - F(x_0)} = \frac{f''(x_0 + \theta h)}{F''(x_0 + \theta h)}$$

и т. д.

ГЛАВА VI.

38. Истинное значение выражений, принимающих одинъ изъ неопредѣленныхъ видовъ: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, 0^0 , 0^∞ и 1^∞ .

38. Пусть будетъ выроженіе вида $\frac{F(x)}{f(x)}$ принимающее видъ $\frac{0}{0}$ для $x = x_1$. Иначе говоря, пусть для $x = x_1$ $F(x_1) = 0$ $f(x_1) = 0$. Для того, чтобы найти истинное значение дроби $\frac{F(x_1)}{f(x_1)}$, надо найти предѣлъ, къ которому стремится отношеніе $\frac{F(x_1 + h)}{f(x_1 + \bar{h})}$, когда $\bar{h}$ стремится къ нулю.

Изъ § 37 имѣемъ вообще:

$$\frac{F(x_1 + h) - F(x_1)}{f(x_1 + h) - f(x_1)} = \frac{F'(x_1 + \theta h)}{f'(x_1 + \theta h)}$$

но

$$F(x_1) = 0 \text{ и } f(x_1) \text{ тоже } = 0$$

слѣдовательно:

$$\frac{F(x_1 + h)}{f(x_1 + y)} = \frac{F'(x_1 + \theta h)}{f'(x_1 + \theta h)}$$

но когда $\bar{h} = 0$, то получимъ:

$$\frac{F(x_1)}{f(x_1)} = \frac{F'(x_1)}{f'(x_1)}$$

если $F'(x_1) = 0$ и $f'(x_1) = 0$, то (§ 37) вмѣсто $\frac{F'(x_1)}{f'(x_1)}$, напишемъ $\frac{F''(x_1)}{f''(x_1)}$ и т. д.

И такъ:

Если выраженіе $\frac{F(x)}{f(x)}$ при $x = x_1$ принимаетъ неопредѣленный видъ, то, чтобы найти его истинное значеніе, слѣдуетъ взять отношеніе первыхъ производныхъ, если эти послѣднія не равны нулю, если же первыя производныя равны нулю, то нужно взять отношеніе 2-хъ производныхъ и т. д.

39. Неопредѣленности вида: $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$ приводятся къ виду $\frac{0}{0}$.

Дѣйствительно:

1) $\frac{F(x)}{f(x)}$ при $x = x_1$ принимаетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$, то это отношеніе можно замѣнить дробью

$$\frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{F(x)}}$$

которая при $x = x_1$ становится $= \frac{0}{0}$, а потому предъидущее отношеніе $\frac{F(x_1)}{f(x_1)}$ можно замѣтить отношеніемъ производныхъ отъ функцій

$$\frac{1}{f(x)} \text{ и } \frac{1}{F(x)}$$

2) Если $F(x) \cdot f(x)$ при $x = x_1$ становится $= 0 \times \infty$ то его можно привести къ виду $\frac{0}{0}$, такъ какъ

$$F(x) \cdot f(x) = \frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

при $x = x_1$ эта дробь принимает видъ $\frac{0}{0}$, а потому ее можно замѣнить отношеніемъ производныхъ функцій:

$$F(x) \text{ и } \frac{1}{f(x)}$$

40. Выраженія $F(x)^{f(x)}$ принимаютъ неопредѣленности вида 0^0 , 0^∞ , ∞^0 и 1^∞ . Если взять логарисмы выраженія $F(x)^{f(x)}$, то предъидущія неопредѣленности мы, какъ и раньше, сведемъ къ виду $\frac{0}{0}$, такъ какъ

$$\lg [F(x)^{f(x)}] = f(x) \lg F(x)$$

Пояснимъ все сказанное примѣрами:

Примѣры:

1) Найти истинное значеніе выраженія $\frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$ для $x = 0$.

Это выраженіе для $x = 0$ принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$.

Пусть:

$$x - \sin x = f(x)$$

$$1 - \cos x = F(x)$$

тогда:

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

$$F'(x) = \sin x$$

отношенія $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ при $x = 0$ тоже принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$, возьмемъ вторыя производныя:

$$f''(x) = \sin x$$

$$F''(x) = \cos x$$

тогда

$$\frac{f''(x)}{F''(x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

что при $x = 0$ будетъ 0, слѣдовательно истинное значеніе $\frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$ будетъ 0.

2) Истинное значеніе

$$x \lg \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

при $x = \infty$

это выраженіе принимаетъ видъ: $\infty \times 0$. Его можно замѣнить отношеніемъ:

$$\frac{\lg \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}$$

которое приметъ видъ $\frac{0}{0}$ при $x = \infty$, а потому его истинное значеніе будетъ равно отношенію производныхъ:

производная $\lg \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ будетъ, если положить $\frac{1}{x} = u$

$$\begin{aligned} & \frac{\lg e}{1 + u} \cdot \frac{du}{dx} = \\ & = - \frac{\lg e}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

производная отъ $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$

а потому истинное значеніе будетъ:

$$\begin{aligned} & - \frac{\lg e}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \\ & \frac{- \frac{\lg e}{1 + \frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{\lg e}{1 + \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

что при $x = \infty$ будетъ $= \lg e$.

3) Истинное значеніе выраженія

$$x^{\sin x}$$

при $x = 0$.

Это выраженіе приметъ видъ 0^0
пусть

$$y = x^{\sin x}$$

тогда

$$\lg y = \sin x \lg x$$

Выраженіе $\lg y$ при $x = 0$ принимаетъ видъ: 0×0
Но мы можемъ написать

$$\lg y = \frac{\sin x}{\frac{1}{\lg x}}$$

что будетъ при $x = 0 \frac{0}{\infty}$, т. е. 0 ; и такъ $\lg y$ при $x = 0$ равно 0 , а потому $y = 1$.

4) Истинное значеніе выраженія

$$y = f(x) - F(x)$$

зная, что при $x = x_0$ $f(x) = \infty$ и $F(x) = \infty$.
Тогда y приметъ видъ

$$\infty - \infty$$

Для опредѣленія истиннаго значенія напомнимъ:

$$y = f(x) \left[1 - \frac{F(x)}{f(x)} \right]$$

замѣнивъ $\frac{F(x)}{f(x)}$ отношеніемъ $\frac{F'(x)}{f'(x)}$, будемъ искать
предѣлъ выраженія $y_0 = f(x_0) \left[1 - \frac{F'(x_0)}{f'(x_0)} \right]$

ГЛАВА VII.

Разложение функций въ ряды.

Такія функции, какъ показательныя, логарифмическія, обратныя круговыя и т. п. очень трудно опредѣлить для даннаго значенія переменнѣй. Для того, чтобы облегчить такое опредѣленіе, а также и изслѣдованіе подобныхъ функций, разлагаютъ эти послѣднія въ ряды, выражающія въ очень простой формѣ зависимость функции отъ переменнѣй. Мы покажемъ здѣсь, какимъ образомъ можно всякую функцию разложить въ рядъ.

41. Строка Тейлора. Если имѣемъ функцию $f(x)$, то $f(x+h)$ можетъ быть представлена въ видѣ ряда:

$$(29) \dots f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots \\ + \frac{h^n}{1.2.3 \dots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2.3 \dots (n+1)} R(x)$$

гдѣ $f'(x)$ $f''(x)$ послѣдовательныя производныя функции $f(x)$, а $R(x)$ остатокъ, который нужно прибавить къ ряду, законченному на членѣ, содержащемъ $\frac{h^n}{n!}$, чтобы получить функцию $f(x+h)$.

Для большинства встрѣчающихся въ примѣненіяхъ функций этотъ остатокъ $R(x)$ стремится къ нулю съ увеличеніемъ числа членовъ ряда, т. е. съ увеличеніемъ n . Мы будемъ разсматривать только такія функции.

Для того, чтобы доказать вышеприведенную формулу напомнимъ тождество:

$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a)$$

или полагая:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ f(x) = (x - a) \varphi(x) + f(a) \dots (1)$$

изъ этого равенства найдемъ, беря послѣдовательныя производныя и принимая a за постоянную величину, а слѣдовательно и $f(a)$:

$$f'(x) = (x - a) \varphi'(x) + \varphi(x) \quad . \quad . \quad (2)$$

$$f''(x) = (x - a) \varphi''(x) + 2 \varphi'(x) \quad . \quad . \quad (3)$$

.

$$f^{(n)}(x) = (x - a) \varphi^{(n)}(x) + n \varphi^{(n-1)}(x) \quad . \quad . \quad (n)$$

помножимъ обѣ части равенствъ (1), (2), (3) . . . (n) соотвѣтственно на:

$$1, \frac{a-x}{1}, \frac{(a-x)^2}{1.2}, \quad . \quad . \quad . \quad \frac{(a-x)^n}{1.2 \dots n}$$

и сложимъ полученные результаты. Тогда найдемъ:

$$f(x) + \frac{a-x}{1} f'(x) + \frac{(a-x)^2}{1.2} f''(x) + \quad . \quad . \quad .$$

$$. \quad . \quad . + \frac{(a-x)^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x) =$$

$$f(a) + \frac{(a-x)^n (x-a)}{1.2 \dots n} \varphi^{(n)}(x).$$

Если теперь сдѣлаемъ $a - x = h$ и слѣдовательно $a = x + h$, то предыдущая формула приметъ видъ:

$$f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \quad . \quad . \quad + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x)$$

$$= f(x+h) - \frac{h^{n+1}}{1.2 \dots n} \varphi^{(n)}(x)$$

откуда:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \quad . \quad . \quad . \quad \text{и т. д.}$$

остатокъ $R(x)$ мы писать не будемъ, предполагая, что онъ сдѣляется равнымъ нулю при достаточно большомъ n .

42. Рядъ Маклорена. Въ формулѣ Тейлора сдѣлаемъ $x = 0$, тогда получимъ:

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1} f'(0) + \frac{h^2}{1.2} f''(0) + \quad . \quad . \quad .$$

$$\dots + \frac{h}{1.2 \dots n} f^{(n)}(0) + \dots$$

Вставимъ, вмѣсто $\bar{h}$, x , тогда и получимъ рядъ Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \dots$$

$$\dots + \frac{x^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(0) + \dots \quad (30)$$

показывающій, что всякая функція можетъ быть разложена въ рядъ по возрастающимъ степенямъ переменн-ной x .

Формулою Маклорена и пользуются для разложенія общеизвѣстныхъ функцій. Мы приведемъ нѣсколько такихъ разложеній.

43. Разложеніе въ рядъ функціи:

$$f(x) = a^x$$

Послѣдовательныя производныя этой функціи будутъ, если взять Неперовъ логариѳмъ (§ 23)

$$f^I(x) = a^x \lg_e a, \quad f^{II}(x) = a^x (\lg_e a)^2, \quad f^{III}(x) = a^x (\lg_e a)^3$$

$$f^{IV}(x) = a^x (\lg_e a)^4, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = a^x (\lg_e a)^n$$

при $x = 0$

$$f(0) = a^0 = 1, \quad f'(0) = \lg_e a, \quad f''(0) =$$

$$= (\lg_e a)^2, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = (\lg_e a)^n$$

примѣняя слѣдовательно формулу Маклорена, получимъ:

$$a^x = 1 + \frac{x \lg_e a}{1} + \frac{x^2}{1.2} (\lg_e a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{x^n (\lg_e a)^n}{1.2.3 \dots n} + \dots \quad (31)$$

остатокъ $R(x)$, о которомъ мы говорили выше, при увеличеніи n будетъ стремиться къ нулю. Поэтому по-

лученный выше рядъ будетъ тѣмъ точнѣе изображать данную функцію, чѣмъ n будетъ больше.

44. Разложене въ рядъ функцій e^x и e^{-x} .

$$1) \quad f(x) = e^x.$$

Извѣстно (§§ 23 и 29), что всѣ послѣдовательныя производныя функціи e^x равны самой функціи, а потому примѣняя рядъ Маклорена найдемъ:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\dots + \frac{x^n}{1.2.3. \dots n} + \dots$$

$$2) \quad f(x) = e^{-x}$$

$$f'(x) = -e^{-x}, f''(x) = e^{-x}, f'''(x) = -e^{-x}$$

и т. д.

а потому:

$$f(0) = +1, f'(0) = -1, f''(0) = +1, f'''(0) = -1$$

и т. д.

Примѣненіе формулы Маклорена даетъ:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\dots \pm \frac{x^n}{1.2.3. \dots n} \mp \dots \quad (32).$$

45. Разложене въ рядъ функцій $\sin x$ и $\cos x$.

$$1) \quad f(x) = \sin x.$$

Замѣчая, что:

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x, f^{IV}(x) = +\sin x \text{ и т. д.}$$

Найдемъ:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

$$\dots \pm \frac{x^n}{1.2.3.4.5. \dots n} \mp \dots \quad (33).$$

2) Точно также для:

$$f(x) = \cos x$$

найдемъ:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \\ &\dots \pm \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n} \dots \dots \dots (34). \end{aligned}$$

46. Разложене функцій $\lg_e (1+x)$ и $\lg_e (1-x)$.

1)
$$f(x) = \lg_e (1+x)$$

имѣеть:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ (§ 16)}$$

или еще:

$$f'(x) = (1+x)^{-1}$$

тогда:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 (1+x)^{-2} \\ f'''(x) &= +1 \cdot 2 (1+x)^{-3} \\ &\dots \dots \dots \\ f^{(n)}(x) &= \pm 1 \cdot 2 \dots (n-1) (1+x)^{-n} \end{aligned}$$

при $x = 0$:

$$f(0) = \lg_e (1+0) = \lg_e 1 = 0$$

$$f'(0) = +1, f''(0) = -1, f'''(0) = +1 \cdot 2$$

и т. д.

Искомый рядъ будетъ:

$$\begin{aligned} \lg_e (1+x) &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \\ &\dots \pm \frac{x^n}{n} \mp \dots \dots \dots (35). \end{aligned}$$

2) Точно такимъ же образомъ найдемъ, что рядъ функцій:

$$f(x) = \lg_e (1-x)$$

будеть:

$$\lg (1 - x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \quad (36).$$

Этотъ рядъ можно вывести изъ предъидущаго, замѣнивъ въ этомъ послѣднемъ x на $-x$.

47. Биномъ Ньютона.

Пусть:

$$f(x) = (a + x)^m$$

тогда:

$$f'(x) = m(a + x)^{m-1}$$

$$f''(x) = m(m-1)(a + x)^{m-2}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1) \dots (m-n+1)(a + x)^{m-n}.$$

Примѣняя формулу Маклорена, получимъ:

$$(a + x)^m = a^m + \frac{m}{1} x a^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 a^{m-2} + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} a^{m-n} x^n + \dots \quad (37).$$

Если m цѣлое и положительное, то рядъ будетъ конечнымъ.

ГЛАВА VIII.

Опредѣленіе наибольшаго и наименьшаго значенія функціи.

48. Если функція сначала возрастаетъ, а затѣмъ убываетъ при непрерывномъ измѣненіи независимой переменнѣй въ одну сторону, то, очевидно, функція дойдетъ, возрастая, до нѣкотораго наибольшаго значенія, послѣ котораго она начнетъ уже убывать. Точно также, если функція сначала уменьшается, а потомъ возра-

стаетъ, то, уменьшаясь, она пройдетъ черезъ нѣкоторое наименьшее значеніе, а затѣмъ уже начнетъ увеличиваться. Отсюда слѣдуетъ, что наибольшее значеніи функціи заключается между двумя бесконечно близкими значеніями, изъ которыхъ одно относится къ возрастанію функціи, а другое къ убыванію.

Такъ, если для значенія переменнѣй x равнаго a функція получаетъ наибольшее значеніе, то для значенія $a - \bar{h}$, она будетъ возрастающею, т. е. при измѣненіи переменнѣй въ промежуткѣ $a - \bar{h}$ до a функція будетъ увеличиваться, для значеній же переменнѣй въ промежуткѣ отъ a до $a + \bar{h}$ она будетъ уменьшаться, какъ бы мало ни было $\bar{h}$.

Для наименьшаго значенія функціи наоборотъ: при измѣненіи переменнѣй отъ $a - \bar{h}$ до a функція будетъ убывать, при измѣненіи же отъ a до $a + \bar{h}$ функція будетъ возрастать.

49. Возьмемъ функцію отъ одной переменнѣй $f(x)$ и пусть, для $x = a$, значеніе функціи $f(a)$ будетъ наибольшимъ. Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что для значеній x , заключающихся между $a - \bar{h}$ и a , $f(x)$ будетъ возрастать а потому на основаніи § 34 производная $f'(x)$ для этихъ же значеній x будетъ все время положительною, при измѣненіи же x отъ a до $a + \bar{h}$ функція будетъ убывать, а потому производная будетъ отрицательною. Такъ-какъ это будетъ вѣрно для какого угодно малаго значенія $\bar{h}$, то для значенія, $x = a$, $f'(x)$ будетъ равна нулю; дѣйствительно для всякаго значенія $a - \bar{h}$, какъ бы близко оно ни было къ a , $f'(x)$ положительна, а для значенія $a + \bar{h}$ бесконечно близкаго къ a , эта производная отрицательна, значить для a она должна равняться нулю. Такимъ же образомъ найдемъ, что для значенія b переменнѣй, дѣлающаго функцію $f(x)$ наименьшею $f'(b)$ будетъ равно нулю.

И такъ необходимое условіе, чтобы нѣкоторое значеніе переменнѣй x равное a сдѣлало бы функцію

наибольшую или наименьшую это, чтобы первая производная равнялась бы нулю для этого значенія a . Однакожъ, если для $x=a$ и вторая производная равна нулю, то предъидущее условіе не достаточно и тогда придется опредѣлять наибольшее и наименьшее значеніе функціи болѣе сложнымъ анализомъ. Мы этотъ случай разбирать не будемъ, такъ-какъ въ примѣненіяхъ онъ рѣдко встрѣчается, и остановимся лишь на случаѣ, когда для $x=a$, дѣлающаго функцію $f(x)$ наибольшую или наименьшею, $f''(a)$ не равно нулю.

Изъ теоремы § 36 мы нашли, что:

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a + \theta h).$$

Если же для a $f'(a) = 0$, то не трудно будетъ найти, слѣдуя приему § 36, что:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a + \theta h) \dots \dots \dots (\alpha).$$

Если для a , $f(a)$ будетъ наибольшимъ значеніемъ, то очевидно, что $f(a+h) - f(a) < 0$ (§ 48), а потому для наибольшаго значенія $f''(a + \theta h)$ должно быть < 0 , а слѣдовательно также $f''(a)$, такъ-какъ $\bar{h}$ стремится къ нулю.

Если $f(a)$ соотвѣтствуетъ наименьшему значенію, то $f(a+h) - f(a)$ должно быть положительно, т. е. $f(a+h) - f(a) > 0$ (§ 48), а потому и $f''(a + \theta h)$, какъ это видно изъ формулы (α) должно быть больше нуля или при $\bar{h}$ бесконечно маломъ $f''(a)$ должно быть > 0 .

Отсюда слѣдующее правило для нахождения наибольшаго и наименьшаго значенія функцій:

Для того, чтобы найти, какое значеніе переменной соотвѣтствуетъ наибольшему или наименьшему значенію функціи $f(x)$, приравниваютъ первую производную $f'(x)$ нулю. Изъ уравненія $f'(x)=0$ опредѣляютъ искомое значеніе x . Если для этого послѣдняго вторая производная $f''(x)$ больше нуля, то функція будетъ наименьшею, если же $f''(x)$ будетъ меньше нуля, то

функция будетъ наибольшею для этого значенія переменной x .

Пояснимъ это правило нѣсколькими примѣрами:

1) Зная, что сумма двухъ множителей постоянна, найти, для какихъ значеній этихъ множителей произведение будетъ наибольшимъ?

Пусть эти два множителя x и y и пусть ихъ сумма a тогда:

$$x + y = a$$

откуда:

$$y = a - x$$

произведение и будетъ:

$$u = x \cdot y = x(a - x)$$

или:

$$u = -x^2 + xa.$$

Нужно найти наибольшее значеніе функции u . Беремъ первую производную:

$$\frac{du}{dx} = -2x + a.$$

Приравнивая её нулю, получимъ уравненіе:

$$-2x + a = 0$$

откуда:

$$x = \frac{a}{2}$$

вторая производная:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -2$$

и такъ-какъ она отрицательна не только для $x = \frac{a}{2}$ но и вообще, то это показываетъ, что функция допускаетъ лишь наибольшее значеніе, которое и будетъ соответствовать $x = \frac{a}{2}$.

2) Найти наибольшее и наименьшее значеніе функции:

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

имѣемъ;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

приравнивая нулю, получимъ:

$$\frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0$$

или

$$1 - x^2 = 0$$

откуда

$$x = \pm 1$$

чтобы узнать, какое значеніе x соотвѣтствуетъ наибольшему и какое наименьшему значенію функціи, возьмемъ вторую производную.

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-(1 + x^2)^2 2x - (1 - x^2) \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} \\ &= \frac{-2x [1 + x^2 - 2(1 - x^2)]}{(1 + x^2)^3} \end{aligned}$$

или по упрощеніи:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x (3x^2 - 1)}{(1 + x^2)^3}$$

при

$$x = +1, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

при

$$x = -1, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{8} = +\frac{1}{2}$$

а потому $x = +1$ соотвѣтствуетъ наибольшему значенію, а $x = -1$ наименьшему значенію функціи.

Примѣчаніе. Наибольшее и наименьшее значеніе функцій обозначаютъ часто латинскими терминами: maximum (наибольшее) и minimum (наименьшее).

50. Нахожденіе maximum'a и minimum'a функцій двухъ и болѣе переменныхъ связано съ болѣе сложнымъ анализомъ. Такъ какъ въ нашемъ курсѣ намъ не придется имѣть дѣло съ такими функціями, то мы не будемъ затрагивать этотъ вопросъ.

ОТДѢЛЪ III.

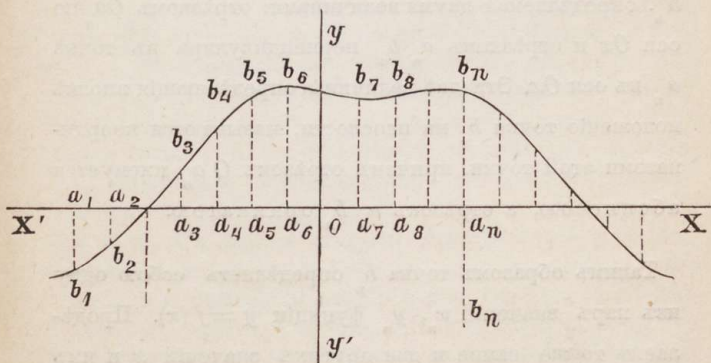
Графическій анализъ.

ГЛАВА IX.

Графическое изображеніе функцій.

51. Начертимъ двѣ оси взаимноперпендикулярныя, одну горизонтальную Ox , а другую вертикальную Oy , (фиг. 3) и возьмемъ какую нибудь функцію выраженную алгебраически уравненіемъ:

$$y = f(x) \dots \dots \dots (a)$$



Фиг. 3.

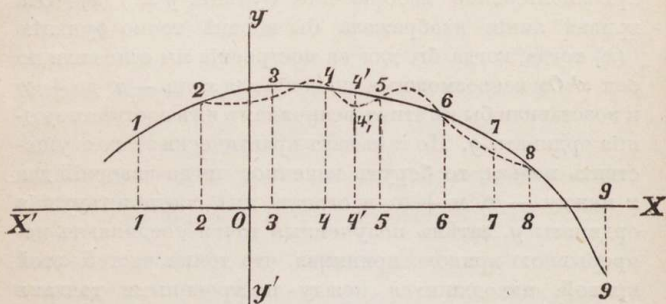
Возьмемъ для x какое нибудь произвольное численное значеніе x_n и найдемъ для y соответствующее зна-

чение y_n посредством уравнения (α). Выберемъ опредѣленный масштабъ на предъидущемъ чертежѣ для x и для y и условимся откладывать по оси Ox , отъ точки O столько единицъ длины, сколько числовыхъ единицъ заключается въ числѣ x_n , причемъ это откладываніе будемъ производить по направленію Ox , когда x_n положительное число, и по направленію Ox' когда x_n отрицательное. Пусть Oa_n длина, соотвѣтствующая числу x_n (предполагая, что x_n положительное). Возставимъ въ точкѣ a_n перпендикуляръ $b'_n a_n b_n$ къ оси Ox и отложимъ на этомъ перпендикулярѣ столько единицъ длины, сколько числовыхъ единицъ заключается въ y_n , причемъ это откладываніе произведемъ по направленію $a'_n b_n$, если y_n положительное число, и по направленію $a_n b'_n$, если y_n отрицательное число. Предполагая, что y_n положительно, допустимъ, что $a_n b_n$ равняется y_n , тогда у насъ получится на плоскости чертежа точка b_n , опредѣляемая двумя величинами: отрѣзкомъ Oa_n по оси Ox и отрѣзкомъ $a_n b_n$ перпендикуляра въ точкѣ a_n къ оси Ox . Эти двѣ величины, опредѣляющія вполнѣ положеніе точки b_n на плоскости, называются координатами этой точки, причемъ отрѣзокъ Oa_n именуется абсциссою, а отрѣзокъ $a_n b_n$ ординатою.

Такимъ образомъ точка b_n опредѣляетъ собою одну изъ паръ значеній x_n, y_n функціи $y = f(x)$. Продѣлаемъ то же самое и для другихъ значеній x и имъ соотвѣтствующихъ изъ уравненій (α) значеній y , откладывая положительныя значенія по одну сторону, а отрицательныя по другую, какъ это мы условились дѣлать выше. Тогда мы получимъ рядъ точекъ b, b_2, b_3

$b_4 \dots b_n \quad b_{n+1} \quad b_{n+2} \dots$ Если мы соединимъ эти точки непрерывною линіею, то эта линія намъ дастъ приблизительное изображеніе функціи $y = f(x)$. Эта кривая линія изображала бы вполне точно функцію $f(x)$ тогда, когда бы для ея построенія мы отложили по оси x' Ox всевозможныя значенія для x отъ $-\infty$ до $+\infty$ и возставили бы къ этимъ величинамъ имъ соотвѣтствующія ординаты y . Но такъ какъ практически этого осуществить нельзя, то берутъ конечное число значеній для x между $-\infty$ и $+\infty$ и строятъ имъ соотвѣтствующія ординаты y , затѣмъ полученные точки соединяютъ непрерывною кривою, принимая, что точки частей этой кривой, находящихся между построенными точками имѣютъ координаты близко подходящія къ значеніямъ x и y , заключающимся между значеніями, опредѣляемыми построенными точками. Конечно, такое допущеніе возможно лишь при условіи непрерывности функціи и при условіи, что значенія, координатъ построенныхъ точекъ выбраны такъ, что между двумя смежными этими значеніями функція либо убываетъ, либо возрастаетъ. Иначе можно сдѣлать грубую ошибку. Такъ положимъ, что для изображенія графически функціи $f(x)$ мы построили 10 точекъ (фиг. 4) 1, 2, 3, 4, 5, 10, опредѣляемыя значеніями $(x_1 y_1), (x_2 y_2) \dots (x_{10} y_{10})$. Соединимъ эти точки непрерывною кривою. Возьмемъ теперь абсциссу $04'$ заключающуюся между 04 и 05 и пусть эта абсцисса соотвѣтствуетъ значенію x_4 . Возставивъ перпендикуляръ $4'4'$ найдемъ въ масштабѣ значеніе этого перпендикуляра, пусть оно будетъ y_4 . Съ другой стороны изъ уравненія $y = f(x)$, вставивъ вмѣсто x x_4 найдемъ соотвѣтствующее значеніе y и положимъ, что мы нашли для него нѣкоторое число y' , которое будетъ меньше, чѣмъ y_4 и y_5 , это показываетъ, что функція $f(x)$ между значеніями x_4 и x_5 сначала убываетъ, а затѣмъ возрастаетъ и что въ промежуткѣ 4—5 она не можетъ быть изображена кривою 4—4'—5, а должна быть изображена кривою 4—4₁'—5, гдѣ ордината 4₁' соотвѣтствуетъ значенію

y , найденному изъ уравненія $y = f(x)$, когда вмѣсто x мы подставили x'_i .



Фиг. 4.

Такимъ образомъ изъ болѣе подробнаго анализа можетъ оказаться, что истинное изображеніе функціи будетъ не кривая вычерченная полною линією, а кривая представленная пунктиромъ.

Для того, чтобы не дѣлать никакихъ ошибокъ слѣдуетъ въ самомъ же началѣ опредѣлить точки, соответствующія наибольшимъ и наименьшимъ значеніямъ функціи, и тогда уже вычерчивать кривую, зная, что между каждымъ минимумомъ и максимумомъ функція непрерывно растеть, а между максимумомъ и минимумомъ, непрерывно убываетъ.

Построимъ функцію:

$$y = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}$$

опредѣлимъ сначала maximum'ы и minimum'ы этой функціи. Взявъ первую производную и приравнявъ нулю получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = -x + \frac{x^3}{3} = 0$$

откуда

1)

$$x = 0$$

2)

$$x = \pm \sqrt{3}$$

вторая производная:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -1 + x^2$$

будетъ для $x = 0$ равна -1 .

слѣдовательно $x = 0$ соотвѣтствуетъ максимуму

$$\text{для } x = +\sqrt{3} \text{ и } -\sqrt{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ будетъ } -1 + 3 = +2$$

поэтому $x = \pm \sqrt{3}$ соотвѣтствуетъ минимумамъ

$$\text{Для } x = 0, y = 1$$

$$\text{для } x = \pm \sqrt{3}, y = 1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

И такъ точка соотвѣтствующая максимуму будетъ

$$x = 0$$

$$y = 1$$

Двѣ точки, соотвѣтствующія минимуму будутъ:

$$x = +\sqrt{3} \quad y = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad x = -\sqrt{3} \quad y = \frac{1}{4}$$

Возьмемъ 2 оси координатъ (фиг. 5) и отмѣтимъ эти 3 точки. Теперь опредѣлимъ нѣкоторыя промежуточныя значенія, напр. соотвѣтствующія $x = 1$ и $x = 2$.

$$\text{Для } x = 1 \quad y = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

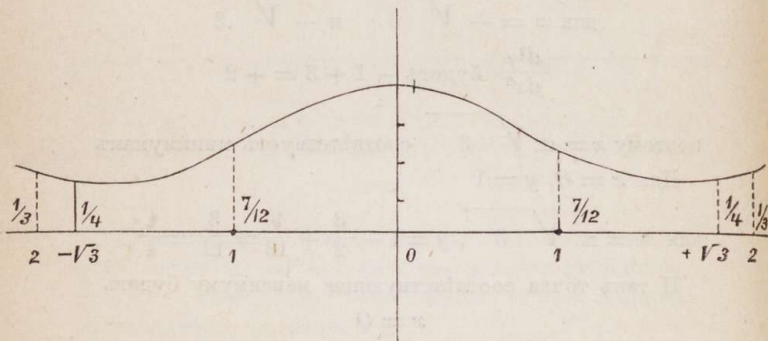
$$\text{Для } x = 2 \quad y = 1 - 2 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{также для } x = -1 \quad y = \frac{7}{12} \text{ и для } x = -2 \quad y = \frac{1}{3}$$

по этимъ точкамъ можно уже построить приблизительную кривую данной функціи, зная, что между максимумомъ и минимумомъ функція убываетъ.

Построение кривой облегчается еще некоторыми другими замечаниями: такъ если x входитъ въ функцію только въ четныхъ степеняхъ, то кривая будетъ симметрична по отношенію къ оси Oy , какъ это имѣетъ мѣсто для только что построенной нами функціи. Въ этомъ легко убѣдиться. Дѣйствительно если функція будетъ вида:

$$y = f(x^2)$$



Фиг. 5.

что обозначаетъ, что x входитъ въ четныхъ степеняхъ, то мѣняя $+x$ на $-x$ найдемъ для y одинаковыя значенія. Это же показываетъ, что точки, имѣющія одинаковыя по численной величинѣ, но противоположныя по знаку абсциссы, будутъ имѣть одинаковыя ординаты, что и значить, что кривая симметрична относительно оси Oy . Далѣе можно замѣтить для предъидущей функціи, что первая производная будетъ положительною для всѣхъ значеній x , большихъ по абсолют-

ной величинѣ $\sqrt{3}$, изъ этого слѣдуетъ, что функція будетъ все время возрастать для x большихъ

$\sqrt{3}$, а потому ординаты кривой будутъ посте-

пенно увеличиваться; значить за точкою $x = \sqrt{3}$

$y = \frac{1}{4}$ можно безошибочно вычертить кривую.

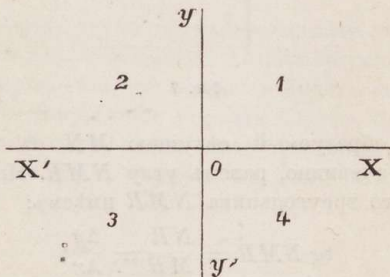
Если функція будетъ выражаться въ видѣ

$$y^2 = f(x)$$

то это показываетъ, что ея кривая симметрична по отношенію къ оси Ox . Если наконецъ функція связана съ независимаго переменнаго уравненіемъ вида:

$$f(x^2, y^2) = 0$$

то это значить, что ея кривая симметрична, какъ по отношенію къ Ox , такъ и по отношенію къ Oy , а слѣдовательно симметрична по отношенію къ началу координатъ O . Тогда достаточно вычертить одну четверть этой кривой, въ 1-мъ углу между осями координатъ, т. е. въ углу Oxy (фиг. 6).



Фиг. 6.

52. Теорема. Если нѣкоторая кривая C (фиг. 7) изображаетъ функцію $y = f(x)$, то тангенсъ угла, составляемаго касательною къ этой кривой въ какой нибудь точкѣ ея x, y будетъ равняться значенію первой производной этой функціи, соотвѣтствующему выбраннымъ значеніямъ x и y . Дѣйствительно, пусть M будетъ данная точка, координаты которой $OP = x$ и $MP = y$. Возьмемъ на кривой C вторую точку N и пусть координаты этой точки:

$$OQ = x + \Delta x$$

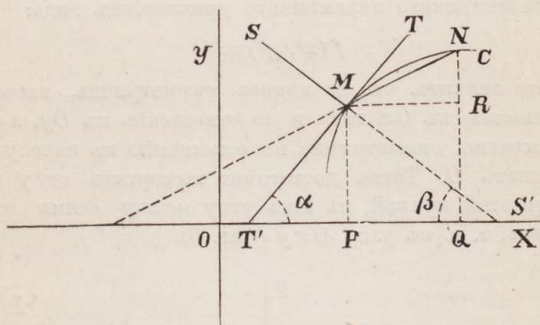
$$NQ = y + \Delta y$$

Соединимъ точки M и N прямою MN и прове-

демъ черезъ M параллельную MR оси Ox . Легко видѣть, что:

$$PQ = MR = \Delta x$$

$$NR = \Delta y$$



Фиг. 7

Уголъ, образуемый сѣкущею MN съ осью абсциссъ ox , очевидно, равенъ углу NMR . Но изъ прямоугольнаго треугольника NMR имѣемъ:

$$\operatorname{tg} NMR = \frac{NR}{MR} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Когда точка N будетъ приближаться къ M , сѣкущая MN будетъ приближаться къ касательной къ кривой въ точкѣ M , а отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будетъ стремиться

къ $\frac{dy}{dx}$. Уголъ NMR будетъ стремиться къ углу касательной въ точкѣ M съ параллельною къ оси ox или что тоже къ углу касательной съ осью ox . А потому, переходя къ предѣлу, найдемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} \dots \dots \dots (38)$$

Перпендикуляръ, возставленный къ касательной въ точкѣ ея касанія съ кривою называется нормалью къ кривой. На фиг. 7 нормаль въ точкѣ M будетъ MS .

Изъ прямоугольника треугольника $MT'S'$ видно, что уголъ $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Слѣдовательно:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{cotg} \alpha.$$

Но:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

а

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Слѣдовательно:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Угломъ между двумя прямыми считаютъ уголъ, образуемый ихъ положительными направлѣніями. Положительное направлѣніе оси абсциссъ будетъ ox , а за положительное направлѣніе нормали берутъ направлѣніе ея отъ кривой во вѣдшнюю часть, т. е. направлѣніе MS , слѣдовательно уголъ нормали съ осью абсциссъ будетъ β' .

Но:

$$\beta' = 180^\circ - \beta.$$

Слѣдовательно:

$$\operatorname{tg} \beta' = - \operatorname{tg} \beta = - \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \dots \dots \dots (39)$$

Отсюда:

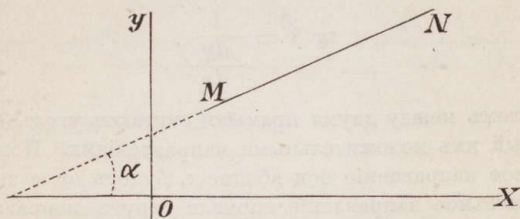
Теорема. Тангенсъ угла нормали къ кривой въ точкѣ (x, y) равняется обратному значенію со знакомъ $(-)$ производной, соотвѣтствующему выбранному для точки значеніямъ x и y .

Объ предъидущія теоремы вѣрны, какъ бы ни была выражена функція, изображаемая данною кривою: будетъ ли эта функція явная или неявная.

53. Если всякую функцію объ одной перемѣнной можно изобразить кривою, то наоборотъ всякую кри-

вую, характерное свойство всѣхъ точекъ которой можно выразить алгебраическимъ уравненіемъ, можно также изобразить въ видѣ опредѣленной функціи.

54. Возьмемъ сначала прямую линію. Выберемъ оси координатъ ox и oy и пусть данная прямая MN . Характерное свойство прямой линіи, т. е. такое свойство, которымъ обладаетъ только прямая линія, это то, что касательныя, проведенныя въ различныхъ ея точкахъ образуютъ одинъ и тотъ же уголъ съ осью абсциссъ, равный углу самой прямой съ этою осью. Пусть α этотъ послѣдній. Возьмемъ любую точку xy на пря-



Фиг. 8.

мой и проведемъ касательную; тогда тангенсъ угла этой касательной съ осью ox будетъ равняться производной отъ той функціи, которую изображаетъ эта прямая (§ 52); пусть $y = f(x)$ эта функція тогда:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$$

гдѣ $\operatorname{tg} \alpha$ постоянная величина. Одна изъ функцій, которая имѣетъ для производной постоянную величину $\operatorname{tg} \alpha$, будетъ $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Всѣ же другія функціи, имѣющія одинаковую производную съ этою послѣднею (§ 18), будутъ отличаться нѣкоторою постоянною величиною. Слѣдовательно общій видъ такихъ функцій будетъ:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + c.$$

И такъ вообще прямая линія изображаетъ функцію вида:

$$y = ax + c \dots \dots \dots (40)$$

гдѣ a есть тангенсъ угла, образуемаго прямою съ осью ox . Чтобы опредѣлить, чему соотвѣтствуетъ постоянная c , замѣтимъ, что для $x = 0$ предъидущее уравненіе даетъ:

$$y = c$$

иначе говоря c есть ордината такой точки прямой абсцисса которой равна 0. Но вѣдь не трудно видѣть, что всѣ точки абсциссы которыхъ $= 0$, находятся на оси oy , слѣдовательно постоянная c есть ордината точки пересѣченія прямой съ осью oy .

И такъ, прямая линія выражается уравненіемъ первой степени въ x и y , гдѣ x и y ординаты какой нибудь точки прямой.

Наоборотъ, всякое уравненіе первой степени въ x и y изображаетъ прямую линію, если x и y принять за координаты точки.

Дѣйствительно пусть имѣемъ уравненіе:

$$ax + by + c = 0.$$

Это уравненіе показываетъ, что если взять x за независимую переменную, то y будетъ функціею x . Выдѣлимъ эту функцію:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \dots \dots \dots (\alpha).$$

Это уравненіе будетъ изображать какую-то кривую. Возьмемъ первую производную

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}.$$

Но $\frac{dy}{dx}$ = тангенсу угла касательной въ какой нибудь точкѣ этой кривой съ осью ox . И такъ-какъ a и b постоянныя коэффиціенты, то мы видимъ, что всякая касательная къ искомой кривой составляетъ съ осью абсциссъ постоянный уголъ, иначе говоря вышеприведенное уравненіе изображаетъ прямую линію.

Тангенсъ, угла образуемаго этою прямою съ осью абсциссъ будетъ:

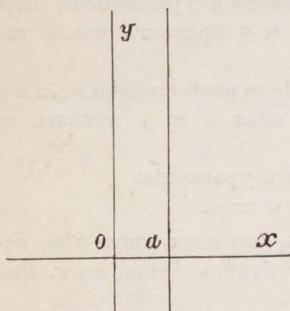
$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{b}.$$

Ордината же точки, въ которой прямая пересѣкаетъ ось oy будетъ $-\frac{c}{b}$.

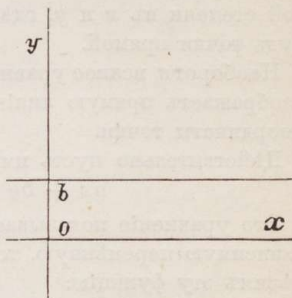
Въ частномъ случаѣ уравненіе:

$$x = a$$

изобразить прямую, параллельную оси oy , проведенную отъ этой послѣдней на разстояніи $= a$. Дѣйствительно абсциссы всѣхъ точекъ такой прямой будутъ одинаковы и равны a (фиг. 9).



Фиг. 9.



Фиг. 10.

Уравненіе же $y = b$ изобразить прямую параллельную оси ox и приведенную отъ этой послѣдней на разстояніи $= b$. Дѣйствительно ординаты всѣхъ точекъ такой прямой одинаковы и равны b .

Если прямая проходитъ черезъ начало координатъ, то ордината точки пересѣченія этой прямой съ осью oy равна 0 , а потому и въ общемъ уравненіи (а) членъ $-\frac{c}{b}$ долженъ равняться нулю, такъ-что уравненіе прямой будетъ:

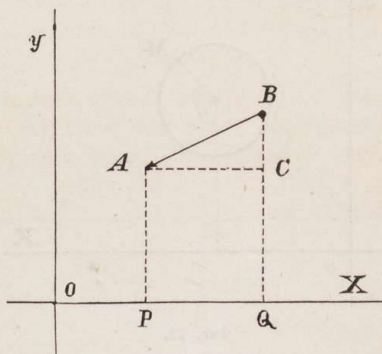
$$y = -\frac{a}{b} x$$

или еще:

$$ax + by = 0.$$

55. Чтобы найти уравненіе круга, найдемъ сначала

выраженіе разстоянія между двумя точками, координаты которых (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . Пусть эти точки A и B .



Фиг. 11.

Имѣемъ:

$$\begin{aligned} OP &= x_1 & AP &= y_1 \\ OQ &= x_2 & BQ &= y_2. \end{aligned}$$

Далѣе, проведя прямую AC , параллельную оси ox получимъ:

$$\begin{aligned} AC &= PQ = x_2 - x_1 \\ BC &= BQ - AP = y_2 - y_1. \end{aligned}$$

Изъ прямоугольнаго треугольника BAC выводимъ:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Слѣдовательно разстояніе AB между двумя точками A и B , которое мы обозначали черезъ d , будетъ:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (41).$$

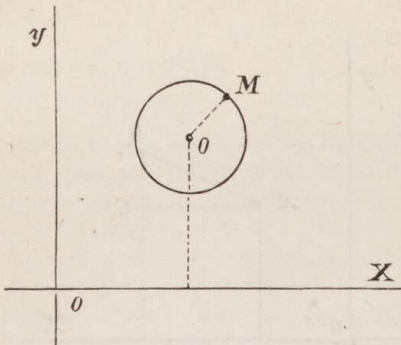
Перейдемъ теперь къ уравненію круга:

Извѣстно, что разстояніе всѣхъ точекъ круга до центра одинаково и равно радіусу круга.

Пусть r радіусъ круга и пусть a и b координаты центра круга при данныхъ осяхъ ox , oy (фиг. 12).

Возьмемъ какую нибудь точку M на кругѣ и напи-

шемъ, что разстояніе отъ этой точки до центра равно радіусу r .



Фиг. 12.

Примѣняя предыдущую формулу и обозначая координаты точки M черезъ x и y , найдемъ:

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Это и будетъ уравненіе круга, потому-что координаты всякой точки круга будутъ удовлетворять это уравненіе. Возводя обѣ части въ квадратъ можемъ еще написать:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

или:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = r^2. \quad . \quad . \quad (42).$$

И такъ кругъ изображается уравненіемъ 2-й степени, но такимъ, чтобы оно всегда могло привести къ виду (42).

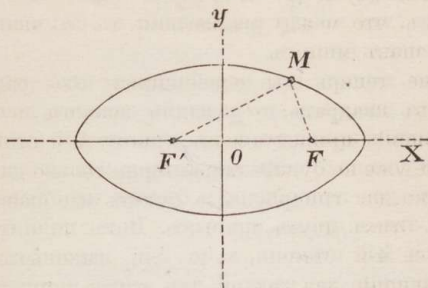
Въ частномъ случаѣ, если центръ круга совпадаетъ съ началомъ координатъ то $a = b = 0$. Тогда уравненіе круга приметъ видъ:

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

56. Не всегда можно воспользоваться свойствомъ, служащимъ опредѣленіемъ данной кривой. Пояснимъ это примѣромъ.

Найдемъ уравненіе эллипса.

Извѣстно, что эллипсомъ называется такая кривая, сумма разстояній всякой точки которой до двухъ опредѣленныхъ точекъ, называемыхъ фокусами, равна постоянной величинѣ: $MF + MF' = 2a$ (фиг. 13).



Фиг. 13.

Если бы мы выбрали какіе нибудь оси координатъ, въ данномъ случаѣ, напримѣръ, для оси ox , ось, совпадающую съ прямою FF' , для оси oy прямую перпендикулярную къ FF' и проходящую черезъ середину FF' , то не трудно выразить аналитически предъидущее свойство. Пусть (x, y) координаты какой-нибудь точки эллипса. Пусть $OF = OF' = c$ тогда координаты точки F будутъ: $x = c, y = 0$, координаты точки F' $x = -c, y = 0$. Выразимъ теперь, что:

$$MF + MF' = 2a$$

примѣняя формулу § 55, получимъ:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a. \quad (\alpha).$$

Если бы мы захотѣли выразить уравненіемъ гиперболу, которая опредѣляется тѣмъ, что разность разстояній какой-нибудь ея точки до фокусовъ равна постоянной величинѣ и если бы эта постоянная разность равнялась бы $2a$, а разстояніе между фокусами $2c$, то

выбравъ такія же оси координатъ, какъ и для эллипса, мы нашли бы уравненіе:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a. \quad (\beta).$$

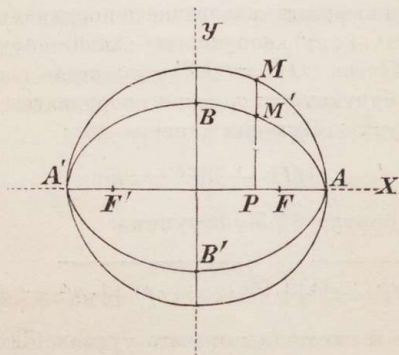
Уравненія (α) и (β) отличаются одно отъ другого лишь тѣмъ, что между радикалами въ (α) знакъ плюсь, а въ (β) знакъ минусъ.

Если же теперь мы освободимся отъ радикаловъ, возводя въ квадратъ, то различіе знаковъ исчезнетъ и оба уравненія приведутся къ одному 4-й степени. Это уравненіе уже не будетъ характерно только для эллипса или только для гиперболы, а будетъ изображать совокупность этихъ двухъ кривыхъ. Вотъ почему оно и получается 4-й степени, а не 2-й, каковымъ должно быть уравненіе для каждой изъ этихъ кривыхъ.

Нужно слѣдовательно взять другое какое либо свойство эллипса, которое дало бы уравненіе, характеризующее исключительно эту кривую.

Однимъ изъ этихъ свойствъ является слѣдующее:

Если на большой оси эллипса AA' , какъ діаметръ,



Фиг. 14.

опишемъ кругъ и если изъ какой нибудь точки этого круга (фиг. 14) опустимъ на ось AA' перпендикуляръ,

пересекающій эллипсъ въ M' то всегда будемъ имѣть

$$\frac{M'P}{MP} = \frac{OB}{OA}.$$

Пусть полуось OA эллипса $= a$, полуось $OB = b$, тогда:

$$M'P = \frac{b}{a} MP.$$

Обозначимъ координаты какой нибудь точки M' эллипса черезъ (x, y) координаты ей соотвѣтствующей точки на кругѣ будутъ (x, y') такъ-какъ точки M и M' имѣютъ одинаковыя абсциссы при выбранной на чертежѣ системѣ осей координатъ.

Но уравненіе круга AA' будетъ:

$$x^2 + y'^2 = a^2 \quad (\S 55)$$

откуда для всякой точки круга ея ордината будетъ:

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2}$$

а такъ какъ ордината соотвѣтствующей точки эллипса

$$y = y' \frac{b}{a}$$

то:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Возвышая въ квадратъ и упрощая, получимъ:

$$y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 = b^2$$

или раздѣливъ на b^2

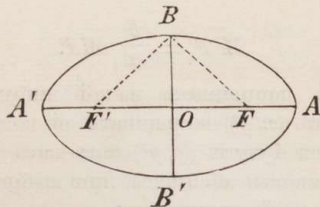
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Это и есть уравненіе эллипса.

Можно провѣрить удовлетворяетъ ли это уравненіе опредѣленію эллипса, т. е. что сумма разстояній каждой его точки до фокусовъ равна постоянной величинѣ.

Для того, чтобы провѣрить это, найдемъ сначала фокусы эллипса, оси котораго $2a$ и $2b$.

Пусть фокусы будут FF' . Такъ-какъ сумма разстояній всякой точки эллипса до фокусовъ одна эта же, то эта сумма должна быть одинакова, какъ для точки A , такъ и для A' , а также для B и B' .



Фиг. 15.

Слѣдовательно:

$$AF + AF' = A'F' + A'F (\alpha)$$

но:

$$AF' = AF + FF' \text{ и } A'F = A'F' + FF'$$

замѣняя въ (α) AF' и $A'F$ ихъ выраженіями, получимъ:

$$2AF + FF' = 2A'F' + FF'$$

откуда:

$$AF = A'F'.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что фокусы одинаково отстоятъ отъ концовъ большой оси эллипса.

Зная это, не трудно видѣть, что сумма разстояній точки эллипса до фокусовъ равна $2a$, т. е. равна большой оси. Дѣйствительно для точки A имѣемъ сумму:

$$AF + AF' = AF + AF + FF'.$$

Но $AF = A'F'$, какъ мы это доказали выше. Слѣдовательно, замѣняя одно AF черезъ $A'F'$ найдемъ:

$$AF + AF' = AF + A'F' + FF'$$

вторая часть, какъ это видно изъ чертежа, равна AA' т. е. $= 2a$. Такъ-какъ $AF = A'F'$, то ясно, что $OF = OF'$. Отсюда слѣдуетъ, что $BF = BF'$ и такъ-какъ сумма разстояній всякой точки эллипса до фокусовъ равна $2a$, то и для B будемъ имѣть:

$$BF + BF' = 2a$$

откуда, такъ-какъ $BF = BF'$

$$BF = BF' = a.$$

А потому, изъ прямоугольника треугольника BFO :

$$OF = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

И такъ если оси координатъ будутъ: ось ox — большая ось эллипса, ось oy малая ось, то координаты фокусовъ будутъ:

для F

$$\begin{aligned} \dots x &= \sqrt{a^2 - b^2} \\ y &= 0 \end{aligned}$$

для F'

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt{a^2 - b^2} \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Возьмемъ теперь какую нибудь точку на эллипсѣ если абсцисса этой точки x , то на основаніи уравненія (44) эллипса, которое мы вывели выше, ордината этой точки будетъ

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Если теперь мы выразимъ разстоянія этой точки, координаты которой

$$x = x \text{ и } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

до точекъ F и F' координаты которыхъ мы выразили выше, и если возьмемъ затѣмъ сумму этихъ разстояній, то найдемъ дѣйствительно, что эта сумма $= 2a$

57. Подобнымъ же путемъ можно найти, что уравненіе гиперболы, при выборѣ осей координатъ такъ, чтобы ось абсциссъ проходила бы черезъ фокусы, а ось ординатъ была бы перпендикулярна къ срединѣ прямой фокусовъ, будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \dots (45)$$

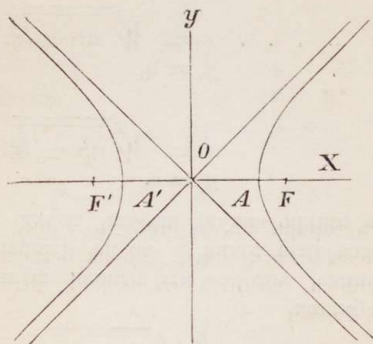
гдѣ

$$AA' = 2a$$

$$FF' = 2c$$

величина же b , называемая, по аналогіи съ эллипсомъ, малою полуосью, но не существующая геометрически на самомъ дѣлѣ, будетъ

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

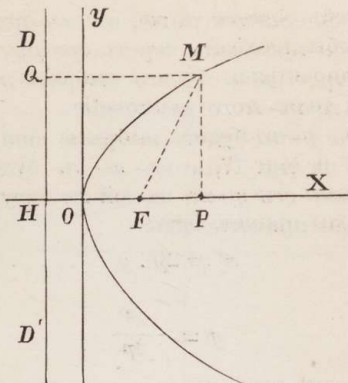


Фиг. 16.

Обѣ вѣтви гиперболы приближаются постепенно къ двумъ прямымъ, никогда съ ними не встрѣчаясь, или, какъ говорятъ, встрѣчаясь съ ними въ бесконечности. Такія прямыя называются асимптотами кривой.

58. Уравненіе параболы. Параболою называется кривая, точки которой одинаково отстоятъ отъ нѣкоторой неподвижной точки, называемой фокусомъ и неподвижной прямой, называемой директрисою. Уравненіе параболы легко составить по этому опредѣленію. За ось абсциссъ возьмемъ перпендикуляръ, опущенный изъ фокуса F (фиг. 17) на директрису, а за ось ординатъ, перпендикуляръ къ Ox , проходящій черезъ середину разстоянія фокуса до директрисы. Обозначимъ черезъ p разстояніе фокуса F до директрисы DD' .

Возьмемъ какую нибудь точку на параболѣ M , координаты которой x и y .



Фиг. 17.

Изъ чертежа имѣемъ, такъ какъ:

$$OP = x \text{ и } MP = y$$

$$\overline{MF}^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2} \right)^2$$

и

$$MQ = x + \frac{p}{2}$$

Но по опредѣленію параболы

$$MF = MQ$$

слѣдовательно:

$$\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2} \right)^2$$

что по упрощеніи дасть:

$$y^2 = 2px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Это и есть уравненіе параболы въ самомъ простомъ видѣ.

Уравненіе параболы встрѣчается часто въ видѣ:

$$y^2 = a^2 + bx \quad (47)$$

Такое уравненіе получится тогда, когда оси координатъ будутъ выбраны нѣсколько иначе, чѣмъ выше, а именно:

Ось абсциссъ остается та же, но ось ординатъ, вмѣсто того, чтобы проходить черезъ средину разстоянія фокуса до директрисы, будетъ выбрана въ какой нибудь другой точкѣ этого разстоянія.

Если за ось y —въ будетъ выбрана линія служащая осью x —въ на фиг. 17, а ось x —въ будетъ то, что было взято, какъ ось y —въ на той же фигурѣ, то уравненіе параболы приметъ видъ:

$$x^2 = 2p \cdot y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

или

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

Если же, кромѣ того, новая ось x —въ не будетъ проходить черезъ средину разстоянія фокусовъ до директрисы, а черезъ какую нибудь другую точку этого разстоянія, то уравненіе приметъ видъ:

$$y = a + \frac{x^2}{b}$$

Болѣе общій видъ уравненія параболы будетъ:

$$y = a + \frac{b}{h} x + \frac{c}{k^2} x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

гдѣ a , b , c , h и k нѣкоторыя постоянныя величины. Отчего такія уравненія называются параболическими, а функціи такого вида называются параболическими функціями.

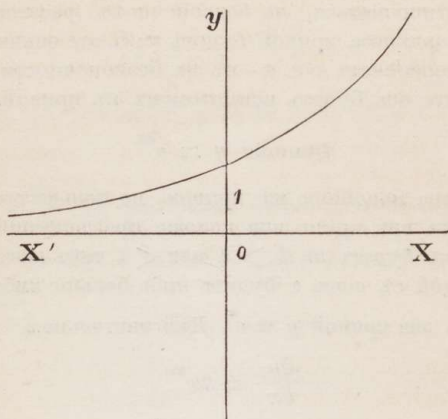
Перейдемъ теперь къ графическому изслѣдованію двухъ функцій, съ которыми намъ придется имѣть дѣло въ электро-техникѣ.

59. Функція $y = e^x$

Выберемъ двѣ оси координаты Ox и Oy и найдемъ кривую или, какъ говорятъ, графикъ предъидущей функціи.

Мы видимъ во 1-хъ, что для всѣхъ значеній x отъ

— ∞ до $+\infty$ e^x будетъ положительною величиною, иначе говоря, ординаты кривой будутъ всегда положи-



Фиг. 18.

тельны и вся кривая слѣдовательно будетъ помѣщаться надъ осью Oxx' , такъ какъ:

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

то для всѣхъ значеній x —въ положительныхъ, т. е. отъ 0 до $+\infty$ $\frac{dy}{dx}$ будетъ положительною величиною, а потому функція y будетъ непрерывно расти.

Если въ выраженіи функціи

$$y = e^x$$

замѣнимъ x отрицательною величиною $-x'$, то получимъ:

$$y = e^{-x'} = \frac{1}{e^{x'}}$$

отсюда видно, что, по мѣрѣ того, какъ x' будетъ увеличиваться отъ 0 до ∞ , y будетъ уменьшаться отъ 1 до 0. Это показываетъ, что во 1-хъ, кривая пересѣчетъ

ось y —въ въ точкѣ ордината которой $= 1$, а во 2-хъ, по мѣрѣ того, какъ мы будемъ увеличивать ординаты на отрицательной сторонѣ оси x —въ, ординаты кривой будутъ уменьшаться, на безконечномъ разстояніи по оси Ox' ордината кривой будетъ $= 0$, это значить, что кривая пересѣчетъ ось x —въ на безконечности, иначе говоря, эта ось будетъ асимптомомъ къ кривой.

$$\text{функція } y = e^{kx}$$

изобразится подобною же кривою, но только тутъ кривая будетъ или круче или положе предыдущей, смотря потому будетъ ли $k > 1$ или < 1 , такъ какъ уголъ касательной съ осью x будетъ либо больше либо меньше, чѣмъ для кривой $y = e^x$. Дѣйствительно.

$$\frac{dy}{dx} = ke^{kx}$$

а въ 1-мъ случаѣ

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

И очевидно, если $k > 1$

то

$$ke^{kx} > e^x$$

и если:

$$k < 1$$

то:

$$ke^{kx} < e^x$$

60. Функція $y = \sin x$.

Мы видимъ во-первыхъ, что при $x = 0$, $y = 0$, это значить, что кривая изображающая эту функцію пройдетъ черезъ начало координатъ.

Во-вторыхъ, если мы возьмемъ производную и приравняемъ нулю, то найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = 0$$

значенія x , обращающія въ O $\cos x$, будутъ:

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{2} + \pi + \pi$$

и т. д.

вообще $\frac{dy}{dx}$ будетъ равно нулю для значеній $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, гдѣ k какое угодно цѣлое положительное число.

Если возьмемъ 2-ю производную, то:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$

Для $\frac{\pi}{2}$ эта производная будетъ отрицательною, такъ какъ $-\sin \frac{\pi}{2} = -1$, а потому $x = \frac{\pi}{2}$ соотвѣтствуетъ максимуму, замѣняя въ выраженіи функціи $y = \sin x$ x величиною $\frac{\pi}{2}$ найдемъ, что это максимумъ будетъ положительнымъ и $= 1$; для $x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin \frac{3\pi}{2} = +1$; ибо $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$. Значитъ $x = \frac{\pi}{2} + \pi$ соотвѣтствуетъ минимуму; вставляя его въ выраженіе функціи найдемъ:

$$y = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

Этотъ минимумъ слѣдовательно будетъ отрицательнымъ.

Далѣе для:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

найдемъ:

$$\frac{d^2y}{y^2} = -1$$

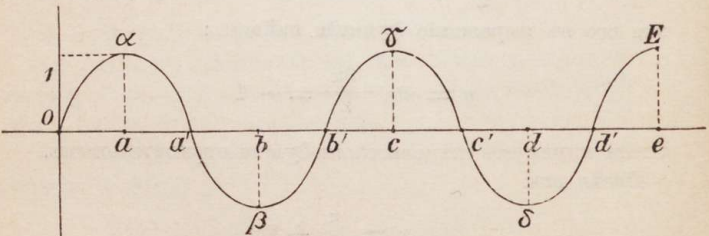
и

$$y = +1$$

т. е. это значеніе x будетъ снова соотвѣтствовать максимуму, который опять положительный и $= 1$ и т. д.

Словомъ всѣ значенія $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, для которыхъ k нечетное, будутъ соотвѣтствовать минимумамъ, а для которыхъ k четное, будутъ соотвѣтствовать максимумамъ. Всѣ максимумы положительны и всѣ равны 1-цѣ. Всѣ же минимумы отрицательны и равны тоже 1-цѣ.

Отсюда слѣдуетъ, что максимумъ съ минимумъ будетъ чередоваться черезъ π . По этому по оси Ox отложимъ величины $Oa = \frac{\pi}{2}$ (абсцисса соотвѣтствующая первому максимуму), затѣмъ величины $ab, bc, cd, ef, \dots = \pi$ и возставимъ ординаты $a\alpha, b\beta, c\gamma, d\delta, e\epsilon, f\zeta$ и т. д. поочередно положит. и отрицательныя и равныя 1-цѣ. Отъ каждаго максимума до слѣдующаго минимума функція будетъ убывать, переходя отъ положит. значенія къ отрицательному, точно также и отъ каждаго минимума до слѣдующаго максимума функція будетъ возрастать, переходя отъ отрицательнаго значенія къ положительному, слѣдовательно при каждомъ такомъ переходѣ она будетъ переходить черезъ O , иначе говоря. кривая при каждомъ такомъ переходѣ будетъ пересѣкать ось x —въ.



Фиг. 19.

Опредѣлимъ точки пересѣченія съ осью x —въ. Для этого приравняемъ функцію $y = \sin x$ нулю.

$$\sin x = 0$$

Это будетъ во 1—хъ:

$$\text{для } x = 0$$

во 2—хъ:

$$\text{для } x = \pi$$

въ 3—хъ:

$$\text{для } x = 2\pi = \pi + \pi$$

.

$$\text{для } x = k\pi$$

Значить точки пересѣченія кривой съ осью Ox получатся, откладывая отъ начала координатъ величины $Oa' = a'b' = b'c' = c'd' . . . = \pi$. Ясно, что точки $a' b' c' . . .$ получатся по срединѣ между $a b c d . . .$ эти точки $a' b' c' . . .$ и будутъ точками пересѣченія кривой съ осью Ox .

Отъ O до α кривая будетъ подниматься, затѣмъ отъ α до β опускаться, отъ β до γ подниматься и т. д.

Часть кривой между O и b' будетъ совершенно тождественна съ частью между b' и d' и вообще части кривой между точками абсциссы которыхъ разнятся на 2π будутъ совершенно тождественны между собою. Эта величина 2π называется періодомъ функціи, а сама функція называется періодическою, такъ какъ по измѣненіи независимой переменнѣй x на 2π , она снова принимаетъ прежній видъ.

Изслѣдованіемъ этой функціи, которую при изученіи электричества и магнетизма намъ придется разобрать подробнѣе, мы закончимъ отдѣлъ о графическомъ анализѣ, полагая, что всего изложеннаго будетъ достаточно для изученія вопросовъ, къ которымъ его придется примѣнять.

ОТДѢЛЪ IV.

Основы интегральнаго исчисленія.

ГЛАВА X.

Опредѣленія и основныя теоремы.

61. Предметъ интегральнаго исчисленія. Задача интегральнаго исчисленія заключается въ опредѣленіи функціи по ея производной, въ противоположность дифференціальному исчисленію, которое даетъ намъ способы отыскивать производныя и дифференціалы данныхъ функцій.

62. Теорема I. Пусть будетъ какая-нибудь функція $f(x)$, непрерывная въ предѣлахъ измѣненія независимой перемѣнной отъ x_0 до x_n и возрастающая по мѣрѣ того, какъ независимая перемѣнная будетъ увеличиваться отъ x_0 до x_n , переходя послѣдовательно черезъ промежуточные значенія:

$$x_0, x_1, x_2 \cdot \cdot \cdot x_{n-1}, x_n$$

такія, что:

$$x_0 < x_1 < x_2 \cdot \cdot \cdot < x_{n+1} < x_n$$

и что

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdot \cdot \cdot x_n - x_{n-1} = \Delta x.$$

Сумма:

$$f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \cdot (x_n - x_{n-1})$$

будетъ стремиться къ опредѣленному предѣлу по мѣрѣ увеличенія до безконечности числа промежуточныхъ значеній перемѣнной $x_1, x_2, x_3 \dots$

$$\begin{aligned} \text{Такъ какъ } x_1 - x_0 &= x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots \\ &= x_n - x_{n-1} = \Delta x \end{aligned}$$

то слѣдовательно нужно доказать, что сумма:

$$f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x$$

будетъ стремиться къ опредѣленному предѣлу, какъ бы ни было велико число промежуточныхъ значеній $x_1, x_2, x_3, \dots$ взятыхъ между x_0 и x_n и какъ бы слѣдовательно ни была мала разность Δx между двумя смежными изъ вышеупомянутыхъ промежуточныхъ значеній. Замѣтимъ, что:

$$\Delta x = \frac{x_n - x_0}{n}$$

или

$$n \cdot \Delta x = x_n - x_0$$

и что, такъ какъ функція ($f(x)$) возрастаетъ по мѣрѣ увеличенія перемѣнной x , то, принимая во вниманіе условіе:

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n$$

будемъ имѣть:

$$f(x_0) < f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(x_n).$$

Изъ этого неравенства слѣдуетъ, что сумма:

$$\begin{aligned} f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x &= \Delta x [f(x_0) + \\ &+ f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] \end{aligned}$$

будетъ больше, чѣмъ:

$$\Delta x [f(x_0) + f(x_0) + \dots + f(x_0)] = n \cdot \Delta x \cdot f(x_0),$$

такъ какъ всѣ члены этой суммы будутъ меньше,

чѣмъ члены предъидущей суммы; точно также легко видѣть, что та же сумма будетъ меньше, чѣмъ:

$$\Delta x [f(x_n) + f(x_n) + \dots + f(x_n)] = n \cdot \Delta x \cdot f(x_n).$$

Но $n \cdot \Delta x = x_n - x_0$, слѣдовательно сумма:

$$f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x$$

будетъ заключаться между двумя вполне опредѣленными предѣлами:

$$(x_n - x_0) f(x_0) \text{ и } (x_n - x_0) f(x_n).$$

Предположимъ теперь, что мы будемъ увеличивать число промежуточныхъ значеній переменнѣй x между крайними предѣлами x_0 и x_n слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ каждыя два смежныя промежуточные значенія, какъ x_0 и x_1 или x_1 и $x_2 \dots$ и между ними будемъ вводить опредѣленное число промежуточныхъ значеній, рассматривая x_0 и x_1 или x_1 и x_2 и т. д., какъ крайніе предѣлы. Тогда мы точно также докажемъ, что сумма:

$$\Delta'x [f(x_0) + f(x'_1) + f(x'_2) + \dots + f(x_1)]$$

будетъ меньше, чѣмъ $(x_1 - x_0) f(x_1)$ точно также и сумма:

$$\Delta'x [f(x_1) + f(x'_1) + f(x''_2) + \dots + f(x_2)]$$

будетъ меньше, чѣмъ $(x_2 - x_1) f(x_2)$ и т. д., гдѣ $x'_1, x'_2 \dots x'_{n-1}$ и $x''_1, x''_2, x''_3 \dots x''_{n-1}$ промежуточные значенія, вставленныя между предѣлами $x_1 - x_0$ и $x_2 - x_1$, а $\Delta'x$ разность между двумя новыми промежуточными значеніями.

Точно также каждая изъ вышеупомянутыхъ суммъ будетъ больше, чѣмъ

$$(x_1 - x_0) f(x_0)$$

$$(x_2 - x_1) f(x_1)$$

$$(x_3 - x_2) f(x_2)$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Изъ этого слѣдуетъ, что если мы между первоначальными промежуточными значеніями $(x_0 \ x_1) (x_1 \ x_2) \dots (x_{n-1} \ x_n)$ введемъ по n новыхъ промежуточныхъ значеній, то суммы, соотвѣтствующія этимъ новымъ промежуточнымъ значеніямъ будутъ больше соотвѣственно выраженій:

$$(x_1 - x_0) f(x_0), (x_2 - x_1) f(x_1), (x_3 - x_2) f(x_2) \dots (x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

и меньше выраженій:

$$(x_1 - x_0) f(x_1), (x_2 - x_1) f(x_2), \dots (x_n - x_{n-1}) f(x_n)$$

Вся сумма этихъ суммъ будетъ вида:

$$\Sigma f(x) \cdot \Delta'x$$

гдѣ $\Delta'x$ будетъ уже не $\frac{x_n - x_0}{n}$, а $\frac{(x_n - x_0)}{n^2}$, такъ какъ

мы ввели между каждыми 2-мя смежными значеніями, каковы $(x_1 \ x_0) (x_2 \ x_1)$ и т. д. $n - 1$ новыхъ промежуточныхъ значеній, и гдѣ слагаемыми будутъ:

$f(x_0), f(x'_1) \dots f(x_1), (f(x''_1) \dots f(x_2) \dots$ и т. д.

Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что новая сумма $\Sigma f(x) \cdot \Delta'x$ происшедшая отъ увеличенія промежуточныхъ значеній между x_0 и x_n еще въ n разъ будетъ больше, чѣмъ

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

и меньше, чѣмъ:

$$f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_n)(x_n - x_{n-1})$$

или, иначе, больше, чѣмъ

$$\Delta x \cdot [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]$$

и меньше, чѣмъ

$$\Delta x [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

Но разность между этими двумя суммами будетъ:

$$\Delta x \cdot [f(x_n) - f(x_0)].$$

Эта разность по мѣрѣ увеличенія числа промежуточныхъ значеній будетъ стремиться къ нулю, такъ какъ тогда Δx будетъ приближаться къ нулю, множитель же $f(x_n) - f(x_0)$ есть конечная, вполне опредѣленная величина.

И такъ сумма:

$$\Delta x \cdot f(x_0) + \Delta x \cdot f(x_1) + \dots + \Delta x \cdot f(x_{n-1})$$

или, какъ мы ее обозначимъ символически

$$\Sigma f(x) \cdot \Delta x$$

во-1-хъ заключается между двумя опредѣленными предѣлами:

$$(x_n - x_0) f(x_0) \text{ и } (x_n - x_0) f(x_n)$$

какъ бы велико ни было число промежуточныхъ значеній $x_1, x_2, x_3 \dots x_{n-1}$,

во-2-хъ эта сумма будетъ всегда заключаться между двумя суммами, которыя въ предѣлѣ будутъ равны одна другой. Изъ этого слѣдуетъ, что сумма

$$\Sigma f(x) \cdot \Delta x = f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \Delta x$$

будетъ стремиться къ опредѣленному предѣлу по мѣрѣ того, какъ число промежуточныхъ значеній независимой переменнѣй, заключающихся между двумя опредѣленными значеніями x_0 и x_n .

Этотъ предѣлъ называется интеграломъ функціи $f(x)$, опредѣленнымъ значеніями x_0 и x_n .

Изъ этого слѣдуетъ, что интегралы функціи $f(x)$ между предѣлами независимой переменнѣй x_0 и x_n будутъ сумма вида:

$$f(x_0) \cdot dx + f(x_1) \cdot dx + f(x_2) \cdot dx + \dots + f(x_{n-1}) \cdot dx$$

гдѣ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ будутъ всевозможныя промежуточные значенія переменнѣй x , взятая между x_0 и x_n и разнящіяся одно отъ другого на бесконечно малую величину dx . Эту сумму символически можно обозначить, согласно предъидущему:

$$\sum_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot dx$$

гдѣ значки x_0 и x_n показываютъ, что въ $f(x)$ нужно замѣнить x послѣдовательно всевозможными значеніями, заключающимися между x_0 и x_n и разнящимися другъ отъ друга на бесконечно малую величину dx .

Въ высшей математикѣ принято другое символическое обозначеніе интеграла, а именно:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot dx$$

Во всемъ, что нами было сказано, мы предположили, что функція $f(x)$ непрерывно возрастаетъ между предѣлами x_0 и x_n . Доказательство будетъ вѣрно и такое же; если предположить наоборотъ, что $f(x)$ между этими же предѣлами непрерывно убываетъ.

Если же между предѣлами x_0 и x_n функція то возрастаетъ, то убываетъ, то мы раздѣлимъ промежутокъ между x_0 и x_n на такіе промежутки (x_0, x_i) , $(x_i, x_k) \dots (x_m, x_n)$, между которыми $f(x)$ будетъ либо только непрерывно возрастать, либо только непрерывно убывать и тогда, какъ раньше, докажемъ, что каждая сумма:

$$\sum_{x_0}^{x_i} f(x) \cdot dx + \sum_{x_i}^{x_k} f(x) \cdot dx + \dots + \sum_{x_m}^{x_n} f(x) \cdot dx$$

будетъ имѣть опредѣленный предѣлъ

$$\int_{x_0}^{x_i} f(x) \cdot dx, \int_{x_i}^{x_k} f(x) \cdot dx, \int_{x_m}^{x_n} f(x) \cdot dx$$

Слѣдовательно и общая сумма

$$\sum_{x_0}^x f(x) \cdot dx$$

будетъ имѣть вполне опредѣленный предѣлъ, который и будетъ интеграломъ данной функции въ предѣлахъ отъ x_0 до x_n :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot dx$$

Интеграль функции $f(x)$, взятый между двумя опредѣленными значеніями независимой переменнѣй x_0 и x_n называется опредѣленнымъ интеграломъ.

Предположимъ, что одно изъ предѣльныхъ значеній, высшее на примѣръ, независимой переменнѣй измѣняется, тогда и сумма

$$\int_{x_0}^x f(x) \cdot dx$$

будетъ мѣняться въ зависимости отъ верхняго предѣла. Отсюда слѣдуетъ, что тогда и интеграль функции $f(x)$ будетъ тоже функциею этого верхняго предѣла, т. е. будетъ функциею независимой переменнѣй x .

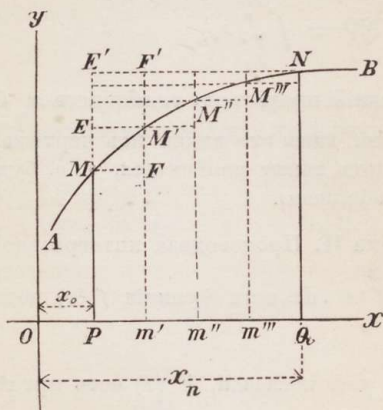
63. Геометрическое значеніе интеграла. Пусть будетъ дана функция:

$$y = F(x)$$

которая графически изобразится (§ 51) кривою AB (фиг. 20). Посмотримъ, чему будетъ равняться площадь, ограничиваемая этою кривою, осью x -въ и двумя ординатами PM и QN , соотвѣтствующими абсциссамъ x_0 и x_n . Раздѣлимъ промежутокъ PQ на какое

нибудь число равныхъ частей и возставимъ ординаты въ полученныхъ точкахъ. Тогда площадь $PMNQ$ раздѣлится на столько же криволинейныхъ трапецій

$РММ'm', m'M'M''m''$ и т. д. Проведя через точки $М, М', М'' \dots N$ параллельныя оси ox , мы образуемъ рядъ прямоугольниковъ однихъ меньше, а другихъ больше каждой трапеціи. Слѣдовательно разсматриваемая площадь $РМNQ$ будетъ заключаться между суммою меньшихъ и суммою большихъ прямоугольниковъ. Но разность между этими двумя суммами равна прямоугольнику $ME'F'F'$, какъ это не трудно усмотрѣть изъ чертежа. Основаніе этого прямоугольника ME' величина постоянная, равная разности двухъ крайнихъ ординатъ $QN - РМ$, вы-



Фиг. 20.

сота же его MF будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ на большее число трапецій мы раздѣлимъ разсматриваемую площадь. Въ предѣлѣ, когда число этихъ послѣднихъ будетъ очень велико, высота MF будетъ безконечно малою, а слѣдовательно и площадь прямоугольника $ME'F'F'$ будетъ также безконечно малою величиною, Изъ этого слѣдуетъ, что сумма большихъ и сумма малыхъ прямоугольниковъ будутъ стремиться къ одному и тому же предѣлу, который и будетъ разсматриваемая площадь $РМNQ$, такъ какъ эта послѣдняя, какъ мы показали выше, всегда будетъ заключаться между этими двумя суммами прямоугольниковъ. Если

мы обозначимъ черезъ y одну изъ ординатъ $M'm$ кривой AB , а черезъ Δx одинъ изъ равныхъ отрѣзковъ mm' , то площадь одного изъ прямоугольниковъ, большихъ или малыхъ, выразится произведеніемъ:

$$y \cdot \Delta x.$$

Площадь $PMNQ$ будетъ слѣдовательно предѣломъ суммы

$$\Sigma y \cdot \Delta x$$

иначе говоря,

$$\text{пл. } PMNQ = \int_{x_0}^x y \cdot dx.$$

Если верхній предѣлъ, т. е. абсцисса x_n будетъ измѣняться, то, какъ это видно изъ чертежа, площадь $PMNQ$ будетъ также измѣняться, т. е. будетъ функциею этой абсциссы.

64. Теорема II. Производная интегральной функціи

$F(x) = \int_{x_0}^x f(x) \cdot dx$ есть функція $f(x)$ подъ знакомъ интеграла.

Какъ мы уже показали, $F(x)$ есть предѣлъ суммы $f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \Delta x + \dots + f(x_{n-2}) \cdot \Delta x + f(x_{n-1}) \Delta x$ такъ какъ крайній предѣлъ здѣсь x . Если мы увеличимъ этотъ послѣдній на Δx , то крайнимъ предѣломъ будетъ уже не x а $x + \Delta x$ и предыдущая сумма станетъ:

$$f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \Delta x + \dots + f(x_{n-2}) \Delta x + f(x_{n-1}) \Delta x + \\ + f(x) \cdot \Delta x.$$

Иначе говоря, сумма увеличится противъ первоначальной на $f(x) \cdot \Delta x$. Это будетъ вѣрно, какъ бы велико ни было число промежуточныхъ членовъ суммы и какъ бы, слѣдовательно, ни было мало Δx .

Значить, переходя къ предѣлу, можемъ сказать, что если x мы увеличимъ на dx , то сумма

$$E'(x + dx) = \int_0^{x+dx} f(x) \cdot dx$$

будетъ больше суммы

$$E(x) = \int_0^x f(x) \cdot dx.$$

На величину $f(x) \cdot dx$.

Слѣдовательно:

$$E(x + dx) - E(x) = f(x) \cdot dx.$$

Но, такъ какъ функція $F(x)$ предполагается непрерывною, то бесконечно малому приращенію dx независимой переменнѣй x будетъ соответствовать бесконечно малое приращеніе самой функціи, т. е.:

$$F(x + dx) - F(x) = dF$$

Слѣдовательно:

$$dF = f(x) \cdot dx$$

Откуда:

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

Но $\frac{dF}{dx}$ и есть производная функція $F'(x)$, и т. д. Однако, если $f(x)$ есть производная функціи $F(x)$, то она также будетъ производною и функціи $F(x) + C$, гдѣ C какая угодно постоянная величина, такъ какъ двѣ функціи, отличающіяся на постоянную величину, имѣютъ одну и ту же производную (§ 18). Отсюда слѣдуетъ, что, если интегральной функціи:

$$\int f(x) \cdot dx$$

соотвѣтствуетъ функція ~~$F(x)$~~ , то такими же функціями будутъ и функціи $F(x) + C$, гдѣ величинѣ C можно

дать любое независящее отъ переменнѣй x значеніе. Вотъ почему и говорятъ, что $F(x)$ есть частная интегральная функція интеграла $\int f(x) \cdot dx$, общая же интегральная функція будетъ:

$$F(x) + C$$

что и выражаютъ символически:

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + C.$$

Подобная неопредѣленность получится всегда въ тѣхъ случаяхъ, когда не обозначены предѣлы интеграла. Постоянная C опредѣлится, если извѣстенъ нижній предѣлъ интеграла. Такъ, если имѣемъ:

$$\int_a^x f(x) \cdot dx = F(x) + C \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

то легко опредѣлить C . Дѣйствительно, легко видѣть, принимая во вниманіе данное нами опредѣленіе интеграла (§ 62), что:

$$\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$$

Дѣйствительно, изъ (α) , получимъ:

$$\int_a^a f(x) \cdot dx = F(a) + C$$

Слѣдовательно:

$$F(a) + C = 0$$

а потому:

$$C = -F(a)$$

Вотъ почему, когда у знака интеграла не указаны предѣлы, такой интегралъ называется неопредѣленнымъ.

65. Теорема III.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot dx = - \int_{x_n}^{x_0} f(x) \cdot dx. \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Дѣйствительно:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot dx = \lim \left\{ (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \right. \\ \left. + \dots + (x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \right\}$$

а

$$\int_{x_n}^{x_0} f(x) \cdot dx = \lim \left\{ (x_{n-1} - x_n) f(x_n) + \right. \\ \left. + (x_{n-2} - x_{n-1}) f(x_{n-1}) + \dots + (x_0 - x_1) f(x_1) \right\}$$

Легко видѣть, что оба эти предѣла равны, но противоположны по знаку.

ГЛАВА XI.

Основные правила интегрированія функцій.

66. На основаніи теоремы II (§ 64) интеграломъ будетъ такая функція, производная которой будетъ функціею подъ знакомъ интеграла. Поэтому, зная дифференцированіе функцій, легко опредѣлить соотвѣтствующие интегралы.

Такъ, зная, что:

$$d(x) = dx$$

легко найти, что

$$\int dx = x + C \dots \dots (51)$$

гдѣ C произвольная постоянная (§ 64).

Точно также

$$d(x^{m+1}) = (m+1) x^m dx; \int x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (52)$$

$$d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \dots \dots (53)$$

$$d(\lg x) = \frac{\lg e}{x} \cdot dx; \int \lg e \frac{dx}{x} = \lg x + C. \quad (54)$$

$$d(\lg_e x) = \frac{dx}{x}; \int \frac{dx}{x} = \lg_e x + C \quad (55)$$

$$d(a^x) = \lg_e a \cdot a^x \cdot dx; \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\lg_e a} + C. \quad (56)$$

$$d(e^x) = e^x \cdot dx; \int e^x \cdot dx = e^x + C. \quad (57)$$

$$d(\sin x) = \cos x \cdot dx; \int \cos x \cdot dx = \sin x + C. \quad (58)$$

$$d(\cos x) = -\sin x \cdot dx; \int \sin x \cdot dx = -\cos x + C \quad (59)$$

$$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}; \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad (60)$$

$$d(\operatorname{cotg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}; \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C \quad (61)$$

$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad (62)$$

$$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C \quad (63)$$

$$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}; \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C. \quad (64)$$

$$d(\operatorname{arccotg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}; \int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arccotg} x + C \quad (65)$$

Эти основные интегралы слѣдуетъ знать наизусть, какъ таблицу умноженія напримѣръ. Для нахождения интеграловъ другихъ функцій, существуютъ правила, которыя мы теперь и изложимъ.

67. Интеграль алгебраической суммы нѣсколькихъ

Слѣдовательно:

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \lg_e x - x^{-1} + C + C'$$

или упрощая и сливая постоянныя въ одну,

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \lg_e x - \frac{1}{x} + C.$$

2)

$$\int (\sin x + \cos x) dx$$

разлагая, получимъ:

$$\int (\sin x + \cos x) dx = \int \sin x \cdot dx + \int \cos \cdot dx$$

но

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C \text{ (§ 66, форм. 59)}$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C \text{ (§ 66, форм. 58),}$$

а потому:

$$\int (\sin x + \cos x) dx = \sin x - \cos x + C'.$$

68. Постоянный множитель всегда можно ввести подъ знакъ интеграла, или вывести изъ-подъ этого послѣдняго, не измѣняя результата.

Пусть v нѣкоторая функція отъ x и a постоянный множитель.

Имѣемъ (§ 20, примѣчаніе):

$$d(a \cdot v) = a \cdot dv.$$

Отсюда

$$av = \int a \cdot dv.$$

Но $v = \int dv$, значить:

$$(66) \quad a \int dv = \int a \cdot dv \text{ и т. д.}$$

Примѣръ.

$$\int \frac{4}{x} \cdot dx = 4 \int \frac{dx}{x}.$$

Но (§ 66, форм. 55):

$$\int \frac{dx}{x} = \lg_e x + C.$$

Слѣдовательно:

$$\int \frac{4}{x} \cdot dx = 4 \lg_e x + 4C = 4 \lg_e x + C'.$$

Это правило иногда помогаетъ быстро отыскивать интегралы нѣкоторыхъ функцій. Покажемъ это на примѣрѣ:

Найти $\int x^5 \cdot dx$

Извѣстно, что $d(x^6) = 6x^5$.

Поставимъ множитель 6 подъ $\int$, а передъ знакомъ интеграла множитель $\frac{1}{6}$, отъ этого общій результатъ не измѣнится, такъ какъ мы умножили и раздѣлили интегралъ на одно и то же число, слѣдовательно:

$$\int x^5 \cdot dx = \frac{1}{6} \int 6x^5 \cdot dx.$$

но

$$6x^5 \cdot dx = d(x^6),$$

а потому

$$\int x^5 \cdot dx = \frac{1}{6} \int d(x^6) = \frac{x^6}{6}.$$

Вотъ еще другой способъ для вычисленія интегральныхъ функцій.

69. Способъ замѣщенія. Этотъ способъ состоитъ въ замѣнѣ подъ знакомъ интеграла независимой перемѣнной другою перемѣнною, связанною съ первою такъ-

что выражение подъ интеграломъ принимаетъ видъ легко интегрируемой функціи.

Выяснимъ этотъ способъ на нѣсколькихъ примѣрахъ :

1) Найти интегралъ $\int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx.$

Полагаемъ:

$$x = av$$

гдѣ v будетъ новая переменная.

Тогда

$$dx = a \cdot dv$$

$$x^2 = a^2 v^2$$

и данный интегралъ приметъ видъ:

$$\int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - av^2}} \cdot a dv = a^2 \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Но (§ 66, форм. 62)

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \arcsin v + C.$$

Слѣдовательно:

$$a^2 \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = a^2 \cdot \arcsin v + C'.$$

Вставляя теперь вмѣсто v его значеніе въ зависимости отъ x , а именно $\frac{x}{a}$, получимъ:

$$a^2 \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C'.$$

2) Найти $\int \frac{a}{1 + a^2 x^2} \cdot dx.$

Полагаемъ:

$$x = \frac{v}{a},$$

отсюда:

$$dx = \frac{dv}{a} \text{ и } x^2 = \frac{v^2}{a^2}.$$

Замѣняя x и dx ихъ значеніями въ выраженіи интеграла, найдемъ:

$$\int \frac{a}{1 + a^2 \frac{v^2}{a^2}} \cdot \frac{dv}{a} = \int \frac{dv}{1 + v^2}.$$

Но (§ 66 форм. 64) $\int \frac{dv}{1 + v^2} = \text{arc tg } v + C,$

вставляя вмѣсто v , ax , найдемъ окончательно:

$$\int \frac{a}{1 + a^2 x^2} \cdot dx = \text{arc tg } ax + C.$$

3) $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}.$

Замѣчаемъ, что $x \cdot dx = \frac{1}{2} d(x^2).$

Полагая, слѣдовательно

$$x^2 = v$$

найдемъ:

$$x dv = \frac{1}{2} dv.$$

и

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \int \frac{\frac{1}{2} dv}{\sqrt{a^4 - v^2}}.$$

Полагаемъ теперь:

$$v = a^2 z$$

тогда

$$dv = a^2 \cdot dz$$

и

$$v^2 = a^4 \cdot z^2$$

и слѣдовательно:

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{2} dv}{\sqrt{a^4 - v^2}} &= \int \frac{\frac{1}{2} a^2 dz}{\sqrt{a^4 - a^4 z^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin z + C \quad (\S 66). \end{aligned}$$

Замѣняя z его значеніемъ въ v , найдемъ:

$$\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{v}{a^2} + C$$

и замѣняя наконецъ v черезъ x^2 , получимъ окончательно:

$$\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{a^2} + C.$$

70. Интегрированіе по частямъ. Раньше мы видѣли (§ 20), что

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Отсюда выводимъ:

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Переходя къ интеграламъ, получимъ:

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

но

$$\int d(u \cdot v) = u \cdot v.$$

Слѣдовательно:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \quad . \quad . \quad . \quad (67).$$

Это соотношеніе даетъ возможность въ нѣкоторыхъ

случаяхъ сводить данный интеграль къ легко интегрируемымъ функціямъ. Покажемъ это на примѣрахъ:

$$1) \int \lg x \cdot dx$$

полагаемъ:

$$u = \lg x$$

$$dv = dx.$$

Откуда:

$$du = \frac{dx}{x}$$

$$v = x.$$

Слѣдовательно:

$$\int \lg x \cdot dx = \int u \cdot dv.$$

Но по формулѣ (67):

$$\begin{aligned} \int u \cdot dv &= u \cdot v - \int v \cdot du = \lg x \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = \\ &= x \cdot \lg x - \int dx = x \cdot \lg x - x + C. \end{aligned}$$

$$2) \int \arctg x \cdot dx.$$

Полагаемъ:

$$u = \arctg x$$

$$dv = dx$$

откуда

$$du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$v = x.$$

$$\begin{aligned} \int \arctg x \cdot dx &= \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du = \arctg x \cdot x - \\ &- \int \frac{x \cdot dx}{1+x^2} \dots \dots \dots (a) \end{aligned}$$

остается вычислить

$$\int \frac{x \cdot dx}{1+x^2}.$$

Замѣчая, что

$$x \cdot dx = \frac{1}{2} d(x^2)$$

полагаемъ

$$z = x^2$$

откуда

$$x \cdot dx = \frac{1}{2} dz$$

и слѣдовательно:

$$\int \frac{x \cdot dx}{1+x^2} = \int \frac{\frac{1}{2} dz}{1+z} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1+z}$$

Замѣчая далѣе, что:

$$d(1+z) = dz$$

полагаемъ

$$1+z = t$$

тогда

$$dz = dt,$$

а потому

$$\frac{1}{2} \int \frac{dz}{1+z} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \lg_e t. \quad (\S 66).$$

И такъ, вставляя вмѣсто t , $1+z$, а вмѣсто z , x^2 , найдемъ окончательно

$$\int \frac{x \cdot dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lg_e (1+x^2).$$

Вставляя это значеніе въ уравненіе (а), получимъ для искомага интеграла:

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \cdot dx = x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \lg_e (1+x^2) + C \quad (68).$$

ГЛАВА XII.

Интегрированіе наиупотребительнѣйшихъ функцій.

Предъидущія правила даютъ возможность при помощи нѣкоторыхъ вспомогательныхъ преобразованій интегрировать, если не всѣ, то по крайней мѣрѣ, чаще всего примѣняемыя функціи. Къ интегрированію такихъ функцій мы теперь и перейдемъ. Мы сначала рассмотримъ, такъ называемыя, раціональныя функціи, т. е. такія, въ которыя независимая переменная входитъ съ цѣлыми показателями (положительными или отрицательными). Затѣмъ перейдемъ къ наиболѣе встрѣчающимся на практикѣ ирраціональнымъ функціямъ, т. е. такимъ, въ которыя переменная входитъ съ дробными показателями и подъ радикалами. Въ концѣ же мы рассмотримъ нѣкоторыя логарифмическія, показательныя и тригонометрическія функціи, называемыя вообще трансцендентными функціями.

71. Интегрированіе раціональныхъ функцій. Возьмемъ сначала простѣйшую дифференціальную функцію:

$$1) \quad A \cdot x^m \cdot dx$$

гдѣ A постоянный коэффиціентъ.

Принимая во вниманіе § 68 и § 66, найдемъ:

$$(69) \quad \dots \int A \cdot x^m \cdot dx = A \int x^m dx = \frac{A}{m+1} \cdot x^{m+1} + C.$$

Примѣръ:

$$\int 8x^{-3} dx = 8 \int x^{-3} dx = \frac{8}{-2} \cdot x^{-2} + C = -4x^{-2} + C.$$

2) Если функція будетъ многочленъ вида:

$$Ax^m + Bx^n + Dx^p + \dots$$

то:

$$\int (Ax^m + Bx^n + Dx^p + \dots) \cdot dx = \\ = \int Ax^m \cdot dx + \int Bx^n \cdot dx + \int Dx^p \cdot dx + \dots \quad (70).$$

что сводится къ примѣру 1).

$$3) \quad \int (a + bx)^m \cdot dx.$$

Это выраженіе можно привести къ выраженію 2) развернувъ по формулѣ бинѳма Ньютона. Но можно поступить и иначе:

Положимъ:

$$a + bx = v$$

откуда

$$x = \frac{v - a}{b}$$

$$dx = \frac{dv}{b}.$$

Замѣщая подъ знакомъ интеграла получимъ:

$$\int (a + bx)^m \cdot dx = \int \frac{v^m}{b} \cdot dv = \\ = (\text{см. 1})) = \frac{1}{b} \cdot \frac{v^{m+1}}{m+1} + C.$$

Откуда, замѣняя v его значеніемъ:

$$\int a + bx)^m \cdot dx = \frac{1}{b} \frac{(a + bx)^{m+1}}{m+1} \dots \dots \dots (71).$$

Примѣръ:

$$\int (7 + 3x)^4 \cdot dx = \frac{(7 + 3x)^5}{15}$$

4)

$$\int \frac{a (x - b)^{m-1}}{n \cdot x^m} \cdot dx$$

выдѣляя постоянные множители и переводя x^m въ числитель, находимъ:

$$\frac{a}{n} \int x^{-m} (x-b)^{m-1} dx.$$

Развертывая $(x-b)^{m-1}$ по биному Ньютона и вводя x^m множителемъ во всѣ члены, приведемъ результатъ къ виду пункта 2):

Примѣръ:

$$\begin{aligned} & \int \frac{a (x-b)^3 dx}{n \cdot x^4} = \\ &= \frac{a}{n} \left(\int x^{-1} dx - 3b \int x^{-2} dx + 3b^2 \int x^{-3} dx \right. \\ & \quad \left. - b^3 \int x^{-4} dx \right). \\ &= \frac{a}{n} \left(\lg_e x + \frac{3b}{x} - \frac{3b^2}{2x^2} + \frac{b^3}{3x^3} \right) + C. \end{aligned}$$

$$5) \quad \int \frac{A dx}{bx-a}.$$

Замѣчая, что $d(bx) = b \cdot dx$, множимъ числителя подъ знакомъ интеграла на b и, чтобы ничего не измѣнить, дѣлимъ все выраженіе передъ знакомъ интеграла тоже на b (§ 68).

Тогда получимъ

$$\frac{1}{b} \int \frac{A \cdot b \cdot dx}{bx-a}$$

или

$$\frac{A}{b} \int \frac{b dx}{bx-a}$$

но

$$b dx = d(bx - a),$$

слѣдовательно:

$$\frac{A}{b} \int \frac{b dx}{bx-a} = \frac{A}{b} \lg_e (bx-a) + C.$$

И такъ

$$\int \frac{A dx}{bx - a} = \frac{A}{b} \lg_e (bx - a) + C \quad . \quad . \quad (72).$$

$$6) \quad \int \frac{(mx + n) dx}{ax^2 + bx + C}$$

Тутъ придется разсмотрѣть три случая:

а) Предположимъ, что уравненіе 2-й степени, которое получится, когда мы трехчленъ $ax^2 + bx + c$ приравняемъ нулю, имѣеть дѣйствительные корни (см. элем. алгебру Давидова). И пусть эти корни будутъ α и β . Тогда извѣстно, что:

$$ax^2 + bx + c$$

разлагается на два множителя, а именно:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Въ такомъ случаѣ выраженіе подъ знакомъ интеграла можно написать въ видѣ:

$$\frac{mx + n}{(x - \alpha)(x - \beta)}.$$

Получимъ:

$$\frac{mx + n}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

гдѣ A и B нѣкоторыя постоянныя, которыя мы теперь и опредѣлимъ.

Приводя къ одному знаменателю и упрощая, уравненіе (β) намъ даетъ:

$$mx + n = A(x - \beta) + B(x - \alpha) \quad . \quad . \quad (\gamma).$$

Это выраженіе вѣрно для всякаго значенія x , слѣдовательно оно должно быть удовлетворено въ частности и для $x = \alpha$ и $x = \beta$. Полагая $x = \alpha$, получимъ изъ (γ)

$$m\alpha + n = A(\alpha - \beta)$$

откуда

$$A = \frac{m\alpha + n}{\alpha - \beta}.$$

Полагая $x = \beta$, уравнение (γ) намъ дастъ:

$$m\beta + n = B (\beta - \alpha).$$

откуда

$$B = \frac{m\beta + n}{\beta - \alpha}.$$

A и B слѣдовательно будутъ опредѣлены. Но тогда, принимая во вниманіе ур. (α) и (β)

$$\begin{aligned} \int \frac{(mx + n) dx}{ax^2 + bx + c} &= \int \frac{(mx + n) dx}{a(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{1}{a} \int \frac{A dx}{x - \alpha} + \\ &+ \frac{1}{a} \int \frac{B dx}{x - \beta}. \\ &= \frac{A}{a} \int \frac{dx}{x - \alpha} + \frac{B}{a} \int \frac{dx}{x - \beta}. \\ &= \frac{A}{a} \lg_e (x - \alpha) + \frac{B}{a} \lg_e (x - \beta) \end{aligned}$$

и такъ

$$\int \frac{(mx + n) dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{a} \lg_e (x - \alpha) + \frac{B}{a} \lg_e (x - \beta) \quad (73).$$

Примѣръ:

$$\int \frac{(7x + 9) dx}{2x^2 + 4x - 30}$$

приравнивая $2x^2 + 4x - 30$ нулю, находимъ:

$$\alpha = 3; \beta = -5$$

а потому:

$$2x^2 + 4x - 30 = 2(x - 3)(x + 5).$$

Полагая:

$$\frac{7x + 9}{(x - 3)(x + 5)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 5}.$$

Найдемъ, подобно предъидущему:

$$A = \frac{15}{4} \quad B = \frac{13}{4}$$

а потому

$$\int \frac{(7x + 9) dx}{2x^2 + 4x - 30} = \frac{15}{8} \lg_e (x - 3) + \frac{13}{8} \lg_e (x + 5) + C.$$

б) Предположимъ теперь, что корни трехчлена $ax^2 + bx + c$ дѣйствительны и равны, т. е. $\alpha = \beta$.

Тогда:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$$

и искомый интеграль приметъ видъ:

$$\int \frac{(mx + n) dx}{a(x - \alpha)^2}.$$

Что можно проинтегрировать по способу замѣщенія дѣйствительно, положимъ:

$$x - \alpha = v$$

откуда

$$x = v - \alpha$$

$$dx = dv.$$

Замѣщая, найдемъ:

$$\begin{aligned} \int \frac{(mx + n) dx}{a(x - \alpha)^2} &= \int \frac{(mv + m\alpha + n) dv}{av^2} = \frac{m}{a} \int \frac{dv}{v} + \\ &+ \frac{m\alpha + n}{a} \int \frac{dv}{v^2} = \frac{m}{a} \lg_e v - \frac{m\alpha + n}{a} \frac{1}{v} + C. \end{aligned}$$

Замѣняя x вмѣсто v , получимъ окончательно:

$$\int \frac{(mx + n) dx}{a(x - \alpha)^2} = \frac{m}{a} \lg_e (x - \alpha) - \frac{m\alpha + n}{a} \frac{1}{x - \alpha} + C \quad (74).$$

Примѣръ:

$$\int \frac{(7x + 9) dx}{2x^2 - 20x + 50} = \frac{7}{2} \lg_e (x - 5) - 22 \frac{1}{x - 5} + C.$$

с) Возьмемъ теперь случай, когда корни α и β трехчлена $ax^2 + bx + c$ мнимые. Тогда трехчлены можно представить въ видѣ суммы двухъ квадратовъ (см. элем. алгебру Давидова).

$$a[(x - p)^2 + q^2].$$

Искомый интеграль сведется къ выраженію:

$$\int \frac{(mx + n) dx}{a[(x - p)^2 + q^2]}$$

Полагаемъ:

$$x - p = qv$$

откуда:

$$x = qv + p \text{ и } dx = qdv.$$

Замѣщая, найдемъ:

$$\int \frac{(mqv + mp + n) qdv}{aq^2 (v^2 + 1)} = \int \frac{mq^2 vdv}{aq^2 (v^2 + 1)} + \\ + \int \frac{(mp + n) qdv}{aq^2 (v^2 + 1)}$$

или упрощая:

$$\frac{m}{a} \int \frac{v dv}{v^2 + 1} + \frac{mp + n}{aq} \int \frac{dv}{v^2 + 1}$$

но

$$\int \frac{v dv}{v^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{2v dv}{v^2 + 1}$$

и замѣчая, что

$$2v dv = d(v^2),$$

найдемъ:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2v dv}{v^2 + 1} = \frac{1}{2} \lg_e (v^2 + 1)$$

$$\int \frac{dv}{v^2 + 1} (\S 66, \text{ форм. } 64) = \text{arc tg } v.$$

Слѣдовательно:

$$\int \frac{(mx + n) dx}{a[(x - p)^2 + q^2]} = \frac{m}{2a} \lg_e (v^2 + 1) + \frac{mp + n}{aq} \text{arctg } v + C \\ = \frac{m}{2a} \lg_e \left[\left(\frac{x - p}{q} \right)^2 + 1 \right] + \frac{mp + n}{aq} \text{arc tg } \frac{x - p}{q} + C \quad (75).$$

Примѣры:

$$1) \quad \int \frac{(7x + 9) dx}{4x^2 - 16x + 52} = \int \frac{(7x + 9) dx}{4[(x - 2)^2 + 3^2]} = \\ = \frac{7}{8} \lg_e \left[\frac{(x - 2)^2}{9} + 1 \right] + \frac{23}{12} \text{arc tg } \frac{x - 2}{3} + C.$$

$$2) \quad \int \frac{(2x+3) dx}{6x^2+35} = \frac{1}{6} \int \frac{(2x+3) dx}{x^2 + \left(\sqrt{\frac{35}{6}}\right)^2}$$

что даетъ по разложеніи:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left\{ \int \frac{2x \cdot dx}{x^2 + \left(\sqrt{\frac{35}{6}}\right)^2} + 3 \int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{\frac{35}{6}}\right)^2} = \right. \\ & = \frac{1}{6} \lg_e \left(x^2 + \frac{35}{6}\right) + \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{35}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x\sqrt{6}}{\sqrt{35}} \left. \right\} + C. \end{aligned}$$

7) Слѣдующіе интегралы могутъ быть рассматри-
ваемы, какъ частные случаи вышеприведеннаго пунк-
та 6). Мы ограничимся лишь указаніемъ результатовъ,
которые не мѣшаетъ запомнить:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \lg_e \left(\frac{x-a}{x+a} \right) + C \quad . \quad . \quad (76).$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C. \quad . \quad . \quad (77).$$

72. Интегрированіе ирраціональныхъ функцій. Мы
разсмотримъ тутъ только наиболѣе употребительныя
въ приложеніяхъ функціи.

$$1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ по } \S 66 = \operatorname{arc} \sin x + C$$

$$2) \quad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ по } \S 66 = \operatorname{arc} \cos x + C$$

$$3) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Этотъ интегралъ можно написать въ видѣ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$$

и такъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad . \quad . \quad (78).$$

4)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Полагаемъ:

$$v - x = \sqrt{1 + x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

Откуда

$$v^2 - 2vx = 1.$$

Дифференцируя это уравнение, найдемъ:

$$2v dv - 2v dx - 2x dv = 0$$

откуда

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{v - x}.$$

Но изъ ур. (a) $v - x = \sqrt{1 + x^2}$
слѣдовательно:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$$

а потому:

$$\frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \int \frac{dv}{v} = (\S 66) = \lg_e v + C.$$

Замѣняя x вмѣсто v , найдемъ окончательно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \lg_e (x + \sqrt{1 + x^2}) + C \quad (79).$$

Точно также:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \lg_e \left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right) + C \quad (80).$$

Подобнымъ же образомъ рѣшается интегралъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Также полагаютъ $v - x = \sqrt{x^2 - 1}$, и находятъ окончательно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lg_e (a + \sqrt{x^2 - 1}) + C \dots (81).$$

$$5) \quad \int \sqrt{1 - x^2} \cdot dx$$

умножимъ и раздѣлимъ на $\sqrt{1 - x^2}$, тогда получимъ:

$$\int \frac{(1 - x^2) dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

но (§ 66)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x.$$

Что же касается интеграла

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

то его можно написать въ видѣ:

$$\int x \cdot \frac{-x dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Замѣчая, что

$$\frac{-x dx}{\sqrt{1 - x^2}} = d(\sqrt{1 - x^2}),$$

можемъ, слѣдовательно, къ этому интегралу примѣнить способъ интегрированія по частямъ (§ 70).

$$\text{Полагая } x = u; \quad \frac{-x dx}{\sqrt{1 - x^2}} = dv,$$

найдемъ:

$$\int x \frac{-x dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int u \cdot dv = uv - \int v du$$

или замѣняя, получимъ:

$$x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \cdot dx.$$

Слѣдовательно искомый интеграль будетъ:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \cdot dx &= \arcsin x + \\ &+ x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + C. \end{aligned}$$

Переносъ послѣднй членъ второй части равенства въ первую часть, найдемъ:

$$2 \int \sqrt{1-x^2} \cdot dx = \arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2} + C.$$

Откуда:

$$\int \sqrt{1-x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{1-x^2} + C' \quad (82).$$

Точно такимъ же способомъ найдемъ, что:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2-x^2} \cdot dx &= \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \\ &+ \frac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + C \quad \quad (83). \end{aligned}$$

Также находятся интегралы:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} \cdot dx &= \frac{1}{2} \lg_e (x + \sqrt{1+x^2}) + \\ &+ \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + C. \quad . . . \quad (84). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+a^2} \cdot dx &= \frac{1}{2} a^2 \lg_e (x + \sqrt{a^2+x^2}) + \\ &+ \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+a^2} + C. \quad \quad (85). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2-a^2} &= \frac{1}{2} \left[-a^2 \lg_e (x + \sqrt{x^2-a^2}) + \right. \\ &\left. + x \sqrt{x^2-a^2} \right] + C \quad \quad (86). \end{aligned}$$

6) Разсмотримъ теперь интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}; \int \frac{(mx + n) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

и $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} . dx (87).$

Предположимъ сначала, что коэффициентъ a положительная величина.

Тогда трехчленъ $ax^2 + bx + c$ можно представить въ видѣ:

$$a [(x + \alpha)^2 + \beta^2].$$

Дѣйствительно выводя a множителемъ, получимъ:

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right).$$

Замѣчая, что $x^2 + \frac{b}{a} x$ представляетъ первые два члена квадрата суммы:

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Дополнимъ часть въ скобкахъ недостающимъ 3-мъ членомъ $\frac{b^2}{4a^2}$, и чтобы ничего не измѣнить, вычтемъ то же количество, тогда получимъ:

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right).$$

Что можно написать въ видѣ:

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} \right)^2 \right].$$

Итакъ:

$$\alpha = \frac{b}{2a} \quad \beta = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}.$$

Теперь полагаемъ:

$$x + \alpha = \beta v \text{ и } x = a + \beta v,$$

откуда

$$dx = \beta dv.$$

Замѣняя въ выраженіи трехчлена $x + \alpha$ его значеніемъ, получимъ:

$$a [(x + \alpha)^2 + \beta^2] = a (\beta^2 v + \beta^2) = a \beta^2 (v^2 + 1)$$

и слѣдовательно, зная, что $dx = \beta dv$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{a\beta} \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + 1}},$$

что можно уже проинтегрировать (см. пунктъ 4) этого параграфа)

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \cdot dx = a\beta^3 \int \sqrt{1 + v^2} \cdot dv.$$

То же знакомое выраженіе (пунктъ 5) этого параграфа).

Наконецъ

$$\begin{aligned} & \int \frac{(mx + n) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \\ &= \frac{1}{a\beta} \int \frac{(-\alpha m + n + m\beta v) dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \\ &= \frac{1}{a\beta} \left\{ (n - \alpha m) \int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} + m\beta \int \frac{v dv}{\sqrt{1 + v^2}} \right\} \end{aligned}$$

Интегралы, первый разобранъ въ пунктъ 4) этого параграфа, а второй есть ничто иное, какъ $\sqrt{1 + v^2}$ такъ какъ $d(\sqrt{1 + v^2}) = \frac{v dv}{\sqrt{1 + v^2}}$.

Точно также поступимъ и въ томъ случаѣ, когда a будетъ отрицательнымъ.

Примѣры:

1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$$

$$5 + 4x - x^2 = 9 - (x - 2)^2 = 3^2 - (x - 2)^2.$$

Полагаемъ:

$$x - 2 = 3v,$$

откуда

$$dx = 3dv.$$

Замѣняя въ выраженіи интеграла, найдемъ:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}} &= \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \arcsin v + C = \\ &= \arcsin \frac{x - 2}{3} + C. \end{aligned}$$

Точно также для:

$$2) \quad \int \sqrt{4x - x^2} \cdot dx$$

$$4x - x^2 = 4 - (x - 2)^2 = 2^2 - (x - 2)^2.$$

Полагая

$$x - 2 = 2v$$

найдемъ:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4x - x^2} \cdot dx &= 4 \int \sqrt{1 - v^2} \cdot dv = \\ &= (\text{пунктъ 5) этого параграфа}) = \\ &= 2 (\arcsin v + v \sqrt{1 - v^2}) + C \\ &= 2 \left(\arcsin \frac{x - 2}{2} + \frac{x - 2}{4} \sqrt{4x - x^2} \right) + C. \end{aligned}$$

$$3) \quad \int \frac{(2x - 5) dx}{2 \sqrt{x^2 - 6x + 10}}$$

$$x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1^2.$$

Полагаемъ:

$$x - 3 = v$$

откуда:

$$dv = dx.$$

Замѣняя и упрощая, найдемъ:

$$\int \frac{(2x - 5) dx}{2 \sqrt{x^2 - 6x + 10}} = \int \frac{v dv}{\sqrt{v^2 + 1}} + \frac{1}{2} \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + 1}}.$$

Что даетъ по интегрированіи:

$$\sqrt{v^2 + 1} + \frac{1}{2} \lg_e (v + \sqrt{v^2 + 1}) + C.$$

Замѣняя x вмѣсто v и упрощая, получимъ окончательно:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 10} + \frac{1}{2} \lg_e \left[x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 10} \right] + C.$$

7)
$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Замѣчая, что:

$$d(\operatorname{arc} \sec x) = \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

можемъ сразу написать:

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc} \sec x + C \quad . \quad . \quad (88)$$

8)
$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}} = \lg_e \left[\frac{x}{\sqrt{1 + x^2} + 1} \right] + C \quad (89).$$

9)
$$\int \frac{dx}{x \sqrt{1 - x^2}} = \lg_e \left[\frac{x}{\sqrt{1 - x^2} + 1} \right] + C \quad (90).$$

10) Точно также:

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \sec \frac{x}{a} + C \quad (91).$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 \pm x^2}} = \frac{1}{a} \lg_e \left[\frac{x}{\sqrt{a^2 \pm x^2} + a} \right] + C \quad (92).$$

Перейдемъ теперь къ трансцендентнымъ функціямъ

73. Интегрированіе логарифмическихъ функцій. Логарифмическія функціи интегрируются большею частью по способу интегрированія по частямъ (§ 70).

1)
$$\int \lg_e x \cdot dx.$$

Интегрируя по частямъ, получимъ, полагая

$$dx = dv, \lg_e x = u$$

$$\int \lg_e x \cdot dx = x \lg_e x - \int x \frac{dx}{x} = x \lg_e x - x + C \quad (93).$$

$$2) \quad \int x^m \lg_e x \cdot dx.$$

Полагая

$$x^m \cdot dx = du, \lg_e x = v,$$

найдемъ:

$$\begin{aligned} \int x^m \lg_e x \cdot dx &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \lg_e x - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \lg_e x - \frac{1}{m+1} \int x^m \cdot dx. \end{aligned}$$

Откуда, окончательно:

$$\int x^m \cdot \lg_e x \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \lg_e x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + C \quad (94).$$

3) Поступая такимъ же образомъ, найдемъ, что:

$$\begin{aligned} (95). \quad \int x^m (\lg_e x)^n \cdot dx &= \frac{x^{m+1}}{m+1} (\lg_e x)^n - \\ &- \frac{n}{m+1} \int x^m \cdot dx (\lg_e x)^{n-1} \end{aligned}$$

Отсюда видно, что продолжая интегрирование по частямъ, мы постепенно будемъ уменьшать каждый разъ показатель n на единицу; если этотъ показатель будетъ цѣлое положительное число, то мы прійдемъ къ болѣе простому интегралу. Если же n отрицательное, то предъидущій способъ надо нѣсколько видоизмѣнить, а именно:

Положимъ:

$$t = \lg_e x$$

тогда

$$dt = \frac{dx}{x}$$

$$\text{и } x^m (\lg_e x)^{-n} \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{t^n} \cdot dt.$$

Полагая теперь

$$\frac{dt}{t^n} = dv$$

$$x^{m+1} = u$$

получимъ:

$$\begin{aligned} \int x^m (\lg_e x)^{-n} \cdot dx &= \int x^{m+1} \cdot \frac{dt}{t^n} = \int u \, dv = \\ &= uv - \int v \, du = -\frac{x^{m+1}}{(n-1) \cdot t^{n-1}} - \int \frac{m+1}{n+1} \frac{x^m}{t^{n-1}} \cdot dx \end{aligned}$$

или, выражая все въ x ,

$$-\frac{x^{m+1}}{(n-1) (\lg_e x)^{n-1}} + \frac{m-1}{n-1} \int \frac{x^m \cdot dx}{(\lg_e x)^{n-1}}.$$

Съ интеграломъ $\int \frac{x^m \cdot dx}{(\lg_e x)^{n-1}}$ поступимъ точно такъ

же, какъ съ даннымъ, и опять уменьшимъ показатель n на единицу, и т. д.

Если n дробное число, то предъидущую функцію проинтегрировать точно нельзя.

4) $\int \frac{dx}{x} (\lg_e x)^n$, гдѣ n положительное число. Тутъ интегрированіе по частямъ не удастся.

Полагаемъ

$$v = \lg_e x$$

тогда

$$\int \frac{dx}{x} (\lg_e x)^n = \int v^n \cdot dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C.$$

Или, замѣняя x вмѣсто v , получимъ:

$$\int \frac{dx}{x} (\lg_e x)^n = \frac{(\lg_e x)^{n+1}}{n+1} + C \quad . \quad . \quad (96)$$

для n отрицательнаго $= -n'$, т. е. для интеграла:

$$\int \frac{dx}{x (\lg_e x)^n}$$

найдемъ

$$= \frac{1}{(n-1) (\lg_e x)^{n-1}} + C \quad . \quad . \quad (97).$$

74. Интегрированіе показательныхъ функцій. Возьмемъ сначала

$$1) \quad \int a^x \cdot dx.$$

Извѣстно, что (§ 23) $d(a^x) = \lg_e a \cdot a^x \cdot dx$. Слѣдовательно, чтобы выраженіе подъ интеграломъ было полнымъ дифференціаломъ, недостаетъ постояннаго множителя $\lg_e a$. Основываясь на § 68, введемъ этотъ множитель подъ знакъ интеграла, но, чтобы ничего не измѣнить, передъ интеграломъ раздѣлимъ на этого множителя, тогда получимъ:

$$\frac{1}{\lg_e a} \int \lg_e a \cdot a^x \cdot dx = \frac{1}{\lg_e a} a^x + C \quad . \quad (98).$$

Точно также:

$$\int a^{-x} \cdot dx = -\frac{1}{\lg_e a} a^{-x} + C \quad . \quad . \quad (99).$$

2)

$$\int a^{x^n} \cdot dx.$$

Полагаемъ

$$x \cdot n = v$$

$$n \cdot dx = dv$$

тогда

$$\begin{aligned} \int a^{xn} \cdot dx &= \frac{1}{n} \int a^v \cdot dv = \frac{1}{n \lg_e a} a^v + C = \\ &= \frac{1}{n \lg_e a} \cdot a^{nx} + C \quad . \quad . \quad . \quad (100). \end{aligned}$$

$$\int a^{-xn} \cdot dx = -\frac{1}{n \lg_e a} \cdot a^{-nx} + C \quad . \quad . \quad . \quad (101).$$

$$\int e^x \cdot dx = e^x + C \quad . \quad . \quad . \quad (102).$$

$$\int e^{nx} \cdot dx = \frac{1}{n} e^{nx} + C \quad . \quad . \quad . \quad (103).$$

$$\int e^{-nx} \cdot dx = -\frac{1}{n} e^{-nx} + C \quad . \quad . \quad (104).$$

$$3) \quad \int e^x \cdot x^n \cdot dx,$$

гдѣ n цѣлое положительное число.

Интегрируя по частямъ, найдемъ:

$$\int e^x \cdot x^n \cdot dx = e^x \cdot x^n - n \int e^x x^{n-1} \cdot dx \quad . \quad . \quad (105)$$

Если n цѣлое отрицательное, то придется искать интегралъ:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x \cdot dx}{x^n} &= -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{e^x}{x^{n-1}} + \\ &+ \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x}{x^{n-1}} \cdot dx \quad . \quad . \quad . \quad (106). \end{aligned}$$

75. Интегрирование круговыхъ функций. Таблица § 66 даетъ уже намъ:

$$1) \quad \int \sin x \, dx \text{ и } \int \cos x \, dx.$$

Разсмотримъ теперь еще слѣдующіе интегралы:

$$2) \quad \int \sin (nx) \, dx$$

полагая

$$nx = v,$$

получимъ:

$$dx = \frac{dv}{n}$$

и

$$\int \sin (nx) \, dx = \frac{1}{n} \int \sin v \, dv = -\frac{1}{n} \cos v + C$$

или, замѣняя x вмѣсто v

$$\int \sin (nx) \, dx = -\frac{1}{n} \cos (nx) + C \quad . \quad . \quad . \quad (107).$$

Точно такъ же:

$$3) \quad \int \cos (nx) \, dx = \frac{1}{n} \sin (nx) + C \quad . \quad . \quad . \quad (108).$$

$$4) \quad \int \operatorname{tg} x \, dx.$$

Замѣчая, что

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

и, что

$$\frac{\sin x \cdot dx}{\cos x} = - \frac{-\sin x \, dx}{\cos x}$$

а также, что

$$-\sin dx = d(\cos x),$$

найдемъ:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x \, dx &= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ &= - \lg_e \cos x + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109).\end{aligned}$$

Точно также:

$$5) \quad \int \operatorname{cotg} x \, dx = \lg_e \sin x + C \quad . \quad . \quad . \quad (110).$$

$$6) \quad \int \operatorname{tg} (nx) \, dx = - \frac{1}{n} \lg_e \cos (nx) + C \quad (111).$$

$$7) \quad \int \frac{dx}{\sin x}.$$

Приведемъ дифференціалъ $\frac{dx}{\sin x}$ къ виду $\frac{du}{u}$. Для этого, положимъ:

$$x = 2v$$

откуда:

$$dx = 2dv$$

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{2dv}{\sin 2v} = \frac{dv}{\sin v \cos v}.$$

Раздѣлимъ числитель и знаменатель на $\cos^2 v$, тогда получимъ:

$$\frac{dv}{\frac{\cos^2 v}{\operatorname{tg} v}}$$

но

$$\frac{dv}{\cos^2 v} = d(\operatorname{tg} v)$$

значитъ:

$$\left(\frac{dv}{\cos^2 v} \right) = \frac{d(\operatorname{tg} v)}{\operatorname{tg} v}$$

а потому:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} v)}{\operatorname{tg} v} = \lg_e \operatorname{tg} v + C$$

или окончательно:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \lg_e \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C \quad . \quad . \quad . \quad (112).$$

8)
$$\int \frac{dx}{\cos x}.$$

Этотъ интегральъ приведется къ предъидущему, полагая:

$$x = \frac{\pi}{2} - y$$

откуда:

$$dx = -dy$$

и

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= - \int \frac{dy}{\sin y} = - \lg_e \operatorname{tg} \frac{y}{2} + C = \\ &= \lg_e \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + C \quad . \quad . \quad . \quad (113). \end{aligned}$$

9)
$$\int \sin^2 x \, dx$$

извѣстно, что:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

и такъ какъ

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

то

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

и

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos (2x),$$

а потому

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2} \cdot dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx = \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2x + C\end{aligned}$$

или окончательно:

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad . \quad . \quad (114)$$

Точно также найдемъ, что:

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad . \quad . \quad (115).$$

Подобно предъидущему найдемъ:

$$\int \sin^2(nx) \, dx = \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2nx \right) + C \quad (116).$$

$$\int \cos^2(nx) \, dx = \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2nx \right) + C \quad (117).$$

$$10) \quad \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx.$$

Изъ тригонометріи извѣстно, что:

$$\sin^2 2x = 4 \sin^2 x \cos^2 x.$$

Слѣдовательно:

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x$$

а потому:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot dx &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, d(2x) = \\ &= \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + C. \quad . \quad . \quad . \quad (118).\end{aligned}$$

$$11) \quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot dx$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

Слѣдовательно:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C \quad (119).$$

Точно также:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{cotg} x - x + C \quad (120).$$

$$12) \quad \int x^m \cdot \sin x \cdot dx.$$

Интегрируя по частямъ (§ 70) найдемъ:

$$\int x^m \sin x \cdot dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x \cdot dx.$$

Продолжая дальше, придемъ окончательно къ интеграламъ вида:

для m четнаго:

$$\begin{aligned} \int x \sin x \cdot dx &= -x \cos x + \int \cos x \cdot dx = \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \quad . \quad . \quad . \quad (121) \end{aligned}$$

для m нечетнаго:

$$\begin{aligned} \int x \cos x \cdot dx &= x \sin x - \int \sin x \cdot dx = \\ &= x \sin x + \cos x + C. \quad . \quad . \quad . \quad (122). \end{aligned}$$

Такъ что окончательно найдемъ:

$$\begin{aligned} \int x^m \cdot \sin x \cdot dx &= -x^m \cos x + m x^{m-1} \sin x + \\ &+ m(m-1)x^{m-2} \cos x - m(m-1)(m-2)x^{m-3} \sin x - \dots + \\ &+ C. \quad . \quad . \quad . \quad (123). \end{aligned}$$

$$13) \quad \int \sin^m x \cos^n x \cdot dx$$

гдѣ m и n цѣлыя числа.

Пусть сначала одинъ изъ показателей нечетный $m = 2p + 1$, а другой четный.

Тогда положимъ

$$\cos x = v$$

откуда:

$$-\sin x \, dx = dv$$

и такъ-какъ

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

то

$$\sin x = (1 - v^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Слѣдовательно:

$$\sin^{2p} x = (1 - v^2)^p.$$

Съ другой стороны при принятыхъ предположе-
ніяхъ:

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x \, dx &= \int \cos^n x \sin^{2p} x \sin x \, dx = \\ &= \int -v^n (1 - v^2)^p dv \quad . \quad . \quad (124). \end{aligned}$$

Если бы m было четное, а n нечетное и $= 2p + 1$, тогда бы положили $\sin x = v$ и пришли бы къ аналогичному результату.

Наконецъ, когда оба показателя четные, то предъидущій интегралъ приведется къ виду:

$$\int v^m (1 - v^2)^p (1 - v^2)^{\frac{1}{2}} dv$$

полагая

$$\sin x = v \text{ или } \cos x = v.$$

14)

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x}$$

можемъ написать:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a + b \cos x} &= \int \frac{dx}{(a + b) \cos^2 \frac{x}{2} + (a - b) \sin^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{(a + b) + (a - b) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\end{aligned}$$

Полагая:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z,$$

получимъ

$$\frac{d \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = dz$$

откуда

$$\frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2dz.$$

и

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a + b \cos x} &= 2 \int \frac{dz}{(a + b) + (a - b) z^2} = \\ &= \frac{2}{a + b} \int \frac{dz}{1 + \frac{a - b}{a + b} z^2}\end{aligned}$$

если $a > b$, положимъ:

$$\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \cdot z = t.$$

Найдемъ:

$$dz = \sqrt{\frac{a + b}{a - b}} \cdot dt.$$

Откуда:

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int \frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$(\S 66) = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + C. \quad . \quad . \quad (125).$$

Если $a < b$, положимъ:

$$\sqrt{\frac{b-a}{a+b}} z = t.$$

Тогда, найдемъ:

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \int \frac{dt}{1 - t^2} =$$

$$(\S 71, \text{ форм. 76}) = \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \lg_e \frac{1+t}{1-t} + C. \quad . \quad . \quad (126).$$

76. Интегрирование обратныхъ круговыхъ функцій.

Всѣ эти функціи интегрируются по частямъ (§ 70). Приведемъ нѣсколько примѣровъ:

$$1) \quad \int \operatorname{arc} \sin x \cdot dx.$$

Интегрируя по частямъ, найдемъ:

$$\int \operatorname{arc} \sin x \cdot dx = \operatorname{arc} \sin x \cdot x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1 - x^2} + C. \quad . \quad (127).$$

Точно также:

$$2) \quad \int \operatorname{arc} \cos x \cdot dx = x \operatorname{arc} \cos x - \sqrt{1 - x^2} + C \quad (128).$$

$$3) \quad \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \cdot dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \cdot x - \int \frac{x dx}{1 + x^2} =$$

$$= x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \lg_e (1 + x^2) + C. \quad . \quad (129).$$

$$4) \int \operatorname{arc} \cotg x \cdot dx = x \operatorname{arc} \cotg x + \frac{1}{2} \lg_e (1 + x^2) + C \dots (130).$$

Этимъ мы закончимъ основы интегрированія функцій, полагая, что изложенныхъ въ этомъ отдѣлѣ свѣдѣній будетъ вполне достаточно не только для всѣхъ примѣненій математики въ электротехникѣ, но и вообще для большинства вопросовъ изъ области другихъ прикладныхъ наукъ, какъ механика и другія инженерныя науки. Теперь мы перейдемъ къ интегрированію наиболѣе употребительныхъ дифференціальныхъ уравненій, съ которыми намъ не разъ придется имѣть дѣло при изученіи теоріи переменныхъ токовъ.

ГЛАВА XIII.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій.

77. Дифференціальныя уравненія. Такими уравненіями называютъ уравненія, содержащія, кромѣ независимой переменнѣй и ея функціи, еще производныя или дифференціалы этой функціи.

Такъ уравненіе вида:

$$A \cdot x^m \frac{d^2 y}{dx^2} + B(x+a)^n \frac{dy}{dx} + (y+b)^p = C$$

будетъ дифференціальнымъ уравненіемъ, такъ-какъ въ это уравненіе, кромѣ независимой переменнѣй x и ея функціи y , входятъ еще вторыя и первыя производныя функціи y .

Если всѣ производныя и сама функція входятъ въ уравненіе въ 1-й степени, то уравненіе называется дифференціальнымъ уравненіемъ 1-й степени, или линейнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ.

Дифференціальное уравненіе будетъ 2-й степени если производныя и функція входятъ во 2-й степени.

Такъ, предыдущее уравненіе будетъ уравненіемъ p -ой степени, потому что хотя и производныя $\frac{d^2y}{dx^2}$ $\frac{dy}{dx}$ входятъ въ 1-й степени, но сама функція входитъ въ степени p .

Точно также уравненіе:

$$Ax^m \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + B(x+a)^n \frac{dy}{dx} + y = C$$

будетъ 2-й степени.

а уравненіе:

$$Ax^m \frac{d^2y}{dx^2} + B(x+a)^n \frac{dy}{dx} + y = C$$

будетъ линейнымъ, такъ-какъ производныя и функція y входятъ въ это уравненіе въ 1-й степени.

Говорятъ, что дифференціальное уравненіе перваго порядка, когда въ это уравненіе входитъ только 1-я производная. Если эта производная, точно также, какъ и сама функція, входятъ только въ 1-й степени, то уравненіе называется линейнымъ уравненіемъ перваго порядка, если же первая производная и функція входятъ во 2-й, 3-й и т. д. степени, то уравненіе будетъ называться дифференціальнымъ уравненіемъ перваго порядка 2-й, 3-й и т. д. степени. Такъ уравненіе

$$Ax^m \frac{dy}{dx} + (x+a)^n y = C$$

будетъ линейнымъ уравненіемъ перваго порядка, а уравненія

$$Ax^m \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (x+a)^n y + C$$

$$Ax^m \frac{dy}{dx} + (x+a)^n y^2 = C$$

будутъ перваго порядка и второй степени.

Мы займемся лишь уравненіями 1-го и 2-го порядка, такъ-какъ на практикѣ приходится имѣть дѣло почти исключительно съ этими уравненіями.

Рѣшить дифференціальное уравненіе, это значитъ найти такое выраженіе функціи въ зависимости отъ переменнѣй, чтобы, подставивъ въ данное дифференціальное уравненіе вмѣсто функціи и ея производныхъ имѣ соответствующія изъ найденнаго выраженія значенія, мы получили бы очевидное тождество.

Такое рѣшеніе сводится обыкновенно къ интегрированію. Вотъ почему вмѣсто выраженія „рѣшить дифференціальное уравненіе“ употребляютъ по большей части выраженіе „проинтегрировать дифференціальное уравненіе“.

78. Дифференціальныя уравненія перваго порядка и первой степени. Общій видъ этихъ уравненій будетъ вида:

$$X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = X_3 \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

гдѣ X_1, X_2, X_3 представляютъ нѣкоторыя функціи независимой переменнѣй x .

Длѣ того, чтобы рѣшить это уравненіе, положимъ:

$$y = u \cdot v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

гдѣ u и v будутъ нѣкоторыя функціи независимой переменнѣй x .

Дифференцируя уравненія (a), найдемъ:

$$dy = u dv + v du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Данное уравненіе можно написать въ видѣ:

$$X_1 dy + X_2 y \cdot dx = X_3 dx$$

или еще:

$$dy + \frac{X_2}{X_1} y \cdot dx = \frac{X_3}{X_1} dx$$

замѣняя dy выраженіемъ (b) и y выраженіемъ (a), найдемъ:

$$u \cdot dv + v \cdot du + \frac{X_2}{X_1} u \cdot v \cdot dx = \frac{X_3}{X_1} \cdot dx \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

что мы можемъ написать еще въ видѣ:

$$u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + \frac{X_2}{X_1} u \right) = \frac{X_3}{X_1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (\delta)$$

такъ какъ изъ уравненія α слѣдуетъ, что одна изъ функцій u или v могутъ быть произвольными, то выберемъ u такъ, чтобы эта функція удовлетворяла уравненію:

$$\frac{du}{dx} + \frac{X_2}{X_1} u = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (\nu)$$

Это уравненіе можно написать въ видѣ:

$$\frac{du}{u} = - \frac{X_2}{X_1} dx$$

откуда интегрируя:

$$\int \frac{du}{u} = - \int \frac{X_2}{X_1} dx$$

или:

$$\lg_e u = - \int \frac{X_2}{X_1} dx$$

откуда:

$$u = e^{- \int \frac{X_2}{X_1} dx}$$

Но съ другой стороны, вслѣдствіе уравненія (ν) , уравненіе (δ) переобразуется въ уравненіе:

$$u \frac{dv}{dx} = \frac{X_3}{X_1}$$

откуда:

$$dv = \frac{1}{u} \cdot \frac{X_3}{X_1} \cdot dx$$

или, принимая во вниманіе, что:

$$u = e^{- \int \frac{X_2}{X_1} dx}$$

$$dv = \frac{1}{e^{\int \frac{X_2}{X_1} dx}} \cdot \frac{X_3}{X_1} \cdot dx$$

откуда:

$$v = \int \frac{1}{e^{\int \frac{X_2}{X_1} dx}} \cdot \frac{X_3}{X_1} \cdot dx + C$$

И слѣдовательно:

$$y = u \cdot v = e^{-\int \frac{X_2}{X_1}} \left\{ \int \frac{1}{e^{\int \frac{X_2}{X_1} dx}} \cdot \frac{X_3}{X_1} + C \right\}$$

Примѣчаніе. Мы не ввели постоянной C въ функцію u , такъ какъ эта функція, какъ мы замѣтили раньше, зависитъ отъ нашего выбора, а потому мы можемъ ее взять безъ постоянной.

Примѣръ: проинтегрировать уравненіе

$$(1 + x^2) \frac{dy}{dx} - xy = a$$

Это уравненіе относится къ предъидущему виду. Здѣсь $X_1 = 1 + x^2$, $X_2 = -x$ и $X_3 = a$.

Полагая $y = u \cdot v$ и поступая подобно предъидущему, найдемъ:

$$\frac{du}{u} = \frac{x}{1 + x^2} \cdot dx$$

откуда:

$$\lg_e u = \frac{1}{2} \lg_e (1 + x^2) = \lg_e (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Слѣдовательно:

$$u = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + x^2}$$

Далѣ найдемъ:

$$dv = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{a}{1+x^2} \cdot dx = \frac{a \cdot dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

откуда:

$$v = a \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

но:

$$a \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

можемъ написать въ видѣ:

$$a \int \frac{dx}{(x^{-2} + 1)^{\frac{3}{2}} x^3} = a \int \frac{\left(\frac{dx}{x^3}\right)}{(x^{-2} + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Замѣчая, что:

$$d(x^{-2}) = -2 \frac{dx}{x^3}$$

положимъ:

$$t = x^{-2}$$

тогда:

$$dt = -2 \frac{dx}{x^3}$$

и данный интегралъ преобразуется въ:

$$a \int \frac{-\frac{1}{2} dt}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{a}{2} \int \frac{dt}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}$$

и такъ какъ:

$$dt = d(t+1)$$

то полагая:

$$t + 1 = \zeta,$$

получимъ:

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} \int \frac{d\zeta}{\zeta^{\frac{3}{2}}} &= -\frac{a}{2} \int \zeta^{-\frac{3}{2}} \cdot d\zeta = \\ &= -\frac{a}{2} \frac{\zeta^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{\zeta^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{(t+1)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

или окончательно:

$$\frac{a}{(x^{-2} + 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ax}{\sqrt{1 + x^2}}$$

слѣдовательно:

$$v = \frac{ax}{\sqrt{1 + x^2}} + C$$

а потому:

$$y = u \cdot v = ax + C\sqrt{1 + x^2}$$

79. Дифференціальныя уравненія перваго порядка высшихъ степеней. Изъ этихъ уравненій интегрируются только нѣкоторые. Такъ:

1) Если уравненія можно привести къ виду:

$$f(y) \cdot dy = \varphi(x) \cdot dx \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

гдѣ, какъ говорятъ, переменныя отдѣлены, то интегрированіе не представитъ затрудненій. Дѣйствительно

$$\int f(y) \cdot dy = \int \varphi(x) \cdot dx$$

Примѣръ:

$$y^2 \frac{dy}{dx} = \sin x$$

$$y^2 \cdot dy = \sin x \cdot dx$$

$$\int y^2 \cdot dy = \int \sin x \cdot dx$$

$$\frac{1}{3}y^3 = -\cos x + C$$

2) Если уравнение не содержит зависимой переменной y , т. е. будетъ вида:

$$f\left(\frac{dy}{dx}, x\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

тогда, рѣшая по отношенію къ $\frac{dy}{dx}$ найдемъ $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)$

откуда:

$$dy = \varphi(x) \cdot dx$$

$$y = \int \varphi(x) \cdot dx$$

4) Или если уравнение не содержит независимой переменной, т. е. будетъ вида:

$$f\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

рѣшая по отношенію къ $\frac{dy}{dx}$, найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y)$$

откуда:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = dx$$

и

$$\int dx = \int \frac{dy}{\varphi(y)}$$

или

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y)}$$

5) Если уравнение вида:

$$f\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

гдѣ не входятъ ни y ни x , тогда рѣшая это уравненіе, найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = k$$

гдѣ k постоянная величина

и

$$dy = k dx$$

откуда

$$y = k \int dx = kx + C$$

6) Приведемъ еще одинъ видъ уравненій перваго порядка, которыя можно интегрировать.

Пусть имѣемъ:

$$f(x, y) dx + \varphi(x, y) dy = 0 \quad . \quad . \quad (136)$$

гдѣ f и φ однородныя функціи и одинаковой степени¹⁾ (степени m на примѣръ), тогда полагаемъ:

$$y = v \cdot x$$

откуда

$$dy = v \cdot dy + x \cdot dv$$

Замѣняя y и dy въ данномъ уравненіи и выводя x^m множителемъ, получимъ:

$$x^m \cdot f(1, v) dx + x^m \cdot \varphi(1, v) (v dx + x dv) = 0$$

или

$$f(1, v) dx + \varphi(1, v) (v dx + x dv) = 0$$

¹⁾ Говорятъ, что функція $f(x, y)$ однородная по отношенію къ x и y , когда замѣнивъ y произведеніемъ $k \cdot x$, гдѣ k нѣкорый множитель, функцію можно представить въ видѣ $x^m \cdot f(1, k)$, причемъ m будетъ степень функціи.

откуда:

$$\frac{dx}{x} = - \frac{\varphi(1, v) dv}{f(1, v) + v \cdot \varphi(1, v)}$$

Что можно интегрировать.

Примѣръ: проинтегрировать уравненіе:

$$x dy = dx (y + \sqrt{x^2 + y^2})$$

тутъ множители при dx и dy однородныя функціи 1-й степени. Полагая:

$$y = v \cdot x$$

Найдемъ, согласно выше сказанному:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}}$$

откуда:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}}$$

но:

$$\int \frac{dx}{x} = (\S 66) = \lg_e x + C$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = (\S 72) = \lg_e (v + \sqrt{1 + v^2}) + C'$$

А потому интегральное уравненіе будетъ:

$$\lg_e x - \lg_e (v + \sqrt{1 + v^2}) = C + C'$$

или вставляя вмѣсто v , $\frac{y}{x}$:

$$\lg_e x - \lg_e \left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \right) = C''$$

80. Линейныя дифференціальныя уравненія второго порядка. Мы рассмотримъ сначала уравненія вида:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = f(x). \quad . \quad . \quad (137)$$

гдѣ p и q постоянные коэффиціенты.

Возьмемъ уравненіе безъ послѣдняго члена $f(x)$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

положимъ:

$$y = C e^{rx}$$

тогда:

$$\frac{dy}{dx} = C r e^{rx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C r^2 e^{rx}$$

Подставляя въ данное уравненіе получимъ:

$$C e^{rx} (r^2 + p \cdot r + q) = 0$$

Это показываетъ, что данное дифференціальное уравненіе будетъ удовлетворено, если r будетъ однимъ изъ корней уравненія

$$r^2 + rp + q = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

тутъ можетъ быть 3 случая:

1) Корни уравненія (a) дѣствительные пусть α и β эти корни:

Тогда для y получимъ два значенія:

$$y = C e^{\alpha x}$$

$$y = C' e^{\beta x}$$

Эти два значенія называются частными интегралами даннаго дифференціального уравненія. Общій же интеграль будетъ:

$$y = C e^{\alpha x} + C' e^{\beta x}$$

Въ чемъ не трудно убѣдиться подставивъ въ данномъ уравненіи вмѣсто y это выраженіе, а вмѣсто $\frac{dy}{dx}$

и $\frac{d^2y}{dx^2}$, производныя взятая отъ того же выраженія.

2) Корни уравненія (α) равны.

Положимъ, что дифференціальное уравненіе вида:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2p \frac{dy}{dx} + p^2y = 0$$

Легко видѣть, что если мы положимъ подобно предъидущему:

$$y = C e^{rx}$$

то найдемъ:

$$C e^{rx} (r^2 - 2pr + p^2) = 0$$

или:

$$(r - p)^2 = 0$$

откуда:

$$r = p$$

для y найдемъ слѣдовательно:

$$y = C e^{px}$$

Но не трудно видѣть, что это только частный интегралъ даннаго уравненія. Дѣйствительно если положимъ кромѣ того:

$$y = C' e^{px} \cdot x$$

и если взявъ отъ этого выраженія

$$\frac{dy}{dx} \text{ и } \frac{d^2y}{dx^2}$$

подставимъ въ данное дифференціальное уравненіе вмѣсто y , $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ такимъ образомъ вычисленныя значенія, то найдемъ, что это уравненіе будетъ удовле-творено. А потому:

$$y = C' e^{px} \cdot x$$

будетъ также интеграломъ даннаго уравненія. Слѣдовательно общій интегралъ будетъ:

$$y = e^{px} (C'x + C)$$

3) Если корни уравненія (α) мнимые вида:

$$\alpha + \beta \sqrt{-1} \text{ и } \alpha - \beta \sqrt{-1}$$

то общее рѣшеніе будетъ вида:

$$y = e^{\alpha x} (C \cos \beta x + C' \sin \beta x)$$

что не трудно провѣрить.

Возьмемъ теперь уравненіе съ послѣднимъ членомъ $f(x)$, т. е. уравненіе:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = f(x).$$

Если:

$$f(x) = k$$

гдѣ k постоянная величина, то данное уравненіе приведетъ къ предъидущему виду, если положить:

$$y = v + \frac{k}{q}$$

Дѣйствительно замѣняя найдемъ:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + p \frac{dv}{dx} + qv = 0.$$

Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ поступаютъ слѣдующимъ образомъ:

Возьмемъ сначала уравненіе безъ послѣдняго члена $f(x)$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0.$$

и пусть, какъ это мы показали раньше, общій интеграль этого уравненія:

$$y = C e^{\alpha x} + C' e^{\beta x} \dots \dots \dots (\alpha)$$

будемъ разсматривать C и C' какъ функціи отъ x и именно такія функціи отъ x , чтобы выраженіе (α) могло бы быть интеграломъ даннаго уравненія

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = f(x)$$

А разъ это такъ, то выраженіе (α) должно удовлетворять этому уравненію. Возьмемъ отъ выраженія (α) первую и вторую производную, рассматривая C и C' , какъ функціи отъ x .

$$\frac{dy}{dx} = C \alpha \cdot e^{\alpha x} + C' \beta e^{\beta x} + e^{\alpha x} \frac{dC}{dx} + e^{\beta x} \frac{dC'}{dx}$$

Такъ какъ функціи C и C' взяты нами произвольно, то мы можемъ подчинить ихъ условію, чтобы:

$$e^{\alpha x} \frac{dC}{dx} + e^{\beta x} \frac{dC'}{dx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

тогда:

$$\frac{dy}{dx} = C \alpha e^{\alpha x} + C' \beta e^{\beta x}$$

дифференцируя второй разъ получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = C \alpha e^{\alpha x} + C' \beta^2 e^{\beta x} + \alpha e^{\alpha x} \frac{dC}{dx} + \\ + \alpha e^{\beta x} \frac{dC'}{dx} \end{aligned}$$

вставляя вмѣсто y , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ въ данное уравненіе ихъ значенія получимъ:

$$\begin{aligned} C \alpha^2 e^{\alpha x} + C' \beta^2 e^{\beta x} + p (C \alpha e^{\alpha x} + C' \beta e^{\beta x}) + \\ + q (C e^{\alpha x} + C' e^{\beta x}) + \alpha e^{\alpha x} \frac{dC}{dx} + \beta e^{\beta x} \frac{dC'}{dx} = f(x) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} C (\alpha^2 e^{\alpha x} + p \alpha e^{\alpha x} + q e^{\alpha x}) + C' (\beta^2 e^{\beta x} + \\ + p \beta e^{\beta x} + q e^{\beta x}) + \alpha e^{\alpha x} \frac{dC}{dx} + \beta e^{\beta x} \frac{dC'}{dx} = \\ = f(x) \end{aligned}$$

Но такъ какъ:

$$y = C e^{\alpha x}$$

и

$$y = C' e^{\beta x}$$

обращаютъ въ нуль первую часть даннаго уравненія, то множители при C и C' въ предыдущемъ выраженіи будутъ равны нулю. Останется слѣдовательно:

$$(\gamma). \quad \alpha e^{\alpha x} \frac{dC}{dx} + \beta e^{\beta x} \frac{dC'}{dx} = f(x)$$

И такъ имѣемъ два условныя уравненія: (β) и (γ) . Рѣшая эти уравненія по отношенію къ

$$\frac{dC}{dx} \text{ и } \frac{dC'}{dx}$$

найдемъ:

$$(\alpha - \beta) e^{\alpha x} \frac{dC}{dx} = f(x)$$

откуда:

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{\alpha - \beta} \cdot e^{-\alpha x} f(x)$$

и

$$\frac{dC'}{dx} = -\frac{1}{\alpha - \beta} e^{-\beta x} f(x)$$

откуда:

$$C = \frac{1}{\alpha - \beta} \int e^{-\alpha x} f(x) \cdot dx$$

$$C' = -\frac{1}{\alpha - \beta} \int e^{-\beta x} f(x) \cdot dx$$

и слѣдовательно общій интегралъ даннаго уравненія будетъ:

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha - \beta} \int e^{-\alpha x} f(x) \cdot dx - \\ - \frac{e^{\beta x}}{\alpha - \beta} \int e^{-\beta x} f(x) \cdot dx$$

Примѣръ. Рѣшить уравненіе:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = \frac{x}{(1+x)^2}$$

беремъ сначала уравненіе безъ послѣдняго члена.
Тогда полагая:

$$y = C e^{rx}$$

найдемъ для уравненія по r :

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

откуда корни:

$$\alpha = 2$$

$$\beta = 1$$

Вставляя въ только что нами выведенныя формулы,
найдемъ для общаго интеграла даннаго уравненія:

$$y = e^{2x} \int e^{-2x} \cdot \frac{x}{(1+x)^2} \cdot dx \\ - e^{2x} \int e^{-x} \frac{x}{(1+x)^2} \cdot dx$$

Если имѣемъ уравненія вида:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = 0$$

гдѣ X_1 и X_2 функціи отъ X , то для рѣшенія полагаютъ:

$$y = e^v, \text{ гдѣ } v \text{ нѣкоторая функція отъ } x$$

откуда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} e^v$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2v}{dx^2} e^v + \frac{dv}{dx} e^v$$

тогда данное уравненіе приметъ видъ:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + (1 + X_1) \frac{dv}{dx} + X_2 = 0$$

полагая $\frac{dv}{dx} = t$, найдемъ болѣе простое уравненіе
1-го порядка.

$$\frac{dt}{dx} + (1 + X_1) t + X_2 = 0$$

Которое, какъ нами это было показано раньше, можно уже проинтегрировать.

Съ болѣе сложными дифференціальными уравненіями намъ не придется имѣть дѣло. Этимъ мы и закончимъ весь тотъ матеріалъ, который, по нашему мнѣнію вполне достаточенъ для уясненія даже наиболѣе трудныхъ вопросовъ по электротехникѣ.

Заканчивая 1-й выпускъ мы приведемъ нѣсколько полезныхъ примѣровъ примѣненія дифференціального и интегрального исчисления.

ОТДѢЛЪ VI.

Примѣненіе дифференціального и интегральнаго исчисленій.

ГЛАВА XIV.

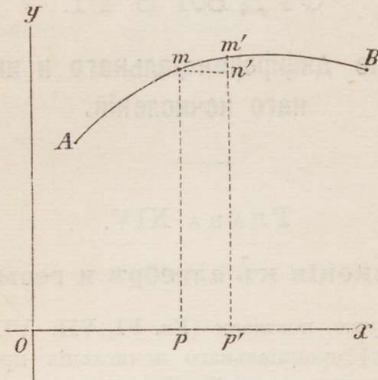
Примѣненія къ алгебрѣ и геометріи.

81. Мы уже показали (Гл. VI, VII, VIII) каково значеніе дифференціального исчисленія при изслѣдованіи различныхъ функцій. Приведемъ теперь еще нѣсколько примѣровъ примѣненія дифференціального и интегрального исчисленія въ нѣкоторыхъ прикладныхъ наукахъ, какъ геометрія, механика и т. п.

82. **Вычисленіе длины кривыхъ.** Всякую кривую можно разсматривать, какъ состоящую изъ безконечно малыхъ прямолинейныхъ кусочковъ сложенныхъ одинъ за другимъ такъ, чтобы образовать данную кривую. Значить, чтобы найти длину данной кривой, нужно взять сумму такихъ безконечно малыхъ прямолинейныхъ отрѣзковъ составляющихъ эту кривую. А такъ какъ число отрѣзковъ будетъ безконечно велико то это суммирование сведется къ интегрированію.

Пусть дана намъ нѣкоторая кривая AB . Требуется опредѣлить длину этой кривой между точками A и B (фиг. 21). Пусть $y = f(x)$ уравненіе этой кривой, отнесенное къ двумъ прямоугольнымъ осямъ координатъ ox и oy .

Возьмемъ на кривой безконечно малый отрѣзокъ $mm' = ds$. Пусть (x, y) координаты точки m . Тогда координаты точки m' , какъ безконечно близко лежащей около точки m , будутъ: $x + dx, y + dy$. Черезъ точку m проведемъ прямую mn' параллельную оси Ox . Такъ-какъ отрѣзокъ mm' мы можемъ разсматривать какъ прямолинейный, то фигура $mm'n'$ будетъ треугольни-



Фиг. 21.

комъ. Этотъ треугольникъ будетъ прямоугольнымъ въ точкѣ n' , такъ-какъ mn' параллельна къ Ox . Сторона $mn' = dx$.

Дѣйствительно:

$$mm' = pp' = Op' - Op$$

но

$$Op = x$$

а

$$Op' = x + dx$$

Точно также сторона $m'n' = dy$. Гипотенузу же mm' мы обозначили черезъ ds (безконечно малый отрѣзокъ кривой $AB = S$).

Изъ прямоугольнаго трехугольника $mm'n$ получимъ:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

откуда:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Но такъ-какъ точки m и m' принадлежатъ къ кривой, то ихъ координаты удовлетворяютъ уравненію:

$$y = f(x)$$

а слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f'(x)$$

внося это значеніе въ предыдущее уравненіе получимъ:

$$ds = dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

Это будетъ выраженіе длины элементарнаго отрѣзка кривой.

Для того, чтобы найти всю длину, надо взять сумму всѣхъ элементарныхъ отрѣзковъ части кривой AB . Иначе говоря надо взять интегралъ предыдущаго выраженія въ соответствующихъ предѣлахъ измѣненія перемѣнной x . Но при переходѣ отъ одного отрѣзка къ другому x будетъ измѣняться отъ Op (соответствующей абсциссѣ точки A) до Op' (соответствующей абсциссѣ точки B). Пусть $Op = a$, $Op' = b$. Тогда длина кривой AB будетъ:

$$S = \int_a^b dx \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \quad \dots \quad (139)$$

Примѣнимъ эту формулу къ нѣкоторымъ примѣрамъ:

Найти длину кривой эллипса, заключенной между его двумя осями. Уравненіе эллипса, отнесенное къ его осямъ (§ 56) будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

гдѣ:

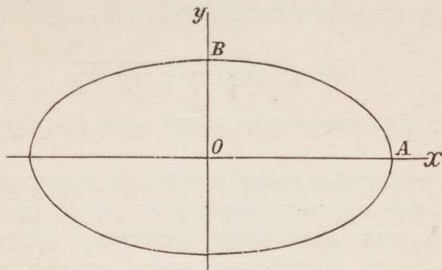
$$OA = a \quad OB = b \quad (\text{фиг. 22}).$$

Изъ этого уравненія выводимъ:

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = f(x)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = -b \frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$



Фиг. 22.

откуда:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 &= [f'(x)]^2 = b^2 \frac{\frac{x^2}{a^4}}{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \\ &= \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

Примѣняя теперь формулу (139) найдемъ:

$$S = \int_0^a dx \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{a^2 - x^2}}$$

Предѣлы будутъ 0 и a , такъ какъ (фиг. 22) абсцисса точки B будетъ $x = 0$, а абсцисса точки A будетъ $x = a$.

Преобразовывая, получимъ:

$$S = \int_0^a \frac{\sqrt{1 - e^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx$$

гдѣ:

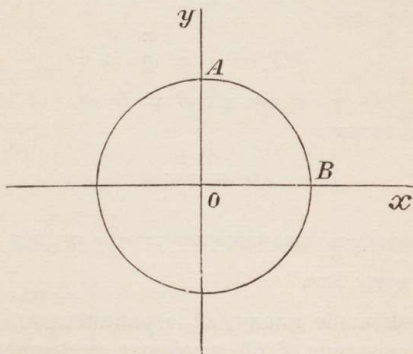
$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

2) Найти длину части окружности, заключенной между ея осями, т. е. длину четверти окружности.

Уравнение окружности отнесенной къ ея осямъ (§ 55 форм. 43) будетъ:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

гдѣ r радиусъ окружности (фиг. 23).



Фиг. 23.

Отсюда выводимъ:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

и

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

Примѣняя формулу (139), найдемъ:

$$\begin{aligned}
 AB = S &= \int_0^r dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \\
 &= \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = \\
 &= r \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \left(r \operatorname{arc} \sin \frac{x}{r} \right)_0^r \quad (\S 69) \\
 &= r \operatorname{arc} \sin \frac{r}{r} - r \operatorname{arc} \sin \frac{0}{r} = \\
 &= r \operatorname{arc} \sin 1 - r \operatorname{arc} \sin 0.
 \end{aligned}$$

Но:

$$\operatorname{arc} \sin 1 = \frac{\pi}{2} \quad (\S 6)$$

$$\operatorname{arc} \sin 0 = 0$$

Слѣдовательно:

$$S = \frac{\pi}{2} r$$

и такъ четверть окружности $= \frac{1}{2} \pi r$, вся же окружность будетъ: $2\pi r$.

83 Вычисленіе площадей, ограниченныхъ кривыми.
Мы уже показали (§ 63), разбирая геометрическое значеніе интеграла, что площадь, ограниченная кривою уравненіе которой

$$y = F(x)$$

и двумя ординатами, соотвѣтствующими абсциссамъ x_0 и x_n , выражается интеграломъ:

$$\int_{x_0}^{x_n} y \cdot dx = \int_{x_0}^{x_n} F(x) \cdot dx. \quad (140)$$

Примѣнимъ эту формулу къ вычисленію нѣкоторыхъ площадей.

1) Вычислимъ площадь OAB эллипса, заключенную между его двумя осями, т. е. вычислимъ четверть его площади (фиг. 22). Имѣемъ изъ уравненія эллипса (§ 82).

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

примѣняя формулу (140), найдемъ:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \\ &= \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \\ &= \frac{b}{a} \left(\frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} \right)_0^a \quad (\S 72 \text{ формула } 83). \end{aligned}$$

Полагая $x = 0$ получимъ:

$$\frac{b}{a} \left(\frac{1}{2} a^2 \arcsin 0 + 0 \right) = 0.$$

Полагая $x = a$, найдемъ:

$$\frac{b}{a} \left(\frac{1}{2} a^2 \frac{\pi}{2} + 0 \right) = \frac{1}{4} a b \pi$$

Слѣдовательно:

$$u = \frac{1}{4} \pi a b - 0 = \frac{1}{4} \pi a b$$

И такъ четверть площади эллипса равна $\frac{1}{4} \pi a b$. Вся же площадь будетъ: $\pi a b$.

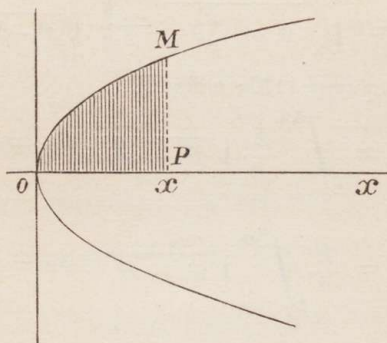
2) Площадь параболы, заключенной между ея осью и какою нибудь ординатою MS , соответствующей абсциссѣ x (фиг. 24). Уравненіе параболы, отнесенной къ

ея оси и къ касательной у ея вершины, какъ уже мы видѣли (§ 58).

$$y^2 = 2px$$

откуда:

$$y = \sqrt{2px} = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$



Фиг. 24.

Примѣняя формулу 140, получимъ для искомой площади:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^x y \cdot dx = \int_0^x \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \\ &= \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \left(\frac{2}{3} \sqrt{2p} x^{\frac{3}{2}} \right)_0^x = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

ГЛАВА XV.

Примѣненія къ механикѣ.

84. Общее выраженіе работы. Предположимъ, что мы имѣемъ какую-нибудь матеріальную точку, которая

перемѣщается подѣ дѣйствіемъ данной силы F . Тутъ можетъ встрѣтиться 3 случая:

1) Матеріальная точка перемѣщается по направленію дѣйствующей силы, которая остается все время постоянною. Тогда называютъ работою силы за данный промежутокъ времени, произведеніе силы на пройденное точкою за данное время пространство. Пусть ΔS это послѣднее, пройденное точкою за время Δt . Работа силы F будетъ за время Δt :

$$\Delta T = F \cdot \Delta S$$

Точка перемѣщается по направленію силы, но эта послѣдняя измѣняется вмѣстѣ со временемъ, точно также, какъ и проходимое точкою пространство. Пусть тогда сила будетъ нѣкоторою функціею времени:

$$F = f(t)$$

точно также, какъ и пространство:

$$S = \varphi(t)$$

Разсмотримъ безконечно малый элементъ пространства ds , проходимый въ безконечно малый промежутокъ времени dt .

$$ds = \varphi'(t) \cdot dt$$

При перемѣщеніи точки на безконечно малый элементъ ds пространства, можно предположить, что сила F не измѣнится, тогда работа произведенная въ безконечно малый промежутокъ времени будетъ:

$$dT = F \cdot ds$$

Эта работа называется элементарною работою.

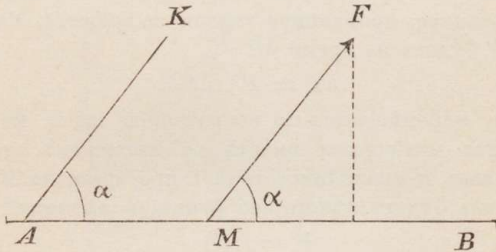
Общая работа за промежутокъ времени отъ t_0 до t_1 будетъ равняться суммѣ такихъ элементарныхъ работъ, т.е.

$$(141) \quad T = \int_{t_0}^{t_1} F \cdot ds =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot \varphi'(t) \cdot dt$$

3) Точка перемѣщается по нѣкоторой прямой, не совпадающей съ направлениемъ силы, которая остается все время постоянною по величинѣ и направленію.

Положимъ, что точка перемѣщается по прямой AB и что сила все время параллельна прямой AK , образующей съ AB уголъ α (фиг. 25).



Фиг. 25.

Тогда работою силы F за данный промежутокъ времени Δt называютъ произведение пройденнаго пространства ΔS на проекцію силы F на направление движенія, т. е.:

$$(142). \quad \Delta T = \Delta S \cdot F \cdot \cos \alpha.$$

Если сила измѣняется вмѣстѣ со временемъ, т. е. если $F = f(t)$, точно также, какъ и ея направленіе, т. е., если, напрямѣрь:

$$\cos \alpha = \varphi(t)$$

то работа за данный промежутокъ времени отъ t_0 до t_n будетъ:

$$\begin{aligned} T &= \int_{t_0}^{t_n} F \cdot \cos \alpha \cdot ds = \\ &= \int_{t_0}^{t_n} f(t) \cdot \varphi(t) \cdot ds \end{aligned}$$

Такъ какъ проходимое точкою пространство есть также функція времени, то, если

$$S = \psi(t)$$

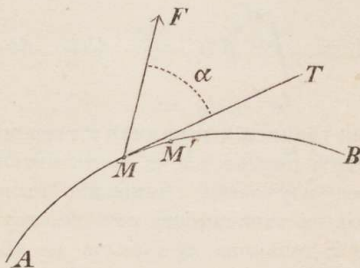
$$T = \int_{t_0}^t f(t) \cdot \varphi(t) \psi'(t) \cdot dt$$

Такъ какъ:

$$ds = \psi'(t) \cdot dt.$$

4) Наконецъ, если точка перемѣщается по какой-нибудь кривой, а сила все время измѣняется и по величинѣ и по направленію, то работа выразится слѣдующимъ образомъ:

Предположимъ, что данная точка перемѣщается по кривой AB (фиг. 26), а сила въ данный моментъ на-



Фиг. 26.

правлена по MF' и по величинѣ равна F' . Безконечно малое перемѣщеніе MM' точки за безконечно малый промежутокъ времени dt можно разсматривать какъ прямолинейное, силу F' за тотъ же промежутокъ времени можно принять, какъ постоянную по величинѣ и направленію. Тогда элементарная работа за время dt будетъ:

$$dT = ds \cdot F' \cdot \cos \alpha$$

гдѣ α уголъ образуемый силою F' въ данный моментъ съ элементомъ MM' или что тоже съ касательною MT

къ кривой въ точкѣ M , такъ-какъ касательная совпадаетъ съ безконечно малымъ элементомъ кривой. Полная работа за промежутокъ времени отъ t_0 до t_n , когда точка пройдетъ, напимѣрь, отъ A до B , будетъ:

$$T = \int_{t_0}^{t_n} ds \cdot F \cdot \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

если

$$F = f(t)$$

$$\cos \alpha = \varphi(t)$$

$$S = \psi(t)$$

то

$$ds = \psi'(t) \cdot dt$$

и

$$T = \int_{t_0}^{t_n} f(t) \cdot \varphi(t) \cdot \psi'(t) \cdot dt$$

85. Основные уравненія динамики и теорема живыхъ силъ. Динамикою называется та часть механики, которая занимается изученіемъ движенія матеріальныхъ точекъ и массъ въ зависимости отъ дѣйствующихъ на нихъ силъ. Вся динамика основанна на нѣсколькихъ началахъ или принципахъ, являющихся результатомъ опытовъ и наблюденій. Однимъ изъ такихъ началъ является слѣдующее:

Сила пропорціональна ускоренію, которое она сообщаетъ данной матеріальной точкѣ.

Опредѣлимъ сначала такіе элементы, какъ скорость и ускореніе и покажемъ ихъ зависимость отъ времени.

Самымъ простымъ движеніемъ точки будетъ такое, которое совершается по прямой линіи и равномерно. Говорятъ, что движеніе равномерно, когда пробѣгаемое пространство пропорціонально времени. Скоростью такого движенія называютъ пространство проходимое въ единицу времени. Если слѣдовательно нѣкоторое

пространство S было пройдено за время t со скоростью v , то это пространство будетъ:

$$S = v \cdot t$$

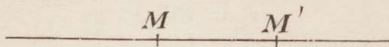
и слѣдовательно скорость v будетъ

$$v = \frac{S}{t}$$

Если проходимое точкою пространство не пропорціонально времени, а есть болѣе сложная функція этого послѣдняго $S = f(t)$, то такое движеніе называется переменныъ.

Разсмотримъ сначала переменное, но прямолинейное движеніе.

Пусть въ моментъ t времени, подвижная точка находится въ M (фиг. 27) и пусть черезъ Δt времени эта



Фиг. 27.

точка будетъ въ M' . Если бы отъ M до M' точка перемѣщалась равномерно, то скорость была бы:

$$\frac{MM'}{\Delta t}$$

или, если

$$MM' = \Delta S$$

то скорость была бы $\frac{\Delta S}{\Delta t}$

Эта скорость называется среднею скоростью перемѣщенія за время Δt .

Конечно, чѣмъ меньше будетъ промежутокъ Δt , а слѣдовательно и пространство ΔS , тѣмъ меньше скорость $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ будетъ отличаться отъ скорости, которою обладаетъ точка на самомъ дѣлѣ въ M , т. е. въ моментъ t . Слѣдовательно скорость въ точкѣ M , соотвѣтственно

моменту t , будетъ равняться предѣлу отношенія $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ когда Δs и Δt стремятся къ нулю, т. е. эта скорость будетъ:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

и такъ-какъ

$$s = f(t)$$

то v въ моментъ t будетъ:

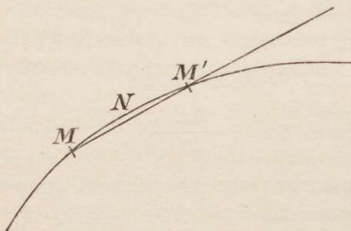
$$v = \frac{df}{dt} = f'(t)$$

Иначе говоря: скорость въ моментъ t равняется производной по времени пространства, соотвѣтственно этому моменту. Такъ скорость 5 секундъ спустя отъ начала движенія будетъ:

$$v_5 = f'(5)$$

Замѣтимъ, что при всемъ сказанномъ предполагается, что мы считаемъ время съ того момента, когда точка начинаетъ перемѣщаться.

Если точка перемѣщается неравномѣрно, не по прямой линіи, а по какой-нибудь кривой, то опять, если положеніе M соотвѣтствуетъ моменту t , а M' положе-



Фиг. 23.

ніе точки Δt времени спустя, то среднею скоростью называютъ отношеніе:

$$\frac{MM'}{\Delta t}$$

гдѣ MM' хорда, стягивающая часть MNM' кривой, пройденную точкою за время Δt . Если M' будетъ безконечно близко къ M , то хорда MM' будетъ равна кривой MNM' и скорость $\frac{MM'}{\Delta t}$ будетъ безконечно мало отличаться отъ скорости точки въ M , т. е. скорости, соответствующей моменту t . И такъ въ самомъ общемъ случаѣ скорость въ данный моментъ будетъ:

$$\frac{ds}{dt}$$

гдѣ ds элементъ пространства, пройденный за безконечно малый промежутокъ времени dt .

Если

$$S = f(t)$$

то

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

и наоборотъ

$$S = \int_0^t f'(t) \cdot dt = \int_0^t ds \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots (144)$$

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что, если движеніе неравномѣрное, то скорость не будетъ постоянною, а будетъ измѣняться въ зависимости отъ времени. Если скорость измѣняется пропорціонально времени, то говорятъ, что движеніе равномѣрно-перемѣнное: При такомъ движеніи, очевидно, измѣненіе скорости въ единицу времени будетъ величина постоянная. Если a измѣненіе скорости въ единицу времени, и если въ началѣ движенія скорость была равна нулю, то въ моментъ t скорость будетъ:

$$v = a \cdot t \dots (145)$$

откуда:

$$a = \frac{v}{t} \dots (146)$$

Если въ началѣ движенія скорость была v_0 , то въ моментъ t она будетъ:

$$v = v_0 + at. \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

откуда:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad . \quad . \quad . \quad (148)$$

величина a называется ускореніемъ. Она можетъ быть положительною, тогда движеніе будетъ равно мѣрно-ускореннымъ, или отрицательною, тогда движеніе называется равномѣрно-замедленнымъ.

Если скорость вообще не измѣняется пропорціо-
нально времени, то ускореніе не будетъ постояннымъ.
Пусть v скорость въ моментъ t и пусть въ моментъ
 $t + \Delta t$ скорость стала $v + \Delta v$. Называютъ среднимъ
ускореніемъ отношеніе: $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Чѣмъ меньше будетъ
промежутокъ времени Δt , тѣмъ меньше будетъ отли-
чаться отношеніе $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ отъ ускоренія, которымъ об-
ладаетъ точка въ моментъ времени t , и слѣдовательно
это послѣднее будетъ равно:

$$\frac{dv}{dt}$$

Но если пространство, проходимое точкою будетъ:

$$S = f(t)$$

то, какъ мы видѣли:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

а потому, ускореніе въ данный моментъ t будетъ:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t) \quad . \quad . \quad . \quad (149)$$

И такъ ускореніе въ данный моментъ време-
ни t равняется первой производной по време-

ни скорости и второй производной по времени пространства.

Обратимся теперь къ приведенному нами въ началѣ этого параграфа началу динамики.

Такъ какъ силы пропорціональны ускоренію, которое онѣ сообщаютъ данной точкѣ, то и сила тяжести также будетъ пропорціональна ускоренію, которое она сообщитъ матеріальной точкѣ при ея паденіи. Пусть p эта сила тяжести, а g ею производимое ускореніе на данную точку. Возьмемъ теперь какую нибудь другую силу F , которая, дѣйствуя на эту точку, сообщитъ ускореніе α . Тогда, на основаніи приведеннаго начала.

$$\frac{F}{\alpha} = \frac{p}{g}$$

$\frac{p}{g}$ есть масса точки, обозначимъ ее черезъ m . Слѣдовательно:

$$\frac{F}{\alpha} = m$$

откуда:

$$F = \alpha \cdot m \dots \dots \dots (150)$$

т. е. сила равна произведенію массы точки на ускореніе, сообщаемую этою силою точкѣ.

Отсюда уже не трудно вывести основныя уравненія динамики.

Если S пространство, проходимую точкою, то, на основаніи (150)

$$\left. \begin{array}{l} m \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = F \\ \text{или что тоже} \\ m \cdot \frac{dv}{dt} = F \\ \text{причемъ:} \\ v = \frac{ds}{dt} \end{array} \right\} (151)$$

Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ:

$$\left. \begin{aligned} v &= \int_0^t \frac{F}{m} \cdot dt \\ S &= \int_0^t v \cdot dt \end{aligned} \right\} (152)$$

Это и есть основныя уравненія динамики. Эти уравненія даютъ возможность, зная силу, опредѣлить скорость точки и проходимое ею пространство въ каждый моментъ.

Примѣнимъ теперь эти уравненія къ выводу весьма важной въ механикѣ теоремы живыхъ силъ.

Если точка перемѣщается подъ влияніемъ нѣкоторой силы F , то, какъ выше было показано:

$$m \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = F$$

гдѣ S пробѣгаемое точкою пространство.

Помножимъ обѣ части равенства на $2 \frac{ds}{dt}$, тогда получимъ:

$$m \left(2 \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \right) = 2F \frac{ds}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Но, замѣтимъ, что:

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right] = 2 \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$$

дѣйствительно, полагая:

$$\frac{ds}{dt} = u,$$

найдемъ:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right] &= \frac{d}{dt} (u^2) = 2 u \frac{du}{dt} = \\ (\S 22) \quad &= 2 \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \end{aligned}$$

Слѣдовательно уравненіе (α) можемъ написать въ видѣ:

$$m \cdot \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right] = 2 \cdot F \cdot \frac{ds}{dt}$$

но:

$$\frac{ds}{dt} = v$$

Слѣдовательно:

$$m \frac{d(v^2)}{dt} = 2 \cdot F \frac{ds}{dt}$$

или:

$$m \cdot d(v^2) = 2 \cdot F \cdot ds$$

или еще (такъ какъ m постоянная величина):

$$d(m v^2) = 2 F \cdot ds.$$

Но $F \cdot ds$ (§ 84) есть элементарная работа силы дѣйствующей на точку, а потому:

$$d(m v^2) = 2 dT$$

откуда:

$$\int_0^t d(m v^2) = 2 \int_0^t dT$$

Въ началѣ движенія (когда $t = 0$) $v = 0$, въ моментъ же t , скорость равна v , тоже и по отношенію къ работѣ.

Такъ какъ подѣ знаками интеграла t не входитъ явнымъ образомъ, то и для предѣловъ можно поставить соотвѣтствующія подынтегральнымъ величинамъ значенія, а именно можно написать:

$$\int_0^v d(m v^2) = 2 \int_0^T dT$$

откуда:

$$m v^2 = 2 T$$

или:

$$\frac{1}{2} m v^2 = T \dots \dots \dots (153)$$

Если возьмемъ интегралы въ предѣлахъ отъ t_0 до t и если моменту t_0 соотвѣтствуетъ скорость v_0 и работа T_0 , то предыдущее уравненіе выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\int_{v_0}^v d(m v^2) = 2 \int_{T_0}^T dT$$

или:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = T - T_0 \dots (154)$$

Выраженія $\frac{1}{2} m v^2$, $\frac{1}{2} m v_0^2$, т. е. половина произведенія массы на квадратъ скорости называется живою энергіею движущейся точки или какъ теперь принято называть кинетическою энергіею.

Уравненія (153) и (154) выражаютъ слѣдующую основную теорему динамики:

Теорема. Живая или кинетическая энергія точки за данный промежутокъ времени равна полной работѣ за этотъ промежутокъ времени внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на точку и производящихъ данное движеніе этой послѣдней.

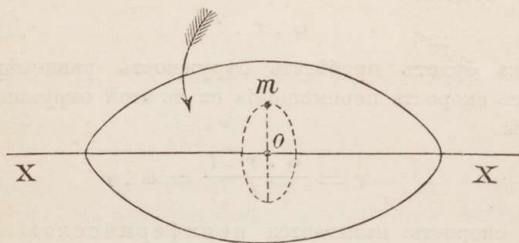
Если вмѣсто точки мы возьмемъ какое нибудь твердое тѣло, то это послѣднее можно разсматривать, какъ состоящее изъ суммы отдѣльных матеріальныхъ точекъ, такъ что тогда теорема живой энергіи выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{2} \sum m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = T - T_0 \dots (156)$$

86. Понятіе о моментѣ инерціи. Разсмотримъ вращательное движеніе тѣла вокругъ какой-нибудь оси, проходящей черезъ это тѣло (съ такимъ движеніемъ намъ

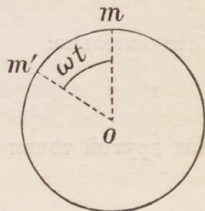
приходится встрѣчаться въ большинствѣ машинъ и въ частности въ динамомашинахъ).

Пусть XX ось вращенія (фиг. 29).



Фиг. 29.

Возьмемъ какую-нибудь точку m въ тѣлѣ на разстояніи $mO = r$ отъ оси XX . Предположимъ, что тѣло вращается равномерно по направленію стрѣлки. Каждая точка тѣла будетъ описывать окружность, плоскость которой будетъ перпендикулярна къ оси XX , центръ которой будетъ на этой оси и радіусъ который будетъ равенъ разстоянію точки до оси XX . Перпендикуляръ mO , опущенный изъ точки на ось вращенія, называется радіусомъ векторомъ разсматриваемой точки. Такъ-какъ тѣло вращается равномерно, то радіусъ векторъ каждой его точки будетъ описывать за равные промежутки времени равные углы. Уголъ описываемый векторомъ за единицу времени и одинаковый для всѣхъ точекъ называется угловою скоростью тѣла слѣдовательно за время t всѣ радіусы векторы опишутъ уголъ $\omega \cdot t$, гдѣ ω обозначаетъ уголъ описываемый въ единицу времени.



Фиг. 30.

Разсмотримъ отдѣльно окружность описываемую точкою m (фиг. 30) и пусть m' положеніе точки въ мо-

ментъ t , а m положеніе при началѣ движенія. Уголъ tom' будетъ равняться ωt . Если радіусъ окружности $= r$, то дуга описанная точкою m за время t , т. е. дуга mm' будетъ:

$$\omega \cdot r \cdot t$$

Точка будетъ пробѣгать окружность равномерно, значить скорость перемѣщенія ея по этой окружности будетъ:

$$v = \frac{\omega \cdot r \cdot t}{t} = \omega \cdot r$$

Эта скорость называется периферическою скоростью точки m , въ отличіе отъ угловой скорости ω .

Для другой точки находящейся отъ оси вращенія на разстояніи r' периферическая скорость будетъ:

$$\omega \cdot r'$$

и т. д.

Примѣнимъ теперь къ вращательному движенію точки m теорему живой энергіи. Тогда для живой энергіи этой точки получимъ (§ 85)

$$\frac{1}{2} m v^2$$

гдѣ m масса разбираемой точки.

Но:

$$v = \omega \cdot r$$

Слѣдовательно:

$$\frac{1}{2} m \omega^2 \cdot r^2$$

Для другой точки получимъ:

$$\frac{1}{2} m' \omega^2 r'^2$$

Для третьей:

$$\frac{1}{2} m'' \omega^2 r''^2$$

и т. д.

Во всѣхъ этихъ выраженіяхъ ω будетъ одно и то же, такъ какъ угловая скорость одинакова для всѣхъ точекъ. Живая энергія всего тѣла будетъ равняться суммѣ живыхъ энергій его составляющихъ точекъ, т. е. будетъ:

$$\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} m' \omega^2 r'^2 + \frac{1}{2} m'' \omega^2 r''^2 + \dots = \\ = \sum \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

Послѣднее выраженіе обозначаетъ, что надо просуммировать всѣ слогаемыя аналогичныя слогаемому $\frac{1}{2} m \omega^2 r^2$. Во всѣхъ этихъ слогаемыхъ общими множителеми будутъ $\frac{1}{2}$ и ω^2 , а потому ихъ можно взять за знакъ $\sum$ и написать:

$$\frac{1}{2} \omega^2 \sum m r^2$$

Сумма $\sum m r^2$ называется моментомъ инерціи тѣла. Это слѣдовательно будетъ сумма произведеній массы каждой точки на квадратъ разстоянія до оси вращенія тѣла.

Обозначая этотъ моментъ инерціи черезъ I , можемъ написать для живой энергіи тѣла:

$$\frac{1}{2} \omega^2 \cdot I$$

Если тѣло вращается подѣ дѣйствіемъ силы F , которая за промежутокъ времени t производитъ работу T , то уравненіе живой энергіи тѣла будетъ:

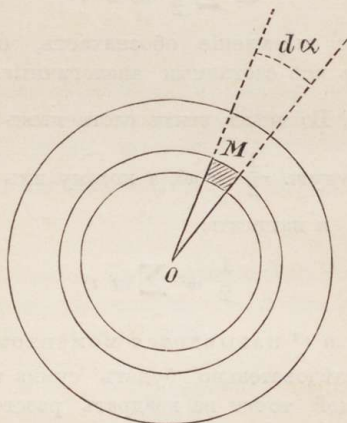
$$\frac{1}{2} \omega^2 I = T$$

Для правильныхъ геометрическихъ тѣлъ моментъ инерціи вычисляется довольно просто, для тѣлъ же съ болѣе сложными формами вычисленіе становится затруднительнымъ.

Покажемъ на простомъ примѣрѣ, какъ вычислить моментъ инерціи.

Примѣръ. Вычислить моментъ инерціи однороднаго круга относительно оси проходящей черезъ его центръ.

Пусть данъ кругъ O (фиг. 31) и пусть масса единицы площади его $= \sigma$. Требуется опредѣлить моментъ инерціи относительно оси, проходящей черезъ центръ O и перпендикулярной къ плоскости круга.



Фиг. 31.

Выдѣлимъ изъ круга бесконечно тонкую кольцеобразную полосу, внутренній радіусъ которой $= \rho$, а внѣшній $\rho + d\rho$. Проведемъ два бесконечно близкихъ радіуса, тогда изъ этой полосы мы выдѣлимъ бесконечно малый вырѣзокъ M , который можно разсматривать, какъ четырехугольникъ, основаніе котораго будетъ:

$$\rho \cdot d\alpha$$

гдѣ $d\alpha$ бесконечно малый уголъ между двумя радіусами.

а высота будетъ:

$$d\rho$$

Слѣдовательно площадь этого элемента будетъ:

$$\rho \cdot d\rho \cdot d\alpha$$

Такъ какъ масса единицы площади вещества круга σ , то масса этого элемента будетъ:

$$\sigma \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\alpha$$

Разстояніе этого элемента до оси O равно ρ , а потому элементарный моментъ инерціи выразится черезъ:

$$(\sigma \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\alpha) \cdot \rho^2 = \sigma \rho^3 \cdot d\rho \cdot d\alpha$$

Вычислимъ сначала моментъ инерціи вырѣзанной нами кольцеобразной полосы, т. е. возьмемъ сумму $\sigma \rho^3 d\rho \cdot d\alpha$ для всѣхъ элементовъ, аналогичныхъ элементу M .

$$\sum \sigma \rho^3 d\rho \cdot d\alpha$$

Въ этой суммѣ измѣняться будетъ только уголъ α , ρ и $d\rho$ будутъ одинаковы для всѣхъ элементовъ полосы, а потому можно написать:

$$\sigma \cdot \rho^3 \cdot d\rho \sum d\alpha$$

σ тоже величина постоянная. Уголъ α , когда мы переберемъ послѣдовательно всѣ элементы измѣнится отъ 0 до 2π (т. е. до 360°). Слѣдовательно, замѣчая, что разбираемая сумма есть сумма безконечно малыхъ, можемъ написать:

$$\sigma \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha = \sigma \rho^3 2\pi \cdot d\rho$$

Такъ какъ весь кругъ мы можемъ раздѣлить на подобныя концентрическія полосы, то моментъ инерціи всего круга будетъ равняться суммѣ моментовъ инерціи этихъ элементарныхъ концентрическихъ полосъ, т. е. суммѣ:

$$\sum \sigma \rho^3 \cdot 2\pi \cdot d\rho = 2\pi \sigma \sum \rho^3 \cdot d\rho$$

потому что $2\pi\sigma$ есть число постоянное. Перебирая всѣ

концентрическія полосы мы будемъ измѣнять ρ отъ нуля до радіуса R круга. Слѣдовательно моментъ инерціи круга выразится формулою:

$$2\pi\sigma \int_0^R \rho^3 \cdot d\rho = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = \pi\sigma \frac{R^4}{2}$$

Заключеніе. Этимъ мы закончимъ первый выпускъ предлагаемаго сочиненія. Полагаемъ, что свѣдѣнія, которыя мы тутъ сообщили, будутъ вполне достаточны для усвоенія всѣхъ теоретическихъ и практическихъ вопросовъ по электротехникѣ, изложеніе и разборъ которыхъ составляютъ предметъ слѣдующихъ выпусковъ. Въ ста пятидесяти шести формулахъ, которыя мы привели, читатель найдетъ все, что необходимо для рѣшенія не только чисто электротехническихъ вопросовъ, но и вопросовъ изъ области другихъ прикладныхъ, наукъ, къ помощи которыхъ приходится иногда прибѣгать электротехнику.

П Р И Б А В Л Е Н І Е.

У п р а ж н е н і я.

О т д ѣ л ъ I.

Найти дифференціалы и производныя функцій:

1) $y = \frac{x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$

Отв.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2) $y = x^{\sin x}$

Отв.

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \lg_e x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

3) $y = (1 + 2x) (1 + 3x + 4x^2)$

Отв.

$$\frac{dy}{dx} = 5 + 20x + 24x^2$$

4) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Отв.

$$dz = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\S 26)$$

$$5) \quad y = (\sqrt{a^2 + x^2})^n$$

Отв.

$$\text{Полагаемъ } \sqrt{a^2 + x^2} = u$$

$$y = u^n$$

$$dy = n \cdot u^{n-1} \cdot du \text{ и т. д.}$$

6) Вычислить производныя порядка n слѣдующихъ функций:

$$1) \quad y = \cos^2 x$$

Рѣш.

$$\frac{dy}{dx} = -2 \cdot \cos x \sin x = -\sin 2x$$

$$2) \quad y = \lg_e x$$

Отв.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} \text{ и т. д.}$$

$$y = \frac{1+x}{1-x}$$

О т д ѣ л ъ II.

1) Развернуть въ строку функции:

$$y = 2^x$$

Отв.

Примѣняемъ формулу Маклорена.

$$y = (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

Отв. Тоже.

2) Найти истинное значеніе выражений:

$$x^n \lg x \text{ для } x = 0$$

Отв. 0.

$$\frac{a^n - x^n}{\lg(a^n) - \lg(x^n)} \text{ для } x = a$$

Отв.

$$a^n$$

3) Найти наибольшее и наименьшее значенія функцій:

$$y = \frac{x(x+1)}{x-1}$$

Отв.

$$x = \sqrt{2}$$

$$y = \frac{(x^2 + 1)x^2}{(x-1)^2}$$

Отв. minimum соотвѣтствуетъ x , выведенному изъ уравненія:

$$x^3 - 2x^2 - 1 = 0$$

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

Отв.

$$x = \pm 1$$

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$$

Отв:

максимумъ для $x = 0$
минимумъ для $x = 2$

О т д ѣ л ъ III.

Построить кривыя:

1) $x^2 + 2xy - y^2 = k^2$

Рѣш. Надо вывести y въ зависимости отъ x . Эта кривая будетъ гипербола.

2) $y = \operatorname{tg} x$

3) $y = e^x + e^{-x}$

4) Дано уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Найти:

1) Какова будетъ ордината у точки эллипса, абсцисса которой $x = \frac{a}{2}$.

2) Каковъ будетъ уголъ касательной и нормали съ осью ox въ этой точкѣ.

Рѣш. 1) Вставляя въ уравненіи эллипса вмѣсто x величину $\frac{a}{2}$, найдемъ y , т. е. искомую ординату.

2) Затѣмъ примѣняемъ формулы § 52.

О т д ѣ л ъ IV.

Найти интегралы по способу замѣщенія:

$$1) \quad S = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Отв. Полагая $x^2 = u$, найдемъ:

$$S = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{a^2} + C$$

$$2) \quad S = \int \frac{x \, dx}{a^2 + x^2}$$

Отв. Полагая $x^2 = u$, найдемъ:

$$S = \frac{1}{2a^2} \arctg \frac{x^2}{a^2}$$

$$3) \quad S = \int \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

Отв. Умноживъ числителя и знаменателя на $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ получимъ:

$$S = \int \frac{(1+x) \, dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \arcsin x - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$4) \quad S = \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C$$

Найти интегралы по способу интегрирования по частямъ:

$$1) \quad S = \int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \cdot dx.$$

Отв.

$$S = \left(x - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \lg (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$2) \quad S = \int \frac{\operatorname{arc} \sin x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} x dx$$

Отв.

$$S = x - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arc} \sin x$$

Найти интегралы ирраціональныхъ функцій:

$$1) \quad S = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$$

Отв.

$$S = 2 (x-1)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(x-1)^3}{1} + \frac{3}{5} (x-1)^2 + x \right]$$

$$2) \quad S = \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-4x^2}}$$

Рѣш. См. § 72, пунктъ 6.

$$3) \quad S = \int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Отв. см. § 72, пунктъ 6.

О т д ѣ л ъ V.

Проинтегрировать уравненія.

$$1) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{a}{b} y = \frac{c}{b} \sin mx$$

Рѣш. см. § 78.

$$2) \quad (y^2 + 1) dx - (x^2 + 1) dy = 0$$

См. § 79. Отдѣляя переменныя, находимъ:

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$3) \quad x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2x \left(\frac{dy}{dx} \right) - 16 = 0$$

§ 79. Рѣшаемъ уравненіе относительно $\frac{dy}{dx}$, тогда найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

откуда:

$$dy = f(x) \cdot dx$$

$$4) \quad y^2 - y \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1$$

См. § 79, пунктъ 4.

$$5) \quad (x^2 + y^2) dx - dy (2y^2 + \sqrt{x^4 + y^4}) = 0$$

См. § 79, пунктъ 6.

$$6) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2m \frac{dy}{dx} + m^2y = \sin x$$

См. § 80.

$$7) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = x^2$$

См. § 80.

О т д ѣ л ѣ VI.

1) Вычислить длину дуги параболы уравненія которой

$$y^2 = 2px$$

Находимъ:

$$yy' = p \text{ и } ydy = p dx$$

$$y' = \frac{p}{y} \text{ и } dx = \frac{y}{p} \cdot dy$$

$$y'^2 = \frac{p^2}{y^2}$$

вставляя въ формулу (139), найдемъ:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^y \frac{y}{p} \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} = \\ &= \int_0^y dy \sqrt{\frac{y^2}{p^2} + 1} \end{aligned}$$

полагая $y = p \cdot v$, найдемъ окончательно:

$$S = \frac{p}{2} \left(\lg_e \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p} + \frac{y \sqrt{y^2 + p^2}}{p^2} \right)$$

2) Найти площадь четверти круга.

3) Найти уравненія движенія падающаго тѣла.

Рѣш. обозначая силу тяжести черезъ p , массу тѣла черезъ m , найдемъ:

$$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = p$$

или

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{p}{m} = g$$

откуда:

$$\frac{ds}{dt} = gt + C$$

или:

$$v = gt + C$$

Если при $t = 0$ $v = 0$, то $C = 0$ и получимъ просто

$$v = gt$$

и слѣдовательно:

$$\frac{ds}{dt} = gt$$

$$ds = gt \, dt$$

$$S = g \int_0^t t \, dt = \frac{1}{2} g t^2$$

И такъ уравненія движенія падающаго тѣла будутъ:

$$v = gt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{скорость.}$$

$$S = \frac{1}{2} gt^2 \quad . \quad . \quad . \quad \text{пространство.}$$

Эти уравненія показываютъ, что движеніе падающаго тѣла равномѣрно ускоренное

ЛИТЕРАТУРА.

Математика.

Notions élémentaires du calcul différentiel et du calcul integral par J. Pauly. Paris, librairie Baudry et Cie.

С. О. Войтинскій. Дифференціальное и интегральное исчисленіе (курсъ электро-техническаго института, литографированныя записки).

Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung von Fr. Autenheimer. Verlag von Voigt in Weimar.

Теоретическая механика.

Борисовъ. Курсъ теоретической механики.

Л. Кирпичевъ. Начала механики.

Фанъ-деръ Флитъ. Введеніе въ механику.

Основанія механики.

Hecht Karl. Lehrbuch der reinen und angewandten Mechanik. Band I: Die reine Mechanik. Verlag von Gerhard Kühtmann in Dresden.

О П Е Ч А Т К И.

Стран.	Напечатано.	Слѣдуетъ.
10 строка 9 снизу	$\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)$	$\left(1 + \frac{1}{x'-1}\right)$
13 строка 2 снизу	$\beta = k\alpha^{n-1} + \varepsilon$	$\beta = k\alpha^n + \varepsilon$
14 строка 4 снизу	безконечно малыя второго порядка	безконечно малыя n—го порядка
15 строка 4 сверху	безконечно малая второго порядка	безконечно малая n—го порядка
15 строка 2 снизу	безконечно малою второго порядка	безконечно малою n—го порядка
35 формула 15	$\frac{dy}{dx} \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$
85 строка 9 сверху	для F' $x = \sqrt{a^2 - b^2}$	для F' $x = -\sqrt{a^2 - b^2}$
104 строка 17 сверху	Дѣйствительно	дальѣ
178 формула 156	$-\frac{1}{1} m v_o^2$	$-\frac{1}{2} \sum m v_o^2$
187 строка 4 снизу	$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Изданія К. Л. Риккера въ С.-Петербургѣ.

Невскій пр., № 14.

Переменные электрические токи. Руководство для студентовъ и техникувъ. **Т. Г. Блекслея.** Переводъ съ 2 фр. изд. подъ редакц. **В. Н. Лебединскаго,** съ рисунками. 1894. Цѣна 1 р. 60 к., въ перепл. 2 р.

Борисъ Семеновичъ Якоби. Историческій очеркъ изобрѣтенія гальванопластики. **А. Ильина.** Съ портр. и 8 рис. 1889. 75 к.

Химическая технологія. Сочин. **Рудольфа Вагнера,** обработанное **Ф. Фишеромъ.** Перевелъ съ 13-го нѣм. изданія **А. Тизенгольтъ.** 1106 стр. съ 623 рис. 1892. Цѣна 8 р.

Все сочиненіе состоитъ изъ слѣдующихъ отдѣловъ: I. Технологія горючихъ веществъ. II. Металлургія. III. Химическія производства. IV. Химическія производства (органическія). V. Стекло, глина, цементъ. VI. Пищевыя и вкусовые вещества. VII. Хим. технологія волокнистыхъ веществъ. VIII. Остальныя орг.-химическія производства.

Между различными иностранными учебниками химической технологіи учебникъ Вагнера наиболѣе извѣстенъ тщательностью обработки, умѣлымъ выборомъ матеріала, сжатостью изложенія. Поэтому онъ выдержалъ уже 13 изданій. Ф. Фишеръ значительно переработалъ учебникъ Вагнера и придавъ ему еще болѣе цѣлесообразное распределеніе матеріала. Переводъ слѣланъ съ 13 изданія, въ большинствѣ случаевъ очень старательно, и рисунки исполнены хорошо. Изданіе будетъ полезно для всѣхъ, кто интересуется химической технологіей; оно можетъ служить прекрасной справочной книгой. («Технич. Сборн.», 1891, № 2).

Гуттаперча, ея происхожденіе, добыча и обработка. Соч. **Л. Брассъ.** Перев. съ франц. **А. Г. Бессонъ.** 1895. Ц. 1 р.

Полный карманный техникъ. **С. Н. Ванкова.** Справочная книжка по всѣмъ отраслямъ техники. Цѣна въ изящномъ кожан. переплетѣ 2 р. 50 к.

Съ удовольствіемъ отмѣчаемъ появленіе изящно изданной и тщательно составленной книжки г-на Ванкова. Занимающійся техническими вопросами найдетъ въ ней въ сжатой формѣ дѣйствительно существенныя и необходимыя свѣдѣнія. Всѣ отдѣлы составлены безукоризненно въ отношеніи полноты, сжатости изложенія и тщательности выбора. Текстъ поясненъ многочисленными чертежами и рисунками. («Русская Жизнь», 1894, № 221).

Изданія К. Л. Риккера въ С.-Петербургѣ.

Невскій пр., № 14.

Кожевенное производство. Практическое руководство къ выдѣлкѣ кожи, кожевеннаго мастера **М. А. Рылова.** 3 исправлен. и доп. изданіе подъ редакціей **В. Тизенгольца.** Съ 58 рис. 1894. Ц. 3 р., въ перепл. 3 р. 50 к.

Механика для техническихъ и ремесленныхъ училищъ, а также для самообученія. Сост. **Ф. Губеръ.** Перев. съ 4-го нѣмец. изд. подъ ред. **М. А. Савича.** 2-е русск. изд., исправленное и дополненное по указаніямъ автора. Съ 489 черт. въ текстѣ. 1891. Ц. 3 р.

Книга Губера хорошо составлена, весь матеріалъ въ ней стройно и разносторонне обработанъ, содержаніе книги изобилуетъ множествомъ такихъ подробностей и такихъ ссылокъ на литературные источники, которыя всегда полезно имѣть подъ руками и преподавателямъ механики, и любителямъ научныхъ приложений ея. 41 печатный листъ текста этой книги поясняется $4\frac{1}{2}$ сотнями ясно исполненныхъ чертежей и рисунковъ и множествомъ числовыхъ примѣровъ и задачъ во всѣхъ отдѣлахъ курса. Сравнительно очень низкая цѣна этого учебника и большое изобиліе предлагаемаго имъ матеріала даютъ намъ основаніе думать, что быстрое распространеніе этой книги у насъ вполне обезпечено и что ей суждено будетъ сослужить весьма полезную службу нашимъ промышленнымъ училищамъ.

(«Техническій Сборникъ», 1891, № 7).

Разсчетъ и построеніе частей машинъ и передаточныхъ механизмовъ. Сост. **С. Войславъ.** Текстъ и атласъ. 1885. 4 р.

Изъ предисловія: Кромѣ формулъ для разсчета, авторъ приводитъ самые простые способы ихъ вывода, чтобы дать возможность читателю примѣнять эти формулы ко всевозможнымъ случаямъ практики. Формулы для разсчета главнаго размѣра каждой машинной части выражены посредствомъ простыхъ ариметическихъ дѣйствій, всѣ остальные раамѣры надписаны на чертежахъ, какъ пропорціональныя цифры.

Уходъ за паровыми котлами и машинами. Руководство для машинистовъ и кочегаровъ, удостоенное преміи Императорскаго Русскаго Техническаго Общества. Соч. **С. Войслава.** 2 исправл. и дополн. изд. Съ 18 рис. 1893. Въ перепл. 1 р.

