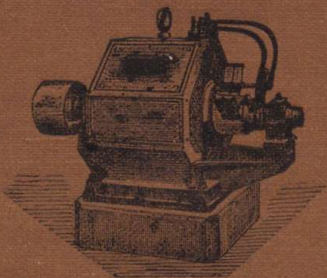


Р. 1.5081.

НА ДОМ
НЕ ВЫДАЕТСЯ

Теоретич. и Практическій
Курсъ
Электротехники



Л. Войнаровскаго

Ч. II.
Основы теоріи
электрических и магнитныхъ
явленій

ИЗДАНИЕ
К. Л. РИККЕРА С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Изданія К. Л. Риккера въ С.-Петербургѣ.

Невскій пр., № 14.

О нефтяномъ отопленіи паровыхъ котловъ. А. Г. Бессона. Изд. 2-е. 1888. Цѣна 1 р. 20 к.

Двигатели малой силы для промышленности и сельскаго хозяйства (паровые, газовые, керосиновые, водяные и вѣтряные двигатели). Практическое руководство для владѣльцевъ двигателей. Сост. инженеръ-технологъ Д. Голловъ. Съ 95 рис. 1894. Цѣна 2 р., въ перепл. 2 р. 40 к.

Несомѣнно справедливо сказано въ книжкѣ, что промышленность, пользующаяся только ручною работою, не имѣетъ почти никакой возможности соперничать съ промышленностью, пользующейся работою двигателей. Мелкіе промышленники только тогда могутъ соперничать съ крупными, когда они тоже обратятся къ двигателямъ, и именно къ малымъ. Составитель книжки задалъ себѣ задачку: изъяснить въ практической и теоріи, собрать всѣ существующія типы паровыхъ, газовыхъ, керосиновыхъ, вѣтряныхъ и водяныхъ двигателей, и описать ихъ устройство, силы, достоинства и недостатки. Въ книжкѣ много рисунковъ, которые помогутъ читателю понять устройство двигателей. Книжка интересна и для техъ, кто занимается механикою, и для техъ, кто занимается промышленностью.

Въ книжкѣ много рисунковъ, которые помогутъ читателю понять устройство двигателей. Книжка интересна и для техъ, кто занимается механикою, и для техъ, кто занимается промышленностью.

Въ книжкѣ много рисунковъ, которые помогутъ читателю понять устройство двигателей. Книжка интересна и для техъ, кто занимается механикою, и для техъ, кто занимается промышленностью.

Въ книжкѣ много рисунковъ, которые помогутъ читателю понять устройство двигателей. Книжка интересна и для техъ, кто занимается механикою, и для техъ, кто занимается промышленностью.

Въ книжкѣ много рисунковъ, которые помогутъ читателю понять устройство двигателей. Книжка интересна и для техъ, кто занимается механикою, и для техъ, кто занимается промышленностью.

B-650

6212

P. 1. 5081

НТБ МГТУ им. Н.Э.Баумана



1.5081

Войнаровский П.Д. Теоретиче

Стеклодѣліе. Руководство для производствъ: бутылочнаго, листового, зеркальнаго, посуднаго и прочаго стекла, съ изложеніемъ теоретическихъ данныхъ для заводской практики **С. П. Пѣтухова**. Съ 128 рис. 1898. Цѣна 3 р. 20 к., въ изящномъ переплетѣ 4 р.

Изъ введенія проф. Д. Менделѣева: Приступая къ изданію «Основъ фабрично-заводской промышленности» я имѣлъ въ виду посвятить одинъ изъ выпусковъ стеклянному производству и для этого обратился къ моему другу **С. П. Пѣтухову**, многолѣтними трудами въ этой области, снискавшему большую извѣстность. **С. П. Пѣтуховъ** написалъ свою книгу скорѣе, чѣмъ я могъ приступить по множеству другихъ дѣлъ, къ продолженію начатаго. Поэтому, чтобы не задерживать изданія, мы рѣшили выпустить его ранѣе появленія въ свѣтъ тѣхъ выпусковъ, которые по плану изданія должны слѣдовать за выпускомъ 1-мъ, содержащимъ общее введеніе и ученіе о топливѣ.

Производство и украшеніе глиняныхъ издѣлій въ настоящемъ и прошломъ (керамика). Для техниковъ, художниковъ и любителей керамики. Составилъ **В. И. Селезневъ**. Съ 104 рис. 1894. Цѣна 3 р., въ перепл. 3 р. 50 к. Содержаніе: Матеріалы.—Классификація главныхъ товаровъ.—Обработка глины на массу.—Формовка глиняной массы.—Сушка издѣлій.—Глазурь.—Обжигъ и устройство печей.—Украшеніе глиняныхъ товаровъ.—Муфельный обжигъ.—Терракоты, поливные и эмалированные товары.—Огнеупорные товары.—Тонкій фаянсъ.—Каменный товаръ.—Фарфоръ.—Очеркъ развитія и современнаго положенія керамической промышленности въ Россіи.

Г. Селезневъ глубокій знатокъ дѣла—онъ завѣдуетъ фабрикаціею эмалей для мозаичнаго отдѣленія Императорской Академіи художествъ—вложилъ въ книгу все свое знаніе и опытность и такимъ образомъ передъ русскою публикою является изданіе, имѣющее много правъ на ея вниманіе.

Авторъ описываетъ прежде всего свойства и обработку сырыхъ припасовъ для выдѣлки керамическихъ издѣлій, т. е. всевозможныя разновидности глины. Ему приходится подробно и обстоятельно излагать классификацію глиняныхъ товаровъ, обработку сырой глины на издѣльную массу, формовку этой массы и служащія для нея снаряды, сушку выформованныхъ издѣлій, составъ и свойства разныхъ глазурей, обжиганіе издѣлій и устройства нужныхъ для этого печей, украшенія глинянаго товара, описаніе разныхъ его сортовъ—терракоты огнеупорныхъ вещей, фаянса, камня, фарфора, наконецъ, сдѣлать очеркъ развитія и современнаго положенія керамической промышленности въ Россіи.

З. I 261

ТЕОРЕТИЧЕСКІЙ И ПРАКТИЧЕСКІЙ КУРСЪ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.

Ч. II.

Основы теоріи электрическихъ и магнит-
ныхъ явленій.

45,03
621,3
621,3

ТЕОРЕТИЧЕСКІЙ И ПРАКТИЧЕСКІЙ КУРСЪ

ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.

Составилъ

П. Д. Войнаровскій,

Преподаватель Электротехническаго Института, Инженеръ-Электрикъ
Института Montefiore, Телеграфный Инженеръ.

Часть II.

Основы теоріи электрическихъ и магнитныхъ явленій.

Съ 94 рисунками въ текстѣ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Издание К. Л. Риккера.
Невскій проспектъ, 14.
1899.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХЪ И МАГНИТНЫХЪ ЯВЛЕНІЙ.

Составилъ

П. Д. Войнаровскій,

Преподаватель Электротехническаго Института, Инженеръ-Электрикъ
Института Montefiore, Телеграфный Инженеръ.

Р. 15081
Провер. 1935
Часть II,

Теоретическаго и практическаго курса электротехники.

78
Съ 94 рисунками въ текстѣ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Изданіе К. Л. Риккера.

Невскій проспектъ, 14.

1899.

ПРОВЕРЕНО
1940
ПРОВЕРЕНО
1952



Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 15 марта 1899 года.

Предисловіе ко второй части.

Выпуская вторую часть нашего сочиненія „Теоретическій и практическій курсъ электротехники“, мы руководствовались при ея составленіи слѣдующими соображеніями. Всѣ электрическія и магнитныя явленія представляютъ собою, какъ бы частный случай общаго міроваго закона, именуемаго закономъ сохранения энергіи. Такимъ образомъ, зависимость между внѣшними проявленіями электричества и магнетизма, сводящимися главнымъ образомъ къ механическимъ, тепловымъ и химическимъ эффектамъ, всецѣло можетъ быть установлена на основаніи тѣхъ законовъ и теоремъ, которыя составляютъ основаніе учений о механикѣ системъ. Эту мысль мы и старались провести во всей второй части. Поэтому мы особенно настаивали въ введеніи на разъясненіи закона сохранения энергіи и на зависимости между силами системъ, подчиняющихся закону Ньютона. Затѣмъ мы старались представить возможно яснѣе ученіе о силовыхъ линіяхъ, предложенное Фарадеемъ, а въ ученіи о потенциалѣ мы исходили не изъ математическаго значенія этой функціи, а изъ ея физическаго значенія, назвавъ таковою величину, измѣряющую приращеніе или уменьшеніе потенциальной энергіи данной системы. Только послѣ уясненія всѣхъ этихъ положеній и общихъ понятій мы приступаемъ къ изученію электрическихъ и магнитныхъ явленій, зависимость между которыми устанавли-

вается весьма легко, становится понятною и усваивается безъ затрудненій, когда вышеупомянутыя положенія и понятія являются ясною и вполне понятною картиною въ умѣ изучающаго эти явленія.

То, что мы изложили во 2-й части является азбукою для электрика, т. е. то, что онъ долженъ твердо разучить, чтобы потомъ, бойко читать въ книгѣ ученія о приспособленіи электрической энергіи къ несенію многообразной службы, намѣченной человѣкомъ. Однако, зная азбуку, можно и не сѣумѣть прочесть, если не знать, какъ связывать отдѣльныя буквы. Подобная задача составить предметъ 3-й части, гдѣ, предлагая рядъ основныхъ задачъ и теоретическихъ дополненій, съ которыми электрику прійдется имѣть дѣло на каждомъ шагу, мы покажемъ, какъ слѣдуетъ связывать отдѣльныя элементы азбуки, чтобы затѣмъ составлять слова и живую рѣчь, иначе говоря, какъ составлять изъ сухой видимому теоріи, живой непосредственно примѣнимый къ дѣлу матеріалъ.

П. Войнаровскій.

1 декабря 1898 г.

Примѣчаніе. Считаемо долгомъ, выпуская вторую часть, помѣстить всѣ тѣ опечатки и недосмотры, которые вкрались въ первую часть нашего сочиненія, а также и важнѣйшія опечатки, которыя мы успѣли замѣтить во 2-й части. Лицамъ, указавшимъ намъ на нѣкоторыя опечатки, найденныя ими въ 1-ой части сочиненія, считаемъ пріятнымъ долгомъ выразить свою искреннюю благодарность.

П. В.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Введеніе.

ГЛАВА I.

Законъ сохраненія энеріи.

	§§	Стр.
Энергія системы силъ	1	1
Энергія точки, испытующей дѣйствіе системы силъ.	2	5
Теорема I.	3	8
Теорема II.	4	8
Понятіе о массѣ	6	8

ГЛАВА II.

Основные элементы электрическихъ и магнитныхъ дѣйствій.

Выраженіе силы взаимодѣйствія	7	11
Силовое поле.	8	12
Потенціалъ	9	14
Относительная потенциальная энергія массы въ данномъ полѣ	10	22
Равнопотенціальныя поверхности	11	25
Линіи силъ	12	27
Силовыя линіи	13	28
Силовой потокъ	14	29
Зависимость силового потока отъ массъ.	15	31
Теорема Грина	16	41
Гипотезы Фарадея	17	42

ГЛАВА III.

Нѣкоторыя примѣненія основной теоріи.

	§§	Стр.
Потенціальная энергія образованія системы массъ	18	45
Дѣйствіе бесконечно тонкаго равномерно сферическаго слоя на массу, лежащую внутри его.	19	49
Дѣйствіе однороднаго шароваго слоя на массу, расположенную внѣ слоя	20	51
Дѣйствіе бесконечно тонкаго диска съ рав- номерно распределенною массою на еди- ницу массы, расположенную на оси диска.	21	54

ГЛАВА IV.

Абсолютная система единицъ.

Основные и производныя единицы	22	58
Измѣренія производныхъ единицъ	23	59
Переходъ отъ одной системы къ другой.	24	62

ОТДѢЛЪ I.

Электростатика.

ГЛАВА V.

Свойства наэлектризованныхъ тѣлъ.

Основные явленія	25	65
Электрическій зарядъ можно разсматривать, какъ количество и измѣрять какъ таковое.	26	68
Законъ Кулона	27	69
Электрическое поле. Электрическій потен- ціаль	28	71
Потенціаль проводниковъ, на которыхъ элект- ричество находится въ состояніи равно- вѣсія	29	71
Электрическая плотность	30	73
Теорема Кулона	31	74
Напряженіе поля на поверхности наэлектри- зованнаго тѣла	32	77

	§§	Стр.
Электростатистическое давленіе	33	78
Потенціалъ наэлектризованнаго проводника въ присутствіи другого наэлектризован- наго проводника	34	79
Потенціальная энергія электрическаго за- ряда на данномъ проводникѣ	35	80
Измѣреніе потенціала наэлектризованныхъ тѣлъ	36	81

Г л а в а VI.

Электростатическая индукція. Емкость и конденса- торы.

Явленія электростатической индукціи . . .	37	82
Электрическая емкость	38	83
Емкость тѣла проводника въ присутствіи дру- гихъ проводниковъ	39	85
Сферическій конденсаторъ	40	88
Плоскій конденсаторъ	41	90
Цилиндрический конденсаторъ	42	92
Выраженіе потенціальной энергіи конденса- тора	43	94
Диэлектрическая постоянная	44	95
Остаточный зарядъ	45	97
Соединеніе конденсаторовъ въ группы . . .	46	97

О т д ѣ л ъ II.

Перемѣщеніе электрическихъ массъ въ проводникахъ.

Г л а в а VII.

Понятіе о токѣ. Законъ Ома.

Явленія перемѣщенія электрическихъ массъ въ проводникахъ	47	101
Законъ Ома	48	106
Электродвижущая сила	49	107
Случай нѣсколькихъ электродвижущихъ силъ въ проводникѣ	50	108

	§§	Стр.
Графическое изображеніе закона Ома . . .	51	109
Электрическая цѣпь и работа электриче- скаго тока	52	113
Теоремы Кирхгоффа	53	115
Развѣтвленные токи	54	118

ГЛАВА VIII.

Энергія электрическаго тока.

Законъ Джауля	55	119
Законъ Фарадея	56	120
Измѣненіе закона Ома при прохожденіи тока черезъ электролитъ	57	121

ОТДѢЛЪ III.

Магнетизмъ.

ГЛАВА IX.

Основныя свойства и опредѣленія.

Свойства магнитныхъ тѣлъ	58	124
Магнитный моментъ	59	125
Законъ дѣйствія магнитныхъ массъ	60	126
Магнитное поле, магнитный потенціалъ, маг- нитный потокъ	61	126
Дѣйствіе равномернаго магнитнаго поля на магнитъ	62	126
Элементарные магниты	63	127
Потенціалъ элементарнаго магнита въ дан- ной точкѣ	64	129
Магнитные слои	65	131
Потенціальная энергія слоя въ магнитномъ полѣ	66	134
Взаимная энергія двухъ магнитныхъ слоевъ.	67	137
Работа, затрачиваемая массою m при пере- мѣщеніи отъ одной стороны слоя къ про- тивуположной	68	137

ГЛАВА X.

Силовой поток магнитовъ.

	§§	Стр.
Вычисленіе силового потока, исходящаго изъ магнита	69	139
Теорема	70	143
Взаимное распредѣленіе потоковъ двухъ и нѣсколькихъ магнитовъ	71	144

ГЛАВА XI.

Магнитная индукція.

Намагничиваніе черезъ вліяніе	72	145
Дѣйствіе температуры на магнетизмъ	73	150
Остаточный магнетизмъ	74	151
Потеря энергіи на гистерезисъ	75	155
Подъемная сила магнита	76	159
Гипотезы Вебера и Юинга относительно молекулярной структуры магнитовъ и магнитныхъ веществъ.	77	160
Магнетизмъ въ скрытомъ состояніи.	78	162

ОТДѢЛЪ IV.

Электро-Магнетизмъ.

ГЛАВА XII.

Магнитныя явленія, вызываемыя токами.

Открытіе Эрстеда	79	166
Правило Максвелла или правило правобочника.	80	167
Магнитное поле прямолинейнаго безконечно длиннаго проводника съ токомъ	81	167
Магнитное поле тока въ проводникѣ безконечно малой длины. Законъ Лапласа	82	168
Магнитное поле замкнутаго проводника	83	171
Дѣйствіе магнитнаго поля на элементъ проводника съ токомъ	84	175
Дѣйствіе равномернаго поля на замкнутый проводникъ.	85	177

	§§	Стр.
Работа перемѣщенія проводника съ токомъ въ магнитномъ полѣ	86	181
Магнитный потенциалъ замкнутого провод- ника съ токомъ	87	186
Замкнутый контуръ съ токомъ и магнитный слѣй	88	188
Энергія тока въ магнитномъ полѣ	89	189

ГЛАВА XIII.

Электродинамика.

Взаимодѣйствіе двухъ токовъ	90	190
Взаимодѣйствіе замкнутыхъ проводниковъ	91	193

ГЛАВА XIV.

Соленоиды и электромагниты.

Соленоиды.	92	194
Магнитное поле разомкнутого соленоида.	93	198
Магнитное поле внутри замкнутого соленоида.	94	200
Электромагниты.	95	205
Притягательная сила электромагнитовъ	96	206

ГЛАВА XV.

Магнитная цѣпь.

Магнитодвижущая сила и магнитное сопро- тивленіе	97	208
Развѣтвленіе магнитнаго потока	98	201

ОТДѢЛЪ V.

Электромагнитная индукція.

ГЛАВА XVI.

Явленія электромагнитной индукціи.

Наблюденія Фарадея.	99	213
Законъ Ленца	100	214
Общіе выводы	101	214
Общій законъ электромагнитной индукціи	102	214

	§§	Стр.
Правило Максвелла	103	217
Опредѣленіе электродвижущей силы индук- ціи при перемѣщеніи проводника въ дан- номъ магнитномъ полѣ	104	217
Количество индуцированнаго электричества.	105	221

ГЛАВА XVII.

Взаимоиндукція и самоиндукція.

Взаимоиндукція	106	222
Самоиндукція	107	224
Внутренняя потенциальная энергія тока . .	108	230
Полная электродвижущая сила индукціи. .	109	231

ОТДѢЛЪ VI.

Система единицъ для измѣренія электрическихъ и магнитныхъ величинъ.

ГЛАВА XVIII.

Абсолютныя системы единицъ.

Системы электрическихъ и магнитныхъ еди- ницъ	110	233
Электростатическая система	111	234
Электромагнитная система	112	237
Значеніе коэффициентовъ K и отношеніе между электростатическими и электромаг- нитными единицами	113	242

ГЛАВА XIX.

<i>Система практическихъ единицъ.</i>	{	114	248
		115	248
		116	250
Прибавленіе. Литература			251

Отдел VI.

Лист VII

Лист XII

ВВЕДЕНИЕ.

ГЛАВА I.

Законъ сохраненія энергіи.

1. Энергія системы силъ. Для того чтобы установить понятіе объ энергіи, разберемъ нѣсколько простыхъ примѣровъ. Возьмемъ случай свободно падающаго тѣла подъ дѣйствіемъ силы тяжести. Пусть p эта послѣдняя и пусть h пространство, которое тѣло прошло черезъ нѣкоторое время t послѣ начала паденія.

Въ 1-й части курса (см. прибавленіе стр. 192) мы уже показали, что основныя уравненія падающаго тѣла будутъ:

$$\begin{aligned} \text{скорость} & \dots \dots \dots v = gt \\ \text{пространство} & \dots \dots \dots h = \frac{1}{2} gt^2, \end{aligned}$$

$$\text{гдѣ } g \text{ ускореніе} = \frac{p}{m},$$

если m масса тѣла.

Исключая изъ этихъ уравненій t найдемъ:

$$v = \sqrt{2gh} \dots \dots \dots (\alpha)$$

откуда:

$$h = \frac{v^2}{2g} \dots \dots \dots (\beta)$$

Съ другой стороны, такъ какъ тутъ сила будетъ дѣйствовать по направленію движенія, то работа, ко-

торую произведетъ сила тяжести за время, когда тѣло пройдетъ пространство h , выразится, какъ намъ уже извѣстно, (см. часть I § 84) произведеніемъ

$$T = p \times h$$

Замѣняя h изъ выраженія (β), найдемъ

$$T = \frac{pv^2}{2g} = \frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2$$

и такъ-какъ $\frac{p}{g} = m$ (массѣ тѣла), то легко видѣть, что эта работа есть ни что иное какъ выраженіе живой энергіи падающаго тѣла (см. часть I § 85). Отсюда слѣдуетъ, что работа произведенная силою тяжести при паденіи тѣла m всецѣло была поглощена на то, чтобы сообщить этому тѣлу скорость v . Эта работа $= \frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2$ называется кинетическою энергіею т. е, тою энергіею, которою тѣло подѣйствию данной силы располагаетъ въ данный моментъ. Предположимъ теперь, что въ моментъ t , т. е. когда скорость $= v$, тѣло падаетъ на пружину. Это тѣло начнетъ сжимать пружину, скорость его будетъ все болѣе и болѣе уменьшаться и наконецъ станетъ равною нулю. Если въ этотъ моментъ пружину удержать, посредствомъ какого нибудь приспособленія, въ томъ состояніи сжатія, которое они получили отъ тѣла, то она будетъ въ состояніи, когда угодно, при расжатіи вернуть ту работу, которую затратило падающее тѣло на ея сжатіе. Иначе говоря, кинетическая энергія тѣла $\frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2$ поглотилась всецѣло пружиною и, если эта послѣдняя совершенно упруга, то, разжимаясь она произведетъ какъ разъ ту же работу. Такитъ образомъ въ данномъ примѣрѣ пружина явилась аккумуляторомъ кинетической энергіи падающаго тѣла. До тѣхъ поръ, пока пружина будетъ задерживаться въ сжатомъ состояніи, ею накопленная энергія не будетъ видна, находясь какъ бы въ скрытомъ состояніи. Такая

скрытая энергія называется потенціальною энергіею. Изъ всего разобраннаго выше мы видимъ, что кинетическая энергія падающаго тѣла преобразовалась въ потенціальную энергію пружины. Энергія тѣла слѣдовательно не исчезла, хотя тѣло и перестало двигаться. Если пружина разжимается, то она отброситъ тѣло опять на высоту h , иначе говоря тѣло начнетъ подниматься съ убывающею скоростью (ибо теперь сила тяжести будетъ дѣйствовать въ направленіи противоположномъ движенію) до тѣхъ поръ пока скорость его не станетъ = нулю. Тогда не трудно доказать, что тѣло будетъ находиться на высотѣ h . Такъ-какъ скорость тѣла тутъ = нулю, то на мгновеніе тѣло будетъ неподвижно, но оно уже будетъ обладать потенціальною энергіею, равною той энергіи, которую ему сообщила пружина. Мгновеніе спустя тѣло начнетъ падать и, ударившись о пружину, опять ей

сообщитъ энергію $\frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2$ и т. д. до бесконечности,

т. е. тѣло будетъ, благодаря пружинѣ, то подниматься, то опускаться. Но тогда мы получимъ примѣръ вѣчнаго движенія, которое на самомъ дѣлѣ не будетъ имѣть мѣста и вотъ почему. Когда тѣло падаетъ въ данной средѣ, въ воздухѣ на примѣръ, то часть его энергіи

$\left(\frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2 \right)$ затрачивается на треніе о части-

цы среды. Эта работа на треніе переходитъ въ теплоту: частицы среды и само тѣло нагрѣются. Пусть

$\frac{1}{k}$ доля энергіи тѣла, потраченная на треніе, а слѣдовательно и на нагрѣваніе. Тогда пружина получитъ

уже не $\frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2$ энергіи а лишь $\left(1 - \frac{1}{k} \right) \frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2$.

Далѣе пружина будетъ сжиматься не вполне свободно, такъ-какъ необходимо преодолѣть внутреннее треніе ея частицъ, пружина слѣдовательно нѣсколько нагрѣется, иначе говоря часть сообщенной пружинѣ энергіи уйдетъ на ея нагрѣваніе. Такимъ образомъ

въ пружинѣ аккумулируется уже не $\left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2$ энергіи, а меньше и именно:

$$\left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k'}\right) \frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2$$

Когда пружина начнетъ разжиматься, чтобы снова подбросить тѣло вверхъ, то, вслѣдствіи ея несовершенной упругости, ея частицы примутъ первоначальное положеніе не свободно, а съ нѣкоторымъ треніемъ, т. е. часть скопленной въ пружинѣ энергія пойдеть на треніе ея частицъ т. е. на нагрѣваніе, а потому тѣлу обратно возвратится не

$$\left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k'}\right) \frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2 \text{ энергіи}$$

а всего лишь:

$$\left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k'} - \frac{1}{k''}\right) \frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2.$$

Когда тѣло начнетъ подниматься, вслѣдствіи сообщенной ему энергіи, то часть этой послѣдней уйдетъ на треніе и частицы среды, т. е. на нагрѣваніе въ средѣ. Такимъ образомъ поднятіе тѣла будетъ происходить не отъ энергіи:

$$\left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k'} - \frac{1}{k''}\right) \frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2$$

а отъ энергіи:

$$\left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k'} - \frac{1}{k''} - \frac{1}{k'''}\right) \frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2$$

т. е. значительно уже меньшей той энергіи, которую тѣло способно было развить, когда оно находилось на высотѣ h до паденія, а потому тѣло уже поднимется не на высоту h а на высоту h' меньшую, чѣмъ h . При второмъ паденіи пружина получитъ уже энергію $\frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2$ меньшую чѣмъ при первомъ паденіи и т. д.

Такъ что скорость v' будетъ меньше, чѣмъ v . При третьемъ паденіи скорость будетъ $v'' < v'$ и т. д. Такимъ образомъ послѣ ряда паденій и поднятій тѣло остановится и какъ бы потеряетъ всю свою энергію, которая какъ будто бы пропала беслѣдно. Но это не вѣрно, энергія тѣла не пропала, она только переобразовалась въ теплоту, которая сообщается окружающей средѣ, производя тамъ цѣлый рядъ различныхъ явленій: движеніе воздуха, испареніе воды и т. п., а этого рода явленія въ свою очередь породятъ рядъ механическихъ дѣйствій и т. д. до безконечности. Отсюда законъ:

Въ какомъ бы видѣ ни была энергія, она не исчезаетъ, при совершеніи тѣхъ или другихъ процессовъ, а лишь переобразовывается изъ одного вида въ другой.

2. Энергія точки, испытывающей дѣйствіе системы силъ. Предположимъ, что данная точка A въ пространствѣ, находится подѣ дѣйствіемъ цѣлой системы силъ. Эта точка будетъ перемѣщаться до тѣхъ поръ пока не достигнетъ положенія, при которомъ дѣйствующія на точку силы взаимно уравниваются. Допустимъ также, что дѣйствіе каждой силы исходитъ изъ опредѣленнаго центра и что это дѣйствіе тѣмъ больше, чѣмъ ближе находится точка A къ дѣйствующему центру. Дѣйствующіе центры могутъ либо притягивать точку, либо ее отталкивать.

Возьмемъ сначала случай притягивающихъ центровъ. Когда точка A безконечно далека отъ дѣйствующихъ центровъ, притяженіе каждаго изъ нихъ будетъ безконечно мало. Если точка свободна, что вслѣдствіе притяженій она начнетъ перемѣщаться до положенія равновѣсія. Когда она прійдетъ къ этому послѣднему, то силы дѣйствующія на нее произведутъ нѣкоторое количество работы отсюда слѣдуетъ, что когда точка находится на безконечности, то она обладаетъ, вслѣдствіи дѣйствія на нее центровъ, нѣкоторою потенциальною энергію, которую она способна обнаружить при перемѣщеніи въ видѣ внѣшней работы и которая

какъ разъ равна той работѣ, которую произведутъ дѣйствующія на нее силы при достиженіи точкою положенія равновѣсія. Когда точка прійдетъ изъ безконечности въ нѣкоторое положеніе M , то внѣшнія силы произведутъ нѣкоторую работу T , потенціальная энергія, которою обладала точка въ безконечности и которую мы назовемъ полною энергіею E , уменьшилась слѣдовательно на величину T . Эта послѣдняя будетъ кинетическая энергія точки, т. е. та энергія, которую точка проявила въ положеніи M въ видѣ внѣшней работы. Въ этомъ положеніи слѣдовательно потенціальная энергія точки будетъ $E - T$. Когда же точка прійдетъ въ положеніе равновѣсія, то ея потенціальная энергія будетъ нуль, ибо вся ея полная энергія E будетъ проявлена, какъ мы замѣтили раньше, въ видѣ внѣшней работы, т. е. тогда $T = E$. Разсмотримъ теперь случай отталкивательныхъ силъ, т. е. предположимъ, что на точку дѣйствуютъ силы, отталкивающія ее отъ данныхъ центровъ. Допустимъ и тутъ также, что эти силы тѣмъ слабѣе, чѣмъ точка дальше отъ дѣйствующихъ центровъ. Если точка будетъ безконечно далеко отъ этихъ центровъ, то она очевидно не будетъ стремиться къ перемѣщенію. Чтобы приблизить ее къ центрамъ, необходимо производить въ каждый моментъ на точку нѣкоторое усиліе, чтобы побѣдить отталкивающее дѣйствіе силъ. Положимъ, что мы привели эту точку въ такое положеніе, въ которомъ оно будетъ находиться въ равновѣсіи подъ вліяніемъ дѣйствующихъ центровъ. Мы произвели нѣкоторую внѣшнюю работу, равную какъ разъ той, которую способны произвести дѣйствующія силы, чтобы оттолкнуть эту точку изъ положенія равновѣсія на безконечность. Слѣдовательно въ положеніи равновѣсія точка обладаетъ нѣкоторою потенціальною энергіею ибо какъ только точка выйдетъ изъ положенія равновѣсія дѣйствующія силы обнаружатъ эту энергію въ видѣ работы перемѣщенія точки къ безконечности.

Итакъ, когда точка перемѣстится отъ положенія

равновѣсія въ нѣкоторое другое положеніе M , то силы произведутъ нѣкоторую работу T , и въ этомъ положеніи полная потенціальная энергія (которою точка обладала въ положеніи равновѣсія) уменьшится уже на T и будетъ не E , а $E - T$. Когда же точки прійдетъ въ безконечность, то ея потенціальная энергія будетъ 0 и вся превратится въ кинетическую энергію, ибо тогда $T = E$.

Изъ разобранныхъ выше двухъ примѣровъ мы видимъ, что, будутъ-ли на точку дѣйствовать притягивающія или отталкивающія силы, она будетъ стремиться перемѣщаться по тому направленію, по которому ея потенціальная энергія уменьшается и что кромѣ того положеніе устойчиваго равновѣсія соотвѣтствуетъ минимуму потенціальной энергіи. Дѣйствительно въ случаѣ притяженія положеніе безконечность есть положеніе не устойчиваго равновѣсія, ибо выведенная изъ этого положенія точка будетъ удаляться отъ него стремясь къ другому положенію, гдѣ потенціальная энергія становится равною нулю. Если вывести точку изъ этого послѣдняго положенія то подѣ дѣйствіемъ дѣйствующихъ силъ она будетъ стремиться снова прійти къ нему. Слѣдовательно это второе положеніе будетъ положеніемъ устойчиваго равновѣсія.

То же и по отношенію къ отталкивающимъ силамъ. Положеніе безконечность будетъ устойчивымъ равновѣсіемъ, ибо выведенная изъ этого положенія точка подѣ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ будетъ стремиться прійти снова къ этому положенію и по мѣрѣ приближенія къ нему потенціальная энергія будетъ уменьшаться. Второе же положеніе будетъ неустойчивымъ и тамъ потенціальная энергія будетъ наибольшею.

Кромѣ того изъ разобраннаго выше видно, что какое бы положеніе не занимала точка ея полная энергія одна и та же и всегда равна суммѣ кинетической энергіи, соотвѣтствующей данному положенію и потенціальной энергіи, т. е. всегда $E = T + E'$, гдѣ E' потенціальная энергія. Отсюда слѣдующія весьма важныя теоремы:

3. Теорема I. Сумма потенціальной и кинетической энергій матеріальной точки, испытывающей дѣйствіе системы силъ, всегда будетъ одною и тою же, каково бы ни было положеніе точки, и всегда будетъ равна полной энергій точки.

4. Теорема II. Матеріальная точка, испытывающая дѣйствіе системы притягивающихъ или отталкивающихъ силъ, будетъ перемѣщаться по направленію уменьшенія потенціальной энергій, причемъ минимумъ этой послѣдней будетъ соотвѣтствовать положенію устойчиваго равновѣсія.

6. Понятіе о массѣ. До сихъ поръ мы рассматривали дѣйствіе на данную матеріальную точку въ зависимости только отъ разстоянія ея отъ дѣйствующихъ центровъ, ничего не предполагая о восприимчивости матеріи точки испытывать то или другое дѣйствіе опредѣленныхъ центровъ.

Причина такихъ явленій, какъ электричество и магнетизмъ намъ неизвѣстна. Но мы судимъ объ этихъ явленіяхъ и изучаемъ ихъ по ихъ внѣшнимъ дѣйствіямъ. Раньше предполагали, что, если какое нибудь тѣло или матеріальная точка является центромъ проявленія дѣйствій одного изъ названныхъ выше явленій, то въ этомъ тѣлѣ или точкѣ заключается опредѣленное количество нѣкоторой матеріи, характеризующей то или другое явленіе: отсюда понятія: электрическая жидкость, масса, магнитная масса и т. п. До сихъ поръ еще съ понятіемъ о массѣ связываютъ понятіе объ опредѣленной фиктивной матеріи, вызывающей или производящей тѣ или другія характерныя дѣйствія. Мы постараемся установить возможно яснѣе истинное значеніе массы, но въ то же время, оговоримся, что для упрощенія выводовъ намъ придется иногда смотрѣть на массу, какъ на нѣкоторую фиктивную матерію, которую мы будемъ либо концентрировать въ одной точкѣ, если дѣйствія будутъ сводиться къ силамъ сходящимся въ точкѣ, либо распре-

дѣлать по поверхности или въ данномъ объемѣ, когда интересно будетъ изслѣдовать связь размѣровъ тѣла съ его дѣйствіями.

Если обнаруживается какое-нибудь дѣйствіе между двумя тѣлами, напримѣръ, взаимное притяженіе или отталкиваніе, то трудно предположить, чтобы это дѣйствіе передавалось отъ одного тѣла къ другимъ безъ посредства опредѣленной среды. И такъ необходимо допустить, что между двумя взаимодѣйствующими тѣлами существуетъ нѣкоторая среда и въ такомъ состояніи, что она способна передавать дѣйствіе отъ одного тѣла къ другому; примѣръ: одна машина приводитъ другую въ дѣйствіе ременною передачею; средою является ремень, его состояніе должно быть таково, чтобы онъ могъ передать вращеніе одной машины къ другой, онъ долженъ быть соотвѣтственно натянутъ и упругъ.

Намъ извѣстны различные виды энергіи: кинетическая энергія, химическая энергія, электрическая и т. п. Каждое тѣло можетъ явиться мѣстомъ проявленія той или другой энергіи, въ зависимости отъ состоянія этого тѣла. Напримѣръ падающее тѣло является мѣстомъ проявленія кинетической энергіи, которая переходитъ въ тепловую энергію, когда тѣло ударится о какое нибудь препятствіе. Янтарный шарикъ, натертый сукномъ, является мѣстомъ проявленія электрической энергіи и т. д. Положимъ теперь, что тѣло *A* приведенное въ состояніе проявленія опредѣленнаго вида энергіи, находится въ присутствіи другого тѣла *B*, приведеннаго въ тождественное же состояніе. Между этими двумя тѣлами будетъ имѣть мѣсто взаимодѣйствіе, выражающееся напримѣръ взаимнымъ притяженіемъ или отталкиваніемъ. Пусть *F'* сила этого взаимодѣйствія.

Эта сила взаимодѣйствія въ большинствѣ извѣстныхъ намъ явленійхъ и въ частности въ явленіяхъ электрическихъ и магнитныхъ зависитъ во 1-хъ отъ разстоянія между взаимодѣйствующими тѣлами, а во 2-хъ отъ нѣкотораго другого фактора. Такъ тѣло *A*

приведенное въ другое состояніе проявленія того же рода энергіи, можетъ взаимодействовать съ тѣломъ B , съ силою F' бѣльшею напрымѣръ при томъ же разстояніи. Отсюда видно, что сила F пропорціональна во 1-хъ нѣкоторой функціи $f(r)$ разстоянія и нѣкоторому множителю, который какъ бы характеризуетъ пріобрѣтенное тѣломъ состояніе. Этотъ множитель называютъ массою. Масса будетъ электрическая, если взаимодействие вызывается электрическимъ состояніемъ дѣль, магнитная если взаимодействие является результатомъ магнитнаго состоянія. Конечно, въ выраженіе силы войдетъ еще другой множитель, характеризующій среду въ второй происходитъ взаимодействие. Однако этотъ послѣдній множитель, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, всегда можно сдѣлать = единицѣ. То что называютъ массою тѣла въ механикѣ есть множитель характеризующій притяженіе тѣла землею. Какъ мы уже видѣли (въ 1-й части стр. 175) массою тѣла въ механикѣ называютъ частное отъ дѣленія силы на ускореніе, сообщаемое силою данному тѣлу.

Во всемъ сказанномъ выше мы рассмотрѣли взаимодействие двухъ тѣлъ являющихся мѣстомъ проявленія опредѣленнаго рода энергіи. Но намъ придется имѣть дѣло и съ другого рода явленіемъ, а именно. Положимъ что на опредѣленномъ разстояніи отъ тѣла B , являющагося мѣстомъ сосредоточенія нѣкоторой энергіи (электрической, напрымѣръ), мы располагаемъ тѣло A , пока совершенно нейтральное, т. е. не проявляющее никакой энергіи. Тогда среда окружающая оба тѣла, приходя въ состояніе соотвѣтствующее характеру проявляемой въ тѣлѣ B энергіи, сообщаетъ такую же энергію въ тѣлѣ A , которое начинаетъ взаимодействовать съ тѣломъ B . Является снова понятіе о массѣ; эта масса тѣмъ будетъ больше, чѣмъ взаимодействие будетъ значительнѣе.

Такъ-какъ масса есть коэффициентъ силы взаимодействия исключительно зависящій отъ состоянія тѣла въ смыслѣ имъ проявляемой энергіи, то естественно относить этотъ множитель къ размѣрамъ тѣла, т. е. къ

его объему или къ его поверхности. Тогда массу, соотвѣтствующую единицѣ объема, условливаются называть объемною плотностью, а массу, соотвѣтствующую единицѣ поверхности—поверхностною плотностью. Мы также примемъ эти выраженія, но, повторяемъ, будемъ смотрѣть на нихъ, какъ на чисто условныя выраженія, отнюдь не связывая въ такихъ случаяхъ понятіе о плотности съ какою нибудь матеріею. Это будутъ множители, характеризующіе опредѣленное состояніе тѣла по отношенію къ его внѣшнимъ дѣйствіямъ.

Г л а в а II.

Основные элементы электрическихъ и магнитныхъ дѣйствій.

7. Выраженіе силы взаимодѣйствія. Опытъ показываетъ, что силы взаимодѣйствія между тѣлами, приведенными въ состояніе проявленія электрической или магнитной энергіи, обратно пропорціональны квадрату разстоянія. Отсюда слѣдуетъ, что сила взаимодѣйствія между двумя тѣлами, находящимися на разстояніи r другъ отъ друга, выразится:

$$f = k. m. m'. \frac{1}{r^2}$$

гдѣ m множитель, характеризующій состояніе по энергіи, т. е. масса, одного тѣла, а m' масса другого тѣла; k множитель, зависящій отъ среды и отъ выбора единицы, какъ это мы покажемъ послѣ. Два тѣла при массахъ m и m' могутъ либо взаимно притягиваться, либо взаимно отталкиваться; если происходитъ взаимное отталкиваніе, то мы скажемъ, что массы m и m' одинаковаго знака, если же имѣетъ мѣсто взаимное притягиваніе, то мы условимся говорить, что m и m' разныхъ знаковъ, т. е. одна масса положительная, а другая отрицательная. Такая условность вытекаетъ изъ свойствъ магнитныхъ и электрическихъ явленій, какъ это мы увидимъ впослѣдствіи.

Если массу одного изъ взаимодействующихъ тѣлъ принять за единицу, то сила взаимодействия выразится формулою:

$$f = k. m'. \frac{1}{r^2}$$

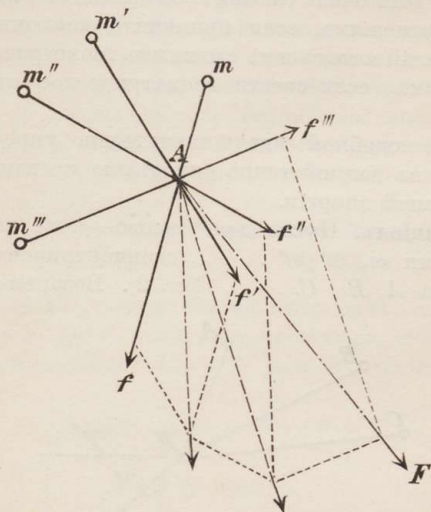
8. Силовое поле. Положимъ, что въ опредѣленныхъ точкахъ пространства расположены физическія тѣла съ массами m, m', m'' и т. д., относящимися къ нѣкоторому виду энергія. Если въ такое пространства мы внесемъ нѣкоторое тѣло съ массою, положимъ, M того же рода, то въ каждой точкѣ пространства тѣло M будетъ испытывать дѣйствіе отъ окружающихъ тѣлъ m, m', m'' и т. д. Перемѣщая тѣло M и измѣряя дѣйствіе на него тѣлъ m, m', m'' ..., мы опредѣлимъ зависимость дѣйствія тѣлъ $m, m' m''$... на тѣло M отъ положенія этого послѣдняго въ пространствѣ. Если теперь мы возьмемъ тѣло съ массою M' , то зависимость останется та же, но только дѣйствіе въ каждой точкѣ пространства измѣнится въ отношеніи $\frac{M'}{M}$; также для третьяго тѣла съ массою M'' , и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что если бы мы приняли массу одного тѣла, приведеннаго въ опредѣленное состояніе, за единицу и изслѣдовали бы данное пространство въ различныхъ его точкахъ, то тогда уже легко будетъ опредѣлить дѣйствіе массъ m, m', m'' ... на тѣло съ какою угодно массою M . Достаточно лишь полученные результаты изслѣдованія съ масою = единицѣ помножить на M . Такъ если въ различныхъ точкахъ вышеприведеннаго пространства мы нашли, что дѣйствія на тѣло съ единицею массы равны $f_1 f_2 f_3 \dots$, то дѣйствія на тѣло съ массою M будутъ: $Mf_1, Mf_2, Mf_3 \dots$.

Пространство, въ которомъ тѣло съ опредѣленною массою испытываетъ дѣйствія или силы, подобныя притяженію или отталкиванію, называется силовымъ полемъ. Напряженіемъ поля въ данной его точкѣ называютъ силу, дѣйствующую на единицу массы,

направленіе этой силы опредѣляетъ собою направленіе поля въ этой точкѣ.

Если намъ извѣстенъ основной законъ взаимодѣйствія массъ, то можно всегда вычислить напряженіе поля въ данной его точкѣ и вотъ какимъ образомъ:

Пусть $m, m', m'', m''' \dots$ массы, образующія изслѣдуемое поле (фиг. 1). Возьмемъ точку A этого по-



Фиг. 1.

ля, предположивъ, что въ ней сосредоточена масса = единицѣ. Дѣйствіе массы m въ точкѣ A будетъ равно

$$f = m \cdot \frac{1}{r^2},$$

гдѣ

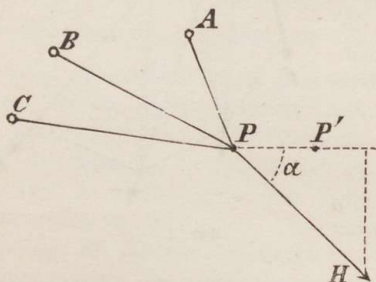
$$r = Am.$$

Эта сила f будетъ направлена по Am или по направле- нію прямо противоположному, смотря по тому, происхо- дить-ли взаимное протяженіе или взаимное отталкива- ніе. Точно также опредѣлится величина и направленіе

взаимодѣйствій Am , Am' , Am'' и т. д. Напряженіе поля въ точкѣ A будетъ слѣдовательно равнодѣйствующая силъ Am , Am' , Am'' извѣстныхъ и по величинѣ и по направленію. Эта равнодѣйствующая можетъ быть вычислена или построена геометрически. Подобнымъ же образомъ опредѣлится равнодѣйствующая въ точкахъ B , C , Но такой способъ опредѣленія будетъ очень сложенъ, онъ поведетъ къ сложнымъ вычисленіямъ, если примѣнить исключительно аналитическій методъ и къ сложнымъ геометрическимъ построеніямъ, если ввести геометрическое сложеніе силъ.

Рѣшеніе подобной задачи значительно упростится, если силу въ данной точкѣ опредѣлять по измѣренію потенциальной энергіи.

9. Потенціалъ. Пусть дано силовое поле, образуемое массами m , m' , m'' сконцентрированными въ точкахъ A , B , C (фиг. 2). Возьмемъ поло-



Фиг. 2.

жительную единицу массы и будемъ ее помѣщать въ различныхъ точкахъ поля. Посмотримъ, что произойдетъ. Положимъ, что единица массы находится въ точкѣ P поля и что всѣ массы m , m' , m'' отталкиваютъ положительную единицу массы. Вспоминая то, что нами было сказано въ § 2, мы видимъ, что положеніе устойчиваго равновѣсія этой единицы массы будетъ ∞ и чтобы привести эту массу въ P нужно ей сообщить нѣкоторую внѣшнюю работу, которая въ

положеніи P явится въ видѣ потенциальной энергіи. Пусть V эта потенциальная энергія, которую получитъ единица массы, когда мы ее приведемъ въ точку P . Перемѣстимъ теперь единицу массы изъ точки P къ безконечно близкой точкѣ P' . Потенциальная энергія, соотвѣтствующая точкѣ P' , измѣнится и будетъ $V + dV$, измѣненіе энергіи dV будетъ прямо противоположно измѣненію работы, которую произведутъ дѣйствующія силы. Дѣйствительно, когда масса перенесена въ точку P , то потенциальная энергія V прямо противоположна работѣ дѣйствующихъ силъ, ибо эти послѣднія будутъ стремиться вывести единицу массы снова изъ P на безконечность. Точно также $V + dV$ будетъ противоположна работѣ дѣйствующихъ силъ. Слѣдовательно, если въ первомъ случаѣ работа внѣшнихъ силъ T , а во 2-мъ $T + dT$, то:

$$T = -V; \quad T + dT = -(V + dV)$$

и это очевидно, каковъ бы ни былъ путь, по которому единица массы будетъ перемѣщаться, чтобы пройти изъ безконечности въ P или P' . Отсюда выводимъ:

$$T + dT - T = -V - dV + V$$

или

$$dT = -dV \quad (1)$$

Если равнодѣйствующая всѣхъ силъ на единицу массы въ точкѣ P будетъ H , то dT будетъ элементарная работа этой силы при перемѣщеніи массы отъ P къ P' , пусть $PP' = dl$ и пусть PQ направленіе силы H , составляющее съ dl уголъ α . Тогда (см. часть I, стр. 168):

$$dT = dl \cdot H \cdot \cos \alpha.$$

$H \cdot \cos \alpha$ есть ничто иное, какъ слагающая силы H по направленію dl (т. е. по направленію перемѣщенія PP'). Пусть H_l эта слагающая.

Тогда:

$$dT = H_l \cdot dl$$

Но

$$dT = -dV$$

откуда:

$$H_l \cdot dl = -dV$$

и

$$H_l = -\frac{dV}{dl} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

отсюда **теорема.**

Слагающая напряженія поля въ данной точкѣ по данному направленію равняется производной съ обратнымъ знакомъ, взятой по этому направленію отъ потенціальной энергіи, которую получаетъ единица массы, приведенная изъ безконечности въ данную точку.

Если направленіе dl будетъ соотвѣтствовать тому направленію, по которому единица массы перемѣстится подъ дѣйствіемъ напряженія поля, то направленіе этой силы будетъ совпадать съ перемѣщеніемъ и тогда можно написать:

$$H \cdot dl = -dV$$

откуда

$$H \cdot l = \frac{dV}{dl}$$

отсюда слѣдуетъ, что если мы сумѣемъ вычислить функцію V въ каждой точкѣ поля, то по ея производной опредѣлимъ напряженіе поля, какъ по величинѣ, такъ и по направленію. Если мы обозначимъ разстоянія данной точки P до массъ m m' m'' соотвѣтственно черезъ r r' r'' , то легко видѣть, что V будетъ функціею этихъ разстояній, ибо V зависитъ отъ положенія точки P , а это послѣднее зависитъ отъ разстояній r r' r''

Опредѣлимъ эту функцію въ томъ случаѣ, когда массы m m' m'' дѣйствуетъ на единицу массы съ силами:

$$k \frac{m}{r^2}, \quad k \frac{m'}{r'^2}, \quad k \frac{m''}{r''^2} \cdot \cdot \cdot$$

гдѣ k нѣкоторый постоянный коэффиціентъ и r r' r'' разстоянія единицы массы до массъ m m' m''

Но изъ трехъугольника pAp' имѣемъ

$$Ap = Ap'. \cos d\omega.$$

И такъ какъ уголъ $d\omega$ безконечно малъ, ибо P' безконечно близко къ P , то

$$Ap = AP' = r + dr$$

слѣдовательно:

$$Pp = r + dr - r = dr$$

а потому:

$$dt = K \frac{m}{r^2} \cdot dr$$

Точно также найдемъ для работы силы дѣйствующей изъ точки B :

$$dt' = K \frac{m'}{r'^2} \cdot dr'$$

изъ точки C :

$$dt'' = K \frac{m''}{r''^2} dr''$$

и т. д.

Полная работа всѣхъ силъ будетъ:

$$dT = k \frac{m}{r^2} \cdot dr + k \frac{m'}{r'^2} dr' + k \frac{m''}{r''^2} dr'' + \dots$$

или символически:

$$dT = \sum k \frac{m}{r^2} dr$$

но мы нашли, что

$$dT = - dV$$

Слѣдовательно:

$$dV = - \sum k \frac{m}{r^2} dr$$

откуда

$$V = \int - \sum k \frac{m}{r^2} dr \dots (\alpha)$$

Что бы взять интегралы, надо проинтегрировать каждый член суммы и затѣмъ взять сумму интеграловъ (см. часть I § 67), слѣдовательно надо найти интегралы члена вида

$$\int -k \frac{m}{r^2} \cdot dr$$

Но k и m постоянные множители, не зависящіе отъ переменной r а потому

$$\int -k \frac{m}{r^2} dr = km \int -\frac{1}{r^2} dr$$

Но

$$-\frac{dr}{r^2} = d\left(\frac{1}{r}\right) = d\left(r^{-1}\right)$$

(см. часть I стр. 23, примѣры)

а потому:

$$km \int -\frac{dr}{r^2} = km \int d\left(\frac{1}{r}\right) = km \frac{1}{r}$$

И такъ каждое слогаемое интегральной функціи (α) будетъ вида $k \frac{m}{r}$, а потому вся функція будетъ:

$$V = \sum k \frac{m}{r}$$

Но чтобы опредѣлить окончательно функцію V надо взять предѣлы ея измѣненій.

Мы обозначили буквою V потенціальную энергію, которую приобрѣтетъ единица массы, когда ее перенесутъ отъ безконечности къ данному положенію. слѣдовательно для r нужно взять ∞ и r (r соотвѣтствуетъ данному положенію). Такимъ образомъ:

$$V = \sum_{\infty}^r k \frac{m}{r} = \sum k \frac{m}{r} - \sum k \frac{m}{\infty}$$

Всѣ члены второй суммы будутъ $= 0$, слѣдовательно и сумма будетъ $= 0$,

а потому

$$V = \sum k \frac{m}{r} \dots \dots \dots (3)$$

Функція V называется потенціаломъ, физическое же ея значеніе въ случаѣ отталкивательныхъ силъ: потенціальная энергія приобрѣтаемая единицею массы при переносѣ массы изъ безконечности въ данную точку силового поля.

Перейдемъ теперь къ случаю притягательныхъ силъ.

Пусть единица массы опять будетъ въ точкѣ P . Силы будутъ стремиться привести ее въ положеніе устойчиваго равновѣсія. Назовемъ опять V потенціальную энергію, которую получитъ единица массы, если ее перенести изъ точки P въ безконечность, гдѣ энергія будетъ наибольшею. Работа, которую мы совершимъ, будетъ прямо противоположна работѣ дѣйствующихъ силъ которыя стремятся привести массу изъ безконечности въ положеніе устойчиваго равновѣсія. Слѣдовательно:

$$V = - T$$

Положимъ теперь, что единица массы перенесена отъ P къ безконечно близкой точкѣ P' , потенціальная энергія, которую получитъ единица массы, если перенесемъ отъ P' къ безконечности, будетъ $V + dV$ и будетъ прямо противоположна работѣ силъ:

$$V + dV = - (T + dT)$$

Отсюда выводимъ:

$$dV = - dT$$

Но dT будетъ какъ разъ элементарная работа произведенная силами поля при перемѣщеніи единицы массы отъ точки P къ P' .

Разсуждая какъ и прежде, найдемъ:

$$H_l = - \frac{dV}{dl}$$

и если направленіе перемѣщеніе dl совпадаетъ съ

направленіемъ, по которому пошла бы единица массы подъ дѣйствіемъ равнодѣйствующей силъ поля H , то:

$$H = - \frac{dV}{dl}$$

Далѣе мы найдемъ подобно предъидущему, что:

$$V = \sum k \frac{m}{r}$$

причемъ предѣлы будутъ отъ r къ ∞ т. е.

$$V = \sum_r^{\infty} k \frac{m}{r} = - \sum k \frac{m}{r} \dots (4)$$

И такъ въ случаѣ отталкивательныхъ силъ мы нашли для потенціала:

$$V = \sum k \frac{m}{r} ,$$

въ случаѣ же притягательныхъ силъ

$$V = - \sum k \frac{m}{r}$$

По этому припоминая опредѣленіе потенціала въ томъ и другомъ случаѣ, мы условимся говорить: если потенціалъ въ данной точкѣ положителенъ, это будетъ значить, что единица положительной массы, передвигаясь отъ той точки къ бесконечности разовьетъ внѣшнюю работу равную энергіи, показываемой потенціаломъ въ данной точки.

Если потенціалъ въ данной точкѣ отрицателенъ, это значить, что наоборотъ нужно затратить, для перемѣщенія единицы массы изъ данной точки къ бесконечности, количество внѣшней работы, равной энергіи, показываемой потенціаломъ данной точки.

Такъ, если въ данной точкѣ потенціалъ $= + V$ единицъ. Это значить, что единица положительной массы будетъ сама перемѣщаться отъ данной точки къ

безконечности и разовьетъ V единицъ работы. Если потенциалъ будетъ — V единицъ, то это значитъ, что единицу массы нужно заставить перемѣщаться къ безконечности и для этого необходимо развить V единицъ работы.

Примѣчаніе. Такъ какъ работа и энергія однородныя величины, а потенциалъ есть ни что иное, какъ энергія, то работа и потенциалъ измѣряются одною и тою же единицею. Изъ предъидущаго слѣдуетъ также, что если потенциалъ въ данной точкѣ положителенъ, то на безконечности потенциальная энергія единицы массы была $= 0$ и сдѣлалась равною V , когда массу привели въ данную точку. Наоборотъ, если потенциалъ отрицателенъ ($-V$) то единица массы имѣла на безконечности наибольшую потенциальную энергію и, прійдя въ данную точку истратила отъ этой энергіи V единицъ, которыя перешли въ кинетическую энергію.

Вообще, если въ данной точкѣ потенциалъ положителенъ, единица массы будетъ отталкиваться полемъ; если же потенциалъ отрицателенъ, единица массы будетъ притягиваться полемъ, стремясь произвести работу на счетъ потенциальной энергіи. Отсюда слѣдующая весьма важная теорема:

Теорема. Единица положительной массы въ данномъ силовомъ полѣ будетъ стремиться перемѣщаться въ сторону уменьшенія абсолютной величины ея потенциала.

10. Относительная потенциальная энергія массы въ данномъ полѣ. Если въ данной точкѣ поля сосредоточена положительная или отрицательная масса m , то мы назовемъ относительно потенциальною энергіею этой массы въ данной точкѣ поля произведение потенциала въ этой точкѣ на массу m .

Легко показать, что, если относительная потенциальная энергія массы m положительна, то масса будетъ отталкиваться полемъ, какова бы эта масса ни была — положительная или отри-

цательная—и наоборотъ, если относительная потенціальная энергія отрицательна, то масса m будетъ притягиваться полемъ.

Дѣйствительно, положимъ, что потенціалъ въ данной точкѣ поля V положителенъ (т. е. что единица положительной массы въ этой точкѣ имѣетъ положительный потенціалъ) и что масса m также положительна, тогда относительная энергія $m V$ будетъ положительною. Но если V положительно, то единица положительной массы будетъ отталкиваться полемъ, то же самое, конечно будетъ и съ массою m . Если V отрицательно, а m положительно, то также легко видѣть, что произойдетъ притяженіе. Положимъ теперь, что m величина отрицательная. Если V въ данной точкѣ положительно, то $m V$ будетъ отрицательно, но, при V положительномъ, единица положительной массы будетъ отталкиваться, а слѣдовательно отрицательная масса будетъ притягиваться, по этому, при $m V$ отрицательномъ, находимъ, что m будетъ притягиваться полемъ. Если V отрицательно, то $m V$ будетъ положительно (ибо m отрицательно). Но при V отрицательномъ единица положительной массы притягивается полемъ, и слѣдовательно отрицательная масса будетъ отталкиваться тѣмъ же полемъ. И такъ опять при $m V$ положительная масса m будетъ отталкиваться.

Изъ выше сказаннаго слѣдуетъ что: всякая масса положительная или отрицательная, испытывающая дѣйствіе даннаго поля будетъ перемѣщаться въ сторону уменьшенія абсолютной величины ея относительной энергіи въ этомъ полѣ:

Словомъ существуетъ полная аналогія потенціала съ относительною потенціальною энергіею.

Если прибавить ко всему сказанному теорему § 4 и разсужденія § 2, то можно сказать, что минимумъ относительной потенціальной энергіи будетъ соотвѣтствовать положенію устойчиваго равновѣсія, а максимумъ положенію неустойчиваго равновѣсія.

Это можно доказать еще и слѣдующимъ образомъ.

Мы уже показали § 9, что равнодѣйствующая сила поля на единицу массы въ данной точкѣ равно производной съ обратнымъ знакомъ взятой отъ потенціала по направленію; совпадающему съ направленіемъ перемѣщенія единицы массы отъ дѣйствія поля, т. е.

$$H = - \frac{dV}{dh}$$

гдѣ h будетъ обозначать перемѣщеніе отъ дѣйствія силъ поля. Если въ данной точкѣ поля будетъ масса $= m$, то равнодѣйствующая поля въ этой точкѣ будетъ:

$$F = - m \cdot \frac{dV}{dh}$$

Если масса m находится въ равновѣсіи, то $F = 0$, а потому:

$$- m \frac{dV}{dh} = 0$$

т. е.

$$\frac{dV}{dh} = 0.$$

Иначе говоря, въ данномъ положеніи производная потенціала равна нулю, а тогда, какъ намъ извѣстно (см. часть I, § 49), для этого положенія сама функція V будетъ либо наибольшая, либо наименьшая. Наибольшею она будетъ тогда, когда $\frac{d^2 V}{dh^2}$ будетъ отрицательною и наименьшею, когда $\frac{d^2 V}{dh^2}$ будетъ положительною.

Но

$$\frac{dV}{dh} = - H,$$

а потому

$$\frac{d^2 V}{dh^2} = - \frac{dH}{dh} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (\alpha)$$

Значить, если $\frac{dH}{dh}$ будетъ положительною, то V будетъ наибольшею. Что же это значить? Если $\frac{dH}{dh} > 0$, то это значить, что по направленію перемѣщенія массы сила станетъ дѣйствовать по направленію этого перемѣщенія; иначе говоря, въ положеніи равновѣсія эта сила была $= 0$, при выходѣ массы изъ этого положенія сила станетъ > 0 и будетъ способствовать къ дальнѣйшему перемѣщенію массы изъ положенія равновѣсія, а это и значить, что данное положеніе равновѣсія есть равновѣсіе неустойчивое.

Изъ формулы (α) также слѣдуетъ, что если $\frac{dH}{dh}$ отрицательно, то $\frac{d^2V}{dh^2}$ будетъ положительно и V будетъ наименьшею. Но если $\frac{dH}{dh}$ отрицательно, т. е. < 0 , то это значить, что при перемѣщеніи массы изъ положенія равновѣсія на величину dh появится сила, которая будетъ дѣйствовать въ обратную сторону перемѣщенія (ибо dH обратнаго знака по отношенію dh , такъ какъ $\frac{dH}{dh} > 0$), т. е. если масса выведена изъ положенія равновѣсія, то появится сила, которая будетъ стремиться привести ее снова къ положенію равновѣсія.

И такъ условіе устойчиваго равновѣсія:

$$m \cdot V = \text{minimum.}$$

Условіе неустойчиваго равновѣсія:

$$m \cdot V = \text{maximum.}$$

Масса будетъ всегда перемѣщаться подѣ дѣйствіемъ силы поля къ положенію устойчиваго равновѣсія.

11. Равнопотенціальныя поверхности. Возьмемъ какую-нибудь точку P въ пространствѣ даннаго поля, и пусть потенциалъ этой точки V равняется a единицъ.

Кромѣ точки P , въ полѣ мы найдемъ еще рядъ точекъ, въ которыхъ потенциалъ будетъ имѣть то же значеніе (a единицъ). Геометрическое мѣсто этихъ точекъ будетъ нѣкоторая поверхность. Эта поверхность будетъ обладать слѣдовательно тѣмъ свойствомъ, что во всѣхъ ея точкахъ потенциалъ единицы массы будетъ одинъ и тотъ же. Для другого значенія потенциала, напримѣръ, для значенія b найдемъ вторую поверхность, обладающую тѣмъ же свойствомъ, и т. д. Такимъ образомъ если мы возьмемъ рядъ значеній потенциала:

$$V = a$$

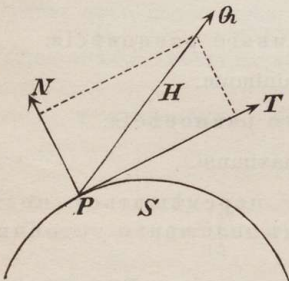
$$V = b$$

$$V = c$$

.....

то этому ряду значеній будетъ соответствовать рядъ поверхностей, во всѣхъ точкахъ которыхъ потенциалы будутъ соответственны $a, b, c, \dots$. Такія поверхности называются поверхностями уровня или равнопотенціальными поверхностями. Въ сущности въ данномъ силовомъ полѣ можно вообразить безконечное число подобныхъ поверхностей, соответствующихъ значеніямъ потенциала въ этомъ полѣ отъ 0 до ∞ .

Теорема. Направленіе поля въ данной точкѣ



Фиг. 4.

нормально къ поверхности уровня проходящей черезъ эту точку. Возьмемъ точку P (фиг. 4). Пусть V_p потенциалъ въ этой точкѣ и пусть S поверхность уровня, соответствующая этому потенциалу. Пусть H напряженіе поля въ точкѣ P и PQ направленіе этого поля.

Силу H мы можемъ разложить на 2 слогающія: одну

PN нормальную къ поверхности S , а другую PT касательную къ S .

Но: $PN = -\frac{dV}{dn}$, гдѣ dn есть безконечно малое перемѣщеніе по нормали PN , а $PT = -\frac{dV}{dt}$, гдѣ dt есть безконечно малое перемѣщеніе по касательной; но безконечно малое перемѣщеніе по касательной совпадаетъ съ безконечно малымъ перемѣщеніемъ по поверхности S , т. е. $dt = ds$, а потому можно написать:

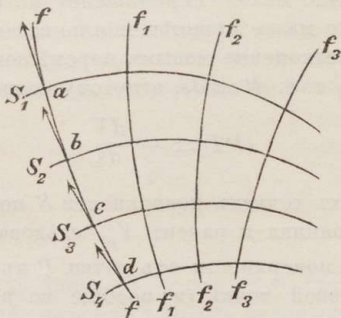
$$PT = -\frac{dV}{ds}$$

Но во всѣхъ точкахъ поверхности S потенциалъ величина постоянная и равенъ V_p , слѣдовательно при переходѣ по поверхности отъ точки P къ другой безконечно близкой точкѣ (и вообще ко всякой точкѣ этой поверхности) потенциалъ не измѣнится, иначе говоря, $\frac{dV}{ds}$ будетъ $= 0$, а потому $PT = 0$. Итакъ, сила поля сводится къ ея нормальной слогающей, т. е. направление поля всегда нормально къ поверхности уровня, что мы обозначимъ символически уравненіемъ:

$$H = -\frac{dV}{dn} \dots \dots \dots (5)$$

12. Линія силъ. Если мы вообразимъ въ полѣ массу, испытывающую дѣйствіе поля, то эта послѣдняя будетъ перемѣщаться все время нормально къ окружающимъ поверхностямъ уровня и опишетъ слѣдовательно кривую, касательная къ которой въ каждой точкѣ будетъ изображать направленіе силы поля (ибо касательная будетъ нормальна къ соотвѣтствующей поверхности уровня). Такъ, если $s_1 s_2 s_3 \dots$ поверхности уровня (фиг. 5), то кривая f , нормальная къ этимъ поверхностямъ, будетъ изображать траекторію массы, движущейся подъ дѣйствіемъ силы поля, направленіе которой будетъ изображаться въ каждой точкѣ, какъ

$a, b, c \dots$, касательными къ этой кривой, ибо эти касательныя нормальны къ соотвѣтствующимъ поверхностямъ уровня. Такихъ линій какъ f можно вообразить безконечное множество, и всѣ онѣ получаютъ названіе линій силъ поля. Эти линіи силъ опредѣляютъ собою въ каждой точкѣ направленіе силы поля.



Фиг. 5.

13. Силовыя линіи. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что сила поля въ данной точкѣ стремится какъ бы оторвать элементъ поверхности уровня въ этой точкѣ. Отсюда возникаетъ мысль относить силу поля къ единицѣ площади поверхности уровня, какъ напримѣръ мы привыкли относить давленіе къ единицѣ нормальной къ нему площади. Пусть напряженіе поля въ данной точкѣ равно H единицѣ силы. Это напряженіе мы можемъ вообразить въ видѣ H нитей исходящихъ отъ единицы площади поверхности уровня данной точки и натянутыхъ такъ, чтобы натяженіе каждой изъ нихъ равнялось бы единицѣ силы (грамму, фунту и т. п. смотря по тому, какую изъ этихъ единицъ мы выберемъ для измѣренія напряженія поля). Эти нити должны быть нормальны къ поверхности уровня.

Мы видѣли уже, что масса, оторванная отъ поверхности уровня, пойдетъ по направленію линій силъ поля, слѣдовательно, чтобы нити вполне изображали силу

поля, необходимо чтобы эти нити кромѣ натяженія обладали и изогнутостью по направленію линій силъ. Тогда единица площадки потащится нормально къ линіямъ силъ, если вообразить, что нити начнутъ сокращаться по направленію этихъ линій.

Если поле не равномернo то въ одномъ мѣстѣ на единицу площади подобныхъ нитей придется больше, а въ другомъ меньше. Иначе говоря въ одномъ мѣстѣ онѣ будутъ гуще, въ другомъ рѣже.

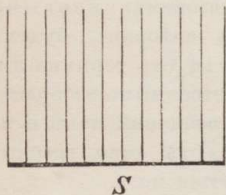
Эти воображаемыя нити мы назовемъ силовыми линіями. Мы, вопреки многимъ авторамъ, будемъ отличать терминъ силовыя линіи отъ термина линіи силъ; первыя служатъ вещественнымъ изображеніемъ напряженія поля, какъ по величинѣ такъ и по направленію, а вторыя представляютъ лишь траекторію перемѣщенія массы отъ дѣйствія поля.

Мы назовемъ равномернымъ полемъ такое поле, во всѣхъ точкахъ котораго какъ направленіе такъ и напряженіе одинаковы. Изъ этого слѣдуетъ, что силовыя линіи въ подобномъ полѣ будутъ въ видѣ прямолинейно-натянутыхъ нитей, а поверхности уровня будутъ плоскости перпендикулярныя къ этимъ линіямъ. Кромѣ того, силовыя линіи будутъ распределены равномерно, т. е. вездѣ на единицу площади придется одинаковое число силовыхъ линій.

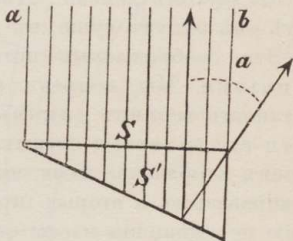
14. Силовой потокъ. Возьмемъ сначала случай равномернаго поля. Вообразимъ площадь S нормальную къ силовымъ линіямъ (фиг. 6). Мы можемъ сейчасъ же сосчитать сколько придется силовыхъ линій на всю площадь S , зная напряженіе поля. Дѣйствительно, если напряженіе поля H , то это значитъ, что на единицу нормальной къ направленію поля площади приходится H силовыхъ линій и, такъ-какъ поле равномерно, то на всю площадь S придется $H \cdot S$ линій силъ. Это выраженіе называется силовымъ потокомъ, пронизывающимъ нормальную къ нему площадь.

Возьмемъ теперь другую площадь S' наклоненную подъ нѣкоторымъ угломъ къ силовымъ линіямъ (фиг. 7). Найдемъ выраженіе силового потока пронизывающаго

эту площадь въ зависимости отъ напряженія поля. Проведемъ плоскость S нормальную къ силовымъ линиямъ. Крайнія силовыя линіи, касающіяся краевъ площадки S' , каковы a , b , вырѣжутъ во 2-й плоскости площадку S , черезъ которую пройдетъ какъ разъ то число силовыхъ линій, какъ и черезъ площадь S' . Пусть N искомое число силовыхъ линій. Мы можемъ



Фиг. 6.



Фиг. 7.

вычислить число силовыхъ линій, пронизывающихъ площадь S , оно будетъ:

$$H \cdot S$$

и это число будетъ равно числу силовыхъ линій, пронизывающихъ площадь S' , т. е.

$$N = H \cdot S.$$

Но изъ фигуры слѣдуетъ, если α уголъ между S и S'

$$S = S' \cdot \cos \alpha$$

слѣдовательно:

$$N = H \cdot S' \cdot \cos \alpha.$$

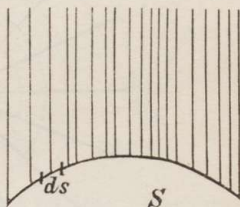
Уголъ α равенъ углу между перпендикуляромъ къ площади S' и направлениемъ силовыхъ линій, иначе, говоря между нормалью къ площади S' и силовыми линіями. Отсюда слѣдующее правило:

Силовой потокъ равномернаго поля, пронизывающій какую нибудь площадь равенъ произведенію напряженія поля на данную площадь и на $\cos$ угла образуемаго нормалью къ

этой площади и направлѣніями силовыхъ линій.

Перейдемъ теперь къ случаю какого угодно поля и возьмемъ площадь S' какойнибудь поверхности S (фиг. 8) въ этомъ полѣ. Посмотримъ чему будетъ равенъ силовой потокъ, пронизывающій эту площадь.

Разсмотримъ безконечно малый элементъ ds этой поверхности. Въ предѣлахъ элемента ds поле можно считать равномернымъ. Пусть H напряженіе поля у этого элемента. Пусть α уголъ нормали къ этому элементу съ направлѣніемъ силовыхъ линій ему соотвѣтствующихъ.



Фиг. 8.

Тогда силовой потокъ на безконечно малый элементъ ds будетъ на основаніи предыдущаго правила.

$$H. ds. \cos \alpha$$

На всю площадь S силовой потокъ слѣдовательно будетъ:

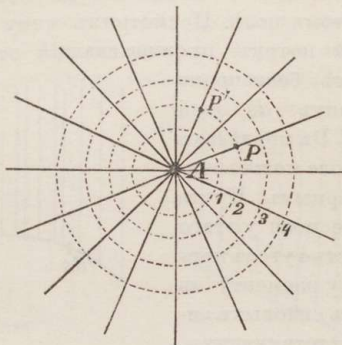
$$\int_0^S H. ds. \cos \alpha \dots \dots \dots (6)$$

Интеграль нужно взять по всей поверхности. H и $\cos \alpha$ будутъ измѣняться отъ одного элемента поверхности къ другому.

15. Зависимость силового потока отъ массъ.

Посмотримъ теперь какое соотношеніе существуетъ между потокомъ и массами, производящими этотъ послѣдній. Разсмотримъ сначала случай одиночной массы сконцентрированной въ данной точкѣ A на примѣръ (фиг. 9). Если вокругъ этой точки, какъ центра, мы опишемъ рядъ сферическихъ поверхностей, то эти поверхности будутъ равнопотенціальными поверхностями поля возбуждаемаго точкою A . Дѣйствительно въ каждой точкѣ сферы 2 напр. потенциалъ будетъ величина постоянная. Кромѣ того единица массы, рас-

положенная въ какой угодно точкѣ сферы 2, будетъ испытывать одну и ту же силу. Въ самомъ дѣлѣ пусть r_2 радіусъ сферы 2, единица массы расположенная въ



Фиг. 9.

P напримѣръ будетъ испытывать отъ массы m въ точкѣ A силу:

$$k \frac{m}{r_2^2}$$

Если единица массы будетъ въ точкѣ P' , то дѣйствующая сила будетъ также:

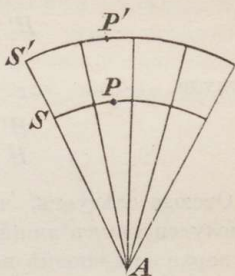
$$k \frac{m}{r_2^2} \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда слѣдующее замѣчаніе:

Напряженіе поля точки съ массою m одинаково во всѣхъ точкахъ шаровой поверхности описанной изъ данной точки, какъ центра:

Если вообразить силовыя линіи, то онѣ будутъ всегда направлены нормально къ приведеннымъ выше шаровымъ поверхностямъ, сходясь въ точкѣ съ дѣйствующею массою. Посмотримъ теперь можемъ ли мы, при такомъ расположеніи силовыхъ линій, измѣрять поле количествомъ этихъ линій, приходящихся въ данномъ пунктѣ на единицу равно потенціальной поверхности. Возьмемъ какую-нибудь точку P поля (фиг. 10) отнимемъ шаровую поверхность s радіусомъ

А P пусть площадь S равняется единицѣ площади пусть H напряженіе поля въ точкѣ P , вообразимъ H силовыхъ линій пронизывающихъ эту единицу площади и условимся, что ихъ число какъ разъ будетъ представлять напряженіе поля. Если теперь мы возьмемъ другую шаровую поверхность, проходящую черезъ точку P' , то тоже число силовыхъ линій упадетъ уже на нѣкоторую площадь S' , которая будетъ больше единицы и именно такая, что:



Фиг. 10.

$$\frac{S'}{S} = \frac{\overline{OP'}^2}{\overline{OP}^2}$$

Слѣдовательно на единицу площади въ этомъ мѣстѣ придется уже не H силовыхъ линій, а меньше и именно во столько разъ меньше во сколько S' больше S , т. е.

въ $\frac{\overline{OP'}^2}{\overline{OP}^2}$ разъ меньше. Но тогда выйдетъ что, если за

напряженіе поля принимать число силовыхъ линій проходящихъ на единицу равно потенціальн. поверхности,

напряженіе поля въ P' должно быть въ $\frac{\overline{OP'}^2}{\overline{OP}^2}$ разъ меньше напряженія въ точкѣ P , т. е.

$$\frac{H'}{H} = \frac{\overline{OP'}^2}{\overline{OP}^2}$$

Посмотримъ вѣрно ли это:

Если дѣйствующая масса точки A — m , то напряженіе поля въ P будетъ:

$$H = k \frac{m}{\overline{OP}^2}$$

въ точкѣ же P' оно будетъ:

$$H' = k \frac{m}{OP'^2}$$

Откуда

$$\frac{H'}{H} = \frac{OP^2}{OP'^2}$$

Отсюда слѣдуетъ, что считать напряженіе поля по числу силовыхъ линій на единицу равнопотенціальной поверхности вполне возможно, такъ-какъ такое опредѣленіе напряженія поля согласуется съ первоначальнымъ опредѣленіемъ (сила на единицу массы).

Посмотримъ теперь, какъ выразится потокъ на данную площадь S равнопотенціальной поверхности въ зависимости отъ напряженія поля. Если H напряженіе поля на данной равнопотенціальной поверхности (такъ мы выразиться можемъ, ибо напряженіе поля будетъ одинаково во всѣхъ точкахъ этой поверхности), то это значить, что на такой поверхности на единицу площади придется H силовыхъ линій, слѣдовательно на площадь S этихъ линій будетъ:

$$H \cdot S$$

Но если m масса дѣйствующей точки и r радіусъ шаровой поверхности S (описанной изъ этой точки), то

$$H = k \frac{m}{r^2}$$

Отсюда потокъ будетъ:

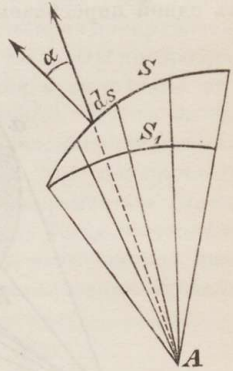
$$N = \frac{k m}{r^2} \cdot S.$$

Но $\frac{S}{r^2}$ есть выраженіе тѣлеснаго угла, подъ которымъ видна поверхность S изъ центра, т. е. изъ данной точки съ массою m . Назовемъ ω этотъ уголъ. Тогда

$$N = k m \cdot \omega.$$

И такъ силовой потокъ, исходящій изъ точки на данную площадь нормальной къ нему поверхности пропорціоналенъ произведенію массы точки на тѣлесный уголъ, подъ которымъ видна эта площадь изъ вершины потока.

Возьмемъ теперь площадь S какой-нибудь поверхности и опредѣлимъ потокъ отъ точки A на эту площадь. Такъ-какъ эта поверхность произвольная, а не поверхность уровня, то поле будетъ мѣняться отъ одной точки къ другой на поверхности. Но если мы проведемъ шаровую равнопотенціальную поверхность, какъ S , напримѣръ, то легко видѣть, что потокъ, падающій на поверхность S , будетъ тотъ же, что и потокъ, падающій на поверхность S_1 . Но потокъ, падающій на поверхность S_1 , какъ поверхность уровня, будетъ:



Фиг. 11.

$$k m \cdot \omega \dots \dots \dots (7)$$

гдѣ ω уголъ, подъ которымъ видна площадь S_1 . Подъ этимъ же угломъ видна и площадь S . Отсюда теорема:

Теорема. Потокъ, исходящій отъ массы, сосредоточенной въ точкѣ, и падающій на данную площадь произвольной поверхности, пропорціоналенъ тѣлесному углу, подъ которымъ видна изъ точки площадь.

Въ зависимости отъ напряженія поля потокъ на площадь S выразится, какъ мы уже знаемъ, (§ 14, формула 6) формулою:

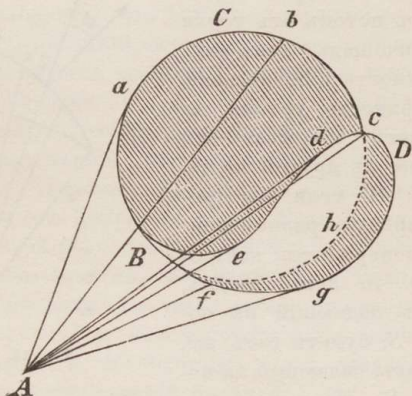
$$\int_0^S H \cdot ds \cdot \cos \alpha$$

гдѣ α уголъ, составляемый нормалью къ соответствующей

щему элементу ds съ направлениемъ силовыхъ линій, пронизывающихъ этотъ элементъ. Отсюда уравненіе:

$$\int_0^S H \cdot ds \cdot \cos \alpha = k m \omega \quad . \quad . \quad (8)$$

Если потокъ пронизываетъ два раза поверхность, то мы условимся называть этотъ потокъ по отношенію къ одной пересѣкаемой части входящимъ, а по отно-



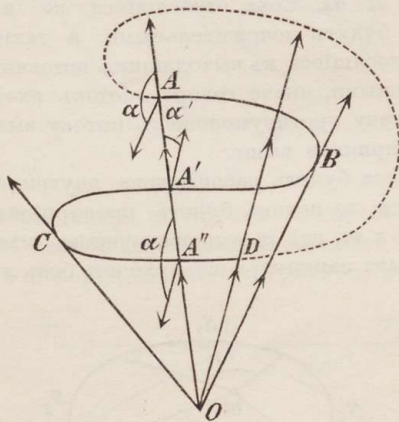
Фиг. 12.

шенію къ другой выходящимъ. Такъ по отношенію къ части $BdCh$ поверхности $DgBd$ потокъ входящій, а по отношенію къ подобной же части $BdCh$, вырѣзанной потокомъ на задней поверхности BC h , тотъ же потокъ будетъ выходящимъ.

|| Кромѣ того, мы будемъ разсматривать потокъ только, какъ входящій, или только, какъ выходящій, для всѣхъ тѣхъ частей поверхности, которые пересѣкаются одинъ разъ силовыми линіями. Такъ для частей, затѣненныхъ на фиг. 12, потокъ будетъ, напримѣръ, входящимъ. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что потокъ и входящій и выходящій всегда будутъ равны, ибо они заключаются въ однихъ и тѣхъ же тѣлесныхъ углахъ. При суммированіи потоковъ мы примемъ, что потокъ входящій и выходящій противоположныхъ знаковъ и что слѣдовательно эти потоки взаимно сокращаются.

Въ окончательномъ результатѣ останется лишь потокъ, падающій на части поверхности, пересѣкаемые одинъ разъ силовыми линиями. Такъ для поверхности фигуры 12 останется потокъ, падающій на затѣненные части. Этотъ потокъ будетъ слѣдовательно пропорционаленъ тѣлесному углу, соответствующему затѣненной поверхности. Это будетъ какъ разъ уголъ, подъ которымъ изъ точки A видны края поверхности, въ предположеніи, что передняя часть DB прозрачна.

Раздѣленіе потоковъ на входящіе и исходящіе вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображеній. Пусть въ самомъ общемъ видѣ дана сложная разомкнутая поверхность $ABCD$ (фиг. 13). Замкнемъ эту поверхность произвольною дополнительною поверхностью (представленною на фигурѣ пунктиромъ). Тогда потокъ будетъ входящимъ по отношенію къ тѣмъ частямъ данной поверхности $ABCD$, черезъ которыя онъ входитъ



Фиг. 13.

во внутрь воображаемой замкнутой поверхности; тамъ же гдѣ потокъ выходитъ изъ этой послѣдней, онъ будетъ исходящимъ. Такъ для частей CA'' , $A''D$, $D'B$, $A'D''$ потокъ будетъ входящимъ, а для частей CA' , $A'D$ и $D'B$ исходящимъ.

Съ другой стороны, выраженіе полнаго потока на данную поверхность будетъ:

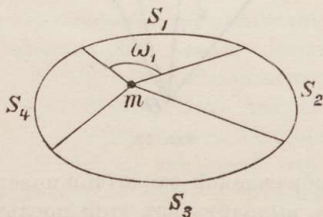
$$\int_0^s H. ds. \cos \alpha.$$

гдѣ α будетъ уголъ образуемый направлениемъ потока съ нормалью къ соотвѣствующему элементу поверхности. Чтобы этотъ уголъ былъ вполнѣ опредѣленъ, необходимо опредѣлить направление нормали по элементу поверхности. Условимся брать нормаль во внѣшнюю сторону воображаемой замкнутой поверхности, тогда легко видѣть, что углы, образуемые нормалью съ направлениемъ входящихъ потоковъ, будутъ тупые, а съ направлениемъ выходящихъ потоковъ острые. Но въ такомъ случаѣ въ выраженіи

$$\int H ds. \cos \alpha.$$

элементы $H ds. \cos \alpha$ относящіеся ко входящимъ потокамъ будутъ положительными, а такіе же элементы, относящіеся къ выходящимъ потокамъ, будутъ отрицательными, иначе говоря, потокъ входящій будетъ по знаку противоположенъ потоку выходящему, что мы и приняли выше.

Если масса будетъ расположена внутри замкнутой поверхности, то потокъ будетъ пропорціоналенъ выраженію $4 \pi m$, гдѣ m вышеозначенная масса. Возьмемъ сначала замкнутую поверхность безъ входящихъ



Фиг. 14.

и выходящихъ частей (фиг. 14). Раздѣлимъ эту поверхность на нѣсколько частей $S_1 S_2 S_3 S_4$. Потокъ

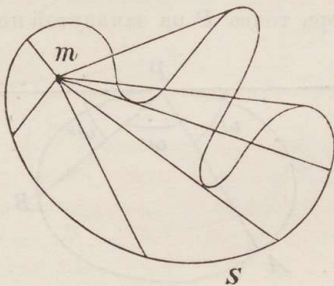
на часть S_1 будетъ $kt\omega_1$, на часть S_2 — $kt\omega_2$, на часть S_3 — $kt\omega_3$ и на часть S_4 — $kt\omega_4$. Полный потокъ на всю поверхность будетъ:

$$kt (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)$$

Но сумма тѣлесныхъ угловъ вокругъ точки, какъ извѣстно $= 4\pi$, слѣдовательно полный потокъ будетъ:

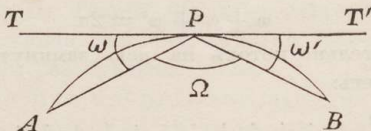
$$N = 4\pi kt \dots \dots \dots (9)$$

Если теперь возьмемъ болѣе сложную поверхность (фиг. 15) то, поступая, какъ раньше для сложной разомкнутой поверхности, найдемъ, что полный потокъ тоже будетъ $4\pi kt$.



Фиг. 15.

Перейдемъ теперь къ случаю, когда масса m находится на данной поверхности. Возьмемъ сначала незамкнутую поверхность, AB наприкладъ. Въ точкѣ P ,



Фиг. 16.

гдѣ мы предполагаемъ массу, раздѣлимъ поверхность на 2 части PA и PB , и проведемъ касательную плоскость TT' очевидно, что потокъ изъ P на часть AP будетъ пропорціоналенъ углу TPA , а на часть PB

углу $T'PB$. Называя эти углы ω и ω' , можем следовательно написать:

$$N = km (\omega + \omega')$$

Пусть уголъ подъ которымъ видны края поверхности Ω , т. е. пусть $APB = \Omega$. Известно, что сумма тѣлесныхъ угловъ по одну сторону плоскости $= 2\pi$, следовательно:

$$\omega + \omega' + \Omega = 2\pi$$

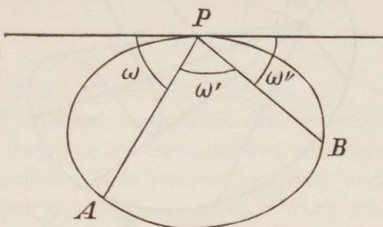
Откуда

$$\omega + \omega' = 2\pi - \Omega$$

и

$$N = km (2\pi - \Omega) \dots (10).$$

Пусть теперь точка P на замкнутой поверхности S .



Фиг. 17.

Раздѣлимъ ее на три части PA , AB , PB . Тогда видно, что полный потокъ равенъ:

$$km (\omega + \omega' + \omega'')$$

но:

$$\omega + \omega' + \omega'' = 2\pi$$

Слѣдовательно потокъ на всю замкнутую поверхность будетъ:

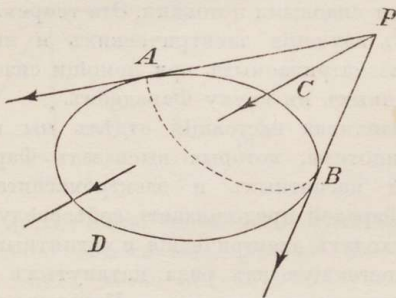
$$N = 2\pi km \dots (11).$$

Представимъ себѣ теперь, что масса находится въ точкѣ расположенной внѣ замкнутой поверхности (фиг. 18). Проведемъ изъ точки P конусъ касательный къ поверхности PAB . Этотъ конусъ раздѣлитъ поверхность на 2 части ACB и ADB . Общій потокъ будетъ равняться суммѣ потоковъ на эти

части. Но потокъ на ACB измѣряется тѣлеснымъ угломъ APB и потокъ на ADB измѣряется тѣмъ же угломъ. Первый потокъ будетъ входящимъ въ поверхность, а второй выходящимъ, слѣдовательно сумма ихъ будетъ равна нулю, ибо въ выраженіи общаго потока $\int H. ds. \cos \alpha$, члены $H. ds. \cos \alpha$ относящіеся къ части ACB будутъ одного знака, а члены относящіеся къ части ADB противоположнаго.

И такъ:

Сумма потоковъ на замкнутую поверхность изъ внѣшней точки равна нулю.



Фиг. 18.

16. Теорема Грина. Въ предъидущемъ параграфѣ мы разсматривали потокъ отъ одной массы. Если будетъ нѣсколько массъ, то мы примѣнимъ все сказанное къ каждой массѣ въ отдѣльности, а затѣмъ просуммируемъ результаты. Такимъ образомъ слѣдующая теорема, установленная Гриномъ, является прямымъ слѣдствіемъ всего разобраннаго нами.

Общій потокъ пронизывающій данную замкнутую поверхность въ данномъ полѣ, происходящій отъ дѣйствія нѣсколькихъ массъ распределенныхъ въ пространствѣ, равенъ $4\pi k$ разъ суммѣ массъ, находящихся внутри поверхности, увеличенной $2\pi k$ разъ суммою массъ, лежащихъ на поверхности.

Массы лежащія внѣ поверхности дадутъ, какъ мы

уже видѣли, потоки суммы, которыхъ будутъ равны нулю. Математически теорема Грина выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\int H \, ds \, \cos \alpha = 4\pi k \sum m + 2\pi k \sum m' \dots (12)$$

гдѣ $\sum m$ представляетъ сумму массъ внутри поверхности, а $\sum m'$ сумму массъ на поверхности.

Такъ какъ всякій потокъ происходитъ отъ дѣйствія массъ расположенныхъ въ пространствѣ, то ясно, что теорема Грина въ самомъ общемъ видѣ устанавливаетъ связь между дѣйствующими массами и ими производимыми силовыми потоками. Эта теорема является основою въ изученіи электрическихъ и магнитныхъ явленій, рассматриваемыхъ при помощи силовыхъ линій, введенныхъ въ науку Фарадеемъ.

17. Заканчивая настоящій отдѣлъ мы приведемъ тутъ тѣ гипотезы, которыя высказалъ Фарадей для объясненія магнитныхъ и электромагнитныхъ дѣйствій *). Фарадей представляетъ себѣ среду, въ которой происходятъ электрическія и магнитныя дѣйствія, какъ бы состоящую изъ ряда натянутыхъ упругихъ нитей стремящихся сократиться. Кривизна нитей или силовыхъ линій объясняется свойствомъ этихъ послѣднихъ притягиваться, когда онѣ противоположнаго направленія, и отталкиваться, когда ихъ направленіе одинаково. Въ зависимости отъ среды силовыя линіи будутъ гуще или рѣже, иначе говоря та или другая среда болѣе или менѣе проницаема для силовыхъ линій.

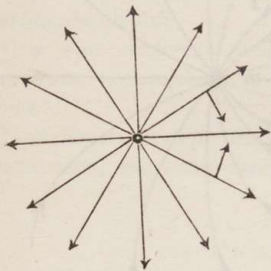
На основаніи этихъ гипотезъ не трудно уяснить себѣ распредѣленіе силовыхъ линій въ зависимости отъ положенія дѣйствующихъ массъ.

Возьмемъ сначала единичную массу. Силовыя линіи этой массы пойдутъ радіально и вытянутся въ прямыя линіи, такъ какъ каждая изъ нихъ будетъ отталкиваться съ одинакою силою съ обѣихъ сторонъ, ибо

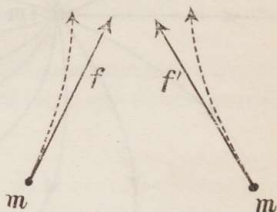
*) Faraday Experimental Researches.

по ту и другую сторону имѣется одинаковое число силовыхъ линій ее отталкивающихъ. Тоже самое можно сказать и о всѣхъ другихъ силовыхъ линіяхъ точки. Разсмотримъ теперь двѣ массы дѣйствующія отталкивательно другъ на друга.

Возьмемъ двѣ силовыхъ линіи F и F' , обѣ эти линіи, будучи одного направленія, оттолкнутся и при-

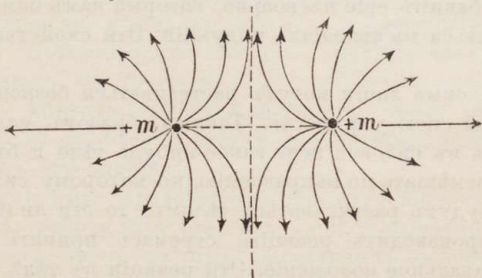


Фиг. 19.



Фиг. 20.

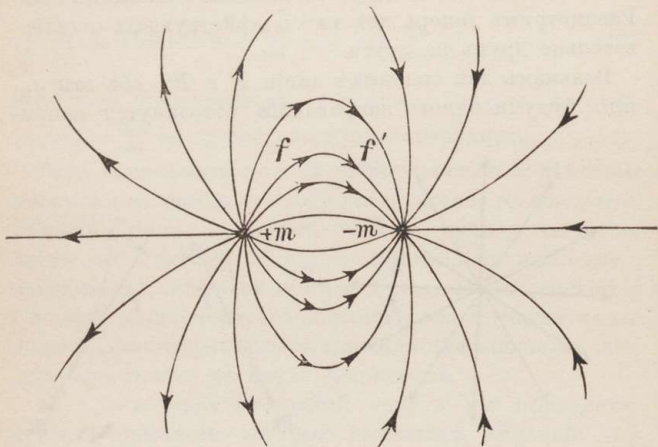
мутъ изогнутый видъ, показанный пунктиромъ. Разсуждая точно такимъ же образомъ для остальныхъ силовыхъ линій, легко получить слѣдующее изображеніе распредѣленія силовыхъ линій поля, происходящаго отъ двухъ массъ одинаковаго знака.



Фиг. 21.

Если имѣемъ двѣ массы противоположныхъ знаковъ $+m$ и $-m$, то двѣ встрѣчающіяся силовыя линіи F и F' будутъ стремиться слиться въ одну и стянутся по прямой линіи, но этого не дадутъ сдѣлать сосѣднія

линіи, тоже слившіяся въ одну, ибо онѣ будутъ отталкивать объ предъидущія и т. д.



Фиг. 22.

Мы неоднократно будемъ пользоваться гипотезами Фарадея для объясненія электрическихъ и электромагнитныхъ явленій. Къ упомянутымъ выше свойствамъ мы прибавимъ еще нѣсколько, которые намъ помогутъ разобраться въ явленіяхъ индукціи. Эти свойства слѣдующія:

1) Силовыя линіи могутъ растягиваться безконечно, сохраняя свою упругость. Такимъ образомъ, если мы введемъ въ силовое поле какое-нибудь тѣло и будемъ его перемѣщать по направленію, по которому силовыя линіи будутъ растягиваться тѣломъ, то эти линіи будутъ производить реакцію, стремясь принять свое первоначальное положеніе. Эти реакціи въ тѣлѣ вызовутъ проявленія той или другой энергіи. Если же тѣло будетъ скользить по силовымъ линіямъ, то реакціи не будетъ, а слѣдовательно не будетъ проявленій никакой энергіи.

2) Всякое нарушеніе равновѣсія силовыхъ линіи

даетъ начало реакціи, которая выражается проявленіемъ той или другой энергіи.

3) Окружающія тѣла оказываютъ нѣкоторое сопротивленіе къ распредѣленію силовыхъ линій. Слѣдовательно если въ средѣ возбуждаются силовыя линіи, то до момента принятія силовыми линіями соотвѣтствующая распредѣленія будетъ имѣть мѣсто реакція, которая отразится въ томъ или другомъ видѣ на окружающихъ тѣлахъ.

Эти три свойства резюмируютъ собою всѣ явленія индукціи, которыя мы будемъ разсматривать впослѣдствіи.

Приведемъ теперь нѣсколько полезныхъ примѣровъ всего того, что нами было изложено въ этомъ отдѣлѣ.

ГЛАВА III.

Нѣкоторыя примѣненія основной теоріи.

18. Потенціальная энергія образованія системы массъ. Положимъ, что у насъ въ точкахъ $o, o', o'' \dots$ сосредоточены массы одного и того же рода $m, m', m'' \dots$. Такъ-какъ такія массы взаимно отталкиваются, то необходимо затратить нѣкоторую работу, чтобы привести массы $m, m', m'', \dots$ въ упомянутыя точки. Потенціальною энергіею системы массъ перенесенныхъ въ точки $o, o', o'' \dots$ будетъ вся сумма работъ, которую придется затратить, чтобы привести эти массы изъ безконечности въ названныя точки. Вычислимъ эту энергію.

Когда всѣ массы разойдутся въ безконечность то онѣ совершать работу какъ разъ равную потенциальной энергіи этихъ массъ въ ихъ занимаемыхъ положеніяхъ. (§§ 2, 3). Возьмемъ сначала массу m въ точкѣ o . Потенціальная энергія этой массы будетъ (§ 10) $m \cdot V_1$, гдѣ V_1 потенциалъ въ точкѣ o . Но (§ 9)

$$V_1 = k \Sigma \frac{m}{r}$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} k m' \cdot \left(\frac{m}{r_1} \right) \\ k m'' \left(\frac{m}{r_2} + \frac{m'}{r'_2} \right) \\ k m^{(n-1)} \left(\frac{m}{r_{n-1}} + \frac{m'}{r'_{n-1}} + \frac{m''}{r''_{n-1}} + \dots + \frac{m^{(n-2)}}{r^{(n-2)}_{n-1}} \right) \end{array} \right.$$

Прибавимъ еще рядъ:

$$(3) \quad k m^{(n)} \left(\frac{m}{r_n} + \frac{m'}{r'_n} + \dots + \frac{m^{(n-1)}}{r^{(n-1)}_n} \right)$$

Просуммируемъ всё эти добавочныя строки по вертикальнымъ рядамъ и выпишемъ каждую вертикальную сумму въ горизонтальную строку, выводя за скобки въ первой вертикальной суммѣ m , во второй m' и т. д.

Тогда получимъ:

$$\begin{array}{l} k m \left(\frac{m'}{r_1} + \frac{m''}{r_2} + \dots + \frac{m^{(n)}}{r_n} \right) \\ k m' \left(\frac{m''}{r'_2} + \dots + \frac{m^{(n)}}{r'_n} \right) \\ k m'' \left(\frac{m'''}{r''_3} + \dots + \frac{m^{(n)}}{r''_n} \right) \\ \dots \dots \dots \\ k m^{(n-1)} \left(\dots + \frac{m^{(n)}}{r^{(n-1)}_n} \right) \end{array}$$

Но тогда видно, что эта сумма равна суммѣ (1). Итакъ сумма (2) вмѣстѣ съ рядомъ (3) равна суммѣ (1). Обѣ же суммы (1) и (2) вмѣстѣ составляютъ какъ разъ сумму вида:

$$\sum m \sum \frac{m'}{r}$$

которая символически обозначает сумму (1), добавленную строками суммы (2) и (3), т. е. обозначает сумму:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} k m \left(\frac{m'}{r_1} + \frac{m''}{r_2} + \frac{m'''}{r_3} + \dots + \frac{m^{(n)}}{r_n} \right) \\ k m' \left(\frac{m}{r_1} + \frac{m''}{r'_2} + \frac{m'''}{r'_3} + \dots + \frac{m^{(n)}}{r'_n} \right) \\ k m'' \left(\frac{m}{r_2} + \frac{m'}{r'_2} + \frac{m'''}{r''_3} + \dots + \frac{m^{(n)}}{r_n} \right) \\ \dots \dots \dots \\ k m^{(n)} \left(\frac{m}{r_n} + \frac{m'}{r'_n} + \dots \dots \dots + \frac{m^{(n-1)}}{r^{(n-1)}_n} \right) \end{array} \right.$$

Поэтому потенциальная энергия данной системы массы будетъ:

$$W = \frac{1}{2} \sum m \sum \frac{m'}{r}$$

Но изъ выраженія (4) слѣдуетъ, что всѣ суммы $\sum \frac{m'}{r}$, представляя собою выраженія въ скобкахъ каждой изъ строкъ, суть ничто иное какъ потенциалъ каждой массы по отношенію ко всѣмъ остальнымъ массамъ. Слѣдовательно, если эти потенциалы мы обозначимъ черезъ

V_m для массы m

$V_{m'}$ „ „ m'

.....

$V_{m^{(n)}}$ для массы $m^{(n)}$

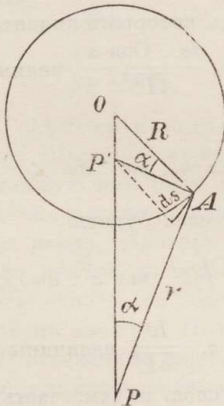
то можно написать, что:

$$W = \frac{1}{2} \left(m V_m + m' V_{m'} + \dots + m^{(n)} V_{m^{(n)}} \right)$$

R выйдет за знак $\sum$, ибо это радиусъ шара. Но $\sum dm = m$, всей массѣ шароваго слоя, а потому

$$V = k \frac{M}{R} \dots \dots \dots (14)$$

20. Дѣйствіе однороднаго шароваго слоя на массу, расположенную внѣ слоя. Пусть данная масса m сосредоточена въ точкѣ P . Очевидно, что, вслѣдствіе симетріи, равнодѣйствующая всѣхъ дѣйствій шароваго слоя будетъ направлена по oP . Элементъ ds въ



Фиг. 24.

A дѣйствуетъ на массу P съ силою, слогающая которой по oP будетъ:

$$dF = km \cdot \sigma \frac{ds}{r^2} \cdot \cos \alpha \dots \dots \dots (\alpha)$$

Возьмемъ точку P' , сопряженную съ точкою P , т. е. такую, чтобы: $oP' \times oP = R^2$. Соединимъ P' съ A . Треугольники oAP' и oAP подобны, такъ-какъ они имѣютъ общій уголъ AoP и стороны его заключающія пропорціональны. Слѣдовательно:

$$\frac{r}{AP'} = \frac{oP}{R}$$

откуда:

$$r = \frac{OP}{R} \cdot AP'$$

Замѣняя r въ выраженіи (α) , получимъ:

$$dF = k \cdot m \cdot \sigma \frac{ds \cdot \cos \alpha}{AP'^2} \times \frac{R^2}{OP^2}$$

Но $ds \cdot \cos \alpha$ есть ничто иное какъ проекція элемента ds на шаровую поверхность, описанную изъ P' радіусомъ $P'A$. Слѣдовательно $\frac{ds \cdot \cos \alpha}{AP'^2} =$ тѣлесному углу $d\omega$, подъ которымъ виденъ элементъ ds изъ точки P . Замѣняя $\frac{ds \cdot \cos \alpha}{AP'^2}$ величиною $d\omega$, получимъ:

$$dF = k \cdot m \sigma \cdot d\omega \times \frac{R^2}{OP^2}$$

Дѣйствіе цѣлаго слоя будетъ:

$$F = \int k \cdot m \cdot \sigma \cdot d\omega \times \frac{R^2}{OP^2}$$

и такъ-какъ m , k , σ , $\frac{R^2}{OP^2}$ величины постоянныя для всѣхъ элементовъ слоя, то (см. часть I § 68) можемъ написать:

$$F = m \cdot k \sigma \times \frac{R^2}{OP^2} \int d\omega$$

Чтобы охватить всѣ элементы, нужно $d\omega$ измѣнять отъ 0 до 4π , поэтому предѣлы интеграла будутъ:

$$F = m \cdot k \sigma \times \frac{R^2}{OP^2} \int_0^{4\pi} d\omega = m \cdot k \sigma \times \frac{R^2}{OP^2} \times 4\pi$$

Слѣдовательно:

$$F = \frac{4\pi k \sigma R^2 \cdot m}{OP^2} \dots \dots \dots (15)$$

Но $4\pi R^2 \cdot \sigma$ есть полная масса слоя, ибо $4\pi R^2$ есть

полная площадь шара. Обозначая эту массу через M , получимъ:

$$F = k \frac{M \cdot m}{OP^2} \dots \dots \dots (16)$$

Это выраженіе показываетъ, что дѣйствіе слоя таково, какъ будто вся масса сосредоточена въ центрѣ шара.

Слѣдствіе 1. Изъ выраженія (15) видно что, когда точка P будетъ безконечно близка къ поверхности слоя, то дѣйствіе этого послѣдняго будетъ:

$$F = 4\pi k \cdot \sigma \dots \dots \dots (17)$$

ибо тогда:

$$OP = R.$$

Слѣдствіе 2. Дѣйствіе шаровой массы на внѣшнюю точку. Шаровую массу можно разсматривать, какъ состоящую изъ ряда концентрическихъ шаровыхъ безконечно-тонкихъ слоевъ. Такъ какъ дѣйствіе каждаго слоя равно дѣйствію его массы, сконцентрированной въ центрѣ, то и дѣйствіе всей шаровой массы будетъ одно и то же, какъ и такой же массы, собранной въ центрѣ. Поэтому, если массу внѣшней точки P обозначимъ черезъ m , а количество шаровой массы на единицу объема черезъ δ , то можемъ написать:

$$F = \frac{4}{3} \pi k \cdot R^3 \cdot \delta \times \frac{m}{OP^2} \dots \dots \dots (18)$$

Если точка P будетъ на поверхности шара то:

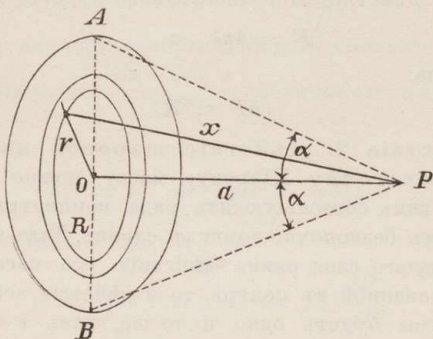
$$F = \frac{4}{3} \pi k R \delta \cdot m \dots \dots \dots (20)$$

Слѣдствіе 3 Дѣйствіе шаровой массы на внутреннюю точку. Если точка P находится внутри шаровой массы, то эту послѣднюю можно раздѣлить на 2 части шаровою поверхностью, проходящею чрезъ точку. Дѣйствіе части окружающей точку будетъ равно нулю (§ 19). Дѣйствіе же второй части,

на поверхности которой будет лежать точка выразится по формѣ (17), гдѣ R будетъ обозначать радіусъ второй шаровой части, т. е. разстояніе точки P до центра называя это разстояніе r , найдемъ:

$$F' = \frac{4}{3} \pi k r \cdot \delta \cdot m.$$

21. Дѣйствіе бесконечно тонкаго диска съ равномерно распредѣленною массою на единицу массы, расположенную на оси диска. Опредѣлимъ это дѣйствію посредствомъ патенціала. Пусть R радіусъ диска (фиг.



Фиг. 25.

25) пусть a разстояніе точки P до диска. Выдѣлимъ въ дискѣ бесконечно тонкую кольцевую полосу радіуса r и шириною dr . Потенціальъ элемента кольца dm въ точкѣ P будетъ:

$$\frac{dm}{x}$$

гдѣ x разстояніе элемента до P ; потенціальъ всего кольца будетъ:

$$k \sum \frac{dm}{x}$$

Но x одинаково для всѣхъ элементовъ, слѣдовательно потенціальъ будетъ:

$$dV = \frac{k}{x} \sum m$$

но Σm , масса кольца, будетъ, если δ количество массы на единицу площади:

$$\Sigma m = 2 \pi r dr \cdot \delta$$

а потому потенціалъ кольца въ точкѣ P будетъ:

$$dV = k \cdot \frac{2 \pi r dr \cdot \delta}{x} = \frac{2 \pi k \delta \cdot r dr}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

Потенціалъ всего диска будетъ равенъ суммѣ потенціаловъ всѣхъ элементарныхъ колець, составляющихъ дискъ, т. е:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \frac{2 \pi k \delta r dr}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \\ &= 2 \pi k \delta \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + a^2}} \end{aligned}$$

ибо $2 \pi k \delta$ не зависитъ отъ r .

Замѣчая, что

$$\frac{r dr}{\sqrt{r^2 + a^2}} = d \left(\sqrt{r^2 + a^2} \right)$$

найдемъ

$$\int \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \sqrt{r^2 + a^2}$$

а потому:

$$V = 2 \pi k \delta \left(\sqrt{r^2 + a^2} \right)_0^R$$

или

$$V = 2 \pi k \delta \left(\sqrt{R^2 + a^2} - a \right) \dots (21)$$

Сила поля въ точкѣ O , вслѣдствіи симметріи, будетъ очевидно направлена по оси $o P$, слѣдовательно напряженіе этого поля по направленію $o P$ будетъ (§ 9):

$$H = - \frac{dV}{da}$$

но

$$\frac{dV}{da} = 2\pi k\delta \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} - 1 \right)$$

и

$$\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \cos \alpha$$

Слѣдовательно:

$$H = - 2\pi k\delta (\cos \alpha - 1)$$

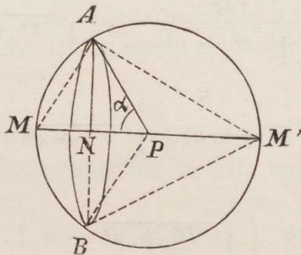
или

$$H = 2\pi k\delta (1 - \cos \alpha) \dots (22)$$

Замѣтимъ, что $2\pi (1 - \cos \alpha)$ равняется тѣлесному углу подъ которымъ виденъ дискъ *). Называя ω этотъ уголъ, найдемъ, что:

$$H = k\delta\omega \dots (23)$$

*) Докажемъ, что тѣлесный уголъ подъ которымъ видѣнъ дискъ AB (фиг. 26) изъ точки P , равняется $2\pi (1 - \cos \alpha)$ гдѣ α уголъ крайняго вектора PA про-



Фиг. 26.

веденнаго къ диску съ осью этого послѣдняго. Изъ точки P опишемъ шаровую поверхность радіусами

Если точка P будетъ находиться въ центрѣ диска, то разстояніе $a = 0$ а потому

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} = 0$$

И слѣдовательно:

$$H = 2\pi k \delta \dots \dots \dots (24).$$

PA . Изъ геометріи извѣстно, что площадь части шара AMB равняется $\pi \cdot \overline{MA^2}$.

Но

$$\overline{MA^2} = MN \cdot MM'$$

$$MM' = 2MP$$

$$MN = MP - NP$$

фиг. 26. Слѣдовательно:

$$\overline{MA^2} = 2MP (MP - NP) = 2\overline{MP^2} \left(1 - \frac{NP}{MP}\right)$$

И такъ-какъ $MP = PA$, то:

$$\frac{NP}{MP} = \frac{NP}{AP} = \cos \alpha$$

Слѣдовательно:

$$\overline{MA^2} = 2\overline{MP^2} (1 - \cos \alpha)$$

и площадь AMB будетъ:

$$2\pi \overline{MP^2} (1 - \cos \alpha)$$

Но тѣлесный уголъ APB , какъ извѣстно равенъ площади AMB раздѣленной на квадратъ радіуса шара, т. е.

$$\omega = \frac{2\pi \overline{MP^2} (1 - \cos \alpha)}{\overline{MP^2}} = 2\pi (1 - \cos \alpha)$$

ГЛАВА IV.

Абсолютная система единиц.

22. Основные и производныя единицы. Для того, чтобы измѣрить какую нибудь величину, можно выбрать за единицу величину того же рода, но въ такомъ случаѣ мы будемъ имѣть столько разныхъ единицъ, сколько видовъ величины намъ потребуется измѣрить.

Такой способъ выбора единицъ не удобенъ, во 1-хъ, потому, что требуетъ заготовки слишкомъ большого числа образчиковъ единицъ (эталоновъ), а во 2-хъ, и потому, что нѣкоторыя величины удобнѣе измѣрять не единицами того же рода, пользуясь зависимостью, существующую между тѣми и другими величинами. Такъ, чтобы измѣрить площадь, не сравниваютъ эту послѣднюю не посредственно съ единицею площади, а опредѣляютъ ея линейныя размѣры посредствомъ линейной единицы и затѣмъ переходятъ къ выраженію ея въ квадратныхъ единицахъ, пользуясь зависимостью между площадью и ея линейными размѣрами. Такъ для площади квадрата воспользуются слѣдующею зависимо-
стью:

$$S = h \cdot c^2 . . . , (\alpha)$$

гдѣ S площадь квадрата и s размеры стороны квадрата.

Коэффициентъ k представляет собою площадь квадрата, сторона котораго равна единицѣ. Дѣйстви-
тельно если

$c = 1$, to $S = k$.

Этот коэффициент может равняться единице, если условиться, что единицею площади будетъ площадь, которую изображаетъ коэффициентъ, т. е. квадратъ, сторона котораго равна единице дѣлины. Отсюда слѣдуетъ, что благодаря вышеупомянутой зависимости (а), достаточно установить только единицу дѣлины, единица же площади опредѣлится только что приве-

деннымъ условіемъ. Единица длины будетъ основною единицею, а единица площади производною.

Оказывается, что въ настоящее время есть возможность опредѣлить почти всѣ единицы въ зависимости отъ трехъ произвольно выбранныхъ, но различныхъ единицъ, благодаря той связи, которая установлена наукою между различными величинами. Какъ на исключенія можно указать на единицы температуры и на системы свѣтовыхъ единицъ.

Наиболѣе удобнымъ оказалось выбрать за три основныя единицы—единицу длины, единицу массы и единицу времени и отъ этихъ трехъ единицъ произвели всѣ остальные единицы (за исключеніемъ единицы температуры и единицы свѣта). Построенная такимъ образомъ система единицъ получила названіе абсолютной системы, такъ какъ при этой системѣ величины измѣряютъ не простымъ методомъ сравненія, а абсолютнымъ методомъ, пользуясь зависимостью между измѣряемыми величинами и величинами принятыми за основныя единицы.

Въ электротехникѣ точно также, какъ и въ другихъ наукахъ, выбрали для абсолютной системы слѣдующія три основныя единицы: единица длины — сантиметръ $= \frac{1}{10^9}$ четверти земнаго меридіана; единица массы — граммъ = массѣ кубическаго сантиметра дистиллированной воды при температурѣ ея наибольшей плотности; единица времени—секунда $= \frac{1}{86400}$ части среднихъ солнечныхъ сутокъ.

Эту систему обозначаютъ буквами *C. G. S.* (centimetre, gramme, seconde). Единицу длины, массы и времени обозначаютъ буквами *L, M, T*, всѣ же производныя единицы выражаютъ символически посредствомъ этихъ трехъ обозначеній формулами, указывающими на зависимость производной единицы отъ трехъ основныхъ.

23. Измѣренія производныхъ единицъ. Посмотримъ теперь, какимъ образомъ, пользуясь зависимостью

между различными величинами, мы установимъ раз-
мѣры производныхъ единицъ.

Геометрическія единицы.

Единица площади будетъ квадратъ, сторона кото-
раго равняется единицѣ длины, т. е. (L). А такъ какъ
площадь квадрата въ зависимости отъ его стороны c
будетъ:

$$S = kc^2$$

то, полагая

$$c = L$$

$$S = k \cdot L^2.$$

Но по условію если $L = 1$, то и $S = 1$.

Слѣдовательно:

$$k = 1.$$

И такъ единица площади будетъ:

$$(L^2)$$

Точно также единица объема будетъ:

$$(L^3)$$

Уголъ пропорціоналенъ отношенію длины дуги къ
ея радіусу, т. е.

$$\omega = k \frac{l}{r}$$

Но если мы условимся называть единицею угла,
уголъ, дуга котораго при радіусѣ = единицѣ также
равна единицѣ, то

$$k = 1.$$

Тогда единица угла въ зависимости отъ единицы
длины выразится отношеніемъ:

$$\frac{L}{L} = L^0$$

Путемъ точно такихъ же разсужденій найдено, что
механическія единицы выразятся слѣдующимъ обра-
зомъ:

Механическія единицы.

Единица линейной скорости $\left(\frac{L}{T} = L T^{-1}\right)$

„ угловой скорости $\left(\frac{\left(\frac{L}{T}\right)}{\frac{L}{L}} = T^{-1}\right)$

„ ускоренія . . . $\left(\frac{L}{T^2} = L T^{-2}\right)$

„ силы $(L M T^{-2})$

Зависимость единицы силы отъ единицы длины и массы выводится на зависимости силы отъ ускоренія. Сила пропорціональна произведенію ускоренія на массу. Единицею силы будетъ слѣдовательно сила, которая единицѣ массы сообщитъ единицу ускоренія. Въ абсолютной системѣ единицъ единицею силы будетъ сила, которая массѣ грамму сообщитъ ускореніе = единицѣ, единицею же ускоренія будетъ такое ускореніе для котораго скорость послѣ 1-й секунды измѣнится на 1 сантиметръ. Абсолютную единицу силы называютъ динаю.

Употребляемая на практикѣ единица силы—это вѣсь массы грамма или какъ ее называютъ прямо граммъ. Но сила граммъ, какъ извѣстно, массѣ грамму сообщаетъ ускореніе=981 абсолютн. единицъ. Слѣдовательно дина, которая той же массѣ сообщаетъ 1 единицу ускоренія будетъ $\frac{1}{981}$ грамма.

Единица работы $L^2 M T^{-2}$. Это та работа, которую совершитъ дина по направленію своего дѣйствія на протяженіи единицы длины. Размѣры единицы работы выводятся изъ размѣровъ силы и длины.

Размѣръ единицы силы $L M T^{-2}$, а работа пропорціональна произведенію силы на длину, слѣдовательно единица работы $= L M T^{-2} \times L = L^2 M T^{-2}$.

Абсолютную единицу работы называютъ эргомъ.

Количество теплоты измѣряется эргами, такъ-какъ

развиваемая теплота эквивалентна работѣ. Эргомы измѣряется также моментъ силы, ибо моментъ пропорціоналенъ произведенію силы на длину (сила на плечо).

Единицею мощности, т. е. работы въ секунду будетъ эргъ — секунда, размѣры этой единицы будутъ:

$$\frac{L^2 MT^{-2}}{T} = L^2 MT^{-3}.$$

Единица плотности будетъ плотность тѣла, въ единицѣ объема котораго будетъ содержаться единица массы. Слѣдовательно размѣры этой единицы будутъ:

$$\frac{L^{-3}}{M} = L^{-3} M^{-1}$$

24. Переходъ отъ одной системы единицъ къ другой.

Численная величина даннаго количества выражается отношеніемъ этого количества къ выбранной единицѣ. Если нѣкоторая длина выражается числомъ l , то это значитъ, что въ данной длинѣ содержится l единицъ длины, конкретное значеніе длины слѣдовательно будетъ $l (L)$, гдѣ (L) выбранная единица. Если взять другую единицу для длины, то величина длины выразится другимъ числомъ l' т. е. будетъ $l' (L')$. Такъ-какъ то и другое выраженія представляютъ одну и ту же величину, то:

$$l (L) = l' (L')$$

откуда:

$$\frac{l}{l'} = \frac{(L')}{(L)}$$

Отсюда **теорема**: численное значеніе данной величины обратно пропорціонально величинѣ выбранной единицы.

Выразимъ сначала употребляемыя на практикѣ единицы въ единицахъ абсолютныхъ.

Погонный метръ = 10^2 сантиметръ.

$$\begin{aligned}
 \text{Сила граммъ} &= 981 \text{ динъ въ Петербургѣ} \\
 &= 980,88 \text{ динъ въ Парижѣ} \\
 &= 978,1 \quad \text{,,} \quad \text{на экваторѣ} \\
 &= 983,11 \quad \text{,,} \quad \text{у полюса.}
 \end{aligned}$$

$$\text{Сила килограмма} = 1000 \text{ грам.} = 981,10^3 \text{ динъ.}$$

$$\text{Работа граммъ — сантим.} = 981 \text{ эргъ}$$

$$\text{,, килограмметръ} = 981,10^5 \text{ эргъ.}$$

$$\text{Мощность килограмметръ — секунда} = 981,10^5 \text{ эргъ — секунда.}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Паровая лошадь} &= 75 \text{ килограмметръ — секунда.} \\
 &= 75 \times 981,10^5 \text{ эргъ — секунда.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Большая калорія} &= 425 \text{ килгрметр.} = \\
 &= 425 \cdot 981 \cdot 10^5 \text{ эргъ} = 4,17 \times 10^{10} \text{ эргъ.}
 \end{aligned}$$

$$\text{Малая калорія 0,425 килгрметр.} = 4,17 \cdot 10^7 \text{ эргъ.}$$

Покажемъ теперь на примѣрѣ переходъ отъ одной системы единицъ къ другой. Положимъ, что нѣкоторая машина развиваетъ 10 паровыхъ лошадей. Какому числу эрговъ—секундъ будетъ соотвѣтствовать эта мощность.

10 паровыхъ лошадей соотвѣтствуютъ 750 килграмметр. 1 килограмметр. = 10^2 . Килграмсантиметр. = 10^2 . 10^3 граммъ-сантиметрамъ. Но 1 граммъ-сантиметръ = 981 эргъ. Слѣдовательно 10 паровыхъ лошадей будутъ соотвѣтствовать:

$$750 \times 10^2 \times 10^3 \times 981 = 750 \times 981 \cdot 10^5 \text{ эргъ.}$$

Можно было бы и сразу найти это число, зная, что 1 паровая лошадь = $75 \times 981 \times 10^5$ эргъ. Но мы умышленно привели болѣе длинный выводъ, чтобы показать, какъ можно перейти отъ любыхъ единицъ къ абсолютнымъ, зная отношеніе этихъ послѣднихъ къ какимъ-нибудь единицамъ однороднымъ съ даваемыми.

Приведемъ еще примѣръ.

Скорость тѣла = 5400 въ абсолютныхъ единицахъ, т. е. въ сантиметрахъ-секундахъ. Какимъ числомъ выразится та же скорость въ метрѣ-минутахъ.

Скорость выражается символически обозначеніемъ $\left(\frac{L'}{T'}\right)$ L' выражено въ метрахъ, а T' въ минутахъ.

Данная единица скорости выраженная въ сантиметрахъ-секундахъ будетъ

$$\left(\frac{L'}{T'}\right) = \left[\frac{10^2 L}{60 T'}\right]$$

ибо

$$L' = 10^2 L \quad T' = 60 T,$$

гдѣ

$$L = 1 \text{ см. } T = 1 \text{ секунд.}$$

т. е. будетъ

$$= \frac{10^2}{60} \left(\frac{L}{T_2}\right) \text{ сантиметръ-секундъ.}$$

Итакъ

$$\left(\frac{L'}{T'}\right) = \frac{10^2}{60} \left(\frac{L}{T'}\right)$$

или

$$\frac{\left(\frac{L'}{T'}\right)}{\left(\frac{L}{T}\right)} = \frac{10^2}{60}$$

Если X искомое число, то на основаніи раньшее выраженной теоремы будемъ имѣть

$$\frac{X}{5400} = \frac{\left(\frac{L}{T}\right)}{\left(\frac{L'}{T'}\right)} = \frac{60}{102}$$

откуда

$$X = \frac{5400 \times 60}{102} = 54 \times 60 = 3240$$

ОТДѢЛЪ I.

Электростатика.

ГЛАВА V.

Свойства наэлектризованныхъ тѣлъ.

25. Основные явленія. Мы не будемъ тутъ входить въ подробности основныхъ классическихъ опытовъ, описаніе которыхъ можно найти во всякомъ учебникѣ физики, а ограничимся лишь перечнемъ явленій лежащихъ въ основѣ ученія объ электричествѣ въ состояніи равновѣсія.

1) Если потереть два разнородныхъ тѣла между собою, то замѣтимъ, что каждое изъ нихъ пріобрѣтаетъ способность притягивать легкія тѣла. Говорятъ, что при такихъ условіяхъ оба тѣла наэлектризованы.

2) Если приблизить послѣдовательно каждое изъ двухъ предъидущихъ тѣлъ къ третьему, также наэлектризованному предварительно, то замѣчаютъ, что это третье тѣло отъ одного изъ первыхъ отталкивается, а другимъ притягивается. Поэтому, говорятъ, что одно тѣло наэлектризовано положительно, а другое отрицательно, или иначе, одно тѣло заряжено положительнымъ, а другое — отрицательнымъ электричествомъ.

3) Два тѣла, заряженные одинаковаго знака электричествомъ, отталкиваются, два же тѣла, заряженные электричествами разныхъ знаковъ, взаимно притягиваются.

4) Если два натертыя другъ о друга разнородныхъ тѣла соединить вмѣстѣ и приблизить къ третьему, заряженному положительнымъ или отрицательнымъ электричествомъ, то оба первыя тѣла не произведутъ никакого дѣйствія на это послѣднее. Отсюда заключаютъ, что количества электричества, развиваемыя треніемъ, на каждомъ изъ двухъ тѣлъ одинаковы и противуположнаго знака.

Для объясненія электрическихъ явленій было предложено нѣсколько гипотезъ о сущности электричества. Такъ, Франклинъ уподоблялъ электричество невѣсомой и весьма подвижной жидкости, которая содержится въ опредѣленномъ нормальномъ количествѣ въ каждомъ тѣлѣ. При треніи двухъ тѣлъ—часть этой жидкости переходитъ къ одному изъ нихъ, вслѣдствіи чего въ одномъ тѣлѣ получается избытокъ противъ нормальнаго количества жидкости, а въ другомъ убыль, равная упомянутому избытку. Первое тѣло будетъ проявлять свойства положительнаго электричества, а второе—свойства отрицательнаго. По Клаузиусу электрическія явленія вызываются особымъ состояніемъ эфира, окружающаго всѣ тѣла.

Мы не будемъ устанавливать никакой гипотезы относительно сущности электричества, намъ даже нѣтъ надобности знать, въ чемъ заключается эта сущность. Однако же, для простоты дальнѣйшихъ разсужденій, мы предположимъ, что каждое наэлектризованное тѣло можетъ быть разложено на безконечное число безконечно малыхъ тѣлъ, также наэлектризованныхъ.

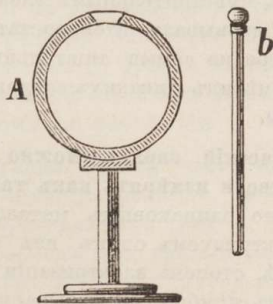
Хорошіе и плохіе проводники электричества. Если потереть сукномъ, напримѣръ металлическій и стеклянный стержни, то всѣ части перваго стержня тотчасъ же обнаруживаютъ притягательныя дѣйствія электричества, тогда какъ въ стеклѣ тѣ же дѣйствія распространяются весьма медленно. Тѣла, въ которыхъ электрическія дѣйствія распространяются весьма быстро, называются хорошими проводниками электричества или просто проводниками, тѣла же въ кото-

рыхъ эти дѣйствія распространяются весьма медленно, называются плохими проводниками или изоляторами.

Къ проводникамъ относятся всѣ металлы и ихъ сплавы, земля, тѣло человѣка, а также всѣ тѣла, пропитанныя или покрытыя влагою. Къ изоляторамъ относятся такія тѣла, какъ стекло, смолистыя вещества, дерево, шерсть, шолкъ и большинство тканей, также воздухъ и многіе газы. Лучшими изоляторами считаются стекло, фарфоръ, каучукъ, эбонитъ, гуттаперча, парафинъ, шолкъ, гуммилакъ.

Электричество распространяется по поверхности проводника. Это замѣчательное свойство можетъ быть доказано различными способами. Приводимъ два изъ нихъ.

1) Возьмемъ полый металлическій шаръ *A* (фиг. 27), укрѣпленный на изолированной подставкѣ для того,



Фиг. 27.

чтобы получаемый шаромъ электрическій зарядъ не могъ распространиться въ землю. Наэлектризуемъ этотъ шаръ, натеревъ, напримѣръ, его поверхность мѣхомъ или шерстяною тряпкою. Возьмемъ теперь маленькій металлическій шарикъ *b*, укрѣпленный на стеклянной палочкѣ и прикоснемся этимъ шарикомъ внутренней поверхности шара *A*, затѣмъ поднесемъ

шарикъ b къ бузинному шарiku, подвѣшенному на нитѣ. Мы увидимъ, что этотъ бузинный шарикъ, при приближеніи b останется въ покоѣ. Между тѣмъ, если шарикомъ b мы прикоснемся къ внѣшней поверхности шара A и затѣмъ поднесемъ b къ бузинному шарiku, то этотъ послѣдній будетъ притягиваться шарикомъ b . Изъ этого опыта слѣдуетъ, что, прикасаясь къ внутренней поверхности шара A , шарикъ b не получилъ никакого электрическаго заряда, иначе говоря, на внутренней поверхности шара A электричество отсутствуетъ, и весь зарядъ распространенъ лишь на внѣшней поверхности, ибо отъ соприкосновенія съ нею шарикъ b получаетъ явныя слѣды электричества.

2) Для доказательства того же свойства Фарадей устроилъ металлическую камеру въ видѣ куба въ 4 метра сторонами, изолированную отъ пола на стеклянныхъ подставкахъ. Онъ помѣстился внутри этой камеры съ очень чувствительнымъ электрометромъ. Камеру наэлектризовывали электростатическою машиною. Не смотря на самыя тщательныя изслѣдованія, Фарадей не замѣтилъ никакихъ слѣдовъ электричества внутри камеры.

26. Электрическій зарядъ можно разсматривать, какъ количество и измѣрять какъ таковое. Возьмемъ два совершенно одинаковыхъ металлическихъ шара A и A' , наэлектризуемъ одинъ изъ нихъ. Какъ мы увидимъ послѣ, степень электризаціи тѣла можно измѣрять особымъ приборомъ, называемымъ электрометромъ, стрѣлка котораго отклоняется тѣмъ больше, чѣмъ больше измѣряемый зарядъ. Соединимъ наэлектризованный шаръ съ такимъ электрометромъ и пусть α отклоненіе его стрѣлки. Прикоснемся затѣмъ наэлектризованнымъ шаромъ ко второму шару. Послѣ этого соединимъ съ электрометромъ сначала шаръ A , мы получимъ тогда отклоненіе стрѣлки $= \frac{\alpha}{2}$; такое же отклоненіе получимъ и при соединеніи электрометра

съ шаромъ A' . Отсюда слѣдуетъ, что зарядъ шара A при соприкосновеніи съ шаромъ A' , распредѣлился поровну между обоими шарами, иначе говоря, этотъ зарядъ раздѣлился на 2 равныя части. Въ свою очередь, полученный шаромъ A' зарядъ, мы можемъ раздѣлить на 2 равныя части, прикасаясь къ третьему шару A'' , одинаковыхъ размѣровъ съ двумя первыми, и т. д. Словомъ, мы видимъ, что электрическій зарядъ можно дробить на какія угодно части и, слѣдовательно, разсматривать его, какъ нѣкоторое количество. Отсюда выраженіе количество электричества. Конечно, подъ этимъ количествомъ мы будемъ подразумѣвать нѣкоторую величину, пропорціональную механическому дѣйствию электричества—притяженію или отталкиванію.

Такъ, скажутъ, что количество электричества на тѣлѣ A въ два или три раза больше количества электричества на тѣлѣ B , если механическая сила, дѣйствующая изъ A на опредѣленномъ разстояніи и въ опредѣленной средѣ на нѣкоторое постоянное количество электричества C , будетъ въ два или три раза больше силы, дѣйствующей изъ B на C въ той же средѣ и на такомъ же разстояніи.

27. Законъ Кулона. Кулонъ чисто опытнымъ путемъ нашелъ слѣдующую зависимость между взаимодѣйствіемъ наэлектризованныхъ тѣлъ и зарядами этихъ послѣднихъ. Возьмемъ два наэлектризованныхъ тѣла, линейные размѣры которыхъ очень малы по отношенію къ ихъ взаимному разстоянію. Пусть r разстояніе между ними. Измѣримъ силу ихъ взаимодѣйствія (притяженіе или отталкиваніе), пусть f эта сила, сообщимъ этимъ тѣламъ—одному въ m , а другому въ m' разъ большіе противъ первоначальныхъ зарядовъ, не измѣняя разстоянія. Тогда оказывается, что сила взаимодѣйствія будетъ уже на f , а $mm'f$, иначе говоря, эта сила будетъ пропорціональна зарядамъ (или количествамъ электричества), сосредоточеннымъ на тѣлѣ. Если теперь, не измѣняя зарядовъ обоихъ тѣлъ, увеличить

поэтому, если между двумя взаимодействующими тѣлами находится только воздухъ, то при предъидущемъ выборѣ единицы количества электричества можно примѣнять формулу:

$$f = \frac{q \cdot q'}{r^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (26)$$

28. Электрическое поле. Электрическій потенциалъ. Приведенный выше законъ Кулона показываетъ, что къ электрическимъ силамъ можно примѣнять общія свойства центральныхъ ньютоновскихъ силъ.

Такимъ образомъ электрическимъ полемъ мы назовемъ пространство, въ которомъ ощущается дѣйствіе электрическихъ силъ. Напряженіе и направленіе поля опредѣлится подобно § 8.

Физическое и математическое значеніе электрическаго потенциала опредѣлится точно также, какъ и въ § 9. Такъ если у насъ имѣются электрическія массы $q, q', q'' \dots$ распредѣленные въ точкахъ $A, B, C \dots$ то потенциалъ въ каждой точкѣ пространства будетъ:

$$V = k \sum \frac{q}{r} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (27)$$

гдѣ r соотвѣтствующія разстоянія данной точки до точекъ $A, B, C \dots$ гдѣ сосредоточены массы.

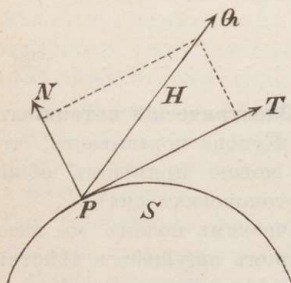
Напряженіе поля въ зависимости отъ потенциала выразится формулою (см. § 9)

$$H = - \frac{dV}{dl} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (28)$$

гдѣ l направленіе, по которому берется слагающая напряженія поля.

29. Потенціалъ проводниковъ, на которыхъ электричество находится въ состояніи равновѣсія. Теорема. Потенціалъ во всякой точкѣ поверхности, на которой электричество находится въ состояніи равновѣсія, есть постоянная величина. Если электричество распространено на данной поверхности находится въ состояніи равновѣсія, то это зна-

читать, что электрическія массы не должны перемѣщаться вдоль этой поверхности. Слѣдовательно, если въ данной точкѣ P поверхности S (фиг. 28) на единицу



Фиг. 28.

положительной массы дѣйствуетъ отъ окружающихъ массъ этой поверхности сила PQ , то ея слагающая PT по касательной къ поверхности должна равняться нулю. Вся сила сведется слѣдовательно къ нормальной слагающей PN . Такъ это будетъ во всѣхъ точкахъ поверх-

ности S .

Но мы уже знаемъ (§ 9), что если въ данной точкѣ потенциалъ V , то слагающая поля, т. е. силы, дѣйствующей на единицу массы въ данной точкѣ, по данному направлению l будетъ:

$$- \frac{dV}{dl}$$

Слѣдовательно слагающая по нормали къ поверхности будетъ

$$- \frac{dV}{dn}$$

гдѣ dn перемѣщеніе по нормали, а слагающая по касательной къ поверхности въ данной точкѣ будетъ

$$- \frac{dV}{ds}$$

гдѣ ds бесконечно малое перемѣщеніе по касательной или что то же по поверхности.

Но мы уже показали, что эта слагающая будетъ равна нулю, слѣдовательно

$$- \frac{dV}{ds} = 0$$

какое бы мы не взяли направление по поверхности въ данной точкѣ. Отсюда слѣдуетъ, что (см. част. I § 18)

$$V = \text{Const.}$$

Иначе говоря V будетъ величиною постоянною при переходѣ отъ точки P по какому угодно направленію по поверхности. А изъ этого слѣдуетъ, что во всѣхъ точкахъ потенциалъ V будетъ величиною постоянною.

Дѣйствительно при переходѣ отъ точки P къ сосѣдней P' потенциалъ не измѣняется, точно также при переходѣ отъ P' къ сосѣдней точкѣ P'' потенциалъ остается тѣмъ же, что и въ P' , т. е. тѣмъ же, что и въ P и т. д.

Можно доказать, что, если электричество распредѣлено на данной замкнутой поверхности такъ, что потенциалъ на всѣхъ ея точкахъ одинаковъ, то во всякой точкѣ внутри этой поверхности потенциалъ будетъ одинаковъ и равенъ потенциалу на поверхности, если во внутреннемъ пространствѣ нѣтъ другихъ электрическихъ массъ. Мы не будемъ останавливаться на доказательствахъ этой теоремы. Читатели могутъ найти таковое въ прекрасномъ сочиненіи J. J. Thomson'a (основы математической теоріи электричества и магнетизма).

Мы уже сказали выше, что опытнымъ путемъ доказано, что электричество распространяется по поверхности проводника. Эта послѣдняя является поверхностью уровня, ибо, какъ мы показали, потенциалъ во всѣхъ ея точкахъ будетъ одинаковъ.

30. Электрическая плотность. Такъ какъ электричество распространяется по поверхности, то естественно отнести его массу къ единицѣ поверхности. Если электрическій зарядъ распредѣленъ равномерно на данной поверхности, то мы назовемъ плотностью зарядъ, приходящійся на единицу площади, или масса электричества на единицу площади. Если же электрическая масса распредѣлена не равномерно, то плотность будетъ не одинакова въ разныхъ точкахъ по-

верхности. Мы определимъ тогда плотность въ данной точкѣ слѣдующимъ образомъ.

Опишемъ вокругъ данной точки небольшую площадку ΔS и пусть электрическая масса на этой площади Δm ,

тогда $\frac{\Delta m}{\Delta S}$ будетъ среднею плотностью на площади ΔS .

Вообразимъ теперь, что площадка ΔS вокругъ данной точки бесконечно уменьшается, Δm также будетъ без-

конечно уменьшаться, отношеніе же $\frac{\Delta m}{\Delta S}$ будетъ стре-

миться къ нѣкоторому предѣлу $\frac{dm}{ds}$, который и будетъ плотностью въ данной точкѣ. Слѣдовательно если σ эта плотность то:

$$\sigma = \frac{dm}{ds} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (29)$$

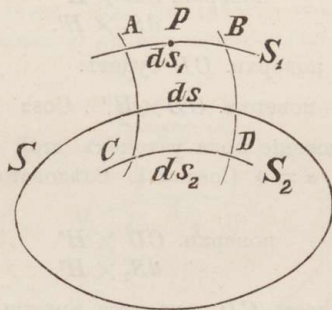
31. Теорема Кулона. Напряженіе поля въ точкѣ бесконечно близкой къ внѣшней поверхности наэлектризованнаго тѣла (проводника) равно $4\pi k\sigma$, гдѣ σ электрическая плотность на поверхности вблизи данной точки, k коэфф., зависящій отъ среды.

Пусть P точка, находящаяся бесконечно близко къ внѣшней поверхности S даннаго проводника:

Проведемъ черезъ точку P поверхность уровня S_1 . На этой поверхности (фиг. 29) возьмемъ вокругъ точки P бесконечно малую площадь ds_1 и черезъ ея края проведемъ линіи силъ (которыя ей будутъ нормальны) эти послѣднія образуютъ собою трубку, которая вырѣжетъ на данной поверхности S , бесконечно малый элементъ ds (ибо поверхность S_1 находится бесконечно близко къ S). Проведемъ также внутри поверхности даннаго тѣла бесконечно близкую къ ней поверхность уровня S_2 . Та же трубка на этой поверхности вырѣжетъ элементъ ds_2 . У насъ получится такимъ образомъ объемъ $ABCD$.

Примѣнимъ къ замкнутой поверхности этого объема теорему Грина, а именно напомнимъ, что потокъ на

эту поверхность $= 4\pi km + 2\pi km'$, гдѣ m сумма массъ внутри объема, а m' сумма массъ распространенныхъ



Фиг. 29.

на поверхности объема (§ 16). Тутъ мы имѣемъ дѣло съ бесконечно малыми элементами поверхности. Поэтому мы можемъ разсматривать напряженіе поля одинаковымъ во всѣхъ точкахъ поверхности AB , затѣмъ одинаковымъ во всѣхъ точкахъ поверхности CD . Возьмемъ сначала боковыя поверхности AC и BD . Силовой потокъ на AC будетъ:

$$\text{поверхн. } AC \times H \cdot \cos \alpha$$

гдѣ α уголъ направленія поля съ нормалью къ поверхности AC . Но поверхность AC образована линіями, силъ, слѣдовательно она параллельна направленію поля H , а потому $\alpha = 90^\circ$ и $\cos \alpha = 0$, откуда потокъ на поверхн. AC будетъ $= 0$. То же найдемъ и для потока на BD .

Остаются потоки на AB и на CD .

Потокъ на AB будетъ:

$$\text{поверхн. } AB \times H' \cdot \cos \alpha$$

гдѣ H' напряженіе поля въ точкахъ этой поверхности. Но поверхн. AB есть поверхность уровня, слѣдовательно H будетъ ей нормально а потому ея нормаль

будетъ параллельна направленію H , откуда уголъ $\alpha = 0$ и $\cos\alpha = 1$. Потокъ на поверхн. AB поэтому будетъ:

$$\begin{array}{l} \text{поверхн. } AB \times H' \\ \text{т. е.} \quad dS_1 \times H'. \end{array}$$

Потокъ на поверхн. CD будетъ:

$$\text{поверхн. } CD \times H'' \cdot \cos\alpha$$

гдѣ H'' напряженіе поля у точекъ этой поверхности. Тутъ то же $\alpha = 0$ $\cos\alpha = 1$. Слѣдовательно потокъ будетъ

$$\begin{array}{l} \text{поверхн. } CD \times H'' \\ \text{или} \quad dS_2 \times H''. \end{array}$$

Но поверхность CD находится внутри поверхности проводника. А мы уже знаемъ что электрическое дѣйствіе внутри наэлектриз. тѣла въ равновѣсіи равно нулю. Поэтому $H'' = 0$ и весь потокъ на поверхность объема сведется слѣдовательно къ потоку

$$dS_1 \cdot H'.$$

По теоремѣ Грина этотъ потокъ

$$dS_1 \cdot H' = 4\pi k \cdot m + 2\pi k m'. \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

гдѣ m сумма массъ расположенныхъ внутри объема, а m' на поверхности объема. Но масса, расположенная внутри объема, будетъ масса на площадкѣ dS проводника, т. е. будетъ

$$\sigma \cdot dS$$

На поверхности же объема $ABCD$ электрическихъ массъ нѣтъ, т. е. $m' = 0$. Поэтому уравненіе (α) сведется къ выраженію:

$$dS_1 \cdot H' = 4\pi k \cdot \sigma \cdot dS$$

Но поверхности S и S_1 бесконечно близки одна къ другой, слѣдовательно можно допустить, что

$$dS_1 = dS.$$

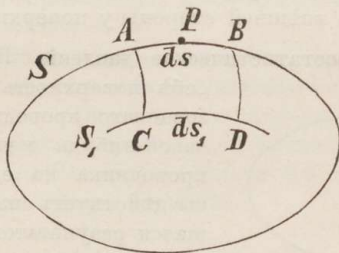
Тогда сокращая dS_1 и dS , получимъ:

$$H' = 4\pi k \cdot \sigma \cdot . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

что и тр. доказ.

32. Посмотримъ теперь, каково будетъ напряженіе поля на самой поверхности наэлектризованнаго тѣла.

Для этого вокругъ точки P на поверхности (фиг. 30) возьмемъ элементъ dS , внутри же тѣла проведемъ безконечно близкую къ его поверхности поверхность



Фиг. 30.

уровня S_1 и образуемъ, какъ выше, трубкою линій силъ проведенныхъ черезъ края dS , объемъ $ABCD$. Примѣнимъ къ этому объему опять теорему Грина. Разсуждая, какъ и раньше, мы найдемъ, что весь потокъ сведется къ потоку на элементъ поверхности AB , а этотъ потокъ будетъ:

$$H \cdot dS$$

гдѣ H напряженіе поля на поверхности у точки P поэтому:

$$HdS = 4\pi km + 2\pi k \cdot m'$$

Но внутри объема $ABCD$ массъ нѣтъ, а есть только на одной изъ его поверхностей AB масса $dS \cdot \sigma$, гдѣ σ плотность въ точкѣ P . Слѣдовательно $m = 0$, а $m' = \sigma \cdot dS$. Уравненіе Грина будетъ:

$$H \cdot dS = 2\pi k \cdot dS$$

откуда

$$H = 2\pi k \cdot \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

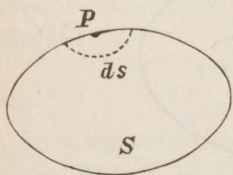
И такъ:

Напряженіе поля въ какой-нибудь точкѣ

поверхности проводника равно $2\pi k$ разъ плотность въ этой точкѣ.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что, если переходить изъ внутренней точки проводника во внѣшнюю сторону его поверхности, то напряженіе поля будетъ дѣлать скачки: внутри оно $= 0$, на поверхности $= 2\pi k \cdot \sigma$, а съ внѣшней стороны у поверхности $= 4\pi k \cdot \sigma$.

33. Электростатистическое давленіе. Представимъ



Фиг. 31.

себѣ поверхность наэлектризованнаго проводника S . Въ какой-нибудь точкѣ P этого проводника на единицу массы дѣйствуетъ сила H , являющаяся результатомъ дѣйствія всей электрической массы, распредѣленной на поверхности S .

Эта сила или напряженіе поля равно, какъ мы уже знаемъ:

$$H = 2 \pi k \cdot \sigma,$$

гдѣ σ плотность въ точкѣ P . Выдѣлимъ на данной поверхности мысленно вокругъ точки P бесконечно малый элементъ ds , на немъ будетъ масса $\sigma \cdot ds$, допуская, что во всѣхъ точкахъ элемента, какъ бесконечно малаго, плотность одинакова. Если предположить то же и для напряженія поля, то найдемъ, что масса элемента ds будетъ подвержена силѣ:

$$f = 2 \pi k \cdot \sigma \times \sigma \cdot ds$$

или

$$f = 2 \pi k \sigma^2 \cdot ds.$$

Эта сила будетъ направлена нормально къ ds , она является результатомъ дѣйствія остальной массы поверхности S . Такъ какъ тѣло заряжено одноименною массою, то ясно, что часть массы на элементѣ ds будетъ какъ бы отталкиваться внаружу остальною массою заряда. Это и будетъ электростатическое давленіе на

элементъ ds . Давленіе на единицу площади въ данной точкѣ будетъ:

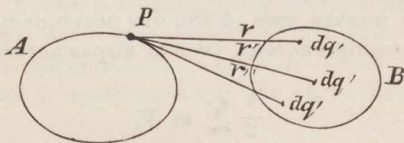
$$f_1 = \frac{2 \pi k \cdot \sigma^2 \cdot ds}{ds} = 2 \pi k \sigma^2 \quad . \quad . \quad (32).$$

Этому давленію сопротивляется воздухъ, или вообще среда непроводящая, которая окружаетъ данное наэлектризованное тѣло.

34. Потенціалъ наэлектризованнаго проводника въ присутствіи другого наэлектризованнаго проводника. Положимъ, что имѣемъ два проводника A и B (фиг. 32), на которыхъ сосредоточены количества электричества Q и Q' . Въ какой-нибудь точкѣ P проводника A , потенциаль будетъ очевидно:

$$V + k \int \frac{dq'}{r},$$

гдѣ r будутъ разстоянія отъ точки P къ различнымъ элементамъ dq' поверхности тѣла B , а V потенциаль



Фиг. 32.

тѣла A отъ своихъ собственныхъ массъ. V , какъ мы уже видѣли (§ 29) величина постоянная, что же касается выраженія

$$k \int \frac{dq'}{r},$$

то оно будетъ измѣняться въ зависимости отъ положенія точки P . Такимъ образомъ, потенциаль на поверхности тѣла A не будетъ уже величина постоянная, когда около него будетъ другое наэлектризованное тѣло, поэтому произойдетъ перемѣщеніе массъ

и до тѣхъ поръ, пока не наступитъ равновѣсіе. Тогда опять

$$V + k \int \frac{dq'}{r},$$

будетъ равняться постоянной.

35. Потенціальная энергія электрическаго заряда на данномъ проводникѣ. Это будетъта энергія, которую нужно затратить, чтобы перенести электрическія массы на поверхность даннаго тѣла. Если все количество электричества, распространенное на поверхности даннаго тѣла Q и если на каждомъ элементѣ поверхности ds сосредоточено dq электричества, то можно написать

$$Q = \sum dq = \int_0^s dq,$$

гдѣ интеграль долженъ быть распространенъ на всю поверхность S .

Слѣдовательно, мы можемъ предположить, что на поверхность тѣла послѣдовательно переносятся массы dq . Мы же видѣли уже (§ 18), что потенціальная энергія образованія системы массъ выражается символически

$$\frac{1}{2} \sum m V,$$

гдѣ V потенціалы въ точкахъ, въ которыхъ сосредоточены массы. Для даннаго случая это выраженіе будетъ:

$$\frac{1}{2} \sum dq V$$

или

$$\frac{1}{2} \int_0^s V dq,$$

гдѣ V потенціалы въ различныхъ точкахъ поверхности тѣла. Но (§ 29) потенціалы во всѣхъ точкахъ этой поверхности одинаковы, слѣдовательно:

$$\frac{1}{2} \int_0^s V \cdot dq = \frac{1}{2} V \int_0^s dq,$$

ибо V величина постоянная и можетъ, слѣдательно, быть вынесена за знакъ интеграла (часть I, § 68)
но

$$\int_0^s dq = Q$$

откуда

$$\frac{1}{2} \int_0^s V dq = \frac{1}{2} VQ;$$

и такъ потенціальная энергія наэлектризованнаго тѣла или та энергія, которую можно получить отъ этого тѣла въ томъ или другомъ видѣ ея проявленія будетъ:

$$E = \frac{1}{2} VQ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

36. Измѣреніе потенціала наэлектризованныхъ тѣлъ.

Потенціалъ земли. Абсолютное измѣреніе потенціала измѣрить невозможно, необходимо имѣть однородную величину для сравненія съ нею даннаго потенціала. Кромѣ того намъ нѣтъ надобности измѣрять абсолютную величину потенціала, ибо намъ интересно лишь его измѣненіе, такъ какъ по этому измѣненію мы судимъ о произведенной или затраченной работѣ (§ 9).

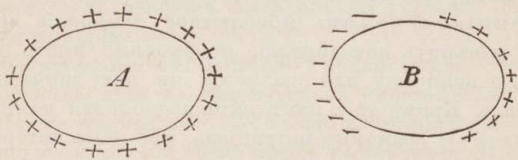
Для сравненія берутъ потенціалъ земли, который можно считать независящимъ отъ скопленія на немъ массъ въ виду значительной поверхности земнаго шара. Слѣдовательно такой потенціалъ можно считать постояннымъ, несмотря на то, что мы будемъ сообщать землѣ отъ наэлектризованныхъ тѣлъ тѣ или другіе заряды. Это все равно, что въ двухъ сообщающихся сосудахъ, изъ которыхъ одинъ устроенъ въ видѣ длинной, вертикальной и тонкаго діаметра трубки, а другой въ видѣ сосуда весьма большаго діаметра. Повышая уровень въ трубкѣ путемъ прибавленія въ нее жидкости, мы вмѣстѣ съ тѣмъ повышаемъ уровень и въ широкомъ сосудѣ, но въ этомъ послѣднемъ это повышение незамѣтно, ибо его емкость

громадна по отношенію къ тому количеству жидкости, которое въ него вливается даже при значительномъ повышеніи уровня въ трубкѣ.

ГЛАВА VI.

Электростатическая индукція. Емкость и конденсаторы.

37. Явленія электростатической индукціи. Представимъ себѣ наэлектризованное тѣло *A* (фиг. 33), заряженное нѣкоторымъ количествомъ положительнаго электричества и тѣло *B* (проводникъ), изолированное въ пространствѣ. Предположимъ сначала, что тѣло *B* находится на безконечно большомъ разстояніи отъ *A*



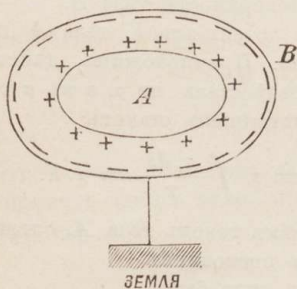
Фиг. 33.

и будемъ его приближать къ этому послѣднему. Мы замѣтимъ, что по мѣрѣ уменьшенія разстоянія между *A* и *B*, сторона *a* тѣла *B*, обращенная къ *A*, будетъ заряжаться все большимъ и большимъ количествомъ электричества, тогда такъ какъ противоположная сторона *a'* заряжается въ то же время равнымъ количествомъ положительнаго электричества. Если въ данномъ положеніи тѣла *B* соединить съ землею одну изъ его точекъ, то положительный зарядъ его исчезаетъ, а останется лишь отрицательный зарядъ, который увеличивается по мѣрѣ того, какъ разстояніе между *A* и *B* уменьшается.

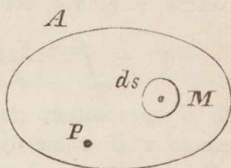
Если тѣло *B* (фиг. 34) окружаетъ со всѣхъ сторонъ тѣло *A*, то оказывается, что количество отрицательнаго электричества, вызваннаго на *B*, послѣ того, какъ по-

положительное утекло въ землю, равно количеству электричества на тѣлѣ A , какова бы ни была форма и размѣры тѣла B .

То же будетъ, если тѣло A и тѣло B будутъ въ видѣ тонкихъ плоскихъ листовъ, размѣры площадей которыхъ весьма значительны по отношенію къ разстоянію, раздѣляющему объ плоскости *).



Фиг. 34.



Фиг. 35.

38. Электрическая емкость. Пусть имѣетъ тѣло A (проводникъ), изолированное въ пространствѣ и удаленное отъ всѣхъ другихъ тѣлъ, могущихъ черезъ вліяніе измѣнить его зарядъ (фиг. 35).

Назовемъ σ плотность заряда въ точкѣ M тѣла. Пусть dS элементъ поверхности, окружающій точку M . Зарядъ въ M будетъ $\sigma \cdot ds$. Если Q полный зарядъ тѣла, то можно написать

$$Q = \int \sigma \cdot ds$$

причемъ $\int$ долженъ быть распространенъ на всю поверхность тѣла.

Потенціалъ тѣла A , какъ мы уже знаемъ (§ 29)

*) Строго говоря, отрицательный зарядъ, вызываемый на тѣлѣ B , будетъ равенъ положительному заряду на тѣлѣ A , когда листы будутъ бесконечно тонки и когда разстояніе между ними будетъ бесконечно мало по отношенію къ размѣрамъ площадей листовъ.

постояненъ, т. е. одинъ и тотъ же для какой угодно точки. Такъ, для точки P онъ будетъ

$$V = \int \frac{\sigma \cdot ds}{r},$$

гдѣ r должны быть разстоянія отъ точки P до различныхъ элементовъ ds поверхности тѣла A .

Докажемъ теперь, что потенциалъ V тѣла A пропорціоналенъ заряду тѣла. Предположимъ, дѣйствительно, что плотность вездѣ стала не σ , а въ α разъ больше, т. е. $\alpha \cdot \sigma$, тогда потенциалъ станетъ:

$$V' = \int \frac{\alpha \cdot \sigma \cdot ds}{r} = \alpha \int \frac{\sigma \cdot ds}{r} = \alpha \cdot V.$$

Но V постояненъ для всѣхъ точекъ тѣла A , слѣдовательно и V' тоже будетъ постояненъ.

Первоначальный зарядъ тѣла былъ

$$Q = \int \sigma \cdot ds.$$

Новый же будетъ:

$$Q' = \int \alpha \cdot \sigma \cdot ds = \alpha \cdot Q,$$

отсюда:

$$\frac{Q'}{Q} = \alpha$$

но и

$$\frac{V'}{V} = \alpha$$

слѣдовательно:

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{V'}{V}$$

или

$$\frac{Q'}{V'} = \frac{Q}{V},$$

т. е. отношеніе заряда тѣла къ его потенциалу величина постоянная. Это отношеніе называется электрическою емкостью тѣла. Эта величина зависитъ лишь отъ формы и размѣровъ тѣла, а не отъ его

заряда и потенціала. Дѣйствительно, если зарядъ даннаго тѣла Q и его емкость C , то потенціалъ V этого тѣла будетъ такой, что:

$$\frac{Q}{V} = C.$$

Если зарядъ тѣла станетъ Q' , то и потенціалъ измѣнится такъ, что:

$$\frac{Q'}{V'} = C$$

и т. д.

Отсюда слѣдуетъ, что зарядъ, который способно воспринять данное тѣло—проводникъ при потенціалѣ V будетъ:

$$Q = C \cdot V. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34),$$

гдѣ C емкость тѣла.

Слѣдовательно C есть показатель воспріимчивости заряда даннымъ проводникомъ при данномъ потенціалѣ.

39. Емкость тѣла-проводника въ присутствіи другихъ проводниковъ. Предположимъ, что мы заряжаемъ какое-нибудь тѣло-проводникъ A , изолированное въ пространствѣ и удаленное отъ другихъ проводниковъ, при посредствѣ такого тѣла B , зарядъ котораго можно безконечно возобновлять. Пусть каждый разъ зарядъ этого послѣдняго Q при потенціалѣ V .

Если прикоснуться тѣломъ B къ A , количество электричества Q распредѣлится между B и A и это послѣднее получить первый зарядъ. Распредѣленіе электричества окончится тогда, когда потенціалы обоихъ тѣлъ сравняются. Если емкость тѣла A будетъ C , а тѣла B будетъ C' , то, по соединеніи вмѣстѣ этихъ тѣлъ, зарядъ Q распредѣлится какъ бы на тѣлѣ емкостью $C + C'$. Прежде, когда зарядъ Q былъ на тѣлѣ B , его потенціалъ былъ V такой, что:

$$\frac{Q}{V} = C.$$

Теперь же, когда зарядъ распредѣлился на A и B потенциалъ обоихъ тѣлъ станетъ такимъ, что:

$$\frac{Q}{V'} = C + C'$$

или

$$V' = \frac{Q}{C + C'}.$$

Этотъ потенциалъ V' будетъ одинаковъ и для A , и для B . Но емкость тѣла A равна C и, если его потенциалъ сдѣлался равнымъ V' , то зарядъ тѣла A будетъ:

$$C \cdot V' = \frac{C}{C + C'} \cdot Q;$$

итакъ тѣло A восприняло отъ B

$$\frac{C}{C + C'}$$

долю заряда Q .

Если теперь мы снова сообщимъ тѣлу B зарядъ Q при потенциалѣ опять V и соединимъ его съ A , то этотъ новый зарядъ опять распредѣлится между A и B и часть его отойдетъ къ A , пока потенциалы обоихъ тѣлъ не сравняются.

Тѣло A уже получило первый зарядъ

$$Q \frac{C}{C + C'}.$$

Когда къ нему присоединять тѣло B съ зарядомъ Q , то ихъ общій зарядъ будетъ:

$$Q \frac{C}{C + C'} + Q = Q \left(1 + \frac{C}{C + C'} \right).$$

Новый потенциалъ обоихъ тѣлъ будетъ:

$$V'' = \frac{Q \left(1 + \frac{C}{C + C'} \right)}{C + C'},$$

а количество заряда, которое придется на тѣло A , будетъ:

$$Q'' = C \cdot V'' = \frac{Q \left(1 + \frac{C}{C + C'} \right) C}{C + C'}.$$

Итакъ, раньше тѣло A получило зарядъ

$$Q \frac{C}{C+C'},$$

теперь же оно имѣеть:

$$Q \frac{C}{C+C'} \left(1 + \frac{C}{C+C'}\right)$$

т. е. во второй разъ оно получило еще:

$$Q \frac{C}{C+C'} \left(1 + \frac{C}{C+C'}\right) - Q \frac{C}{C+C'} = Q \frac{C^2}{(C+C')^2}.$$

Потенціалъ же его вмѣсто

$$V' = \frac{Q}{C+C'}$$

сталъ:

$$V'' = \frac{Q}{C+C'} \left(1 + \frac{C}{C+C'}\right) = V' \left(1 + \frac{C}{C+C'}\right)$$

т. е. потенциаль увеличился.

Въ третій разъ тѣло A получить опять зарядъ:

$$Q \frac{C^3}{(C+C')^3}$$

а потенциаль станетъ V''' больше, чѣмъ V'' .

Такимъ образомъ потенциаль тѣла A по мѣрѣ сообщенія ему зарядовъ отъ B будетъ приближаться къ потенциалу этого послѣдняго, а въ то же время тѣло A будетъ при послѣдовательныхъ соединеніяхъ съ B получать все меньшія и меньшія количества электричества. Когда потенциаль проводника A достигнетъ величины V , т. е. станетъ равнымъ потенциалу тѣла B , тѣло A перестанетъ воспринимать зарядъ отъ B .

Но если мы расположимъ вблизи тѣла A другой какой нибудь проводникъ A' , опытъ показываетъ, что тѣло A снова начнетъ воспринимать зарядъ отъ B . Это значитъ, что вслѣдствіе индукціи тѣла A (съ имѣющимся на немъ зарядомъ отъ B) на A' потенциаль его уменьшился. Тогда A восприметъ отъ B еще нѣсколько разъ нѣкоторый зарядъ, пока система тѣлъ A и A' не

будетъ имѣть одинаковый съ B потенциалъ. Если теперь тѣло A' соединить съ землею, то потенциалъ системы (A, A') еще уменьшится и тѣло A будетъ способно воспринять еще зарядъ отъ B . Чѣмъ ближе проводникъ A' будетъ къ проводнику A , тѣмъ большій зарядъ этотъ послѣдній будетъ въ состояніи воспринять отъ B . И такъ, въ этомъ случаѣ количество электричества, которое способно воспринять тѣло A при потенциалѣ V зависитъ отъ положенія, формы и размѣровъ тѣла A' . Пусть Q количество электричества, которое восприметъ проводникъ A при потенциалѣ V , при данномъ положеніи тѣла A' . Если сообщать тѣлу A зарядъ при потенциалѣ V' , оставляя неизмѣннымъ положеніе проводника A' , то A восприметъ уже зарядъ Q' и тогда, какъ это не трудно доказать, опять будемъ имѣть:

$$\frac{Q'}{V'} = \frac{Q}{V}$$

постоянныя отношенія

$$\frac{Q}{V}, \frac{Q'}{V'}, \frac{Q''}{V''} \text{ и т. д.}$$

мы опять назовемъ емкостью тѣла A , но емкостью въ присутствіи тѣла A' . Отсюда будетъ понятно также выраженіе: емкость тѣла A въ присутствіи тѣлъ A', A'', A''' и т. д.

Такимъ образомъ мы видимъ, что присутствіе нейтральнаго тѣла A' , соединеннаго съ землею увеличиваетъ способность тѣла A воспринимать зарядъ при одномъ и томъ же потенциалѣ, т. е. увеличиваетъ его емкость. Система тѣлъ A и A' , изъ которыхъ A' будетъ соединено съ землею или, еще общнѣе, система тѣлъ A, A', A'' и т. д., изъ которыхъ $A', A'' \dots$ будутъ соединены съ землею, называется конденсаторомъ.

Мы рассмотримъ нѣсколько видовъ конденсаторовъ, встрѣчающихся на практикѣ.

40. Сферическій конденсаторъ. Представимъ себѣ двѣ концентрическихъ шаровыхъ поверхности A и A'

изъ которыхъ A' соединена съ землею (фиг. 36). Когда мы сообщимъ шаровой поверхности A положительный зарядъ Q , на внутренней поверхности шара A' появится равное количество (§ 37) отрицательнаго электричества, а положительное электричество утечетъ въ землю.

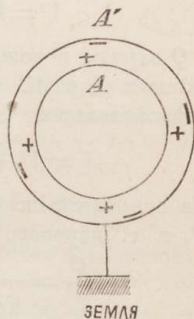
Обозначимъ черезъ R и R' радиусы двухъ шаровыхъ поверхностей. Предположимъ, что Q есть предѣльное количество электричества, которое можетъ воспринять шаровая поверхность A въ присутствіи поверхности A' . Чтобы опредѣлить емкость этого конденсатора, намъ нужно опредѣлить потенциалъ поверхности A въ присутствіи поверхности A' . Этотъ потенциалъ въ какой нибудь точкѣ поверхности A будетъ вида:

$$V = \sum \left(k \frac{ds \cdot \sigma}{r} - k \frac{ds' \cdot \sigma}{r'} \right)$$

гдѣ ds элементы поверхности A , ds' элементы поверхности A' , σ плотность заряда, r и r' разстояніе отъ данной точки шаровой поверхности A до элементовъ ds и ds' . Выраженія $\frac{ds' \cdot \sigma}{r'}$ входятъ въ $\sum$ со знакомъ минусъ, ибо зарядъ поверхности A' будетъ отрицательный. Предыдущее выраженіе можно написать:

$$V = \sum k \frac{ds \cdot \sigma}{r} - \sum k \frac{ds' \cdot \sigma}{r'}$$

Но первая сумма съ алгебраической точки зрѣнія есть потенциалъ шаровой поверхности A независимо отъ A' , а вторая сумма потенциалъ поверхности A , когда на этой поверхности былъ бы распространенъ зарядъ плотностью σ *).



Фиг. 36.

*) Это лишь сравненіе въ смыслѣ алгебраическомъ,

Какъ мы уже видѣли (§ 19), если R и R' радиусы шаровыхъ поверхностей A и A' , то потенциалы этихъ послѣднихъ будутъ:

$$V' = k \frac{Q}{R}; \quad V'' = -k \frac{Q}{R'}$$

гдѣ Q заряды положительный и отрицательный на поверхности A и A' .

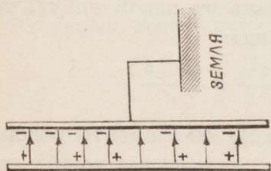
Слѣдовательно;

$$V = V' + V'' = k \cdot Q \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)$$

На основаніи сказаннаго въ § 39, емкость системы AA' , т. е. шароваго конденсатора будетъ:

$$\frac{Q}{V} = \frac{Q}{kQ \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)} = \frac{RR'}{k(R' - R)} \quad (35)$$

41. Плоскій конденсаторъ. Возьмемъ два плоскихъ диска (фиг. 37), размѣры площадей которыхъ безконечно велики по отношенію къ ихъ толщинѣ и разстоянію между ними. Пусть B соединенъ съ землею, а дискъ A наэлектризуемъ до отказа положительнымъ электричествомъ при потенциалѣ V . Внутренняя поверхность B зарядится равнымъ количествомъ (§ 37) отрицательнаго электричества.



Фиг. 37.

Силовыя линіи электрическаго поля между A и B направятся отъ A къ B и будутъ направлены, очевидно, перпендикулярно къ обѣимъ плоскостямъ. Такъ какъ размѣры площадей дисковъ по отношенію къ разстоянію между ними безконечно велики, то поле

на самомъ же дѣлѣ потенциалъ поверхности A' равенъ нулю, ибо A' соединенъ съ землею. Такимъ образомъ на V и V' нужно смотрѣть, какъ на алгебраическія выраженія, а не какъ на потенциалъ.

въ пространствѣ между дисками можно считать равномернымъ. Но напряженія поля будетъ (§ 10), если V потенциалъ на поверхности A

$$H = - \frac{dV}{dn}$$

гдѣ элементарное перомѣщеніе dn совпадаетъ съ нормалью къ поверхности A , т. е. съ направлениемъ силовыхъ линій.

Отсюда

$$-dV = H \cdot dn \text{ или } dV = -H \cdot dn.$$

Такъ-какъ поверхность B соединена съ землею, то потенциалъ на поверхности B будетъ = нулю. Следовательно, переходя отъ A къ B , потенциалъ измѣнится отъ V до 0 , а потому можно написать:

$$\int_V^0 dV = - \int H \cdot dn.$$

Но H постоянно, ибо мы предположили, что поле равномерно. Следовательно:

$$\int_V^0 dV = -H \int dn$$

$\int dn$ будетъ полный путь отъ A до B , т. е. d интегрируя получимъ:

$$-V = -H \cdot d$$

откуда $V = H \cdot d$.

Но съ другой стороны, мы знаемъ, что, согласно теоремѣ Кулона (§ 31), напряженіе поля вблизи поверхности заряженнаго проводника будетъ:

$$H = 4\pi k \sigma$$

гдѣ σ плотность заряда. А такъ какъ поле предполагается равномернымъ, то его напряженіе будетъ одинаково и въ другихъ точкахъ между A и B , а потому въ предыдущемъ выраженіи потенциала мы можемъ замѣнить H величиною $4\pi k \cdot \sigma$.

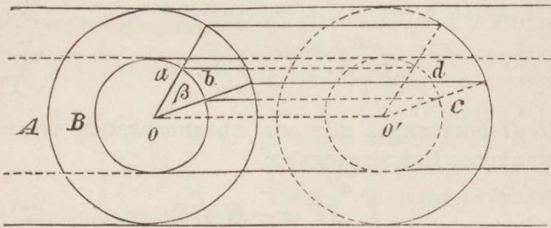
Слѣдовательно:

$$V = 4\pi k d \cdot \sigma.$$

Количество же электричества будетъ на площади S диска $A-S \cdot \sigma$, слѣдовательно, емкость конденсатора AB на основаніи § 39 будетъ:

$$\frac{Q}{V} = \frac{S \cdot \sigma}{4\pi k \cdot d \cdot \sigma} = \frac{S}{4\pi k \cdot d} \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

42. Цилиндрическій конденсаторъ. Возьмемъ двѣ концентрическихъ цилиндрическихъ поверхности, разстояніе между которыми бесконечно мало по отношенію къ поверхности цилиндровъ. Соединимъ внѣшній цилиндръ съ землею (фиг. 38) и зарядимъ внутренній цилиндръ до отказа количествомъ $+Q$ электричества



Фиг. 38.

при потенциалѣ V . На внутренней поверхности цилиндра A появится равное количество отрицательнаго электричества. Силовыя линіи поля между двумя цилиндрами направятся по радіальнымъ плоскостямъ. Силовой потокъ, падающій на цилиндрическую поверхность $abcd$, заключенную между двумя радіальными плоскостями $oo'bc$ и $oo'ad$ будетъ,

$$\int_0^s H \cdot ds \cdot \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (\S 14).$$

гдѣ H напряженіе поля каждаго элемента поверхности, α уголъ нормали къ элементу поверхности съ силовыми линіями. Но такъ-какъ силовыя линіи направ-

ляются по радіальнымъ плоскостямъ, то всѣ онѣ будутъ нормальны къ поверхности $abcd$, а потому $\alpha=0$ и $\cos\alpha=1$. Ясно также, что H будетъ одно и тоже во всѣхъ точкахъ поверхности $abcd$, а потому предъидущій интегралъ можно написать:

$$H \int_0^s ds = H \cdot S.$$

Для другой поверхности $a' b' c' d'$, заключенной между тѣми же плоскостями, потокъ будетъ:

$$H' S'.$$

Изъ фигуры ясно, что потокъ падающій на S и на S' одинъ и тотъ же. Слѣдовательно:

$$HS = H'S'.$$

Если β уголъ между радіальными плоскостями r и r' радіусы поверхностей S и S' , а l разстояніе между o и o' , то:

$$S = \beta r \cdot l.$$

$$S' = \beta r' l.$$

Слѣдовательно

$$H \beta \cdot r \cdot l = H' \beta \cdot r' l$$

откуда:

$$\frac{H}{H'} = \frac{r'}{r} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (\alpha)$$

и это для какихъ угодно двухъ концентрическихъ поверхностей между двумя цилиндрами. Но у поверхности B , по теоремѣ Кулона, напряженіе поля будетъ

$$H_A = 4\pi k \cdot \sigma$$

гдѣ σ плотность заряда.

Слѣдовательно у какой угодно другой поверхности радіуса r напряженіе H будетъ на основаніи уравненія (α) :

$$H = H_A \cdot \frac{R}{r} = 4\pi k \sigma \frac{R}{r}$$

гдѣ R радіусъ поверхности B .

Съ другой стороны, если V потенциалъ поверхности B , то (§ 10):

$$H = - \frac{dv}{dr}.$$

Откуда $dv = -Hdr = 4\pi k\sigma R \frac{dr}{r}$; переходя отъ B къ A потенциалъ измѣняется отъ V до 0 , слѣдовательно

$$\int_V^0 dV = - \int_R^{R'} 4\pi k\sigma R \frac{dr}{r}$$

откуда:

$$-V = -4\pi k\sigma R \int_R^{R'} \frac{dr}{r}$$

но $\int \frac{dr}{r} = \lg_e r$ (§ 66 форм. 55, часть I).

Слѣдовательно

$$\begin{aligned} -V &= -4\pi k\sigma R (\lg_e r)^{R'}_R = -4\pi k\sigma R (\lg_e R' - \lg_e R) = \\ &= -4\pi k\sigma R \lg_e \frac{R'}{R}. \end{aligned}$$

Зарядъ Q на часть цилиндрической поверхности A законченной между плоскостями o и o' будетъ:

$$Q = 2\pi R \cdot l \cdot \sigma$$

ибо эта часть поверхности равна $2\pi kl$; емкость слѣдовательно будетъ:

$$\frac{Q}{V} = \frac{2\pi R \cdot l \cdot \sigma}{4\pi k R \cdot \sigma \lg_e \frac{R'}{R}} = \frac{l}{2k \lg_e \frac{R'}{R}} \quad . \quad (37).$$

43. Выраженіе потенциальной энергіи конденсатора. Мы уже видѣли, что потенциальная энергія системы массъ выражается символически:

$$W = \frac{1}{2} \sum m \cdot V,$$

гдѣ V потенциалъ въ той точкѣ, гдѣ находится масса m .

Въ случаѣ конденсатора, состоящаго изъ двухъ

тѣла A и B , одно изъ которыхъ соединено съ землею (B на примѣръ) для всѣхъ массъ на тѣлѣ A потенциалъ будетъ одинъ и тотъ же V , а для массъ на тѣлѣ B , потенциалъ будетъ 0 ; слѣдовательно въ $\sum m V$, слагаемыя относящіяся къ массамъ тѣла B не войдутъ (они будутъ $= 0$), останутся слагаемыя массъ тѣла A . Пусть dq количество электричества въ каждой точкѣ тѣла A , тогда:

$$W = \frac{1}{2} \sum dq \cdot V.$$

Но V величина постоянная для всѣхъ точекъ тѣла A , а потому:

$$W = \frac{1}{2} V \sum dq$$

Но $\sum dq =$ полному заряду тѣла A , слѣдовательно:

$$W = \frac{1}{2} V Q$$

или еще

$$W = \frac{1}{2} V \cdot C \cdot V = \frac{1}{2} C V^2 \quad . \quad . \quad (38)$$

ибо

$$Q = C V. \quad (\S 38, \text{уравн. } 34).$$

44. Діэлектрическая постоянная. Возьмемъ, на примѣръ, плоскій конденсаторъ и предположимъ сначала, что его двѣ металлическія поверхности, называемыя арматурами, отдѣлены (изолированы) одна отъ другой слоемъ воздуха, емкость такого конденсатора будетъ какъ мы знаемъ уже (§ 41):

$$C = \frac{s}{4\pi k \cdot d}.$$

гдѣ k зависитъ отъ среды, въ которой происходятъ взаимодѣйствія (§ 7) и отъ выбора единицъ (§ 22). Такимъ образомъ, если мы возьмемъ единицы для s и d и емкости c , то k будетъ исключительно зависеть отъ среды. Дѣйствительно, если вмѣсто воздуха, между двумя арматурами, мы возьмемъ какой нибудь другой изоляторъ на примѣръ стекло, то емкость кон-

десатора измѣнится и станетъ въ данномъ случаѣ больше.

Законъ Кулона мы выразили слѣдующимъ уравненіемъ:

$$f = k \frac{qq'}{r^2}$$

гдѣ k зависитъ отъ выбора единицъ и среды. Исходя изъ этой формулы, мы нашли выраженіе потенціала

$$V = k \sum \frac{q}{r}$$

Вотъ отчего и вошелъ коэффиціентъ k въ выраженіе емкости, ибо эта послѣдняя

$$C = \frac{Q}{V}$$

гдѣ Q количество электричества, а V потенціалъ, въ который и входитъ коэфф. K .

Когда вмѣсто воздуха мы возьмемъ между арматурами конденсатора другую среду, стекло, на примѣръ, то конденсаторъ, который при воздухѣ уже получилъ зарядъ Q , способенъ будетъ принять еще большій зарядъ; это значитъ, что его потенціалъ вмѣсто V сталъ меньше, а именно V' слѣдовательно емкость конденсатора стала:

$$C' = \frac{Q}{V'}$$

Но потенціалъ V вида $k \sum \frac{q}{r}$ точно также потенціалъ V' будетъ вида

$$V' = k' \sum \frac{q}{r}$$

ибо количество электричества Q осталось то же самое, т. е. слѣдовательно всѣ q тѣ же самыя, точно также какъ и r , слѣдовательно измѣненіе всецѣло произошло въ коэфф. k , который сталъ k' .

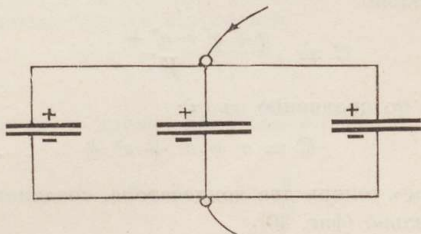
Изъ предъидущаго выводимъ:

$$\frac{V}{V'} = \frac{k}{k'} = \frac{c'}{c}$$

т. е. коэффициенты k и k' обратно пропорциональны емкостямъ. Отсюда средство для измѣренія этихъ коэффициентовъ.

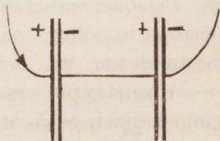
Отношеніе $\frac{c'}{c}$ называется діэлектрическою постоянною стекла по отношенію къ воздуху.

45. Остаточный зарядъ. Если предварительно заряженный конденсаторъ разрядить, соединивъ его обѣ катушки проводникомъ, затѣмъ опять разобщить металлическое соединеніе между катушками, то окажется, что нѣкоторое время спустя, отъ того же конденсатора можно получить второй разрядъ, хотя болѣе слабый чѣмъ первый. Это явленіе аналогично явленію остаточнаго магнетизма, мы его объяснимъ, когда познакомимся съ теоріею магнитныхъ дѣйствій. Теперь же замѣтимъ, что остаточный зарядъ замѣчается въ конденсаторахъ съ такими діэлектриками, какъ парафинъ, каучукъ, стекло, слюда и т. п., въ конденсаторахъ же съ воздушною прослойкою это явленіе не наблюдается.



Фиг. 39.

46. Соединеніе конденсаторовъ въ группы. Конденсаторы можно соединять параллельно и послѣдовательно. На фиг. 39 показано параллельное соединеніе, а на фиг. 40 послѣдовательное соединеніе.



Фиг. 40.

Ясно, что при параллельномъ соединеніи всѣ катушки (+), соединенные вмѣстѣ, будутъ при одинаковомъ по-

тенціалъ. Зарядимъ такую систему конденсаторовъ, т. е. соединимъ (+) арматуры съ источникомъ положит. электричества, а (—) арматуры съ землею. Предположимъ слѣдовательно, что общій потенціалъ арматуръ (+) будетъ V ; пусть емкость каждаго конденсатора $c, c', c'' \dots$ и $q, q', q'' \dots$ количества электричества, сосредоточенныя на (+) арматурахъ. Тогда имѣемъ (§ 38)

$$q = c V, q' = c' V, q'' = c'' V \dots$$

откуда:

$$q + q' + q'' + \dots = (c + c' + c'' + \dots) V \dots (\alpha)$$

Если C общая емкость всей системы соединенныхъ конденсаторовъ, а Q все количество сосредоточеннаго на (+) арматурахъ, то мы будемъ имѣть:

$$Q = C \cdot V$$

Но, очевидно:

$$Q = q + q' + q'' + \dots$$

слѣдовательно

$$C = \frac{q + q' + q'' + \dots}{V}$$

Откуда по сравненію съ (α):

$$C = c + c' + c'' + \dots \quad (3)$$

Возьмемъ теперь два конденсатора, соединенные послѣдовательно (фиг. 40).

Будемъ теперь заряжать такую систему конденсаторовъ. Положительный зарядъ (+) арматуры 1-го конденсатора вызоветъ равное количество отрицательнаго электричества на его (—) арматурѣ, положительное же (—) арматуры оттолкнется къ (—) арматурѣ 2-го конденсатора и тамъ вызоветъ равное количество отрицательнаго количества на (—) арматурѣ, а положительное электричество этой послѣдней мы отведемъ въ землю. Послѣ этого получится слѣдующее распределение:

На (+) арматурѣ 1-го конденсатора имѣется q положительнаго электричества, на (—) арматурѣ его q отрицательнаго электричества, на (+) арматурѣ 2-го конденсатора q положительнаго электричества и на (—) арматурѣ q отрицательнаго электричества.

Такъ какъ при этомъ распредѣленіи электрическія массы находятся въ равновѣсіи, то на частяхъ, соединенныхъ вмѣстѣ проводникомъ (§ 29) во всѣхъ точкахъ будетъ одинъ и тотъ же потенциалъ, т. е. на (—) арматурѣ 1-го конденсатора и (+) арматурѣ втораго будетъ вездѣ одинаковый потенциалъ. Обозначимъ его черезъ V' . Пусть затѣмъ потенциалъ на (+) арматурѣ 1-го конденсатора V_1 , а на (—) арматурѣ 2-го конденсатора V_2 . Тогда обозначая черезъ c_1 и c_2 емкости обоихъ конденсаторовъ, получимъ;

$$q = c_1 (V_1 - V')$$

$$q = c_2 (V' - V_2).$$

Съ другой стороны, если C емкость системы двухъ соединенныхъ конденсаторовъ, то:

$$q = C (V_1 - V_2).$$

Изъ первыхъ двухъ уравненій выводимъ:

$$V_1 - V' = \frac{q}{c_1}$$

$$V' - V_2 = \frac{q}{c_2}$$

откуда складывая:

$$V_1 - V_2 = q \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right).$$

Изъ третьяго же уравненія имѣемъ:

$$V_1 - V_2 = q \cdot \frac{1}{C},$$

откуда:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}.$$

Если взять и соединить n конденсаторовъ послѣдовательно, то общая емкость будетъ:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \dots + \frac{1}{c_n}, \dots (40)$$

гдѣ $c_1, c_2, c_3 \dots$ емкости отдѣльныхъ конденсаторовъ.

ОТДѢЛЪ II.

Перемѣщеніе электрическихъ массъ въ проводникахъ.

ГЛАВА VII.

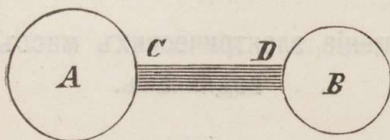
Понятіе о токѣ. Законъ Ома.

47. Возьмемъ два наэлектризованныхъ при разныхъ потенціалахъ V и V' тѣла A и B , пусть $V > V'$, соединимъ A съ B при посредствѣ третьяго проводящаго тѣла, напримѣръ, при посредствѣ металлической проволоки (фиг. 41), тогда произойдетъ перемѣщеніе электрическихъ массъ, сосредоточенныхъ на тѣлѣ A съ этого послѣдняго къ тѣлу B , пока не установится новое равновѣсіе на A и B , а это будетъ тогда, когда потенціалы на A и B сдѣлаются одинаковыми.

Такимъ образомъ, перемѣщеніе электрическихъ массъ отъ A до B будетъ происходить по проволоцѣ, соединяющей A и B . Это значитъ, что въ этомъ проводникѣ электрическія силовыя линіи будутъ направлены параллельно его оси. Кромѣ того, въ моментъ соединенія проволокой тѣлъ A и B , т. е. когда начнется перемѣщеніе массъ, въ пространствѣ окружающемъ тѣла A и B не будетъ ощущаться дѣйствія электрическаго поля, пока не установится равновѣсіе (это можно подтвердить опытомъ); это значитъ, что электрическія силовыя линіи до установленія равновѣсія массъ между A и B будутъ всѣ сосредоточены въ

соединительной проволокой, какъ это примѣрно показано на фигурѣ 41.

Когда установится равновѣсіе, то оба тѣла *A* и *B* будутъ представлять собою, какъ бы одинъ проводникъ съ одинаковымъ потенциаломъ во всѣхъ точкахъ его поверхности, силовыхъ линій внутри *CD* уже не будетъ, и эти послѣднія будутъ направлены не отъ



Фиг. 41.

A къ *B*, а иначе, а именно такъ, какъ направлены силовыя линіи вокругъ проводника той или другой формы, заряженнаго электричествомъ, находящимся въ равновѣсіи. (При этомъ *A* и *B* вмѣстѣ съ проволокою слѣдуетъ считать, какъ одинъ общій проводникъ).

Отсюда мы видимъ, что распредѣленіе электрическихъ силовыхъ линій совершенно иное, когда происходитъ обмѣнъ электрическихъ массъ между двумя тѣлами, т. е. когда электрическія массы перемѣщаются отъ одного тѣла къ другому, чѣмъ когда эти массы находятся въ равновѣсіи на обоихъ тѣлахъ.

То состояніе, когда электрическія массы находятся въ равновѣсіи, называютъ статическимъ, а состояніе, при которомъ электрическія массы перемѣщаются отъ одного проводника къ другому, называется динамическимъ. Отсюда выраженія статическое и динамическое электричество.

При динамическомъ состояніи электричества поле вдоль проводника *CD* (фиг. 41), если поперечное сѣченіе этого послѣдняго вездѣ одинаково, можно считать равномернымъ, т. е. что во всѣхъ точкахъ про-

водника CD положительная масса электричества будет толкаться къ тѣлу B съ одинаковою силою.

Разъ черезъ проводникъ CD будетъ происходить перемѣщеніе электрическихъ массъ, то установится какъ бы теченіе этихъ послѣднихъ и черезъ поперечное сѣченіе CD въ любой его точкѣ будетъ въ единицу времени протекать то или другое количество электричества. Мы назовемъ электрическимъ токомъ именно это количество, т. е. количество электричества, протекающее въ секунду времени черезъ поперечное сѣченіе проводника:

Такъ какъ электрическія массы перемѣщаются по силовымъ линіямъ, то естественно допустить, что количество, протекаемаго за единицу времени электричества, будетъ пропорціонально числу силовыхъ линій, заключенныхъ въ проводникѣ, т. е. силовому потоку въ проводникѣ. Но если напряженіе электрическаго поля во всѣхъ точкахъ соединительнаго проводника H и если S поперечное сѣченіе проводника, то силовой потокъ будетъ: HS .

Слѣдовательно, можно написать если I сила тока:

$$I = C.H.S,$$

гдѣ C нѣкоторая постоянная, зависящая отъ природы проводника.

Опредѣлимъ теперь H . Если V и V' потенциалы у концовъ проводника CD , и если при переходѣ отъ одной точки проводника къ безконечно близкой потенциалъ измѣняется на dV , то, во-1-хъ, полное измѣненіе потенциала отъ C до D будетъ:

$$\int_c^D dV = - (V - V') *),$$

*) $\int_c^D dV = -(V - V')$, а не $V - V'$, ибо dV есть

а во 2-хъ, въ каждой точкѣ:

$$H = - \frac{dV}{dl} \text{ (§ 9),}$$

гдѣ dl безконечное малое перемѣщеніе вдоль проводника.

Отсюда:

$$H \cdot dl = - dV.$$

Если l полная длина проводника CD , то:

$$\int_0^l H \cdot dl = - \int dV,$$

но H величина постоянная вдоль всего проводника,
а

$$\int dV = - (V - V'),$$

поэтому:

$$H \int_0^l dl = V - V'$$

или

$$Hl = V - V',$$

откуда:

$$H = \frac{V - V'}{l}.$$

Слѣдовательно сила тока будетъ:

$$I = C \frac{V - V'}{l} \cdot S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41),$$

приращеніе потенціала, идя отъ V къ V' , а такъ какъ V больше V' , т. е. потенциалъ идетъ уменьшаясь, то dV величина отрицательная, а слѣдовательно и сумма $\int dV$ должна быть отрицательною.

это выражение можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$I = \frac{V - V'}{\left(\frac{l}{C \cdot S} \right)}$$

выражение

$$\frac{l}{C \cdot S}$$

называется электрическимъ сопротивленіемъ проводника:

Положимъ:

$$\frac{l}{C \cdot S} = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42),$$

отсюда видно, что $\frac{1}{C}$ будетъ сопротивленіемъ проводника длиною, равною единицѣ и поперечное сѣченіе котораго равно также единицѣ, эта величина $\frac{1}{C}$ называется удѣльнымъ сопротивленіемъ или сопротивляемостью. Величина обратная, т. е. C называется проводимостью.

Итакъ, для силы тока по проводнику постоянного сѣченія s мы имѣемъ формулу:

$$I = \frac{V - V'}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

Если поперечное сѣченіе проводника не одинаково во всѣхъ его точкахъ, то сопротивленія R будетъ уже болѣе сложная функція, а именно:

$$R = \int_0^l \frac{dl}{c \cdot s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Но сила тока будетъ все-таки вездѣ одинакова, подобно тому, какъ при истеченіи жидкостей по трубамъ съ переменнымъ сѣченіемъ. Формула (43) останется справедливою и для этого случая, разница будетъ только въ величинѣ R .

48. Законъ Ома. Уравненіе 43 съ обобщеніемъ (44) есть математическое выраженіе такъ называемаго закона Ома. Этотъ законъ слѣдующій: сила тока по проводнику пропорціональна разности потенциаловъ у крайнихъ точекъ проводника и обратно пропорціональна сопротивленію проводника. Формула (41) (см. стр. 105) нами была выведена въ предположеніи, что V и V' потенциалы у концовъ проводника CD длиною l . Но выводъ будетъ тотъ же, если мы на проводникѣ CD возьмемъ двѣ точки $C'D'$ (фиг. 41) на разстояніи l' , только тогда V и V' будутъ обозначать не потенциалы у концовъ, а въ этихъ точкахъ. Поэтому мы можемъ обобщить законъ Ома и выразить его слѣдующимъ образомъ:

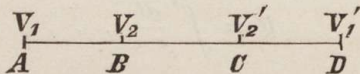
Сила тока въ проводникѣ пропорціональна разности потенциаловъ въ двухъ его точкахъ и обратно пропорціональна сопротивленію части проводника между этими двумя точками.

Докажемъ дѣйствительно, что:

$$I = \frac{V_1 - V_1'}{R_1} = \frac{V_2 - V_2'}{R_2} \dots \dots (45),$$

гдѣ V_1 и V_1' , потенциалы въ A и D , V_2 и V_2' потенциалы въ B и C (фиг. 42), а R_1 и R_2 сопротивленіе между A и D , B и C .

Мы предположимъ что сѣченіе проводника вездѣ одинаково.



Фиг. 42.

Раньше мы нашли, что:

$$I = C \cdot H \cdot S,$$

гдѣ H поле вдоль проводника, но

$$H = \frac{V_1 - V_1'}{l} = \frac{V_2 - V_2'}{l'},$$

гдѣ l длина AD , l' длина BC а такъ какъ

$$R_1 = \frac{l}{c \cdot s}, \quad R_2 = \frac{l'}{c \cdot s},$$

то, ясно, что:

$$\frac{V_1 - V_1'}{R_1} = \frac{V_2 - V_2'}{R_2},$$

Разность потенціаловъ между двумя точками проводника называется паденіемъ потенціала между этими точками.

Слѣдовательно сила тока равняется паденію потенціала между двумя какими угодно точками проводника, раздѣленному на сопротивленіе проводника между этими точками.

Мы доказали справедливость уравненія (45) въ случаѣ одинаковаго сѣченія проводника, но это уравненіе будетъ вѣрно и при переменномъ сѣченіи, какъ это не трудно также доказать.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что для полученія постояннаго тока необходимо, чтобы разность $V - V'$ была постоянною, иначе послѣ того, какъ электрическія массы перейдутъ отъ одного тѣла къ другому по проводнику, потенціалы V и V' сравняются (§ 47), послѣ чего настанетъ равновѣсіе.

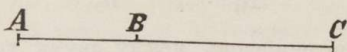
Мы предположили, что V и V' оба положительные; но всѣ разсужденія останутся справедливыми, когда V будетъ положительнымъ, а V' отрицательнымъ.

49. Электродвижущая сила. Причина, вызывающая разность потенціаловъ въ двухъ точкахъ проводника и поддерживающая эту разность непрерывно постоянною, называется электродвижущею силою, она измѣряется разностью потенціаловъ въ этихъ точкахъ.

Если въ проводникѣ, кромѣ электродвижущей силы у его концовъ дѣйствуетъ еще электродвижущая сила

въ какой-нибудь его промежуточной точкѣ, то потенциалъ въ этой точкѣ какъ бы дѣлаетъ скачекъ сразу отъ нѣкоторой величины V_1 до величины V_2 . Посмотримъ, какимъ образомъ тогда выразится сила тока въ проводникѣ.

50. Случай нѣсколькихъ электродвижущихъ силъ въ проводникѣ. Пусть имѣемъ проводникъ AC , у концовъ котораго дѣйствуетъ электродвижущая сила $V - V'$ (фиг. 43). Пусть въ точкѣ B дѣйствуетъ вторая



Фиг. 43.

электродвижущая сила, производящая повышение потенциала съ величины V_1 до величины V_2 .

Такимъ образомъ въ отрѣзкѣ AB будетъ дѣйствовать разность потенциала $V - V_1$, а въ отрѣзкѣ BC разность $V_2 - V'$.

Примѣнимъ законъ Ома къ каждому изъ отрѣзковъ AB и BC , мы получимъ для тока въ AB :

$$I = \frac{V - V_1}{R_1}$$

для тока въ BC :

$$I' = \frac{V_2 - V'}{R_2},$$

При установившемся теченіи электрическихъ массъ I и I' будутъ одинаковы, поэтому:

$$I = I' = \frac{V - V_1}{R_1} = \frac{V_2 - V'}{R_2},$$

Откуда можемъ сказать:

$$\frac{V - V_1}{R_1} = \frac{V_2 - V'}{R_2} = \frac{V - V' - (V_1 - V_2)}{R_1 + R_2} \dots (46)$$

Мы скажемъ, что электродвижущая сила въ точкѣ B дѣйствуетъ въ сторону электродвижущей силы у концовъ проводника, т. е. въ сторону $V - V'$, когда разность $V_1 - V_2$ будетъ отрицательною, т. е. когда по направленію тока, который получился бы отъ $V_1 - V'$ будетъ происходить повышеніе потенціала, въ противномъ случаѣ мы скажемъ, что электродвижущая сила въ B дѣйствуетъ въ обратномъ направленіи электродвижущей силы у концовъ. Если мы обозначимъ электродвижущую силу въ B черезъ E , то можемъ написать на основаніи (ур. 46) и только что сказаннаго:

$$I = \frac{V - V' + E}{R_1 + R_2} \dots \dots \dots (47)$$

когда E дѣйствуетъ въ сторону электродвижущей силы $V_1 - V'$ и:

$$I = \frac{V - V' - E}{R_1 + R_2} \dots \dots \dots (48)$$

когда E дѣйствуетъ въ сторону обратную.

Уравненія (47) и (48) обобщаютъ законъ Ома и показываютъ, какъ слѣдуетъ измѣнить его формулировку въ случаѣ, если въ проводникѣ дѣйствуетъ нѣсколько электродвижущихъ силъ.

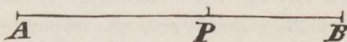
Вообще для нѣсколькихъ электродвижущихъ силъ можно написать:

$$I = \frac{V - V' + \sum E}{\sum R} \dots \dots \dots (49)$$

гдѣ E будутъ со знаками $+$ или $-$, смотря по направленію ихъ дѣйствія сравнительно съ $V - V'$. $\sum R$ изображаетъ сумму сопротивленій всѣхъ частей проводника.

51. Графическое изображеніе закона Ома. Мы уже доказали (§ 48), что для любыхъ точекъ проводника сила тока пропорціональна разности потенціаловъ

между этими точками, разделенной на сопротивление части проводника между теми же точками. Возьмем какую нибудь точку P на проводник AB между концами которого действует разность потенциалов $V - V'$ (фиг. 44).



Фиг. 44.

Пусть v потенциалъ въ этой точкѣ во время установившагося тока въ проводникѣ. Этотъ послѣдній будетъ:

$$I = \frac{V - V'}{R}$$

гдѣ R сопротивление проводника AB . Обозначимъ черезъ r сопротивление AP , тогда мы можемъ написать (§ 48):

$$I = \frac{V - V'}{R} = \frac{V - v}{r}$$

откуда

$$V - v = \frac{V - V'}{R} \cdot r$$

ИЛИ

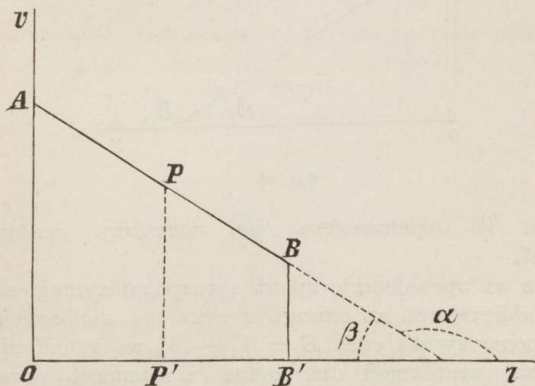
$$v = V - \frac{V - V'}{R} r \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Если разсматривать v и r , какъ перемѣнныя величины, то предыдущее уравленіе представить собою прямую линію (часть I § 54), при чемъ V будетъ отрѣзокъ, который эта прямая отсѣкаетъ на оси ординатъ, а величина $-\frac{V-V'}{R}$ будетъ tg угла образуемаго этого прямого съ осью абсцинъ. Такъ какъ $\frac{V-V'}{R}$ предполагается положительною, ибо принято, что $V > V'$, то этотъ уголъ будетъ тупымъ, ибо коэф-

коэффициентъ $-\frac{V - V'}{R}$ отрицателенъ, т. е. tg искомага угла отрицателенъ. Предъидущее уравненіе можно построить еще слѣдующимъ образомъ. Мы знаемъ уже отръзокъ, отсѣкаемый искомою прямою на оси ординатъ, онъ $= V$. Слѣдовательно для построения прямой достаточно найти еще вторую точку ея. Опредѣлимъ ординату точки, абсциса которой $= R$, для этого въ уравненіи α положимъ $r = R$, тогда получимъ:

$$v = V - V + V' = V'$$

Отсюда слѣдующее построение (фиг. 45): проводимъ двѣ оси координатъ or и ov . На оси ov отложимъ



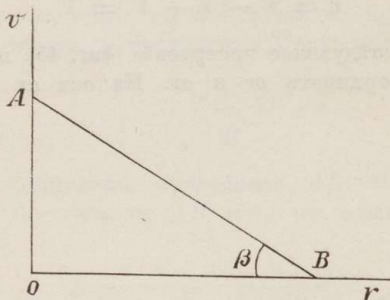
Фиг. 45.

отръзокъ OB' , равный R . Въ точкѣ B' возобновимъ перпендикуляръ къ or и отложимъ на этомъ перпендикулярѣ $B'B = V'$. Соединимъ AB , прямая AB изобразитъ намъ уравненіе закона Ома. Любая ордината PP' даетъ намъ значеніе потенциала въ любой точкѣ проводника, отстоящей отъ конца его, обла-

дающего высшимъ потенциаломъ V , на сопротивленіе r .

Черезъ точку B проведемъ параллельную прямую къ оси or ; tg угла α будетъ $-\frac{V - V'}{R}$, т. е. $-I$, а слѣдовательно I будетъ равняться tg угла β дополнительному до 180° угла α .

Если одинъ конецъ проводника соединенъ съ землею, то $V' = 0$ и тогда получится графикъ представленный на фиг. 46. Сила тока $I = tg \beta$.



Фиг. 46.

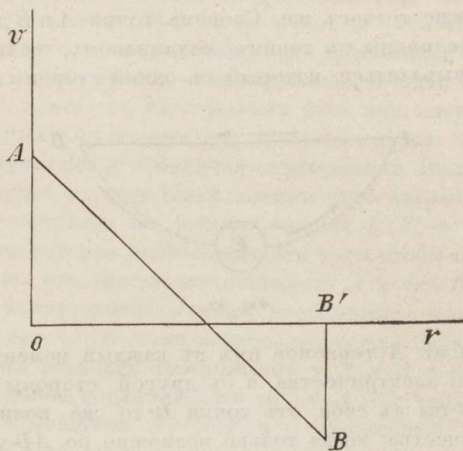
Если V' отрицателенъ, то получимъ графикъ фиг. 47.

Если въ проводникѣ, кромѣ электродвижущей силы V V' дѣйствуетъ въ одномъ и томъ же направленіи электродвижущая сила $E = V_1 - V_2$ въ точкѣ проводника, отстоящей отъ конца съ высшимъ потенциаломъ V на сопротивленіе R_1 , то графикъ будетъ такой, какъ это изображено на фигурѣ 48. Прямая AB и CD будутъ параллельны; ибо сила тока должна быть одинакова какъ въ части R_1 , такъ и въ части R_2 . Этотъ графикъ показываетъ, что сила тока равна

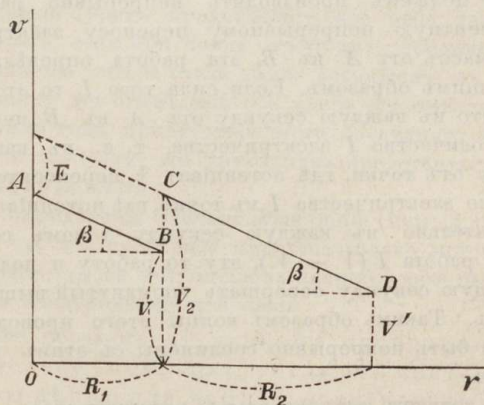
$$\frac{V - V' + E}{R_1 + R_2}$$

ибо $tg \beta =$ этому выраженію.

52. Электрическая цепь и работа электрического тока. Представимъ себѣ проводникъ AB , пусть у кон-



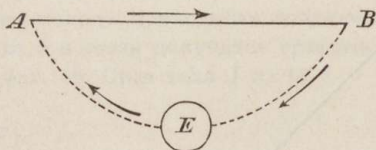
Фиг. 47.



Фиг. 48.

цовъ этого проводника (фиг. 49) будетъ разность потенциаловъ $V - V'$. Для того, чтобы между A и B установился постоянный электрический токъ необхо-

димо, чтобы количество электричества, перешедшее отъ A къ B восполнилось тотчасъ же въ A , а электричество пришедшее въ B отнялось отъ этого послѣдняго также тотчасъ же. Словомъ точки A и B должны быть соединены съ такимъ механизмомъ, если такъ можно выразиться, который съ одной стороны достав-



Фиг. 49.

лялъ бы въ A теряемое имъ въ каждый моментъ количество электричества, а съ другой стороны опять вбиралъ бы въ себя отъ точки B то же количество электричества; тогда только возможно по AB установить непрерывный токъ; такой механизмъ слѣдовательно долженъ производить непрерывно работу, эквивалентную непрерывному переносу электрическихъ массъ отъ A къ B , эта работа опредѣляется слѣдующимъ образомъ. Если сила того I , то это значитъ, что въ каждую секунду отъ A къ B переносится количество I электричества, т. е. въ каждую секунду отъ точки, гдѣ потенциалъ V переносится количество электричества I къ точкѣ, гдѣ потенциалъ V' , слѣдовательно въ каждую секунду токомъ совершается работа $I(V - V')$, эту то работу и долженъ въ каждую секунду совершать упомянутый выше механизмъ. Такимъ образомъ концы этого проводника должны быть непрерывно соединены съ этимъ механизмомъ.

Токъ долженъ слѣдовательно циркулировать такъ, чтобы направляться отъ этого механизма и возвращаться къ нему. Такой механизмъ мы назовемъ источникомъ электрическаго тока, а электрическою цѣпью мы назовемъ совокупность всѣхъ

тѣхъ проводниковъ, по которымъ долженъ циркулировать токъ, исходя изъ источника и возвращаясь къ нему. Такъ, чтобы въ проводникѣ AB (фиг. 49) установить электрическій токъ необходимо либо его концы соединить непосредственно съ источникомъ тока, и тогда цѣпью будетъ самъ проводникъ, либо соединить его концы съ источникомъ тока при посредствѣ добавочныхъ проводниковъ, и тогда цѣпью будетъ проводникъ AB и добавочные проводники. Въ послѣднемъ случаѣ въ источникѣ должна быть затрачена въ каждую секунду не только энергія $I(V - V')$, но еще и та, которая необходима для того, чтобы перенести массы отъ самого источника къ A и отъ B снова къ источнику, иначе говоря необходимо, чтобы въ самомъ источникѣ была электродвижущая сила большая, чѣмъ разность потенціаловъ у A и B , т. е. чтобы у проводника соединяющаго точку A источникъ развивалъ потенціалъ $V_1 > V$, а у проводника, соединяющаго тотъ же источникъ съ точкою B , этотъ послѣдній развивалъ бы потенціалъ $V_1' < V'$. Данный проводникъ будетъ представлять изъ себя замкнутую цѣпь, если оба конца его будутъ соединены съ источникомъ тока и тогда лишь возможенъ въ немъ токъ, когда же одинъ или оба конца его отдѣлены отъ источника тока, присутствіе этого послѣдняго не возможно и говорятъ, что проводникъ представляетъ разомкнутую цѣпь.

Изъ опредѣленія электродвижущей силы (§ 49) слѣдуетъ, что эта послѣдняя присуща только источнику тока, разность же потенціаловъ является какъ бы слѣдствіемъ электродвижущей силы.

Такимъ образомъ въ данномъ проводникѣ будетъ только тогда токъ, когда онъ явится замкнутою цѣпью для данной электродвижущей силы.

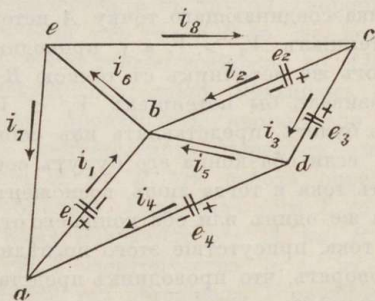
53. Теоремы Киргоффа. Если имѣемъ цѣлую сѣть проводниковъ, которые въ своей совокупности являются замкнутыми цѣпями для

дѣйствующихъ въ нихъ электродвижущихъ силъ, то въ этихъ проводникахъ появятся токи, силы которыхъ будутъ находиться въ слѣдующей зависимости:

1) Въ каждомъ узлѣ сѣти алгебраическая сумма силъ токовъ равна нулю;

2) Въ каждомъ замкнутомъ контурѣ сѣти алгебраическая сумма электродвижущихъ силъ равна алгебраической суммѣ произведеній силъ токовъ на сопротивленія соотвѣтствующихъ проводниковъ, по которымъ циркулируютъ эти токи.

Пусть дана сѣть проводниковъ a, b, c, d, e (фиг. 50) съ электродвижущими силами, обозначенными $+$ и $-$, при чемъ условимся, что повышение потенціала у



Фиг. 50.

этихъ эл. дв. силъ идетъ отъ $-$ къ $+$. Пусть распределение токовъ будетъ такое, какъ показано на фигурѣ стрѣлками и пусть силы этихъ токовъ будутъ $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, \dots$ а соотвѣтствующія сопротивленія проводниковъ $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, \dots$. Обозначимъ потенціалы у узловъ a, b, c, d, e черезъ $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots$. Первая теорема очевидно и вытекаетъ изъ самой сути электрическаго тока. Дѣйствительно, такъ какъ токъ есть непрерывное перемѣщеніе электрическихъ массъ, то въ каждомъ узлѣ коли-

чество приходящаго электричества должно равняться количеству уходящаго электричества за данный промежутокъ времени, напимѣръ въ единицу времени. Поэтому въ узлѣ *b* мы должны имѣть:

$$i_1 + i_2 + i_5 = i_6$$

или

$$i_1 + i_2 + i_5 - i_6 = 0$$

При составленіи алгебраической суммы необходимо условиться относительно знаковъ токовъ, такъ напимѣръ принять токи сходящіеся въ узлѣ положительными, а токи исходящіе изъ узла отрицательными.

Для того, чтобы доказать вторую теорему, выберемъ одинъ изъ замкнутыхъ контуровъ, напимѣръ *abcd* и примѣнимъ къ его частямъ *ab*, *bc*, *cd*, *ad* законъ Ома согласно § 50. Мы получимъ:

$$i_1 = \frac{v_1 - v_2 - e_1}{r_1}$$

$$i_2 = \frac{v_3 - v_2 - e_2}{r_2}$$

$$i_3 = \frac{v_3 - v_4 - e_3}{r_3}$$

$$i_4 = \frac{v_4 - v_1 + e_4}{r_4}$$

откуда

$$i_1 r_1 = v_1 - v_2 - e_1$$

$$i_2 r_2 = v_3 - v_2 - e_2$$

$$i_3 r_3 = v_3 - v_4 - e_3$$

$$i_4 r_4 = v_4 - v_1 + e_4$$

вычтемъ и сложимъ эти уравненія такъ, чтобы сократить $v_1, v_2, v_3 \dots$, тогда получимъ:

$$i_1 r_1 - i_2 r_2 + i_3 r_3 + i_4 r_4 = -e_1 + e_2 - e_3 - e_4$$

Это уравненіе показываетъ, что алгебраическая сумма выраженій ir должна быть составлена слѣдующимъ образомъ: слѣдуютъ по контуру по направленію часовой стрѣлки; для тѣхъ частей контура, въ которыхъ токъ направленъ по часовой стрѣлкѣ произве-

деніе ir будетъ со знакомъ $+$, для тѣхъ же частей гдѣ направленіе тока противоположно, произведение ir берется со знакомъ $-$, то же самое и для суммы величинъ e : тѣ эл. дв. силы, которыя даютъ повышение вольтъ по направленію часовой стрѣлки, берутъ со знакомъ $+$, тѣ же, которыя даютъ повышение въ обратномъ направленіи должны быть взяты со знакомъ $-$. Такимъ образомъ теоремы Кирхгоффа выражается двумя уравненіями:

$$\sum i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

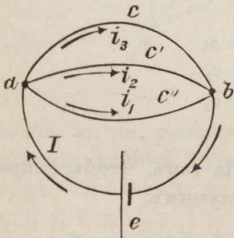
и

$$\sum ir = \sum e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

теоремы Кирхгоффа даютъ возможность опредѣлить силы токовъ въ какой угодно сложной сѣти. Для этого предварительно даютъ произвольное направленіе токамъ въ проводникахъ сѣти. Затѣмъ составляютъ уравненія $\sum i = 0$ для узловъ сѣти и уравненія $\sum ir = \sum e$ для контуровъ сѣти (въ послѣднемъ случаѣ, слѣдуя по направленію часовой стрѣлки). Эти уравненія дадутъ возможность опредѣлить силы токовъ i . Если для нѣкоторыхъ i получимъ отрицательныя величины, то это значитъ, что предварительно выбранное направленіе не вѣрное и его слѣдуетъ переменить на обратное.

54. Развѣтвленные токи.

Пусть имѣемъ источникъ тока. e съ замкнутою цѣпью, состоящею изъ проводника, который въ точкахъ a и b развѣтвляется на нѣсколько проводниковъ (фиг. 51). Токъ I въ точкахъ a и b развѣтвляется на токи i_1 i_2 i_3 . Пусть r_1 , r_2 , r_3 сопротивленія развѣтвленій и ρ сопротивленіе части aeb



Фиг. 51.

примѣняя первую теорему Кирхгоффа, получимъ:

$$I = i_1 + i_2 + i_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

примѣняя вторую теорему Кирхгоффа къ контуру

$e ac''b$, а затѣмъ къ контурамъ $ac'bc''$ и $acbc''$, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} I\rho + i_1 r_1 &= e \\ i_2 r_2 - i_1 r_1 &= 0 \\ i_3 r_3 - i_1 r_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (\beta)$$

исключаемъ i_1, i_2, i_3 изъ уравненій (α) и (β), тогда получимъ:

$$I = \frac{e}{\rho + \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}}$$

выраженіе $\frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}$ представляетъ сопроти-

вленіе, замѣняющее собою сопротивленіе совокупности развѣтвленій $r_1 r_2 r_3$. Такое сопротивленіе называется комбинированнымъ сопротивленіемъ. Для n развѣтвленій имѣли бы для комбинированнаго сопротивленія:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots + \frac{1}{r_n}}$$

или проще:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots + \frac{1}{r_n} + \dots + (52).$$

ГЛАВА VIII.

Энергія электрическаго тока.

55. Законъ Джауля. Мы уже видѣли, что работа электрическаго тока въ данномъ проводникѣ въ единицу времени измѣряется произведеніемъ:

$$I (V - V').$$

гдѣ V и V' потенціалы крайнихъ точекъ проводника

Работа, которую будетъ производить въ единицу времени источникъ тока, электродвижущая сила ко-

тораго равна E , въ цѣпи, по которой циркулируетъ токъ I , будетъ:

$$E \cdot I$$

Если сопротивление цѣпи R , то по закону Ома:

$$I = \frac{E}{R} \text{ откуда } E = I R$$

Слѣдовательно работа въ единицу времени будетъ

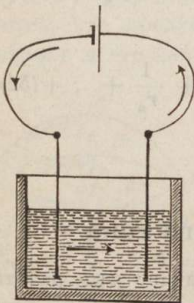
$$W_1 = I^2 R$$

а за время t :

$$W = I^2 R \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Англійскій физикъ Джауль опытнымъ путемъ доказалъ, что эта работа тока всецѣло преобразовывается внутри проводника въ теплоту, слѣдовательно проводникъ нагревается.

56. Законъ Фарадея. Когда токъ проходитъ черезъ жидкій проводникъ, то кромѣ нагреванія происходитъ разложеніе жидкости. Это разложеніе жидкости электрическимъ токомъ называется электролизомъ, разлагающаяся же жидкость называется электролитомъ.



Фиг. 52.

Для того, чтобы пропустить черезъ жидкость токъ, опускаютъ въ эту послѣднюю двѣ пластинки изъ проводящаго вещества (металла), и соединяютъ эти послѣднія съ источникомъ тока (фиг. 52). Эти пластинки называются электродами. Тотъ электродъ, откуда токъ входитъ въ жидкость называется положительнымъ электродомъ или анодомъ, а электродъ, къ которому токъ подходитъ, называется отрицательнымъ электродомъ или катодомъ.

При разложеніи жидкости электрическимъ токомъ элементы разложенія отлагаются на электродахъ, причемъ тѣ изъ элементовъ, которые химически дѣйству-

ютъ на электроды, вступаютъ съ этими послѣдними въ химическое соединеніе. Такъ, если продуктами разложенія являются водородъ и кислородъ, то кислородъ отдѣляется на положительномъ электродѣ, а водородъ на отрицательномъ. Кислородъ, вступая въ соединеніе съ металломъ положительнаго электрода образуетъ металлическую окись. Тѣ изъ элементовъ, которые отлагаются на положительныхъ электродахъ, называются электроположительными элементами, а элементы, отлагающіеся на отрицательныхъ электродахъ, именуются электроотрицательными элементами.

Вообще продукты разложенія даннаго электролита называются іонами. Фарадей формулировалъ слѣдующій законъ:

1) Всѣ отлагающихся іоновъ за данный промежутокъ времени пропорціоналенъ количеству электричества, протекшаго за это время черезъ электролитъ.

Такъ если черезъ электролитъ проходитъ токъ силой $= I$, то количество электричества, которое протечетъ черезъ этотъ электролитъ за время t будетъ $I \cdot t$, а всѣ отложившихся іоновъ будетъ пропорціоналенъ произведенію $I \cdot t$.

2) Всѣ отлагающихся однимъ и тѣмъ же количествомъ электричества іоновъ пропорціональны химическимъ эквивалентамъ этихъ іоновъ.

Такъ если химическій эквивалентъ кислорода α , а водорода β , то за время t , при прохожденіи черезъ электролитъ тока I отложится кислорода количество пропорціональное по вѣсу выраженію:

$$\alpha \cdot I \cdot t$$

а водорода:

$$\beta \cdot I \cdot t$$

57. Измѣненіе закона Ома при прохожденіи тока черезъ электролитъ. Поляризація. Мы уже замѣтили выше (§ 56), что при прохожденіи тока черезъ элек-

тролитъ, кромѣ нагрѣванія происходитъ еще химическое разложеніе. Слѣдовательно, если имѣемъ источникъ тока съ электродвижущею силою E и если сила тока въ цѣпи, въ которой находится электролитъ равна I , то энергія EI развиваемая въ секунду времени источникомъ затрачивается во 1-хъ на нагрѣваніе, а во 2-хъ на химическое разложеніе. Пусть W энергія, затрачивается на нагрѣваніе, а W' — энергія, затрачиваемая на химическое разложеніе. Тогда:

$$EI = W + W'$$

Если R сопротивление всей цѣпи (сюда входитъ сопротивление ρ проводниковъ, соединяющихъ электроды съ источникомъ и сопротивление электролита R'), то на основаніи закона Джауля можемъ написать:

$$W = I^2 \cdot R$$

слѣдовательно;

$$EI = I^2 \cdot R + W'$$

откуда:

$$I^2 R = EI - W'$$

или раздѣливъ обѣ части на I , получимъ:

$$IR = E - \left(\frac{W'}{I} \right)$$

или:

$$I = \frac{E - \left(\frac{W'}{I} \right)}{R}$$

Если эту формулу сравнить съ выраженіемъ закона Ома (§ 50) то оказывается, что величина $\frac{W'}{I}$ играетъ роль нѣкоторой электродвижущей силы противоположно дѣйствующей по отношенію къ E . Эта электродвижущая сила является результатомъ химическаго разложенія и называется электродвижущею силою поляризаціи. Законъ Ома въ примѣненіи къ

электролиту будетъ слѣдовательно выражаться слѣдующими уравненіями:

$$I = \frac{E - e}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

гдѣ e электродвижущая сила поляризаціи.

Это уравненіе можно написать еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$I = \frac{E - e}{R} = \frac{E}{R'} \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Очевидно R' должно быть больше R . Уравненіе (55) мы назовемъ кажущимся уравненіемъ закона Ома для электролита. Сопротивленіе R' получаетъ названіе кажущагося сопротивленія.

ОТДѢЛЪ Ш.

Магнетизмъ.

Глава IX.

Основные свойства и опредѣленія.

58. Свойства магнитныхъ тѣлъ. Въ физикѣ магнитными тѣлами называютъ такіа тѣла, которыя обладаютъ слѣдующими свойствами: 1) всѣ магниты притягиваютъ желѣзные предметы, 2) дѣйствіе притяженія обнаруживается главнымъ образомъ у концовъ магнита, 3) свободно подвѣшенный магнитъ поворачивается всегда въ опредѣленную сторону (приблизительно по направленію сѣверъ—югъ), 4) если раздробить магнитъ на нѣсколько частей, то каждая часть, какъ бы мала она ни была, обнаруживаетъ всѣ свойства магнита.

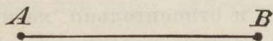
Точки, въ которыхъ обнаруживается главнымъ образомъ притягательное дѣйствіе, называются полюсами, мы выразимся еще точнѣе, полюсами мы назовемъ точки приложенія притягательныхъ дѣйствій магнита. Такихъ полюсовъ два (въблизи концовъ магнита). Такъ какъ одинъ конецъ поворачивается постоянно къ сѣверу, а другой къ югу, то мы назовемъ одинъ полюсъ сѣвернымъ или положительнымъ, а другой южнымъ или отрицательнымъ.

Если приблизить два магнита другъ къ другу

одинаковыми полюсами, то они будутъ отталкиваться, если же приблизить ихъ разными полюсами, то они будутъ притягиваться.

Это послѣднее, а также и то, что свободно подвѣшенный магнитъ только вращается, а не перемѣщается поступательно, приводитъ къ предположенію, что въ каждомъ магнитѣ имѣется два рода массъ—положительныя и отрицательныя: сѣверный или положительный полюсъ будетъ центромъ дѣйствія положительныхъ массъ, а южный или отрицательный центромъ дѣйствія отрицательныхъ массъ. Такъ какъ тотъ и другой полюсъ обнаруживаетъ одинаковыя по силѣ притягательныя дѣйствія (т. е. съ одинаковою силою притягиваютъ напримѣръ желѣзо), то можно разсматривать, что въ каждомъ полюсѣ сосредоточено одинаковое количество массъ, т. е. количество положительныхъ массъ равно количеству отрицательныхъ массъ.

59. Магнитный моментъ. По отношенію къ внѣшнимъ дѣйствіямъ магнитъ всегда можно разсматривать, какъ состоящій изъ двухъ массъ (положительной и отрицательной), сосредоточенныхъ у полюсовъ, иначе говоря, каждый физическій магнитъ можно замѣнить математическимъ, состоящимъ изъ двухъ массъ $+$ и $-$ сосредоточенныхъ въ двухъ точкахъ A и B (фиг. 53) и находящимся на опредѣленномъ разстояніи AB одна отъ другой.



Фиг. 53.

Такимъ образомъ съ математической точки зрѣнія каждый магнитъ можно охарактеризовать массою m , сосредоточен-

ною въ каждомъ полюсѣ и разстояніемъ AB между полюсами. Какъ мы увидимъ дальше, намъ часто придется считаться съ произведеніемъ этихъ двухъ характерныхъ величинъ, т. е. съ произведеніемъ $m \cdot AB$, это произведеніе называется магнитнымъ моментъ.

60. Законъ дѣйствія магнитныхъ массъ. Кулонъ показалъ, что силы, развиваемыя магнитными массами, подчиняются закону Ньютона, т. е. обратно пропорціональны квадрату разстояній между двумя дѣйствующими массами. Такъ если двѣ магнитныя массы m и m' дѣйствуютъ на разстояніи r , то сила, развиваемая между ними будетъ:

$$f = k \frac{mm'}{r^2}$$

гдѣ k коэффициентъ пропорціональности.

61. Магнитное поле, магнитный потенціалъ, магнитный потокъ. Изъ предъидущаго параграфа слѣдуетъ, что все сказанное нами въ главѣ II (см. введение) относится всецѣло также и къ магнитнымъ массамъ, рассматриваемымъ въ отдѣльности или въ совокупности. Такимъ образомъ магнитный потенціалъ въ данной точкѣ магнитнаго поля происходящаго отъ массъ $m, m', m'' \dots$ будетъ:

$$V = \sum k \frac{m}{r} \dots \dots \dots (\S 9)$$

гдѣ $r, r', r'' \dots$ будутъ разстоянія точки до массъ $m, m' \dots$

Слагающая магнитнаго поля по направленію l будетъ:

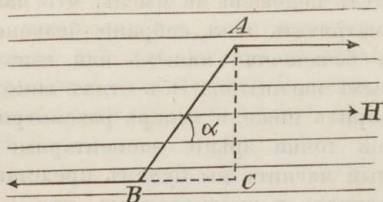
$$H = - \frac{dV}{dl} \dots \dots \dots (\S 9)$$

Тоже самое можно сказать и относительно магнитнаго потока, онъ будетъ на данную поверхность S :

$$\int_0^S H \cdot ds \cdot \cos \alpha \dots \dots \dots (\S 14).$$

62. Дѣйствіе равномернаго магнитнаго поля на магнитъ. Пусть имѣемъ магнитъ AB въ однородномъ магнитномъ полѣ H (фиг. 54). Пусть $AB = a$ и предположимъ, что полюсы магнита находятся въ A и B , слѣдовательно магнитный моментъ такого магнита бу-

детъ $m \cdot a$, гдѣ m количество массы сосредоточенной въ каждомъ полюсѣ, т. е. въ полюсѣ A сосредоточено $(+ m)$, а въ B $(- m)$ массы.



Фиг. 54.

Въ точкѣ A (у положительнаго полюса) слѣдовательно будетъ дѣйствовать сила по направленію поля, равная $m \cdot H$ *), въ B же (у отрицательнаго полюса) будетъ дѣйствовать сила $- mH$, противоположнаго направленія полю (ибо тутъ масса отрицательная). Такимъ образомъ на магнитъ AB будетъ дѣйствовать пара, моментъ которой будетъ равенъ:

$$m \cdot H \times BC.$$

Если α уголъ оси AB магнита съ направленіемъ поля, то:

$$BC = a \cdot \sin \alpha$$

откуда предъидущая пара будетъ:

$$m \cdot a \cdot H \cdot \sin \alpha.$$

Но $m \cdot a$ равняется моменту магнита, называя его M , найдемъ для пары, дѣйствующей на магнитъ:

$$M \cdot H \cdot \sin \alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

63. Элементарные магниты. Мы уже сказали выше (§ 58), что при раздробленіи магнита на нѣсколько частей, каждая часть является самостоятельнымъ маг-

*) Ибо въ точкѣ A на единицу массы дѣйствуетъ сила H [это слѣдуетъ изъ опредѣленія направленія поля (§ 8)], слѣдовательно на массу m будетъ дѣйствовать сила $m \cdot H$.

нитомъ, какъ бы мала она ни была. Этотъ опытъ привелъ къ нѣкоторымъ гипотезамъ относительно внутренняго физическаго строенія магнитовъ. Въ основу этихъ гипотезъ положена та мысль, что магнитъ слѣдуетъ разсматривать, какъ собраніе бесконечно большаго числа бесконечно малыхъ или, какъ говорятъ, элементарныхъ магнитовъ. Объ этихъ гипотезахъ мы будемъ говорить ниже, а теперь рассмотримъ съ математической точки зрѣнія элементарные магниты. Элементарный магнитъ мы будемъ представлять себѣ въ видѣ цилиндра и предположимъ, что $+$ и $-$ магнитныя массы распределены по поверхности конечныхъ сѣченій. Въ такомъ случаѣ, если площадь каждаго изъ конечныхъ сѣченій ds и на ней сосредоточено dm магнитной массы, то плотность каждаго полюса будетъ:

$$\sigma = \frac{dm}{ds}$$

хотя dm и ds бесконечно малыя величины, но σ вообще будетъ конечною величиною (см. часть I § 10).

Пусть l длина бесконечно малаго цилиндрика, тогда магнитный моментъ элементарнаго магнита будетъ:

$$M = l \cdot dm = l \cdot b \cdot ds.$$

Величина M также будетъ бесконечно малою. Если мы раздѣлимъ M на объемъ v цилиндра, то получимъ:

$$\frac{M}{v} = \frac{l \cdot \sigma \cdot ds}{v}$$

но $v = l \cdot ds$, слѣдовательно:

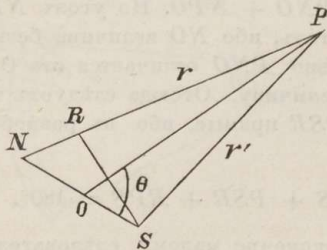
$$\frac{M}{v} = \frac{l \cdot \sigma \cdot ds}{l \cdot ds} = \sigma = \text{конечной величины.}$$

Конечное отношеніе $\frac{M}{v}$ называется интенсивностью намагничиванія. Эта величина подобно моменту конечнаго магнита будетъ какъ бы мѣриломъ дѣйствія элементарнаго магнита, говоримъ мѣриломъ потому, что она есть конечная величина. Какъ видно

изъ предъидущаго уравненія $\frac{M}{v} =$ плотности σ , что касается ихъ численнаго значенія. Нужно однако замѣтить, что физическія и математическія ихъ значенія различны, интенсивность намагничиванія есть факторъ вѣшняго дѣйствія магнита, плотность же σ есть факторъ распредѣленія магнитной массы. Интенсивность намагничиванія мы обозначили буквою J . Слѣдовательно:

$$J = \frac{M}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57).$$

64. Потенціалъ элементарнаго магнита въ данной точкѣ пространства. Возьмемъ элементарный магнитъ



Фиг. 55.

NS (фиг. 55) и точку P въ пространствѣ съ единицею магнитной массы. Если на концахъ магнита сосредоточены массы dm и $-dm$, то потенциалъ въ точкѣ P , равный:

$$\sum k \frac{m}{r},$$

будетъ въ данномъ случаѣ:

$$V = \frac{dm}{r} - \frac{dm}{r'} = \frac{r - r'}{rr'}$$

гдѣ r и r' разстоянія PN и PS .

Но NS предполагается безконечно малою по отношенію къ NP и NS . Пусть $NR = NP - NS = r - r'$. Такъ какъ NS величина безконечно малая, то r' безконечно мало будетъ рзниться отъ r , иначе говоря

произведение rr' можно замѣнить произведеніемъ $r.r = r^2$, ибо r^2 будетъ отличаться отъ rr' на безконечно малую величину. Дѣйствительно, полагая: $r' = r + dr$, получимъ:

$$rr' = r(r + dr) = r^2 + r \cdot dr$$

гдѣ $r \cdot dr$ безконечно малая величина, которою слѣдовательно можно пренебречь передъ конечною величиною.

Точно такимъ же образомъ можемъ принять, что уголъ POS , т. е. $\theta = PNO$. Дѣйствительно уголъ θ внѣшній по отношенію къ треугольнику PNO и слѣдовательно равенъ суммѣ угловъ съ нимъ не смежныхъ, т. е. $= P\hat{N}O + N\hat{P}O$. Но уголъ NPO безконечно малый уголъ, ибо NO величина безконечно малая, слѣдовательно PNO отличается отъ θ на безконечно малую величину. Отсюда слѣдуетъ также, что углы PRS и PSR прямые, ибо въ равнобедренномъ треугольникѣ

$$P\hat{R}S + P\hat{S}R + R\hat{P}S = 180^\circ.$$

Но $P\hat{R}S =$ безконечно малому, слѣдовательно:

$$P\hat{R}S + P\hat{S}R = 180^\circ$$

и

$$P\hat{R}S = P\hat{S}R = 90^\circ.$$

Если же $P\hat{R}S$ можно принять $= 90^\circ$, то и уголъ NRS также можно принять $= 90^\circ$. Но тогда въ прямоугольномъ треугольникѣ NRS имѣемъ:

$$NR = r - r' = NS \cdot \cos P\hat{N}O = NS \cdot \cos \theta.$$

Пусть $NS = l$, тогда

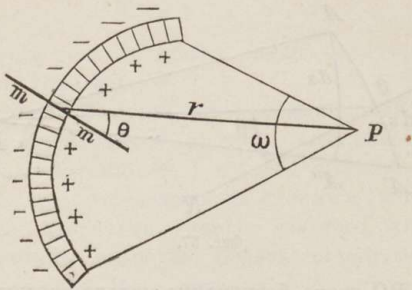
$$V = dm \frac{r - r'}{rr'} = dm \cdot \frac{l \cdot \cos \theta}{r^2}$$

r можно принять $= OP$, а потому окончательно можно написать:

$$V = dm \frac{l \cdot \cos \theta}{OP^2} \quad . \quad . \quad . \quad (58).$$

Знакъ потенціала V опредѣлится по знаку $\cos\theta$, т. е. V будетъ положит. или отрицат. смотря по тому, будетъ ли θ острымъ или тупымъ.

65. Магнитные слои. Магнитнымъ слоемъ называютъ бесконечно тонкую поверхность по обѣимъ сторонамъ которой распредѣлены равномерно магнитныя массы противоположныхъ знаковъ. Такой слой можно вообразить, какъ состоящій изъ элементарныхъ магнитиковъ mm' уложенныхъ нормально къ поверхности (фиг. 56). Найдемъ потенціалъ такого слоя въ данной



Фиг. 56.

точкѣ P пространства. Этотъ потенціалъ очевидно будетъ равняться суммѣ потенціаловъ элементарныхъ магнитовъ, составляющихъ слой. Но потенціалъ одного изъ такихъ магнитовъ будетъ:

$$dV = k \cdot dm \frac{l \cdot \cos\theta}{r^2}.$$

Пусть Σ толщина слоя, тогда $\varepsilon = l$, пусть также σ плотность магнитныхъ массъ на слой, тогда $dm = \sigma \cdot ds$. Слѣдовательно

$$dV = k \frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot ds \cdot \cos\theta}{r^2}.$$

Если вся поверхность слоя S , то потенціалъ слоя будетъ:

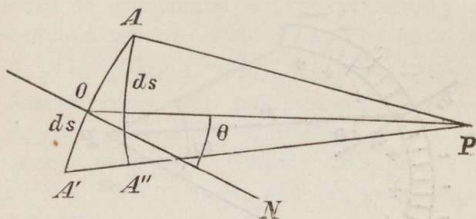
$$V = \int_0^S dV = k \int_0^S \frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot ds \cdot \cos\theta}{r^2}$$

Но

$$\frac{ds \cdot \cos \theta}{r^2}$$

представляет тѣлесный уголъ, подъ корорымъ видна элементарная поверхность ds изъ точки P *).

*) Докажемъ это. Пусть имѣемъ точку P (фиг. 57) и безконечно малую поверхность ds . Изъ точки P на ds , какъ основанія, опишемъ конусъ $PA A'$. Прове-



Фиг. 57.

демъ ось PO этого безконечно малаго конуса. Затѣмъ въ точкѣ O проведемъ къ ds нормаль и пусть θ уголъ этой нормали съ OP . Изъ точки P радиусомъ PA опишемъ шаровую поверхность, на которой конусъ $PA A'$ вырѣжетъ элементъ $AA'' = ds'$. Углы $P\hat{O}N$ и $A''\hat{A}A'$ равны, ибо ихъ стороны взаимно перпендикулярны, дѣйствительно ON есть нормаль къ ds , OP есть нормаль къ шаровой поверхности ds' . (Ибо OP совпадаетъ съ однимъ изъ радиусовъ шаровой поверхности). Такъ какъ ds и ds' безконечно малы, то можно разсматривать ds' какъ проекцію ds на шаровую поверхность описанную изъ P радиусомъ PA , а потому можно написать:

$$ds' = ds \cdot \cos A'\hat{A}A'' = ds \cdot \cos \theta.$$

Съ другой стороны изъ геометріи извѣстно, что тѣлесный уголъ $APA' =$ шаровой поверхности $\frac{ds'}{PA^2}$,

Обозначая этотъ уголъ черезъ $d\omega$ получимъ:

$$V = k \int_0^s \varepsilon \cdot \sigma \cdot d\omega$$

но ε и σ предполагаются постоянными для всей поверхности слоя, слѣдовательно:

$$V = k \cdot \varepsilon \cdot \sigma \int_0^s d\omega$$

или

$$V = k \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot \omega$$

гдѣ ω уголъ подъ которымъ виденъ контуръ поверхности слоя (см. фиг. 56).

Для данной фигуры, гдѣ единица положит. массы въ точкѣ P находится противъ положительной стороны слоя, потенциалъ V будетъ положителенъ, ибо точка P будетъ отталкиваться слоемъ и слѣдовательно необходимо затратить энергію для того, чтобы перенести единицу массы изъ безконечности въ точку P (см. § 9 стр. 21). При сравненіи замкнутыхъ токовъ

замѣняя ds его выраженіемъ $ds \cos \theta$, найдемъ для телеснаго угла

$$\frac{ds \cos \theta}{PA^2}$$

но OA разнится на безконечно малую отъ PO , слѣдовательно можно написать:

$$\text{тѣлесн. уг.} = \frac{ds \cos \theta}{PO^2} \text{ и т. д.}$$

т. е. тѣлесный уголъ, подъ которымъ видѣнъ изъ данной точки P безконечно малый элементъ поверхности, равенъ произведенію элемента поверхности на $\cos$ угла, составляемаго нормалью къ поверхности съ векторомъ, проведеннымъ къ этой послѣдней изъ точки P , раздѣленному на квадратъ этого вектора.

съ магнитными слоями, какъ мы увидимъ позже, удобнѣе условиться разсматривать уголъ ω , какъ положительный, когда изъ точки P видна отрицательная сторона слоя, въ противномъ случаѣ уголъ ω считается отрицательнымъ. Для данной фигуры ω отрицателенъ, значитъ, чтобы потенціалъ былъ положительнымъ (а онъ долженъ быть положительнымъ, какъ мы сказали выше), необходимо этотъ потенціалъ написать со знаками $-$, т. е.

$$V = - k . r . \sigma . \omega$$

тогда вторая часть равенства будетъ положительною, ибо ω отрицателенъ.

Произведеніе $\varepsilon . \sigma$ называютъ напряженіемъ слоя, обозначая его черезъ P получимъ для данной фигуры:

$$V = - k . P . \omega (59)$$

Эта формула будетъ общою. Дѣйствительно она также примѣнима для случая, когда изъ P будетъ видна положительная сторона слоя. Тогда потенціалъ V величина положительная, ибо между P и слоемъ будетъ происходить отталкиваніе (§ 9), но съ другой стороны тѣлесный уголъ ω будетъ, по условію, отрицателенъ, слѣдовательно опять передъ выраженіемъ $kP . \omega$ нужно поставить знакъ $(-)$.

66. Потенціальная энергія слоя въ магнитномъ полѣ. Если въ точкѣ P (фиг. 56) будетъ сосредоточена не единица положительной массы, а какая-нибудь масса m , то потенціальная энергія этой массы отъ дѣйствія слоя или, какъ говорятъ, относительная потенціальная энергія слоя и массы m будетъ

$$W = V . m \text{ (§ 10)}$$

гдѣ V потенціалъ въ точкѣ P .

Но $V = - kP . \omega$ (§ 63), а потому:

$$W = - k . P . m . \omega .$$

Но $km\omega$ (§ 15) есть магнитный потокъ, исходящій

изъ массы m и пронизывающій поверхность слоя, слѣдовательно:

$$W = - P\Phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

гдѣ Φ этотъ потокъ.

Потокъ Φ на данную поверхность слѣдуетъ разсматривать, какъ положительный, когда онъ исходитъ изъ положительной массы и направляется на данную поверхность. Исходя изъ этого, по отношенію къ магнитному слою мы можемъ сказать, что Φ будетъ всегда положительнымъ, когда его силовыя линіи будутъ направлены къ отрицательной сторонѣ слоя, т. е. будутъ входить черезъ отрицательную сторону и выходить черезъ положительную. Это не трудно проверить, взявъ магнитный слой и массу m внѣ его и приписывая массѣ и сторонѣ слоя, обращенной къ ней, то знакъ $+$, то знакъ $-$. Этимъ вторымъ опредѣленіемъ знака потока на магнитный слой, согласнымъ съ основнымъ опредѣленіемъ, объясняется условно установленное опредѣленіе знака угла ω въ § 65.

Если теперь мы имѣемъ нѣсколько массъ $m, m', m'', \dots$, сосредоточенныхъ въ различныхъ точкахъ пространства, то тогда относительная энергія слоя и этихъ массъ будетъ:

$$W = - P(km\omega + km'\omega' + km''\omega'' + \dots)$$

гдѣ $\omega, \omega', \omega'', \dots$, углы подъ которыми видѣны изъ данныхъ точекъ контуръ слоя. Предъидущее выраженіе можно написать еще въ видѣ:

$$W = - P(\Phi + \Phi' + \Phi'' + \dots)$$

гдѣ $\Phi, \Phi', \Phi'' \dots$ будутъ потоки исходящіе изъ данныхъ массъ и пронизывающіе поверхность слоя. Если мы назовемъ эту сумму потоковъ Φ_m , то получимъ:

$$W = - P\Phi_m.$$

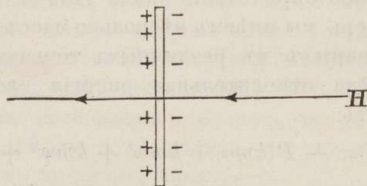
Отсюда слѣдуетъ, что:

Потенціальная энергія магнитнаго слоя въ данномъ магнитномъ полѣ равна произведе-

нію напруженія слоя на магнитный потокъ, пронизывающій поверхность этого слоя. Если потокъ входитъ черезъ положительную сторону, то онъ будетъ отрицательнымъ и слѣдовательно произведение $-R\Phi_m$ будетъ положительнымъ.

Если слой можетъ свободно перемѣщаться въ данномъ полѣ, то перемѣщеніе его будетъ таково (§ 2 и § 4), что потенциальная энергія его будетъ уменьшаться. Слѣдовательно W должно быть minimum, когда настанетъ равновѣсіе, а такъ-какъ $W = -R\Phi_m$, то слѣдуетъ, что при перемѣщеніи слой будетъ стремиться занять такое положеніе, при которомъ силовой потокъ Φ_m встрѣчающій отрицательную сторону слоя будетъ наибольшимъ, ибо тогда $-R\Phi_m$ будетъ наименьшимъ *).

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что плоскій магнитный слой, погруженный въ равномерное поле начнетъ



Фиг. 58.

поворачиваться до тѣхъ поръ пока его плоскость не станетъ перпендикулярною къ силовымъ линіямъ и пока его отрицательная сторона не будетъ встрѣчать силовыя линіи поля (фиг. 58).

На этомъ послѣднемъ замѣчаніи, какъ мы увидимъ въ послѣдствіи основана вся теорія механизмовъ, приводимыхъ въ движеніе электричествомъ.

*) Отрицательная величина тогда наименьшая, когда абсолютное значеніе ея наибольшее.

67. Взаимная энергія двухъ магнитныхъ слоевъ.
Представимъ себѣ два магнитныхъ слоя, напряженія которыхъ P и P' . Пусть Φ' потокъ исходящій отъ слоя P' и пронизывающій поверхность слоя P черезъ его отрицательную сторону. Энергія слоя P въ полѣ происходящемъ отъ слоя P' будетъ:

$$W = - \Phi P'.$$

Если же Φ потокъ пронизывающій отрицательную сторону слоя P' и исходящій отъ слоя P , то энергія слоя P' по отношенію къ полю слоя P будетъ:

$$W' = - P' \Phi.$$

Очевидно, что какъ та, такъ и другая энергіи должны быть одинаковы, т. е.

$$W = W'$$

или

$$P \Phi' = P' \Phi$$

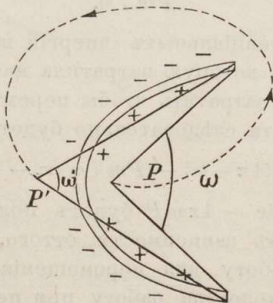
откуда

$$\frac{\Phi}{P} = \frac{\Phi'}{P'}$$

полагая это отношеніе $= M$, найдемъ:

$$W = W' = PP' \cdot M \quad . \quad . \quad . \quad (61).$$

68. Работа, затрачиваемая массою m при перемѣ-



Фиг. 59.

щеніи отъ одной стороны слоя къ противоположной. Предположимъ что масса m сосредоточена сначала

въ точкѣ P , расположенной бесконечно близко у положительной стороны слоя (фиг. 59). Контуръ слоя изъ этой точки будетъ виденъ подъ угломъ $APB = (4\pi - \omega)$. Потенціальная энергія массы m въ этой точкѣ будетъ (§ 66):

$$- Pm(4\pi - \omega)$$

гдѣ P напряженіе слоя.

Вообразимъ теперь, что масса m перемѣстилась, слѣдуя по какому угодно пути, наприм. по тому, который показанъ пунктиромъ, въ точку P' , бесконечно близко расположенную у стороны отрицательной слоя. Потенціальная энергія массы m въ этой точкѣ будетъ:

$$- Pm \cdot \omega'$$

но въ абсолютномъ значеніи ω' разнится бесконечно мало отъ ω , ибо P и P' расположены бесконечно близко одна къ другой. Что же касается знака, то ω' противоположнаго знака углу ω , ибо изъ P' видна отрицательная сторона, а изъ P положительная. Поэтому съ точностью до бесконечно малаго можно написать:

$$\omega' = -\omega$$

и потенціальная энергія въ P' будетъ:

$$Pm \cdot \omega.$$

Разность потенціальныхъ энергій въ P и P' и будетъ та работа, которую затратила масса m или которую пришлось затратить чтобы перемѣстить её отъ P къ P' , эта работа слѣдовательно будетъ:

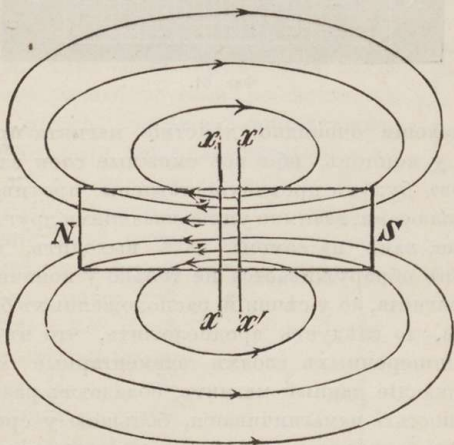
$$- Pm(4\pi - \omega) - Pm \cdot \omega = - 4\pi m P.$$

Это выраженіе $- 4\pi m P$ будетъ положительно или отрицательно въ зависимости оттого, пришлось ли затрачивать работу для перемещенія m , или сама масса m израсходовала работу при перемѣщеніи отъ P къ P' (см. § 2 и § 9).

ГЛАВА X.

СИЛОВОЙ ПОТОКЪ МАГНИТОВЪ.

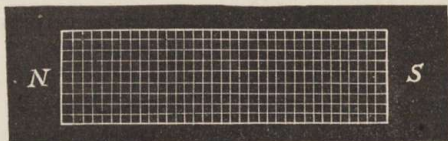
69. Вычисленіе силового потока, исходящаго изъ магнита. Если мы возьмемъ магнитъ NS (фиг. 60) и рассмотримъ направленіе силовыхъ линій, то мы увидимъ, что эти послѣднія будутъ исходить изъ сѣвернаго (т. е. положительнаго) полюса къ южному (отрицательному), какъ это и должно быть согласно § 17 фиг. 22.



Фиг. 60.

Кромѣ того силовыя линіи, представляя собою замкнутыя кривыя внутри магнита, направятся отъ S къ N . Изъ фиг. 60 видно также, что не всѣ силовыя линіи магнита исходятъ изъ его концовъ. Часть выходитъ изъ боковыхъ его граней, но видно также, что черезъ среднее сѣченіе xx магнита проходитъ все число исходящихъ изъ него силовыхъ линій. Это показываетъ, что дѣйствіе полюсовъ обнаруживается не только у концовъ, но и въ другихъ точкахъ, расположенныхъ ближе къ срединѣ. Если бы дѣйствіе полюсовъ обна-

руживалось только у конечныхъ сѣченій N и S , то можно было бы представить магнитъ, какъ состоящій изъ ряда элементарныхъ магнетиковъ одинаковой интенсивности намагничиванія, сложенныхъ вмѣстѣ противоположными полюсами и такъ, что въ каждомъ сѣченіи магнита этихъ элементарныхъ магнетиковъ приходится одно и то же число (фиг. 61). При такомъ



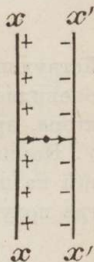
Фиг 61.

расположеніи очевидно дѣйствіе магнита проявится только у концовъ, ибо всѣ смежные слои элем. магнетиковъ будутъ противопоставлены противоположными полюсами, взаимно уничтожающими другъ друга. Если же, какъ на самомъ дѣлѣ выходитъ, дѣйствіе полюсовъ обнаруживается не только у конечныхъ сѣченій магнита, но у сѣченій, расположенныхъ ближе къ срединѣ, то слѣдуетъ предположить, что въ различныхъ поперечныхъ слояхъ элементарные магниты, составляющіе данный магнитъ, обладаютъ разною интенсивностью намагничиванія, большею у середины и меньшею къ концамъ, тогда въ смежныхъ слояхъ противоположныя полярности не будутъ вполне уничтожаться.

Измѣримъ сначала число линій силъ, проходящихъ черезъ среднее сѣченіе магнита. Продѣлаемъ мысленно къ средней части магнита бесконечную тонкую щель $x' x'$ и измѣримъ напряженіе поля въ этой щели. Эту щель мы образуемъ вынувъ средній элементарный слой; такимъ образомъ на стѣнкѣ $x x$ обнаружится положительная полярность, а на стѣнкѣ $x' x'$ — отрицательная. Въ слояхъ, заканчивающихся сѣченіями $x x$ и $x' x'$ можно предположить одинаковую интенсивность намагничиванія для ихъ составляющихъ эле-

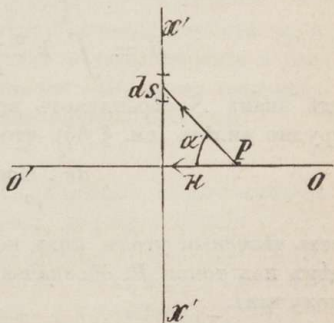
ментарныхъ магнитиковъ, слѣдовательно одинаковую плотность магнитныхъ массъ, ибо эти два слоя безконечно близки другъ къ другу. Пусть σ плотность магнитной массы на сѣченіи $x x$ и на сѣченіи $x' x'$.

Если мы вообразимъ единицу положительной массы въ щели $x x'$, то на эту послѣднюю съ одной стороны будетъ дѣйствовать положительная масса, распределенная по сѣченію $x x$, а съ другой — отрицательная масса, распределенная по сѣченію $x' x'$ (фиг. 62). Отъ первой единица массы будетъ отталкиваться, а второю притягиваться. Обѣ эти силы складываются. Такъ какъ щель нами взята безконечно узкою, то поле во всѣхъ ея точкахъ можно считать равномернымъ. Кромѣ того, если отъ положительной массы сѣченія $x x$ напряженіе поля $= H$, то и отъ отрицательной массы сѣченія $x' x'$ напряженіе поля можно считать также $= H$, и, слѣдовательно, поле въ каждой точкѣ щели отъ обѣихъ массъ бу-



Фиг. 62.

детъ $H + H = 2H$. Намъ остается слѣдовательно вычислить H , т. е. напряженіе поля въ точкѣ, расположенной безконечно близко къ площади, на которой распределена равномерно масса m . А такъ какъ поле мы предположили вездѣ въ щели равномерное, то мы возьмемъ эту точку на оси перпендикулярной къ площади (фиг. 63). Пусть ds элементъ площади $x x$. Если плотность массы σ , то количество массы на этомъ элементѣ будетъ: $\sigma \cdot ds$. Сила, дѣй-



Фиг. 63.

ствующая отъ массы $\sigma \cdot ds$ въ P на единицу массы
будеть:

$$K \frac{\sigma \cdot ds}{r^2}$$

гдѣ r разстояніе точки P до ds . Напряженіе поля H
будеть равнодѣйствующею всѣхъ силъ, каковы

$$K \frac{\sigma \cdot ds}{r^2},$$

дѣйствующихъ отъ всѣхъ элементовъ ds площади $x'x$,
и очевидно направится по оси oo' . Пусть α уголъ
вектора, проведеннаго отъ P къ элементу ds съ осью
 oo' . Напишемъ, что равнодѣйствующая = суммѣ про-
екцій на нее слагающихъ силъ (теорема механики),
тогда получимъ

$$H = \sum k \frac{\sigma \cdot ds}{r^2} \cos \alpha$$

гдѣ $\sum$ должна быть распространена на всѣ элементы
 ds , или, такъ какъ мы имѣемъ дѣло съ бесконечно ма-
лыми величинами

$$H = \int^s k \frac{\sigma \cdot ds}{r^2} \cos \alpha$$

гдѣ знакъ S обозначаетъ всю площадь $x'x'$. Но не
трудно видѣть (см. § 65), что выраженіе

$$\frac{ds \cdot \cos \alpha}{r^2}$$

есть тѣлесный уголъ, подъ которымъ элементъ ds ви-
дѣнъ изъ точки P ; обозначая этотъ уголъ черезъ $d\omega$,
получимъ:

$$H = \int^s k \sigma \cdot d\omega = k\sigma \int^s d\omega$$

ибо k и σ постоянныя величины.

$\int^s d\omega$ будетъ полный тѣлесный уголъ, подъ кото-

рымъ видна изъ точки P вся площадь $x x'$, слѣдовательно называя этотъ уголъ ω , получимъ:

$$H = k \cdot \sigma \cdot \omega.$$

Но такъ какъ точка P бесконечно близка къ поверхности, то $\omega = 2\pi$, слѣдовательно $H = 2\pi k \cdot \sigma$, точно также и по отношенію къ площади $x x$ поле будетъ $H = 2\pi k \cdot \sigma$, слѣдовательно напряженіе поля въ щели будетъ

$$H + H = 2H = 4\pi k \cdot \sigma,$$

т. е. поле магнита внутри его будетъ: $H' = 4\pi k \cdot \sigma$. Это значитъ, что въ средней части магнита черезъ единицу площади сѣченія проходитъ $4\pi k \cdot \sigma$ силовыхъ линій (§ 13). Если же площадь средняго сѣченія магнита S , то черезъ всю площадь пройдетъ:

$$4\pi k \cdot S \cdot \sigma \text{ силовыхъ линій.}$$

Если интенсивность намагничиванія элементарныхъ магнетиковъ въ этомъ среднемъ сѣченіи J , то мы уже знаемъ, что $\sigma = J$, а потому мы можемъ написать, что черезъ сѣченіе S пройдетъ $4\pi k \cdot S \cdot J$ силовыхъ линій.

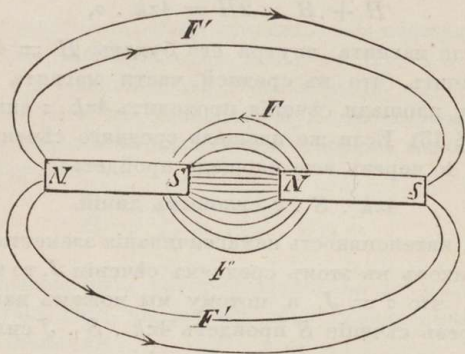
Если бы мы взяли другое сѣченіе магнита не у середины, то, продѣлавъ щель у этого сѣченія и рассуждая, какъ выше, нашли бы, что число силовыхъ линій, пронизывающихъ это сѣченіе было бы:

$$4\pi k \cdot S' J'$$

гдѣ J' интенсивность намагничиванія элементарныхъ магнетиковъ у этого сѣченія, отсюда теорема:

70. Теорема. Число силовыхъ линій, пронизывающихъ любое сѣченіе магнита равно $4\pi k$ разъ площадь сѣченія, умноженную на интенсивность намагничиванія въ этомъ сѣченіи. Число силовыхъ линій, исходящихъ изъ сѣвернаго конечнаго сѣченія или входящихъ въ южное конечное сѣченіе, будетъ согласно теоремѣ, равно $4\pi k$ разъ площадь этого сѣченія, умноженного на силу, сооѣтствующую интенсивности намагничиванія.

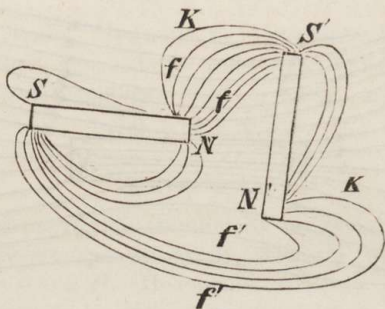
71. Взаимное распределение потоковъ двухъ и нѣсколькихъ магнитовъ. Взаимное распределение магнитныхъ потоковъ двухъ или нѣсколькихъ магнитовъ опредѣляется на основаніи гипотезъ, высказанныхъ Фарадеемъ о силовыхъ линіяхъ (§ 17). Такъ, возьмемъ два магнита и приблизимъ ихъ разноименными полюсами, силовыя линіи распредѣлятся, какъ это показано на фиг. 64.



Фиг. 64.

Силовыя линіи, стремясь сократиться, оба магнита будутъ стремиться приблизиться другъ къ другу. При соприкосновеніи образуется одинъ магнитъ съ полюсами $N' S$. Силовыя линіи ff всѣ войдутъ во внутрь магнитовъ, внаружѣ останутся силовыя линіи $f' f'$, т. е. получится такое же распределение, какъ у одного магнита (фиг. 60). Возьмемъ теперь два магнита, оси которыхъ взаимно перпендикулярны. Силовые потоки распредѣлятся, какъ показано на фиг. 65. Изгибъ K объясняется тѣмъ, что полюсъ S' будетъ частью оттягивать къ себѣ силовыя линіи, исходяція изъ N' , ибо если бы не было магнита NS , то онѣ направлены бы къ S' . То же можно сказать и относительно изгиба K' . Такъ какъ силовыя линіи будутъ стремиться сократиться, то магнитъ $N' S'$ будетъ стремиться повер-

нуться въ положеніе фигуры 64, а затѣмъ приблизиться къ $N S$, чтобы составить одинъ магнитъ. Часть си-



Фиг. 65.

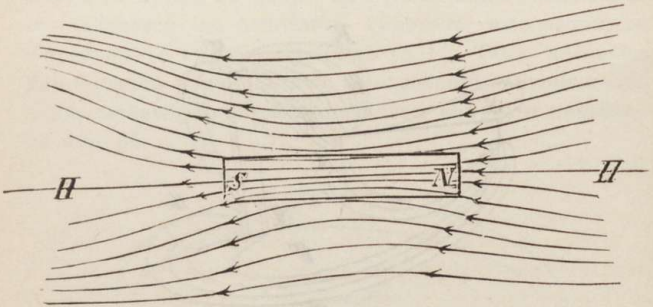
ловыхъ линій будетъ замыкаться между N , S и N' , S' , эти силовые линіи показаны пунктиромъ.

ГЛАВА XI.

Магнитная индукція.

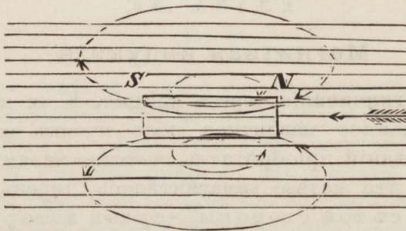
72. Намагничиваніе черезъ вліяніе. Если мы погрузимъ въ данное магнитное поле кусокъ желѣза, то этотъ послѣдній пріобрѣтаетъ свойство магнита; тогда говорятъ, что желѣзо намагнитилось черезъ вліяніе. При этомъ съ той стороны, черезъ которую входятъ силовые линіи поля, образуется южный полюсъ, а откуда эти послѣднія выходятъ образуется сѣверный полюсъ (фиг. 66). Въ сущности: происходитъ слѣдующее: при погруженіи куска желѣза въ данное поле, этотъ кусокъ, становясь магнитомъ, образуетъ вокругъ себя свое собственное поле, силовые линіи котораго, складываясь съ силовыми индуктирующаго, т. е. даннаго поля, измѣняютъ это послѣднее. Вокругъ желѣза является, слѣдовательно, новое поле, равнодѣйствующее первоначальнаго поля

(существовавшего до погруженія желѣза) и поля, образуемаго самимъ желѣзомъ, сдѣлавшимся магнитомъ.



Фиг. 66.

На фигурѣ 67 изображены оба поля (данное поле H полными линиями, а поле куска желѣза пунктиромъ), которыя, слагаясь, даютъ въ результатъ поле, представленное на фигурѣ 66.



Фиг. 67.

Если бы желѣзо не сдѣлалось магнитомъ, черезъ какое-нибудь поперечное сѣченіе его S прошло бы HS силовыхъ линій, но такъ какъ желѣзо сдѣлалось магнитомъ, то черезъ это сѣченіе (§ 69) пройдутъ еще силовыя линіи въ количествѣ:

$$4 \pi k \cdot S \cdot J,$$

гдѣ J интенсивность намагничиванія, соответствующая

щая данному сѣченію. Слѣдовательно всего черезъ сѣченіе S пройдетъ:

$$HS + 4 \pi k S J^*)$$

силовыхъ линій. Примемъ коэффициентъ $k = 1$ (ибо онъ зависитъ отъ выбора единицъ), тогда предъидущее выраженіе приметъ видъ:

$$HS + 4 \pi S \cdot J$$

или

$$S(H + 4 \pi J).$$

Интенсивность намагничиванія въ каждомъ сѣченіи желѣза является результатомъ дѣйствія намагничивающаго поля H . Положимъ поэтому $J = \kappa \cdot H$. Коэффициентъ κ (каппа, греческая буква), называется коэффициентомъ намагничиванія. Въ мягкомъ желѣзѣ J можно считать одинаковымъ для всѣхъ его сѣченій, когда это желѣзо погружено въ данное равномерное намагничивающее поле. Коэффициентъ κ , слѣдовательно, будетъ одинъ и тотъ же для всѣхъ сѣченій желѣза, но будетъ зависѣть отъ H , для разныхъ H онъ будетъ различенъ.

Силовой потокъ, проходящій черезъ сѣченіе S желѣза, погруженнаго въ поле H , можетъ, слѣдовательно, выразиться формулою:

$$\Phi = SH (1 + 4 \pi \kappa). \quad . \quad . \quad . \quad (62).$$

Число силовыхъ линій, проходящихъ черезъ единицу площади сѣченія желѣза будетъ:

$$\frac{\Phi}{S} = H (1 + 4 \pi \kappa)$$

и это число силовыхъ линій обозначаютъ буквою B и называютъ магнитною индукціею въ желѣзѣ или

*) При этомъ H будетъ уже не прежнее поле, а видоизмѣненное, вслѣдствіе того, что желѣзо стало магнитомъ; въ среднемъ сѣченіи, конечно, если имѣемъ дѣло съ сравнительно длиннымъ кускомъ желѣза, можно считать $H =$ прежнему напряженію поля.

вообще въ намагничивающемся, подобно желѣзу, веществѣ. Слѣдовательно:

$$B = \frac{\Phi}{S} = H (1 + 4 \pi \kappa) = H + 4 \pi J \quad . \quad . \quad (63).$$

Отношеніе

$$\frac{B}{H} = 1 + 4 \pi \kappa$$

обозначаютъ буквою μ и называютъ его магнитною проницаемостью.

Слѣдовательно, магнитная проницаемость:

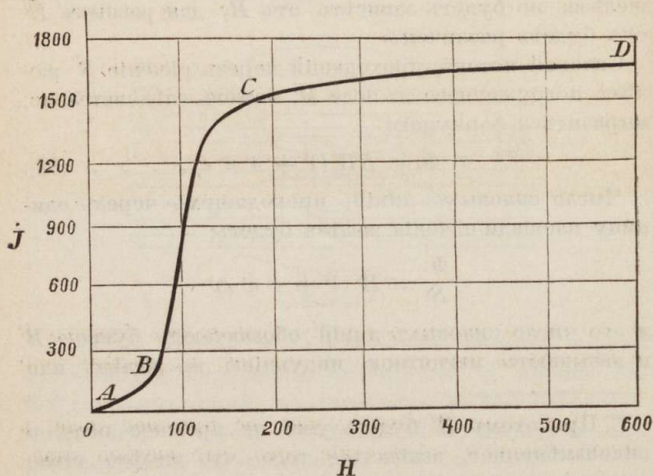
$$\mu = \frac{B}{H} = 1 + 4 \pi \kappa \quad . \quad . \quad (64).$$

Такъ какъ κ измѣняется вмѣстѣ съ H , то и μ такъ же будетъ измѣняться въ зависимости отъ H .

Изъ формулъ:

$$J = \kappa H \text{ и } B = \mu H,$$

мы видимъ, что какъ интенсивность намагничиванія,

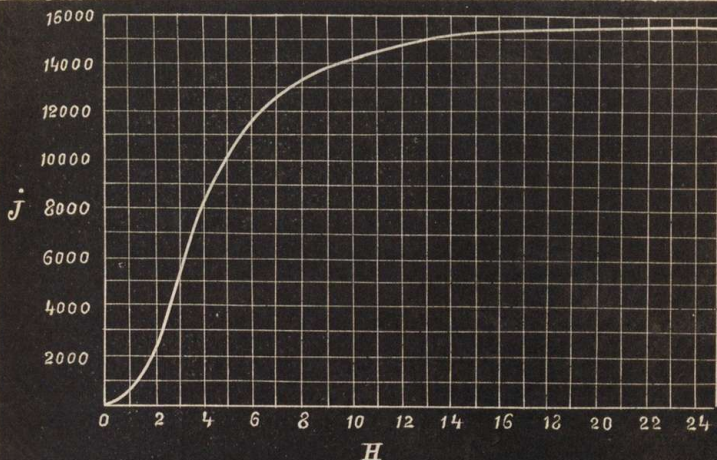


Фиг. 68.

такъ и магнитная индукція желѣза или вообще маг-

нитнаго вещества суть функціи намагничивающаго поля H , притомъ функціи не линейныя, а болѣе сложныя, ибо χ и μ не постоянные коэффициенты, а зависящіе также отъ H .

На фигурѣ 68 представлена кривая зависимости J отъ H , а на фигурѣ 69 кривая зависимости B отъ H , для желѣза. Какъ видно, эти кривыя одного и того же вида, ибо χ и μ разнятся между собою на постоянныя величины и коэффициенты. Эти кривыя были опре-



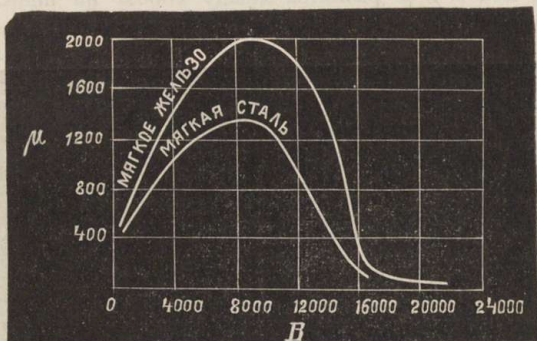
Фиг. 69.

дѣлены, увеличивая постепенно H отъ 0 до нѣкотораго предѣла. Мы увидимъ ниже, что при убываніи H въ обратномъ порядкѣ кривыя получатся другія; величины H , J и B взяты въ абсолютныхъ единицахъ $C \cdot G \cdot S$.

На фигурѣ 70 приведены кривыя зависимости магнитной проницаемости μ отъ индукціи B для мягкаго желѣза и мягкой стали.

Изъ разсмотрѣнія кривыхъ фигуръ 68 и 69 видно, что интенсивность намагничиванія и магнитная ин-

дукція возрастають сначала весьма быстро съ увеличеніемъ намагничивающаго поля или, какъ это послѣднее называютъ, отъ намагничивающей силы. Затѣмъ, начиная отъ нѣкотораго значенія H , обѣ предыдущія величины увеличиваются весьма медленно и, наконецъ, остаются почти постоянными. Тогда говорятъ, что намагничиваемое вещество достигло насыщенія.



Фиг. 70.

Фигура 70 показываетъ, что при очень большихъ B , соответствующихъ насыщенію (сравни съ фигуурою 69) μ стремится къ постоянной величинѣ, а именно къ единицѣ, т. е. къ проницаемости воздуха, ибо проницаемость воздуха принимается равною единицѣ.

73. Дѣйствіе температуры на магнетизмъ. Магнитная проницаемость желѣза зависитъ въ большой степени отъ температуры *). Гопкинсонъ **) нашель, что въ слабомъ, постоянномъ полѣ, напряженіе котораго равно 0,3 единицъ $C. G. S.$, проницаемость желѣзнаго стержня увеличивается по мѣрѣ нагрѣва-

*) Wiedmann, томъ III, стр. 855.

**) Hopkinson „Magnetism“, Journal of the Institution of Electrical engineers, томъ XIX.

нія отъ 500 до 1100, но при температурѣ, близкой къ 775° проникаемость почти сразу падаетъ до единицы.

Въ болѣе сильномъ полѣ увеличеніе проникаемости, а затѣмъ уменьшеніе ея гораздо медленнѣе. Наконецъ, когда поле очень сильное, проникаемость постоянно уменьшается при повышеніи температуры. При нѣкоторой температурѣ между 690° Ц. и 870° Ц., въ зависимости отъ сорта желѣза, это послѣднее совершенно размагничивается, каково бы ни было окружающее магнитное поле. Эта температура названа Гопкинсономъ критическою. Критическая температура соотвѣтствуетъ нѣкоторымъ молекулярнымъ измѣненіямъ въ структурѣ тѣлъ и сопровождается другими явленіями, кромѣ размагничиванія. Такъ, при этой же температурѣ электрическое сопротивление желѣза измѣняется. При этой же температурѣ Бареттъ открылъ еще одно очень характерное явленіе. Если, нагрѣвъ стальной или желѣзный стержень выше критической температуры до бѣлаго каленія, напримѣръ, охлаждать его постепенно, то при переходѣ черезъ критическую температуру стержень на одинъ моментъ снова какъ бы нагрѣвается, послѣ чего охлажденіе идетъ нормальнымъ порядкомъ. Глазу это явленіе представляется въ слѣдующемъ видѣ: желѣзо, раскаленное до-бѣла, темнѣетъ, затѣмъ въ нѣкоторый моментъ на мгновеніе становится болѣе свѣтлымъ, послѣ чего продолжаетъ темнѣть. Это обратное нагрѣваніе названо рекалесценціею.

Критическія температуры для разныхъ тѣлъ различны. Быть можетъ, всѣ тѣла обладаютъ магнитными свойствами. Вся суть въ критической температурѣ. Для другихъ тѣлъ какъ мѣдь, серебро и т. п. критическая температура, вѣроятно, ниже обыкновенной, вотъ почему они не обнаруживаютъ магнитныхъ свойствъ.

74. Остаточный магнетизмъ. Гистерезисъ. Если мы возьмемъ кусокъ желѣза или стали и сильно ихъ намагнитимъ, погрузивъ, напримѣръ, въ сильное маг-

ченія магнитной индукціи (можно также брать интенсивность намагничиванія J).

Магнитная индукція, когда мы будемъ постепенно увеличивать поле отъ O до H , будетъ возрастать по кривой oNA , затѣмъ, когда мы начнемъ уменьшать поле отъ H до O , то оказывается, что для тѣхъ же значеній поля, которыя мы брали при возрастаніи, мы не получимъ прежнихъ значеній магнитной индукціи. Такъ, для значенія поля H_n въ періодъ возрастанія магнитная индукція была равна ординатѣ H_nN , а при убываніи, т. е. когда мы уменьшили поле отъ H до H_n , магнитная индукція изобразится уже ординатою H_nN' , большею, чѣмъ H_nN .

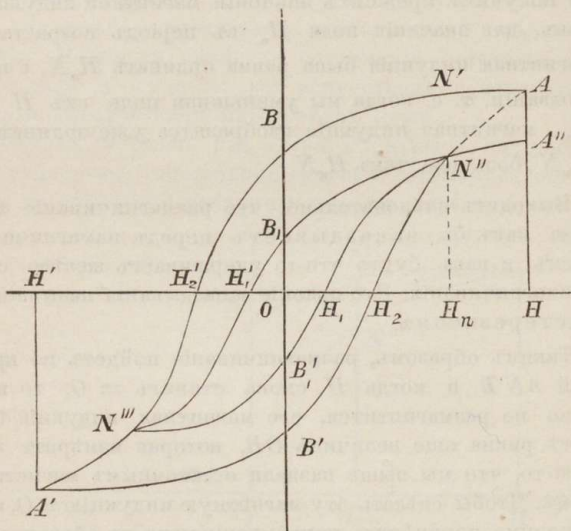
Выходитъ слѣдовательно, что размагничиваніе желѣза какъ бы запаздываетъ передъ намагничиваніемъ и какъ будто что-то удерживаетъ желѣзо отъ размагничиванія. Это явленіе запаздыванія называется гистерезисомъ.

Такимъ образомъ, размагничиваніе пойдетъ по кривой $AN'B$ и когда H снова станетъ $= O$, то желѣзо не размагнитится, его магнитная индукція будетъ равна еще величинѣ OB , которая измѣритъ собою то, что мы выше назвали остаточнымъ магнетизмомъ. Чтобы сдѣлать эту магнитную индукцію $= O$, необходимо перемѣнить направленіе поля на обратное и дать ему нѣкоторое значеніе H_1 , какъ это видно изъ фигуры, тогда размагничиваніе пойдетъ по кривой BH_1 .

Если мы теперь будемъ продолжать увеличеніе поля въ обратномъ направленіи, то намагничиваніе стержня въ обратную сторону пойдетъ по кривой H_1A' , причемъ, если напряженіе поля будетъ $H' =$ въ абсолютномъ значеніи H , то ордината $H'A' =$ ординатѣ HA . Если теперь мы снова начнемъ размагничивать стержень, то кривая размагничиванія будетъ $A'B'$, когда поле станетъ $=$ нулю, получится остаточный магнетизмъ, измѣряемый ординатою OB' , которая будетъ

равна ординатъ OB . Затѣмъ намагничиваніе пойдётъ по кривой $ON''A$. Если мы снова начнемъ уменьшать поле отъ H до H' и обратно, то намагничиваніе опишетъ опять циклъ $AN'A'N''A$ и т. д.

Если бы теперь, описавъ кривую $AN'BA'$ (фиг. 72), мы стали подниматься по кривой $A'B'A$, но не дошли бы до точки A , т. е. не дали бы намагничиваю-



Фиг. 72.

щему полю значеніе H , а остановились на значеніи его H_n , соотвѣтственно чему получили бы точку N'' на кривой и стали бы опять размагничивать желѣзо, уменьшая поле, то мы получили бы кривую размагничиванія $N''B_1N'''$, а вернулись бы къ N'' по кривой $N'''B_1'N''$, т. е. описали бы циклъ меньшій, чѣмъ прежде, и если бы продолжали дальше увеличивать, H , то не пришли бы въ точку A , но пошли бы по кривой $N''A''$ такъ, что величинѣ H соотвѣтствовала бы ордината HA'' .

Отсюда слѣдуетъ, что намагничиваніе желѣза не толь-

ко зависеть отъ намагничивающаго поля, но и отъ того состоянія намагничиванія, въ которомъ находилось раньше желѣзо, ибо одному и тому же полю могутъ, какъ показываетъ фиг. 72, соответствовать разныя намагничиванія.

Если мы будемъ постоянно уменьшать предѣлы измѣненія намагничивающаго поля, то мы будемъ получать все меньшіе и меньшіе циклы. Это даетъ намъ средство привести желѣзо въ совершенно нейтральное состояніе, которое строго соответствуетъ точкѣ O , а не точкамъ H_1 H_2 H_1' H_2' , гдѣ кривыя намагничиванія пересѣкаютъ ось абсциссъ.

75. Потеря энергіи на гистерезисъ. Изъ сказаннаго выше слѣдуетъ, что для того, чтобы вернуться къ точкѣ A (фиг. 71), необходимо описать замкнутую кривую. Это показываетъ, что при процессѣ намагничиванія, хотя мы и вернулись къ прежнему состоянію, мы затратили нѣкоторую работу. Докажемъ это. Предположимъ, что мы имѣемъ элементарный магнитъ, интенсивность намагничиванія котораго J , поперечное сѣченіе ω и длина l , и пусть этотъ магнитикъ передвинулся отъ мѣста, гдѣ поле было H , къ мѣсту, гдѣ поле $H + dH$. Мы докажемъ что магнитикъ произведетъ работу:

$$J dH. \omega l$$

Силу H мы будемъ разсматривать, какъ положительную, если ея направленіе будетъ совпадать съ направленіемъ силовыхъ линій магнитика. Пусть V_1 магнитный потенциалъ отъ поля у отрицательнаго полюса и V_2 у положительнаго полюса. Тогда потенциальная энергія магнитика будетъ въ полѣ H :

$$- J \omega V_1 + J \omega V_2 = J \omega (V_2 - V_1)$$

Но $V_2 - V_1$ есть какъ разъ та работа, которую совершить единица магнитной массы при перемѣщеніи отъ положительнаго къ отрицательному полюсу въ полѣ H (§ 9). Съ другой стороны если H напряженіе поля, т. е. сила, дѣйствующая на единицу положит.

массы, то работа будетъ равняться силѣ на пройденный путь, т. е. будетъ равняться $- H \cdot l$, откуда

$$V_2 - V_1 = - H l$$

и слѣдовательно энергія магнетика въ полѣ будетъ:

$$J \cdot \omega (V_2 - V_1) = - J \cdot \omega \cdot H \cdot l.$$

Въ полѣ $H + dH$ потенциальная энергія магнетика будетъ слѣдовательно:

$$- J \cdot \omega l (H + dH)$$

Слѣдовательно при переходѣ изъ поля H въ поле $H + dH$ въ магнетикѣ произойдетъ уменьшеніе потенциальной энергіи на величину:

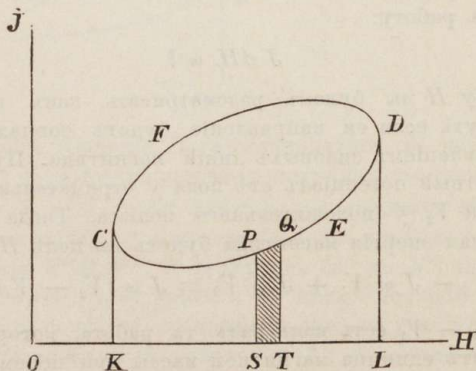
$$- J \cdot \omega H l - [- J \cdot \omega l (H + dH)] = J \cdot \omega l \cdot dH.$$

Уменьшеніе потенциальной энергіи будетъ равняться произведенной магнетикомъ работѣ во время этого перемѣщенія (§ 2).

Но $\omega l =$ объему магнетика, слѣдовательно работа, производимая магнетикомъ при перемѣщеніи отъ поля H къ полю $H + dH$ на единицу его объема будетъ:

$$J \cdot dH.$$

Пусть теперь замкнутая кривая (фиг. 73) $CFDE$



Фиг. 73.

представляетъ циклъ намагничиванія, абсциссы $=$ на-

магнитивающему полю, а ординаты интенсивности намагнитиванія. Пусть $OS = H$, $OT = H + dH$, $SP = J$, тогда выраженіе $J \cdot dH$ на рисунокъ изобразится площадью $SPQT$. Когда поле измѣнится отъ OK до OL , магнитъ произведетъ работу, равную площади, ограниченной кривою CED и ординатами CK и LD , т. е. площади $KCEDL$. Точно такимъ же образомъ при обратномъ измѣненіи поля отъ OL до OK , работа, которую нужно затратить на магнитъ, изобразится площадью $LDFCK$. Площадь ограниченная кривою $CFDE$ представитъ, слѣдовательно, избытокъ работы, которую нужно доставить магниту, надъ работою, которая получится отъ магнита, когда намагнитиваніе пройдетъ полный циклъ, а такъ какъ, совершивъ полный циклъ, мы пришли къ первоначальному состоянію намагнитиванія, то этотъ избытокъ работы всецѣло переобразуется въ теплоту.

Но площадь $KCEDL$ выразится интеграломъ:

$$\int_{ck}^{DL \text{ по } CED} J \cdot dH$$

а площадь $KCFDE$ интеграломъ

$$\int_{ck}^{DL \text{ по } CLD} J \cdot dH$$

Слѣдовательно, количество затраченной на теплоту энергіи для единицы объема будетъ:

$$\int_{ck}^{DL \text{ по } CFD} J \cdot dH - \int_{ck}^{DL \text{ по } CED} J \cdot dH \dots\dots\dots (65)$$

Если кривая цикла $CFDEC$ выражала бы зависимость не интенсивности J , а индукціи B отъ намагнитивающаго поля, то выраженіе работы, затрачиваемой на теплоту, нѣсколько измѣнится. Найдемъ это выраженіе.

Мы имѣемъ (§ 72).

$$\frac{B}{H} = 1 + 4 \pi \chi$$

откуда

$$B = H + 4 \pi \chi H$$

Но

$$\chi H = J \text{ (§ 69)}$$

слѣдовательно:

$$B = H + 4 \pi J$$

откуда

$$J = \frac{B - H}{4 \pi}$$

Замѣнимъ въ выраженіи (64) J его значеніемъ, тогда получимъ:

$$\frac{1}{4 \pi} \int_{ck}^{DL \text{ по } CFD} (B - H) dH - \frac{1}{4 \pi} \int_{ck}^{DL \text{ по } CED} (B - H) dH$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4 \pi} \left(\int_{ck}^{DL} H dH - \int_{ck}^{DL} H dH \right)^*) + \\ & + \frac{1}{4 \pi} \left(\int_{ck}^{DL \text{ по } CFD} B dH - \int_{ck}^{DL \text{ по } CED} B dH \right) \end{aligned}$$

первая часть въ скобкахъ равна нулю и слѣдовательно отстанется для выраженія работы затрачиваемой на теплоту или, какъ говорятъ, потеря на гистерезисъ:

$$\frac{1}{4 \pi} \left(\int_{ck}^{DL \text{ по } CFD} B dH - \int_{ck}^{DL \text{ по } CED} B dH \right)$$

*) Мы отбрасываемъ здѣсь обозначеніе „по CED“, или „по CFD“, ибо H переменная независимая, т. е. не зависитъ отъ кривыхъ CED или CFD.

Изъ этого выраженія слѣдуетъ, что если кривая цикла $CEDFC$ получена, выражая зависимость B отъ H , то для опредѣленія потери на гистерцисъ надо взять площадь ограниченную этою кривою и раздѣлить ее на 4π . Пусть $\sum$ эта площадь, потеря на гистерцисъ для единицы объема желѣза будетъ:

$$\frac{\sum}{4\pi}.$$

Если объемъ желѣза U , то потеря на гистерцисъ въ такомъ желѣзѣ будетъ:

$$\frac{U \cdot \sum}{4\pi} \dots \dots \dots (66)$$

76. Подъемная сила магнита. Если мы возьмемъ бесконечно длинный магнитъ (для того, что бы въ каждомъ его сѣченіи считать интенсивность намагничиванія одною и тою же) и разрѣжемъ этотъ магнитъ, продѣлавъ въ немъ щель, то между сторонами щели будетъ взаимное притяженіе, ибо на одной ея сторонѣ будетъ распределѣна положительная масса, а на другой отрицательная. Мы уже видѣли, что (§ 68) единица положительной массы будетъ притягиваться отрицательною стороною щели съ силою:

$$2\pi k \cdot \sigma$$

гдѣ σ плотность массы, распределенной [на сторонѣ щели. Слѣдовательно масса σ , которая покрываетъ единицу площади противоположной стѣнки щели будетъ притягиваться съ силою:

$$2\pi k \cdot \sigma^2.$$

Если интенсивность намагничиванія въ сѣченіи щели J , то предъидущая сила можетъ быть лишь выражена:

$$2\pi k J^2$$

или полагая $k = 1$

$$2\pi J^2 \dots \dots \dots (67)$$

Слѣдовательно это будетъ сила, съ которою магнитъ будетъ притягивать единицу площади отрѣзанной отъ него части. Эту силу называютъ подъемною силою магнита. Единица площади куска желѣза будетъ притягиваться съ силою, выраженіе которой будетъ одинаково съ (67), ибо желѣзо приблизившись къ магниту становится само какъ бы продолженіемъ этого магнита

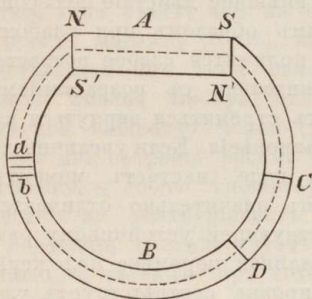
77. Гипотезы Вебера и Юинга относительно мелекулярной структуры магнитовъ и магнитныхъ веществъ. Тотъ фактъ, что на сколько бы частей мы не дѣлили магнитъ (§ 58), каждая отдѣльная часть представляетъ изъ себя самостоятельный магнитъ, привелъ физика Вебера къ гипотезѣ, что всякое магнитное вещество можно разсматривать, какъ состоящее изъ собранія весьма малыхъ частицъ, представляющихъ собою элементарные магнетики. Когда вещество не обнаруживаетъ магнитныхъ свойствъ, это состояніе соотвѣтствуетъ такому расположенію магнитныхъ частицъ, при которомъ ихъ полюсы взаимно нейтрализуются. Но если магнитное вещество въ нейтральномъ состояніи введено въ намагничивающее поле, то каждая частица будетъ понуждаться полемъ повернуться такъ, что бы ея ось сдѣлалась параллельною направленію поля и чтобы южный полюсъ встрѣчалъ силовыя линіи поля. При такомъ поворотѣ дѣйствіе полюсовъ обнаруживается и вещество становится магнитомъ. Чтобы объяснить степени намагничиванія Веберъ предполагаетъ, что частицы сопротивляются повороту, вызываемому намагничивающимъ полемъ. Эту сопротивляющуюся причину называютъ коэрцетивной силою. Степень сопротивленія частицъ повороту зависитъ отъ вещества. Такъ въ мягкомъ желѣзѣ она ничтожна, въ стали и чугунѣ значительна. Вотъ отчего желѣзо введенное въ данное поле намагничивается сильнѣе, чѣмъ введенная въ то же поле сталь. За то эта послѣдняя сохраняетъ долѣе магнетизмъ, когда дѣйствіе поля прекращается. Магнетизмъ, остающійся въ стали или вообще въ маг-

нитномъ веществѣ послѣ того, какъ перестало дѣйствовать поле, называется, какъ мы уже видѣли остаточноымъ магнетизмомъ.

Юингъ дополнилъ гипотезу Вебера. По Юингу сопротивление, оказываемое ориентированію магнитныхъ частицъ въ присутствіи намагничивающаго поля происходитъ отъ взаимнаго дѣйствія частичныхъ магнитовъ. Нейтральное состояніе магнитнаго вещества соотвѣтствуетъ устойчивому равновѣсію частичныхъ магнитовъ, при которыхъ внѣшнее дѣйствіе полюсовъ не обнаруживается. Такимъ образомъ при слабомъ намагничивающемъ полѣ получится слабое возрастаніе намагничиванія сравнительно съ возрастаніемъ поля, ибо частицы будутъ стремиться вернуться къ положенію устойчиваго равновѣсія. Если увеличивать дальше намагничивающее поле, настанетъ моментъ, когда группировка частицъ значительно отличается отъ группировки соотвѣтствующей устойчивому равновѣсію, происходитъ внѣзапная перемѣна положенія частицъ, ихъ новая группировка соотвѣтствуетъ уже положенію неустойчиваго равновѣсія, вслѣдствіе чего при сравнительно маломъ увеличеніи намагничивающаго поля происходитъ быстрое ориентированіе частицъ по направленію близкому къ направленію поля. Слѣдовательно наступаетъ 3-я группировка, при которой всѣ частицы имѣютъ свои оси почти параллельными направленію, поля. Послѣ этого увеличеніе поля производитъ уже весьма мало замѣтное измѣненіе этой 3-й группировки, тогда говорятъ, что магнитное вещество уже насыщено. На фиг. 68, представляющей кривую намагничиванія, часть кривой *AB* соотвѣтствуетъ предѣламъ первой группировки; какъ видно намагничиваніе растеть медленно съ увеличеніемъ поля. Часть *BC* соотвѣтствуетъ группировкѣ неустойчиваго равновѣсія, кривая идетъ круто, т. е. сравнительно небольшому увеличенію поля соотвѣтствуютъ значительныя увеличенія намагничиванія. Наконецъ часть кривой *CD* соотвѣтствуетъ 3-й группировкѣ,

когда оси частицъ уже почти установились параллельно полю, кривая идетъ полого, т. е. значительныя увеличенія поля не производятъ замѣтнаго измѣненія въ ориентированіи частицъ. Теплота, выдѣляемая при явленіи гистерезиса, по Юингу происходитъ отъ колебанія частицъ при переходѣ отъ одного положенія равновѣсія въ другое.

78. Магнетизмъ въ скрытомъ состояніи. Представимъ себѣ магнитъ (фиг. 74) NAS и предположимъ,



Фиг. 74.

что между полюсами мы вставили кусокъ желѣза NBS , мы получимъ замкнутое кольцо, желѣзо NBS сдѣлается также магнитомъ съ полюсами $N'S'$, вслѣдствіе вліянія поля между N и S магнита NAS . Такимъ образомъ все замкнутое кольцо будетъ состоять изъ элементарныхъ словъ, каковы a и b , поставленныхъ противу-

положными полюсами, взаимно нейтрализующими другъ друга, вслѣдствіе чего это кольцо не будетъ обнаруживать внѣшнимъ образомъ никакихъ магнитныхъ дѣйствій, по отношенію къ этимъ послѣднимъ оно будетъ совершенно такимъ же, какъ и кусокъ не намагниченнаго желѣза (въ нейтральномъ состояніи). Такъ, если мы его поднесемъ къ желѣзнымъ опилкамъ, то эти послѣдніе не будутъ къ нему приставать, подвѣшенное свободно, оно будетъ принимать любое положеніе и т. д. Однако, по внутреннему расположенію магнитныхъ частицъ это кольцо будетъ весьма рѣзко отличаться отъ такого же кольца изъ нейтральнаго желѣза. Это различіе можно обнаружить слѣдующимъ образомъ: пропилимъ въ кольцо NSB въ любомъ его мѣстѣ кусокъ CD и начнемъ его

вынимать, мы встрѣтимъ сильное сопротивленіе, вслѣдствіе того, что стѣнки щелей C и D будутъ взаимно притягиваться. Когда же мы вынемъ часть CD , то увидимъ, что концы C и D остальной части кольца обнаружатъ дѣйствіе полюсовъ, у одного конца будетъ южный полюсъ, у другого сѣверный. Если же кольцо $NBSA$ состояло изъ желѣза въ нейтральномъ состояніи, то, вынимая кусокъ CD , мы не встрѣтили-бы никакого сопротивленія, а по вынутіи этого послѣдняго не обнаружили-бы въ CD дѣйствій магнитныхъ полюсовъ. Съ физической точки зрѣнія разница между кольцомъ $NBSA$ и кольцомъ изъ нейтральнаго желѣза будетъ заключаться въ томъ, что въ первомъ кольцо элементарные магнетики будутъ ориентированы такъ, что ихъ оси будутъ касательны концентрическимъ фибрамъ, подобнымъ показанной пунктирною линіею, и такое кольцо будетъ состоять изъ ряда магнитныхъ слоевъ прилегающихъ другъ къ другу противоположными полюсами, между тѣмъ какъ въ кольцо изъ простого желѣза оси элементарныхъ магнетиковъ не будутъ направлены по касательнымъ къ только-что изображенной линіи, а такъ, что взаимная группировка магнетиковъ не дастъ двухъ равнодѣйствующихъ полюсовъ. (§ 77).

Такимъ образомъ кольцо, которое при размыканіи его обнаруживаетъ у разомкнутыхъ концовъ магнитныя дѣйствія, мы назовемъ тѣломъ со скрытымъ магнетизмомъ, въ отличіе отъ нейтральнаго тѣла, съ которымъ по внѣшнимъ дѣйствіямъ предъидущее кольцо совершенно сходно.

Если мы въ кольцо со скрытымъ магнетизмомъ продѣлаемъ центральный каналъ и вообразимъ въ этомъ каналѣ единицу положительной магнитной массы, то эта послѣдняя не будетъ перемѣщаться въ немъ, иначе говоря въ кольцо $NBSA$ не будетъ силовыхъ линій, хотя отъ N къ S до замыканія магнита желѣзомъ NBS и были силовые линіи, которыя шли отъ полюса N къ полюсу S . Эти силовые линіи тотчасъ же обнару-

жаты если, гдѣ либо мы разомкнемъ кольцо и единица полож. маг. массы начнетъ перемѣщаться по центральному каналчику. Можно сказать, что силовые линіи въ такомъ замкнутомъ кольцѣ какъ бы существуютъ въ мертвомъ состояніи, т. е. это какъ бы рядъ нитей, сохранившихъ форму силовыхъ линій, но лишенныхъ эластичности и всѣхъ свойствъ этихъ послѣднихъ. Эти свойства появляются когда кольцо размыкается.

Механическая энергія, которую придется затратить на размыканіе кольца будетъ какъ разъ равняться потенциальной энергіи магнита, который обнаружится, когда кольцо будетъ разомкнуто. Эту энергію можно вычислить слѣдующимъ образомъ: положимъ мы вырываемъ кусокъ CD , пусть разстояніе по мертвой силовой линіи $CBAD$ будетъ l . Если на C и D обнаружатся послѣ того, какъ мы вырвали кусокъ CD , полюсы съ массами $+m$ и $-m$, можно вообразить, что эти массы были сосредоточены у середины линіи $CABD$ въ a и b , гдѣ онѣ были взаимно нейтрализованы, послѣ чего онѣ перенеслись къ C и D . Разность потенциаловъ между C и D была сначала 0 , а теперь стало V , слѣдовательно работа, которую нужно произвести надъ массами для перемѣщенія въ C и D будетъ $\frac{1}{2} m V$ (§ 18). Но $V = Hl$, гдѣ H напряженіе поля, которое появится при обнаруженіи магнетизма, ибо

$$H = - \frac{dV}{dl}.$$

откуда

$$- dV = H dl; \quad - V = \int_C^D H dl. = - \int_D^C H dl$$

откуда:

$$V = H. l.$$

Слѣдовательно вышеупомянутая работа $\frac{1}{2} m V$ будетъ:

$$\frac{1}{2} m V = \frac{1}{2} m H l.$$

Если J интенсивность намагничиванія въ сѣченіяхъ C и D , то:

$$m = J S$$

гдѣ S площадь сѣченій въ C и D , а потому:

$$\frac{1}{2} m V = \frac{1}{2} J S H l$$

но потокъ исходящій изъ полюса C или входящій въ D , будетъ (§ 69):

$$4 \pi J S$$

а такъ какъ напряженіе поля $= H$, то этотъ потокъ будетъ также:

$$H S$$

слѣдовательно:

$$H S = 4 \pi J S$$

или

$$H = 4 \pi J$$

слѣдовательно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m V &= \frac{1}{2} J S H l = \frac{1}{2} J S 4 \pi J l = \\ &= 2 \pi J^2 S l \dots \dots \dots (68) \end{aligned}$$

Это и будетъ та механическая энергія, которую нужно затратить, чтобы вырвать кусокъ CD .

Примѣчаніе. Въ этомъ выводѣ мы предполагали, что сѣченіе кольца вездѣ одно и то же и что на единицу сѣченія приходится вездѣ одно и то же число силовыхъ линій, т. е. что H вездѣ одинаково.

ОТДѢЛЪ IV.

Электро-магнетизмъ.

ГЛАВА XII.

Магнитныя явленія, вызываемыя токами.

79. Открытіе Эрстеда. Профессоръ Эрстедъ, въ Копенгагенѣ, въ 1820 году впервые открылъ, что электрический токъ дѣйствуетъ на магнитную стрѣлку, производя отклоненіе этой послѣдней. Магнитная стрѣлка стремится установиться перпендикулярно къ прямолинейному проводнику съ токомъ и такъ, что, если наблюдателя вообразить лежащимъ вдоль проводника по направленію тока, который входитъ черезъ ноги, то стрѣлка будетъ отклоняться влѣво. Это послѣднее правило было формулировано Амперомъ.

Это показываетъ, что токъ образуетъ вокругъ проводника, по которому онъ проходитъ магнитное поле. И дѣйствительно, если мы на листъ бумаги, проткнутый проводникомъ съ токомъ и расположенный перпендикулярно этому проводнику, насыпемъ опилокъ, то эти опилки расположатся концентрическими окружностями. Это доказываетъ, что силовыя линіи магнитнаго потока, порождаемаго токомъ, расpredѣляются вокругъ проводника концентрическими окружностями, плоскости которыхъ перпендикулярны къ направленію провод-

ника, а центры которых распредѣляются вдоль этого послѣдняго (фиг. 75).

Направленіе силовыхъ линій опредѣляется слѣдующимъ весьма простымъ правиломъ, предложеннымъ Максуэлломъ:

80. Правило Максуэлла или правило пробочника. Направленіе магнитныхъ силовыхъ линій тока совпадаетъ съ направлениемъ вращенія пробочника, который поворачиваютъ такъ, чтобы онъ перемѣщался поступательно по направленію тока въ проводникѣ (фиг. 75).



Фиг. 75.

81. Магнитное поле прямолинейнаго безконечно длиннаго проводника съ токомъ. Біо и Саваръ нашли, изучая дѣйствіе тока въ прямолинейномъ весьма длинномъ проводникѣ на магнитный полюсъ, что магнитное поле такого тока въ данной точкѣ пропорціонально силѣ тока и обратно пропорціонально разстоянію этой точки до проводника. Направленіе поля перпендикулярно къ плоскости, проходящей черезъ данную точку и проводникъ, т. е. касательно къ окружности, изображающей силовую линію поля въ этой точкѣ (фиг. 75).

Слѣдовательно, если напряженіе поля H , сила тока i , то:

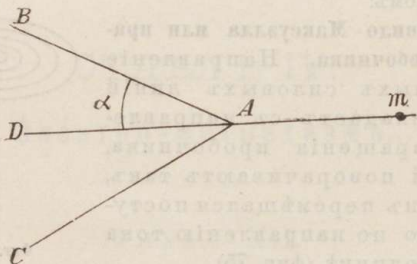
$$H = \frac{k \cdot i}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

гдѣ k коэфф. пропорціональности.

Если въ данной точкѣ будетъ магнитная масса m , то, сила, съ которою будетъ дѣйствовать токъ на полюсъ будетъ:

$$f = \frac{m \cdot k i}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

82. Магнитное поле тока въ проводникѣ бесконечно малой длины. Законъ Лапласа. Біо, продолжая свои изслѣдованія надъ магнитными дѣйствіями тока, нашелъ, что дѣйствіе тока въ бесконечно длинномъ проводникѣ BAC , согнутомъ подъ угломъ, на магнитную



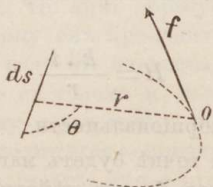
Фиг. 76.

массу m , расположенную на равнодѣлящей угла (фиг. 76) выразится формулою:

$$f = k \frac{i m}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

гдѣ $\alpha = \widehat{DAB}$ т. е. половинѣ угла BAC .

Изъ этого выраженія Лапласъ вывелъ выраженіе элементарной силы, съ которою бесконечно малый элементъ проводника съ токомъ дѣйствуетъ на магнитную массу m .



Фиг. 77.

Такъ если ds элементъ проводника, по которому проходитъ токъ силою i (фиг. 77), r разстояніе точки o ,

гдѣ сосредоточена масса m , до проводника ds , то сила, дѣйствующая на массу m , будетъ:

$$f = \frac{k \cdot i \cdot m}{r^2} \cdot ds \sin \theta \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Сила f перпендикулярна къ плоскости Ods , проходящей черезъ данную точку и элементъ проводника, ея направление опредѣлится касательною къ окружности, изображающей силовую линію въ данной точкѣ отъ тока ds , направление же силовой линіи опредѣлится правиломъ пробочника (§ 80).

Законъ Лапласа, какъ относящійся къ безконечно малымъ элементамъ, практически не можетъ быть провѣренъ *). Но его слѣдствія могутъ быть подтверждены опытами.

Такъ, если мы зададимся на основаніи закона Лапласа, найти дѣйствіе тока въ безконечно длинномъ проводникѣ на магнитный полюсъ, то мы получимъ, провѣренный опытомъ законъ Біо и Савара.

Дѣйствительно, если по Лапласу:

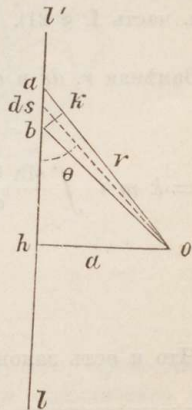
$$d f = \frac{k i m}{r^2} \cdot ds \cdot \sin \theta$$

то

$$f = k i m \int \frac{ds \sin \theta}{r^2}$$

Возьмемъ для разстоянія r , разстояніе ob , которое безконечно мало разнится отъ oc , и пусть тогда уголь $\theta = \widehat{obl}$.

Изъ чертежа мы имѣемъ, описавъ изъ o дугу bk , ко-



Фиг. 78.

*) Выводъ закона Лапласа см. Bertrand, leçons sur la theorie mathematique de l'électricité, также Gerard курсъ электричества.

торую можно принять за прямую перпендикулярную къ $o a$: $ob = r$, $o a = r + dr$, $dr = ak$, уголъ $o a l$ съ приближеніемъ до безконечно малаго $= o b l$, т. е. $= \theta$. Въ треугольникѣ $b a k$ имѣемъ

$$dr = ds \cdot \cos \theta,$$

откуда:

$$ds = \frac{dr}{\sin \theta}$$

Но:

$$r = \frac{o h}{\sin \theta} = \frac{a}{\sin \theta};$$

а слѣдовательно:

$$dr = \frac{-a \cdot \cos \theta \cdot d\theta}{\sin^2 \theta},$$

(см. часть I, § 21).

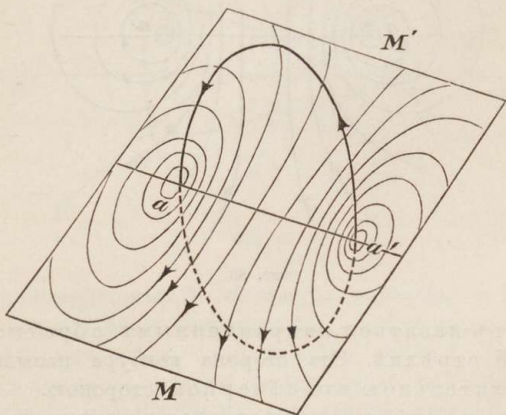
Замѣняя r , ds и dr въ выраженіе $\int$, найдемъ:

$$\begin{aligned} F &= k m i \int \frac{\sin \theta \cdot d\theta}{a} = \frac{k m i}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{2 k m i}{a} *) \end{aligned}$$

Что и есть законъ Біо и Савара.

*) Мы беремъ для угла θ предѣлы $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, ибо векторъ r придется при предѣлахъ интегрированія протягивать къ концамъ l' и l , т. е. на безконечность по обѣ стороны перпендикуляра $o h$, слѣдовательно, въ одну сторону θ будетъ $= \frac{\pi}{2}$, а въ другую $-\frac{\pi}{2}$

83. Магнитное поле замкнутого проводника. Пусть имѣемъ замкнутый проводникъ $a b c$ съ циркулирующимъ по нему токомъ. Силовыя линіи будутъ концентрическія окружности для каждаго элемента проводника, такъ что силовой потокъ будетъ состоять какъ бы изъ наизнанныхъ на проводникъ такихъ концентрическихъ окружностей. Если принять во вниманіе гипотезы Фаридея (§ 17) относительно силовыхъ линій, то не трудно представить себѣ картину распредѣленіе ихъ въ замкнутомъ проводникѣ. На фигурѣ 79 показано подобное распредѣленіе въ діамет-

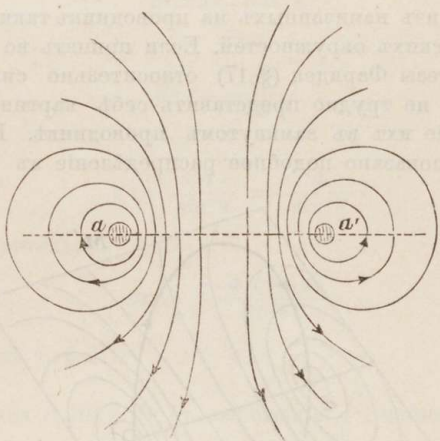


Фиг. 79.

ральной плоскости $M M'$ замкнутого проводника. Вслѣдствіе того, что силовыя линіи одинаковаго направленія отталкиваются, внутри контура проводника эти круги будутъ сплюснуты, какъ это болѣе наглядно представлено на фиг. 80, гдѣ взяты лишь слѣды $a a'$ замкнутого проводника.

Такимъ образомъ магнитный потокъ замкнутого проводника, распредѣляется такъ, что силовыя линіи центральной части площади контура, кажутся выходящими перпендикулярно къ этой площади (ср. фиг. 79

и 80). Если принять во внимание правило Максвелла (§ 80), то легко видеть, что силовые линии будут казаться выходящими из плоскости контура съ той его стороны, смотря на которую токъ



Фиг. 80.

будетъ казаться направленнымъ обратно часовой стрѣлкѣ. Эта сторона контура называется положительною или сѣвѣрною стороною.

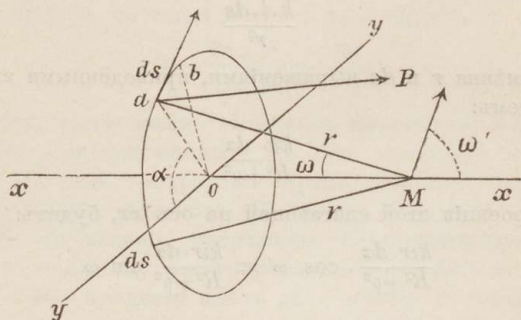
Напряженіе магнитнаго поля замкнутого проводника, можно опредѣлить, примѣняя формулу Лапласа. Такъ, въ точкѣ P , на примѣръ, (фиг. 81). Это напряженіе будетъ равнодѣйствующею напряженій отъ всѣхъ элементовъ ds , составляющихъ данный контуръ. Вычислить эту равнодѣйствующую можно лишь для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, такъ, на примѣръ, для точекъ, расположенныхъ на оси xx замкнутого проводника, контуръ котораго есть правильная фигура, какъ кругъ, четырехугольникъ, эллипсъ.

Случай круговаго проводника. Если, на примѣръ, на фиг. 81 контуръ проводника окружность, то легко видеть, что поле въ точкѣ M въ силу симметріи бу-

детъ направлено по оси xx , ибо всѣ слагающія, каковы:

$$\frac{k \cdot i}{r^2} ds \cdot \sin(r, ds) \dots \dots \dots (\alpha)$$

расположатся симметрично вокругъ этой оси. Эти слагающія, перпендикулярныя съ плоскостямъ, каковы (ds, r) , будутъ, слѣдовательно, всѣ перпендикулярны



Фиг. 81.

къ производящимъ M, ds конуса, имѣющаго вершину въ M и основаніе—окружность контура проводника, и образуютъ собою, слѣдовательно, конусъ производящія котораго съ осью xx (см. курсъ геометріи) составляютъ уголъ $\omega' = 90^\circ - \omega$, сумма проекцій этихъ слагающихъ на ось xx и будетъ ихъ равнодѣйствующая (см. курсъ механики), т. е. будетъ равняться напряженію поля въ точкѣ M .

Проведемъ въ плоскости окружности контура ось yy (въ любомъ направленіи) и пусть α уголъ aoy . Тогда изъ чертежа мы получимъ:

$$r^2 = R^2 + \rho^2$$

гдѣ R разстояніе точки M до центра o , ρ — радіусъ окружности.

Затѣмъ:

$$ds = \rho \cdot d\alpha$$

Одна изъ слагающихъ поля, какъ мы уже сказали выше, на основаніи закона Лапласа, будетъ:

$$\frac{k \cdot i \, ds}{r^2} \, ds \sin (ds, r)$$

но:

$(\widehat{ds, r}) = 90^\circ$, ибо касательная къ ds перпендикулярна къ aM . Слѣдовательная слагающая поля, будетъ:

$$\frac{k \cdot i \cdot ds}{r^2}$$

Замѣняя r и ds выраженіями, приведенными выше, найдемъ:

$$\frac{k i \rho \cdot d\alpha}{R^2 + \rho^2}$$

Проекція этой слагающей на ось xx , будетъ:

$$\frac{k i r \, d\alpha}{R^2 + \rho^2} \cdot \cos \omega' = \frac{k i r \cdot d\alpha}{R^2 + \rho^2} \sin \omega$$

ибо:

$$\omega' = 90^\circ - \omega$$

Слѣдовательно, равнодѣйствующая всѣхъ такихъ слагающихъ, т. е. напряженіе поля въ M будетъ:

$$H = \int_0^{2\pi} \frac{k i r \, d\alpha}{R^2 + \rho^2} \cdot \sin \omega$$

интеграль берется отъ 0 до 2π потому, что нужно взять послѣдовательно всѣ элементы ds на окружности контура. Но k , i , ρ , $R^2 + \rho^2$ и ω величины постоянныя для всѣхъ элементовъ окружности, поэтому можно написать:

$$H = \frac{k i \rho \cdot \sin \omega}{R^2 + \rho^2} \int_0^{2\pi} d\alpha$$

что будетъ по интегрированію:

$$H = \frac{k i \rho \sin \omega}{R^2 + \rho^2} \cdot 2\pi$$

но:

$$\sin \omega = \frac{\rho}{\sqrt{R^2 + \rho^2}} = \frac{\rho}{(R^2 + \rho^2)^{1/2}}$$

слѣдовательно:

$$H = \frac{2\pi i \rho^2}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Если масса будетъ находиться въ центрѣ окружности контура, то тогда $R = 0$ и поле будетъ:

$$H = \frac{2\pi i \rho^2}{(\rho^2)^{3/2}} = \frac{2\pi i}{\rho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Точно также можно вычислить напряженіе поля въ точкахъ, расположенныхъ на оси симметріи контуровъ въ видѣ квадратовъ, прямоугольныхъ четырехугольниковъ, эллипсовъ. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ вычисленіе, напряженія поля приводитъ къ весьма сложному интегрированію. Къ счастью на практикѣ намъ придется имѣть дѣло всегда съ упомянутыми выше контурами, а напряженіе поля всегда сводить къ напряженію по осевой линіи.

84. Дѣйствіе магнитнаго поля на элементъ проводника съ токомъ. Мы уже видѣли, что сила, съ которою дѣйствуетъ элементъ проводника на магнитную массу m (§ 82), будетъ:

$$f_1 = \frac{kim_1}{r^2} \cdot ds \sin(r, ds)$$

На оборотъ масса будетъ, слѣдовательно, дѣйствовать на проводникъ ds съ тою же силою f . Напряженіе поля, происходящаго отъ массы m_1 въ точкѣ, гдѣ находится проводникъ ds , будетъ:

$$\frac{m_1}{r_1^2}$$

ибо это будетъ сила, дѣйствующая на единицу массы въ точкѣ, гдѣ помѣщенъ проводникъ ds (§ 8), направленіе же поля совпадаетъ съ прямою, соединяющею массу съ этою точкою, т. е. совпадаетъ съ r_1

обозначая это напряженіе черезъ h_1 , мы можемъ, слѣдовательно, написать для силы, дѣйствующей на токъ въ проводникѣ ds :

$$f_1 = k i h_1 ds \cdot \sin(h_1, \widehat{ds})$$

или:

$$f_1 = k i \cdot ds \cdot h_1 \sin(h_1, \widehat{ds})$$

выраженіе $h_1 \cdot \cos(h_1, \widehat{ds})$ есть ничто иное, какъ проекція силы h_1 на направленіе элемента ds , слѣдовательно, выраженіе $h_1 \cdot \sin(h_1, \widehat{ds})$ будетъ проекція силы h_1 на направленіе перпендикулярное къ ds , т. е. на плоскость перпендикулярную къ ds .

Если мы возьмемъ теперь еще другую массу m_2 , ея поле h_2 въ точкѣ, гдѣ расположенъ элементъ ds , будетъ точно такимъ же образомъ $\frac{m_2}{r_2^2}$, а слѣдовательно, сила, съ которою это поле будетъ дѣйствовать на элементъ ds , будетъ:

$$f_2 = k \cdot i \cdot ds \cdot h_2 \sin(h_2, \widehat{ds})$$

гдѣ $h_2 \cdot \sin(h_2, \widehat{ds})$ будетъ опять проекціею поля h_2 на плоскость перпендикулярную къ ds .

Такимъ образомъ мы видимъ, что силы f_1 , f_2 пропорціональны проекціямъ $h_1 \sin(h_1, \widehat{ds})$ и $h_2 \sin(h_2, \widehat{ds})$. А слѣдовательно и равнодѣйствующая сила f_1 f_2 будетъ пропорціональна равнодѣйствующей проекціей $h_1 \sin(h_1, \widehat{ds})$ и $h_2 \sin(h_2, \widehat{ds})$. Но равнодѣйствующая этихъ проекцій будетъ = проекціи равнодѣйствующей силъ h_1 и h_2 на ту же плоскость (см. руководство механики), а равнодѣйствующая силъ h_1 и h_2 есть ничто иное, какъ напряженіе поля у элемента ds отъ обѣихъ вмѣстѣ массъ m_1 и m_2 (§ 8). Слѣдовательно, если H напряженіе этого поля, то равнодѣйствующая проекцій $h_1 \sin(h_1, \widehat{ds})$ и $h_2 \sin(h_2, \widehat{ds})$ на плоскость перпендикулярную къ ds , будетъ:

$$H \cdot \sin(H, \widehat{ds})$$

а слѣдовательно равнодѣйствующая силъ f_1 , f_2 , будетъ:

$$F = k i \cdot ds \cdot H \cdot \sin(H, \widehat{ds})$$

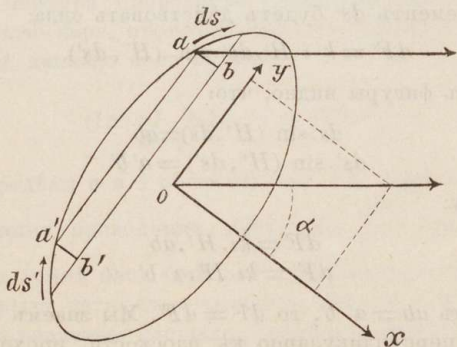
Точно такимъ же образомъ мы доказали бы, что если въ точкѣ, гдѣ помѣщенъ элементъ проводника ds , напряженіе поля отъ нѣсколькихъ массъ $m_1, m_2, m_3 \dots H$, то сила, дѣйствующая въ этомъ полѣ на элементъ ds съ токомъ i , будетъ:

$$F = k \cdot i \cdot ds \cdot H \sin (H, ds) \dots (74)$$

Изъ закона Лапласа легко усмотрѣть, что сила F перпендикулярна къ плоскости H, ds ; т. е. къ плоскости, проходящей черезъ элементъ ds и направление поля H .

85. Дѣйствіе равномернаго поля на замкнутый проводникъ. Примѣнимъ уравненіе (74) къ выводу дѣйствія равномернаго поля на замкнутый проводникъ, расположенный въ этомъ полѣ. Мы предположимъ, что контуръ проводника находится въ одной и той же плоскости (т. е. плоская фигура).

Пусть ABC этотъ проводникъ и пусть α уголъ, образуемый направлениемъ поля H съ нормалью къ плоскости контура ABC (фиг. 82). У каждаго элемента ds



Фиг. 82.

разложимъ поле H на двѣ слагающія: одна въ плоскости контура, а другая перпендикулярная къ этой плоскости.

Такимъ образомъ, во всѣхъ точкахъ контура будутъ

двѣ группы слагающихъ: однѣ параллельныя прямой ou въ плоскости контура, а другія параллельныя прямой ox , перпендикулярной къ плоскости контура. Если черезъ концы элемента ds , мы проведемъ прямыя $a a'$, $b b'$, параллельныя прямой ou , то мы на контурѣ вырѣжемъ элементъ ds' .

Такимъ образомъ, весь контуръ мы разобьемъ попарно на элементы ds и ds' . Разсмотримъ дѣйствіе поля на каждые два такіе элемента. Дѣйствіе поля будетъ состоять изъ дѣйствія его двухъ слагающихъ—одной параллельной прямой ou и равной $H \cdot \sin \alpha$ и другой параллельной прямой ox и равной $H \cdot \cos \alpha$. Разсмотримъ сначала дѣйствіе первой слагающей $H \cdot \sin \alpha$. Пусть она равна H' . Мы уже знаемъ (§ 84), что если у элемента ds дѣйствуетъ поле H' , то сила дѣйствія будетъ (см. ур. 74):

$$dF = ki \, ds \cdot H' \cdot \sin (H', ds)$$

или:

$$dF = ki \cdot H' \cdot ds \cdot \sin (H', ds')$$

На элементъ ds' будетъ дѣйствовать сила:

$$dF' = k i H' \cdot ds' \cdot \sin (H', ds').$$

Но изъ фигуры видно, что:

$$\begin{aligned} ds \cdot \sin (H', ds) &= ab \\ ds' \cdot \sin (H', ds') &= a' b' \end{aligned}$$

а потому:

$$\begin{aligned} dF &= ki \cdot H' \cdot ab \\ dF' &= ki H' \cdot a' b' \end{aligned}$$

Такъ какъ $ab = a' b'$, то $dF = dF'$. Мы знаемъ также, что dF перпендикулярно къ плоскости, проходящей черезъ направленіе поля H' и элементъ ds , а dF' перпендикулярно къ плоскости H' и ds' . Такъ какъ $ds \cdot H'$ и $ds' \cdot H'$ находятся въ плоскости контура, то обѣ силы dF' и dF будутъ перпендикулярны къ плоскости контура проводника. Кромѣ того, эти силы dF' и dF противоположныхъ направленій, ибо токи въ

элементахъ ds и ds' проектируются на ab и $a' b'$ въ противоположныхъ направленихъ. Такимъ образомъ поле H' , дѣйствуя на элементы ds и ds' , даетъ пару силъ, плечо которой будетъ равно aa' съ точностью до бесконечно малаго втораго порядка. Итакъ пара будетъ:

$$aa' \cdot dF$$

но:

$$dF = ki H' \cdot ab$$

откуда пара будетъ:

$$ki H' \cdot ab \times aa'$$

но $ab \times aa'$ есть площадь прямоуг. четырехугольника $a a' b b'$ пусть σ эта площадь тогда элементарная пара будетъ:

$$dC = ki H' \cdot \sigma.$$

Если мы переберемъ всѣ элементы проводника два по два, то мы получимъ рядъ такихъ элементарныхъ паръ, силы которыхъ будутъ перпендикулярны плоскости контура проводника. Слѣдовательно, равнодѣйствующая пара, происходящая отъ дѣйствія слагающей H' даннаго поля будетъ:

$$C = \int_0^s ki H' \sigma = ki H' \int_0^s \sigma$$

гдѣ предѣлы 0 и s обозначаютъ, что нужно пройти всю длину проводника ABC . Но $\int_0^s \sigma$ будетъ равняться суммѣ площадей всѣхъ элементарныхъ прямоугольныхъ четырехугольниковъ, каковы $a a' b b'$, т. е. будетъ равняться площади, ограничиваемой контуромъ, И такъ дѣйствіе слагающей H' сведется къ парѣ:

$$C = k \cdot i \cdot H' \cdot \Sigma$$

гдѣ Σ площадь контура проводника.

Эта пара будетъ стремиться вращать контуръ по направленію, перпендикулярному къ его плоскости.

Посмотримъ теперь, что произведетъ вторая слагающая поля $= H \cos \alpha$, обозначимъ ее черезъ H'' . Эта слагающая H'' въ каждомъ элементѣ проводника будетъ перпендикулярна къ плоскости контура проводника, а слѣдовательно уголъ (ds, H'') будетъ для всѣхъ элементовъ прямой, поэтому сила дѣйствія H'' на элементъ ds будетъ:

$$dF = k \cdot i \cdot H'' \cdot ds.$$

Точно также сила на соотвѣтствующій элементъ ds' будетъ:

$$dF' = k \cdot i \cdot H'' \cdot ds'$$

Обѣ эти силы равны. Онѣ должны быть перпендикулярны къ плоскости, проходящей черезъ H'' и ds' , а такъ какъ H'' перпендикулярно къ плоскости контура, то эти силы будутъ находиться слѣдовательно въ этой плоскости и будутъ нормальны къ элементамъ ds и ds' . Кромѣ того, онѣ будутъ прямо противоположны, а слѣдовательно, ихъ дѣйствіе сведется къ растягиванію или къ сжиманію контура, если же этотъ послѣдній не измѣняемъ, то эти силы уничтожатся. И такъ дѣйствіе слагающей H'' сведется къ силамъ, попарно уничтожающимся вслѣдствіе неизмѣнности контура.

Резюмируя все сказанное мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Теорема. Замкнутый проводникъ съ плоскимъ контуромъ испытываетъ въ равномерномъ магнитномъ полѣ только дѣйствіе вращающей пары:

$$C = k \cdot i H \sin \alpha \cdot \sum \dots \dots \dots (75)$$

гдѣ α уголъ, образуемый плоскостью контура проводника съ направлениемъ поля и $\sum$ площадь, ограниченная этимъ контуромъ.

Эта теорема имѣетъ весьма важное значеніе въ теоріи электродвигателей постоянного и переменнаго то-

ковъ. Мы будемъ ею неоднократно пользоваться впоследствии.

86. Работа перемѣщенія проводника съ токомъ въ магнитномъ полѣ. 1) Случай элементарнаго проводника. Мы уже видѣли, что сила дѣйствія поля h на элементарный проводникъ dl съ токомъ i выражается формулою (§ 84):

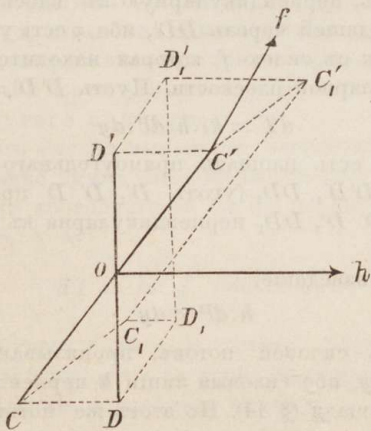
$$f = k \cdot i \cdot dl \cdot h \cdot \sin (h, dl)$$

Эта сила перпендикулярна къ плоскости, проходящей черезъ h и dl . Если элементъ dl перемѣстился въ пространствѣ на dx , то, какъ извѣстно, работа силы f будетъ равна (часть I, § 84, уравн. 142) произведенію этого перемѣщенія на проекцію силы f на направление этого перемѣщенія, т. е.

$$dT = dx \cdot f \cdot \cos \varphi$$

гдѣ φ уголъ, составляемый силою f съ перемѣщеніемъ dx . Слѣдовательно:

$$dT = ki \cdot h \cdot dl \cdot \sin (h, dl) \cdot \cos \psi \cdot dx$$



Фиг. 83.

Пусть $c c'$ элементъ проводника и oh направление поля (фиг. 83) и $c' c_1' = dx$ — перемѣщеніе проводника.

Проекція DD' элемента cc' на плоскость, перпендикулярную къ oh , будетъ:

$$cc' \times \cos c' oh = cc' \times \sin c' oh$$

но:

$$c' oh = (\widehat{h, dl}),$$

слѣдовательно:

$$DD' = dl \cdot \sin (\widehat{h, dl}),$$

Сила f перпендикулярная къ плоскости элемента cc' и поля oh , слѣдовательно, перпендикулярна къ плоскости чертежа. Если бы DD' тоже представлялъ элементъ проводника съ тѣмъ же токомъ, то онъ подвергался бы той же силѣ f . Поэтому элементъ dl мы можемъ замѣнить элементомъ DD' , равнымъ $dl \sin (\widehat{h, dl})$. Пусть $dl' = dl$ тогда мы можемъ написать предыдущее выраженіе работы въ видѣ:

$$dT = k \cdot i \cdot h \cdot dl' \cdot \cos \varphi \cdot dx$$

Но $dx \cdot \cos \varphi$ есть проекція $D'D_1$ перемѣщенія cc' на плоскость, перпендикулярную къ плоскости чертежа, проходящей черезъ DD' , ибо φ есть уголъ этого перемѣщенія съ силою f , которая находится въ этой перпендикулярной плоскости. Пусть $D'D_1 = y$, тогда:

$$dT = ki \cdot h \cdot dl' \cdot dy$$

Но $dl' \cdot dy$ есть площадь прямоугольнаго четырехугольника $D'D_1DD_1$ (уголъ $D_1D'D$ прямой, ибо плоскость $D'D_1DD_1$ перпендикулярна къ плоскости чертежа).

Тогда произведение:

$$h \cdot dl' \times dy$$

представить силовой потокъ, пронизывающій площадь $dl' \times dy$, ибо силовыя линіи h перпендикулярны къ этой площади (§ 14). Но этотъ же потокъ будетъ пронизывать и площадь $cc'c_1$, c_1 (§ 14 фиг. 7), слѣдовательно, называя этотъ элементарный потокъ $d\Phi$ получимъ:

$$dT = k \cdot i \cdot d\Phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Отсюда:

Теорема. Элементарная работа перемѣщенія элементарнаго проводника съ токомъ въ данномъ магнитномъ полѣ измѣряется произведеніемъ силы тока на силовой потокъ, перерѣзываемый за время перемѣщенія этого проводника.

Если бы поле h происходило отъ одиночнаго полюса, то магнитный потокъ, пронизывающій площадь s, s', c_1, c'_1 былъ бы пропорціоналенъ произведенію магнитной массы m полюса на тѣлесный уголъ $d\omega$, подъ которымъ видѣнъ контуръ площади s, s', c_1, c'_1 , изъ даннаго полюса (§ 15, уравн. 7). Тогда элементарная работа перемѣщенія проводника выразится формулою:

$$dT = k \cdot i \cdot m \cdot d\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Отсюда:

Теорема. Элементарная работа перемѣщенія элементарнаго проводника подъ дѣйствіемъ полюса m измѣряется произведеніемъ силы тока проводника на массу полюса и на тѣлесный уголъ, подъ которымъ видна изъ полюса площадь перемѣщенія этого проводника.

2) Случай проводника произвольной формы незамкнутого контура.

Для этого случая выраженіе элементарной работы будетъ равно суммѣ потоковъ перерѣзываемыхъ всѣми элементами проводника за время перемѣщенія этого послѣдняго, т. е.

$$dT = ki \int_0^l d\Phi = ki \cdot \Phi$$

гдѣ Φ будетъ силовой потокъ, перерѣзываемый всѣмъ проводникомъ l за время его перемѣщенія. Въ случаѣ дѣйствія одиночнаго полюса:

$$dT = kim \int_0^l d\omega = kim \cdot \omega$$

гдѣ ω уголъ, подъ которымъ будетъ видна поверх-

ность, описываемая проводникомъ при его перемѣщеніи.

Во всемъ, что сказано, мы рассматривали элементарное, т. е. бесконечно малое перемѣщеніе, но легко видѣть, что теоремы будутъ вѣрны и для конечныхъ перемѣщеній, если токъ будетъ оставаться постояннымъ за все время перемѣщенія. Такимъ образомъ, мы можемъ формулировать слѣдующія теоремы:

Теорема I. Конечная работа перемѣщенія произвольной формы проводника въ магнитномъ полѣ измѣряется произведеніемъ силы тока на магнитный потокъ, перерѣзываемый во время перемѣщенія этимъ проводникомъ, если сила потока остается все время постоянною.

Теорема II. Конечная работа перемѣщенія проводника подѣ дѣйствіемъ даннаго полюса измѣряется произведеніемъ силы тока на массу полюса и тѣлесный уголъ, подѣ которыми видна поверхность, описанная проводникомъ во время перемѣщенія, если сила тока остается постоянною.

Алгебраически обѣ эти теоремы выразятся формулами:

$$\left. \begin{aligned} T &= k i \Phi \\ T &= k i m \omega \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (78)$$

Если же токъ измѣняется во время перемѣщенія, то называя $d\Phi$ потокъ, перерѣзанный всѣмъ проводникомъ за бесконечно малое перемѣщеніе, во время котораго i можно считать постояннымъ, получимъ:

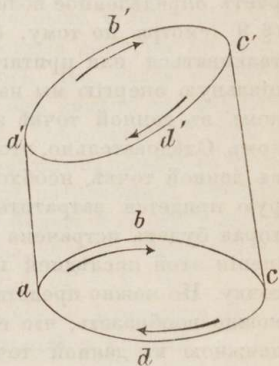
$$T = k \int_0^t i d\Phi \dots \dots \dots (79)$$

гд t время конечнаго перемѣщенія; точно также найдемъ для случая дѣйствія одиночнаго полюса:

$$T = k m \int_0^t i \cdot d\omega \dots \dots \dots (80)$$

гдѣ $d\omega$ уголь, подъ которымъ видна поверхность, описанная проводникомъ за время безконечно малаго перемѣщенія. Въ этихъ формулахъ i уже величина переменная — функція времени.

3) Случай замкнутого проводника. Пусть имѣемъ замкнутый проводникъ $a b c d$, который въ данномъ полѣ перемѣстился и принялъ положеніе $a' b' c' d'$ (фиг. 84). Можно разсматривать отдѣльно части $a b c$, $c a d$, въ которыхъ токъ проходитъ какъ бы въ противоположныхъ направленіяхъ. Работа, произведенная при перемѣщеніи части $a b c$ въ положеніе $a' b' c'$ будетъ пропорціональна произведенію силы тока на потокъ, пронизывающій поверхность $a a' b' c' c b$, а работа, произведенная частью $a d c$ при перемѣщеніи въ $a' d' c'$ будетъ пропорціональна произведенію силы тока на потокъ, пронизывающій поверхность $a d c c' d' a'$. Выраженія этихъ двухъ работъ будутъ противоположнаго знака, ибо токи будутъ противоположнаго направленія. Слѣдовательно работа перемѣщенія всего контура будетъ пропорціональна силѣ тока на разность потоковъ, пронизывающихъ названныя выше поверхности.



Фиг. 84.

Эта же разность, какъ легко видимъ изъ чертежа, будетъ равняться разности потоковъ, пронизывающихъ контуры $a b c d$ и $a' b' c' d'$.

Въ случаѣ поля отъ одиночнаго полюса работа будетъ измѣряться произведеніемъ силы тока на массу полюса и на разность тѣлесныхъ угловъ, подъ которыми видны поверхности $a b c a' b' c'$ и $a d c a' d' c'$,

т. е. разность тѣлесныхъ угловъ, подъ которыми изъ даннаго полюса видны контуры $a b c d$ и $a' b' c' d'$.

87. Магнитный потенціалъ замкнутаго проводника съ токомъ. Мы уже видѣли, что замкнутый проводникъ съ токомъ образуетъ вокругъ себя магнитное поле (§ 83), слѣдовательно единица положительной магнитной массы, перемѣстившаяся изъ безконечности въ данную точку этого поля пріобрѣтеть или потеряетъ опредѣленное количество потенціальной энергіи (§ 9) (смотря по тому, будетъ ли единица массы отталкиваться или притягиваться полемъ). Эту потенціальную энергію мы назовемъ магнитнымъ потенціаломъ въ данной точкѣ замкнутаго проводника съ токомъ. Слѣдовательно, чтобы измѣрить этотъ потенціалъ въ данной точкѣ, необходимо измѣрить работу, которую придется затратить для единицы массы или которая будетъ истрачена единицею массы при перемѣщеніи этой послѣдней изъ безконечности въ данную точку. Но можно представить себѣ картину еще иначе: можно вообразить, что единица массы остается неподвижною въ данной точкѣ, а замкнутый проводникъ былъ перемѣщенъ изъ безконечности въ данное ему положеніе, тогда, очевидно, если бы происходило отталкиваніе между единицею массы и проводникомъ, эта единица массы пріобрѣла какъ разъ ту потенціальную энергію, какую она получила бы, если бы, оставляя проводникъ неподвижнымъ, ее перенесли бы изъ безконечности въ данную точку. Если же происходило бы притяженіе, то при перемѣщеніи проводника изъ безконечности въ данное ему положеніе масса потеряла бы столько потенціальной энергіи, сколько она потеряла бы, если бы она пришла изъ безконечности въ данную точку. Итакъ, потенціалъ единицы массы въ данной точкѣ будетъ та работа, которую нужно затратить для того, чтобы привести замкнутый проводникъ изъ безконечности въ данную точку, или та работа, которую израсходуетъ замкнутый проводникъ, перемѣстившись изъ безконечности

въ данное ему положеніе. Въ первомъ случаѣ потенциалъ будетъ величина положительная, а во второмъ—отрицательная. Отсюда слѣдуетъ, что потенциалъ во второмъ случаѣ (въ случаѣ притягиванія, т. е. когда контуръ повернуть тою стороною, которая притягиваетъ единицу массы) будетъ равняться въ абсолютномъ значеніи работѣ, которую произведетъ контуръ при перемѣщеніи отъ ∞ до даннаго положенія. Но выше мы сказали, что работа перемѣщенія контура пропорціональна разности тѣлесныхъ угловъ, подъ которыми видны изъ даннаго полюса контуры въ положеніи конечномъ и начальномъ. Но, когда контуръ находится на бесконечности, онъ видѣнъ изъ даннаго полюса подъ угломъ = нулю, слѣдовательно если ω уголъ, подъ которымъ видна притягивающаяся сторона контура изъ данной точки, гдѣ расположена единица массы, произведенная работа будетъ $k i \omega$ (тутъ $m=1$), потенциалъ же обратнаго знака, ибо онъ отрицателенъ для даннаго случая, а потому: $V = - k i \omega$.

Въ случаѣ отталкиванія контура единицею массы потенциалъ будетъ положительный и равный той работѣ, которую нужно затратить, чтобы перемѣстить контуръ изъ бесконечности въ данную точку. Эта работа въ абсолютномъ значеніи будетъ равняться той работѣ, которую произведетъ контуръ перемѣстившись самъ отъ данной точки въ бесконечность. Последняя работа будетъ $k i \omega$, при чемъ въ данномъ случаѣ ω будетъ уголъ, подъ которымъ видна отталкивающая положительную массу сторона контура. Если мы условимся считать этотъ уголъ отрицательнымъ, то, такъ какъ въ данномъ случаѣ потенциалъ величина положительная, необходимо положить:

$$V = - k i \omega (81).$$

Такимъ образомъ формула $V = - k i \omega$ будетъ общая, какъ для случая отталкивающимъ силъ, такъ и для случая притягивающихъ силъ, если подъ ω мы будемъ подразумевать уголъ, подъ которымъ видна притягивающая

положительную массу сторона контура, подобно тому, какъ формула

$$V = \sum \frac{m}{r}$$

будетъ общеою, если условиться относительно знака массъ притягивающихъ и отталкивающихъ положительную массу.

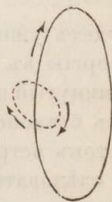
88. Замкнутый контуръ съ токомъ и магнитный слой. Сравнивая выраженіе потенціала замкнутого контура $V = -k i \omega$ (ур. 81) и выраженіе потенціала магнитнаго слоя (§ 59 ур. 65) $V = -k P \cdot \omega$, видимъ полную аналогію между этими двумя выраженіями. Слѣдовательно, если мы подберемъ соотвѣственно единицы, чтобы коэффиціенты k въ обоихъ случаяхъ были равны, то можно сказать, что потенціалъ и магнитныя дѣйствія тока замкнутого проводника будутъ одинаковы съ таковыми же магнитнаго слоя, напряженіе котораго P будетъ выражаться тѣмъ же числомъ, какъ и сила тока i замкнутого проводника и контуръ котораго будетъ тотъ же, какъ и контуръ замкнутого проводника. Для полной аналогіи необходимо въ этой послѣдней, какъ и въ магнитномъ слое различать двѣ стороны, положительную, т. е. ту, которая отталкиваетъ сѣверный полюсъ и отрицательную, которая притягиваетъ этотъ полюсъ. Согласно Амперу, а также изъ разсмотрѣнія поля замкнутого проводника (§ 83) отрицательною стороною будетъ та, смотря на которую, мы увидимъ токъ направленнымъ по часовой стрѣлкѣ. Сторона же, смотря на которую, намъ покажется токъ направленнымъ обратно часовой стрѣлкѣ будетъ положительною.

Однако, есть разница между потенціаломъ замкнутого тока и слоемъ. Предположимъ, что единица положительной магнитной массы расположена противъ положительной стороны слоя, она будетъ отталкиваться и, наконецъ, прійдетъ къ отрицательной сторонѣ, гдѣ она будетъ въ устойчивомъ равновѣсіи, работа, кото-

рую совершить единица массы при этомъ перемѣщеніи будетъ (§ 68):

$$4 \pi k P$$

Въ случаѣ же замкнутого проводника съ токомъ, единица положительной массы пойдётъ также по линіи силъ, но не остановится у отрицательной массы, а будетъ продолжать вращаться до тѣхъ поръ, пока по проводнику будетъ проходить токъ (фиг. 85). Слѣдовательно, если число полныхъ вращеній, которыя совершила единица массы n , а за каждый оборотъ совершается работа, аналогично слою, $4 \pi i$, то потенциаль токъ можетъ разниться отъ потенциала слоя на $4 \pi n i$. Такимъ образомъ общее выраженіе потенциала замкнутого проводника должно быть:



Фиг. 85.

$$V = - k i (\omega \pm 4 \pi n) (82)$$

89. Энергія тока въ магнитномъ полѣ. Потенціальная энергія замкнутого проводника съ токомъ въ данномъ полѣ будетъ та работа, которую придется затратить, чтобы перенести этотъ проводникъ изъ бесконечности въ данное поле, если проводникъ отталкиваетъ поле, т. е. если силовыя линіи поля встрѣчаютъ положительную сторону контура проводника. Разсуждая, какъ это мы сдѣлали для опредѣленія потенциала, т. е. примѣняя выраженіе работы перемѣщенія замкнутого проводника въ данномъ магнитномъ полѣ (§ 86 3-й случай), легко найти, что эта работа будетъ въ абсолютномъ значеніи:

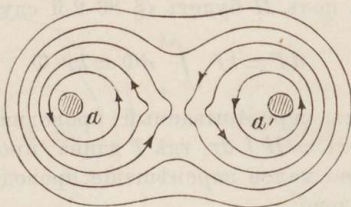
$$i \Phi$$

гдѣ Φ силовой потокъ, пронизывающій площадь контура. Примемъ потокъ Φ за положительный, когда онъ будетъ встрѣчать отрицательную сторону контура, тогда выраженіе $i\Phi$ будетъ въ разсматриваемомъ случаѣ отрицательною величиною, ибо потокъ встрѣчаетъ положительную сторону. Но потенциальная энергія въ

беремъ два случая, наиболѣе встрѣчающіеся въ примѣненіяхъ.

1) Два параллельныхъ проводника съ токами одинаковаго направленія.

Вообразимъ два проводника, перпендикулярные къ плоскости чертежа, на которомъ они обозначатся своими слѣдами a и a' (фиг. 86). Пусть направленіе



Фиг. 86.

токовъ въ проводникахъ будетъ изъ за плоскости чертежа къ читателю. Тогда по правилу пробочника силовыя линіи направятся, какъ это показано стрѣлками (§ 77). Эти линіи, между a и a' будутъ разнаго направленія, а потому будутъ притягиваться и въ концѣ концовъ сольются въ общія замкнутыя кривыя, какъ это показано на чертежѣ.

Затѣмъ эти кривыя, стремясь сократиться, произведутъ сближеніе проводниковъ. Итакъ:

Два параллельныхъ проводника съ одинаковаго направленія токами притягиваются.

Вычислимъ теперь эту силу притяженія въ томъ случаѣ, когда длина одного проводника бесконечно большая.

На основаніи закона Біо и Савара (§ 81), напряженіе магнитнаго поля прямолинейнаго бесконечно длиннаго проводника съ токомъ въ любой точкѣ пространства равно:

$$\frac{k i}{r}$$

гдѣ r разстояніе этой точки до проводника. Пусть R

разстояніе между двумя размариваемыми проводниками a и a' . Пусть по проводнику a течетъ токъ i , а по a' токъ i' . Въ любой точкѣ проводника a' напряженіе магнитнаго поля отъ тока i будетъ:

$$H = \frac{k i}{R}$$

Элементарная работа перемѣщенія проводника a' съ токомъ i' въ полѣ H будетъ (§ 86 2-й случай).

$$dT = ki' \int_0^l d\Phi = ki' \Phi$$

гдѣ Φ потокъ, перерѣзываемый проводникомъ. Этотъ потокъ будетъ $= H l \cdot dr$, гдѣ l длина проводника a' , dr безконечно малое перемѣщеніе проводника.

Слѣдовательно:

$$dT = ki' H \cdot l \cdot dr$$

Съ другой стороны, если сила, дѣйствующая на проводникъ a' , будетъ F , то эта работа будетъ при безконечно маломъ перемѣщеніи dr :

$$F \cdot dr$$

ибо перемѣщеніе будетъ происходить по направленію силы. Поэтому:

$$F \cdot dr = ki' H l \cdot dr$$

откуда:

$$F = ki' H \cdot l$$

но:

$$H = \frac{k \cdot i}{R}$$

слѣдовательно:

$$F = \frac{k^2 \cdot i i' \cdot l}{R}$$

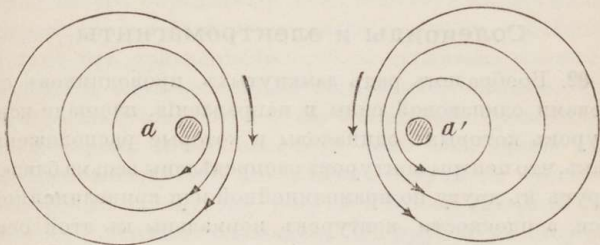
или полагая $k^2 = k'$

$$f = k' \cdot l \cdot \frac{i i'}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

2) Два параллельныхъ проводника съ токами противоположныхъ направленій.

Если опять рассмотретьъ силовыя линіи, то легко

видѣть, что такіе проводники будутъ отталкиваться. Вслѣдствіе того, что обращенныя во внутрь части силовыхъ линій будутъ отталкиваться, ибо онѣ одинаковаго направленія, эти силовыя линіи расположатся въ видѣ кружковъ, сплюснутыхъ съ внутренней стороны, какъ это показано на фиг. 87. Такъ какъ силовыя линіи стремятся замкнуться по кратчайшей линіи,



Фиг. 87.

которая будетъ окружность, то проводники будутъ удаляться другъ отъ друга до тѣхъ поръ, пока сплюснутыя круги не станутъ правильными окружностями.

Отсюда слѣдуетъ, что:

Два параллельныхъ проводника съ токами противоположнаго направленія взаимно отталкиваются.

Сила отталкиванія вычислится также, какъ и для перваго случая и будетъ тоже

$$f = kl \cdot \frac{ii'}{R}.$$

3) Случай непараллельныхъ проводниковъ. Точно также мы могли бы найти, что два проводника, образующіе между собою уголъ, притягиваются, когда оба направлены къ вершинѣ угла или оба расходятся отъ вершины, и отталкиваются, когда одинъ направленъ къ вершинѣ, а другой уходитъ отъ нея.

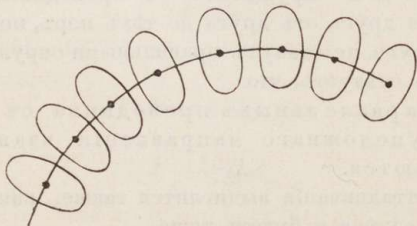
91. Взаимодѣйствіе замкнутыхъ проводниковъ. Тутъ

также будетъ либо притяженіе, либо отталкиваніе. Опредѣленіе этихъ притяженій и отталкиваній сводится къ такого же рода взаимодѣйствіямъ между магнитными слоями, замѣняющими эти замкнутые проводники (§ 88).

ГЛАВА XIV.

Соленоиды и электромагниты.

92. Вообразимъ рядъ замкнутыхъ проводниковъ съ токами одинаковой силы и направленія, площади контуровъ которыхъ одинаковы и которые расположены такъ, что центры контуровъ распредѣлены весьма близко другъ къ другу по прямолинейной или криволинейной оси, а плоскости контуровъ нормальны къ этой оси. Рядъ такихъ замкнутыхъ проводниковъ именуется соленоидомъ (фиг. 88). Длина этой оси между конечными



Фиг. 88.

контурами называется длиною соленоида. Нѣкоторыми авторами этимъ названіемъ принято обозначать рядъ такихъ замкнутыхъ проводниковъ, поперечное сѣченіе проволоки которыхъ имѣетъ конечные размѣры (конечная толщина или конечный діаметръ проводника) и сила тока въ которыхъ есть конечная величина. Каждый такой контуръ уподобляютъ магнитному слою, напряженіе котораго равно силѣ тока i , протекающаго черезъ проводникъ. Если мы назовемъ

σ магнитную плотность на поверхности одной изъ сторонъ такого слоя, то тогда напряженіе слоя будетъ:

$$\varepsilon' \cdot \sigma$$

гдѣ ε' толщина слоя. Слѣдовательно:

$$i = \varepsilon' \cdot \sigma$$

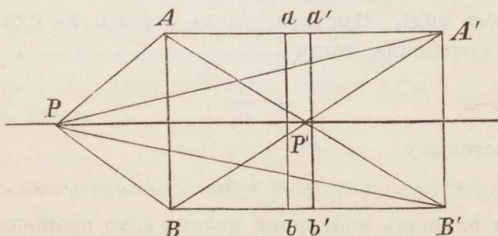
сила тока въ каждомъ контурѣ предполагается величиною конечною, между тѣмъ толщина ε' магнитнаго слоя по его опредѣленію есть величина весьма малая, строго говоря бесконечно малая величина, а слѣдовательно изъ уравненія ($i' = \varepsilon' \cdot \sigma$) магнитная плотность σ должна быть величиною бесконечно большою. Изъ этого слѣдуетъ во-1-хъ, что замкнутый проводникъ, по которому течетъ конечной силы токъ нельзя уподоблять магнитному слою, иначе получится, что эквивалентный замкнутому току слой будетъ обладать бесконечно большою площадью. Съ другой же стороны конечной силы токъ можетъ течь лишь по проводнику конечной толщины, ибо бесконечно тонкій проводникъ обладалъ бы бесконечно большимъ сопротивленіемъ и тогда въ такомъ проводникѣ выдѣлилось бы бесконечно большое количество тепла (ибо по закону Джауля это количество тепла $= i^2 \cdot R$). На основаніи этого нельзя, слѣдовательно допустить, что толщину магнитнаго слоя, замѣняющаго конечной силы токъ можно взять равною толщинѣ проводника, что обыкновенно и дѣлаютъ при выводѣ свойствъ соленоидовъ; тогда, очевидно, завѣдомо предполагаютъ, что толщина такого слоя есть конечная величина, что не согласуется съ опредѣленіемъ магнитнаго слоя. Магнитный слой, т. е. слой бесконечно малой толщины съ конечною магнитною плотностью, распределенною равномерно по его сторонамъ можетъ замѣнить собою лишь бесконечно малой силы замкнутый токъ. Замкнутый же проводникъ съ конечною силою тока слѣдуетъ разсматривать, какъ рядъ бесконечно тонкихъ замкнутыхъ проводниковъ съ бесконечно малой силы токами и, если мы условимся называть математическимъ соленоидомъ именно рядъ такихъ

слѣдовательно, магнитный моментъ прямолинейнаго соленоида будетъ:

$$M = i n s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

Такъ какъ соленоидъ эквивалентенъ ряду магнитныхъ слоевъ съ одинаковою магнитною плотностью, а слѣдовательно и съ одинаковою интенсивностью намагничиванія, то соленоидъ, казалось бы, можно разсматривать, какъ равномерный магнитъ, т. е. съ постоянною интенсивностью намагничиванія во всѣхъ его сѣченіяхъ.

93. Магнитное поле разомкнутаго соленоида. Опредѣленіе напряженія магнитнаго поля соленоида сведется къ опредѣленію магнитнаго поля магнита, магнитныя массы полюсовъ котораго распределены равномерно по крайнимъ его сѣченіямъ. Опредѣлимъ напряжение поля въ одной изъ точекъ на оси прямолинейнаго съ круглымъ сѣченіемъ соленоида. Пусть $AB A' B'$ профили крайнихъ колецъ соленоида (фиг. 89)



Фиг. 89.

Соленоидъ можно замѣнить магнитомъ, магнитныя массы полюсовъ котораго будутъ равномерно распределены на сѣченіяхъ AB и $A' B'$. Пусть i сила тока, проходящая черезъ обороты соленоида, n_1 число колецъ, приходящееся на единицу длины, тогда магнитная плотность сторонъ AB и $A' B'$ (§ 89) будетъ:

$$\sigma = i n_1$$

Опредѣлимъ напряженіе поля въ точкѣ P съ наружной стороны соленоида:

Оно сведется къ дѣйствию на единицу массы въ P двухъ дисковъ AB и $A'B'$, на одномъ изъ которыхъ AB на примѣръ распределена положительная масса, а на другомъ отрицательная масса съ плотностью σ .

Дѣйствіе диска AB будетъ (§ 21):

$$H' = k \sigma \omega$$

Дѣйствіе диска $A'B'$ будетъ противоположнаго знака а именно:

$$H'' = - k \sigma \omega'$$

гдѣ ω' тѣлесный уголъ, подъ которымъ виденъ изъ P контуръ диска $A'B'$.

Слѣдовательно, напряженіе поля отъ обоихъ дисковъ будетъ:

$$H = H + H' = k \sigma (\omega - \omega') (89)$$

Возьмемъ теперь точку P' внутри соленоида или что тоже внутри магнита AB $A'B'$. Продѣлаемъ безконечно тонкую щель ab , $a'b'$. Напряженіе поля въ P' будетъ равнодѣйствующею силъ отъ магнитовъ $ABab$ и $A'B'a'b'$, или иначе отъ дисковъ AB , ab и дисковъ $a'b'$, $A'B'$.

Дѣйствіе диска ab въ точкѣ, расположенной безконечно близко къ его поверхности будетъ (§ 21, ур. 24)

$$+ 2 \pi k \sigma$$

дѣйствіе диска AB будетъ:

$$- k \sigma \omega_1$$

гдѣ ω_1 тѣлесный уголъ, подъ которымъ видѣнъ контуръ диска AB . Слѣдовательно, дѣйствіе отрѣзка соленоида $ABab$ на единицу массы въ P' будетъ:

$$H' = k \cdot \sigma (2\pi - \omega_1)$$

Точно также дѣйствіе отрѣзка $a'b'A'B'$ будетъ:

$$H'' = k \cdot \sigma (2\pi - \omega_2)$$

гдѣ ω_2 тѣлесный уголъ, подъ которымъ видѣнъ контуръ диска $A'B'$.

Общее дѣйствіе отрѣзковъ $ABab$ и $A'B'a'b'$ будетъ равно ариѳметической суммѣ силъ H и H' , слѣдовательно напряженіе поля въ P' будетъ:

$$H = 4\pi k \sigma - (\omega_1 + \omega_2)$$

или, замѣняя σ ей равною величиною $n_1 i$ получимъ:

$$H = 4\pi k n_1 i - (\omega_1 + \omega_2) \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

Если точка P' въ срединѣ соленоида и если діаметръ поперечнаго сѣченія соленоида весьма малъ по отношенію къ его длинѣ l , то ω_1 и ω_2 будутъ весьма малы и ими можно пренебречь. Тогда

$$H = 4\pi k . n_1 i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

Если соленоидъ безконечно длиненъ, то можно сказать, что во всѣхъ его точкахъ внутри поле будетъ равномерное и $= 4\pi k n_1 i$.

На практикѣ большею частью пользуются длинными соленоидами и принимаютъ что въ средней его части поле равномерно и равно $4\pi n_1 i$.

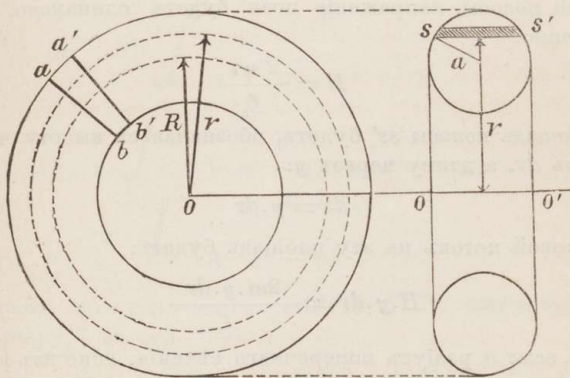
94. Магнитное поле внутри замкнутого соленоида. Такой соленоидъ, какъ и замкнутый магнитъ (§ 78) не производитъ никакого внѣшняго дѣйствія, но внутри этого соленоида образуется поле, напряженіе котораго можно высчитать въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

Пусть данъ соленоидъ въ видѣ круглаго кольца, круговая ось котораго имѣетъ радіусъ R (фиг. 90). Пусть a радіусъ поперечнаго сѣченія этого соленоида. Ясно, что во всѣхъ точкахъ внутри соленоида, лежащихъ на окружности, описанной какимъ нибудь радіусомъ r , поле будетъ одно и то же, ибо если мы продѣлаемъ въ любомъ мѣстѣ щель нормальную къ оси соленоида, то поле будетъ равнодѣйствующею сторонѣ спиралей соленоида, ограничивающихъ эту щель, вліянія же полюсовъ здѣсь не будетъ, ибо полюсовъ нѣтъ. Пусть H напряженіе поля въ точкахъ на окружности радіуса r , работа, которая получится,

когда единица массы опишетъ окружность радіуса r будетъ:

$$2\pi r \cdot H$$

ибо H будетъ касательна все время къ окружности (см. часть I § 84).



Фиг. 90.

Съ другой стороны мы уже знаемъ, что работа, производимая при перемѣщеніи единицы массы съ одной стороны контура, замкнутого тока на другую равна $4\pi i$ (§ 88), а такъ какъ единица массы описавъ всю окружность радіуса r , пронизетъ n контуровъ, то въ результатъ получится работа $4\pi n i$ (множитель k мы здѣсь беремъ равнымъ единицѣ). Такимъ образомъ, мы получимъ, сравнивая оба выраженія одной и той же работы:

$$2\pi r H = 4\pi n i$$

откуда:

$$H = \frac{2 n i}{r}$$

Итакъ напряженіе поля на разстояніи r отъ оси O соленоида будетъ:

$$\frac{2 n i}{r}$$

Вычислимъ теперь среднюю величину напряженія поля въ каждомъ поперечномъ сѣченіи соленоида. Возьмемъ въ любомъ поперечномъ сѣченіи соленоида бесконечно тонкую полосу ss' , всѣ элементы этой полосы будутъ находиться на разстояніи r , на примѣръ, отъ оси oo , а слѣдовательно, для всѣхъ элементовъ этой полосы, напряженіе поля будетъ одинаково, а именно:

$$H = \frac{2ni}{r}$$

Площадь полосы ss' будетъ, обозначая ея высоту черезъ dr , а длину черезъ y :

$$ds = y \cdot dr$$

силовой потокъ на эту площадь будетъ:

$$H \cdot y \cdot dr = \frac{2ni \cdot y \cdot dr}{r}$$

Но, если a радіусъ поперечнаго сѣченія, ясно изъ фигуры, что:

$$y = \sqrt{a^2 - (R - r)^2}$$

слѣдовательно, замѣняя y его выраженіемъ, получимъ для потока на полосу ss' :

$$d\Phi = \frac{2ni \sqrt{a^2 - (R - r)^2}}{r} \cdot dr$$

Потокъ на всю площадь сѣченія будетъ:

$$\Phi = 2ni \int_{r=R-a}^{r=R+a} \frac{\sqrt{a^2 - (R - r)^2}}{r} \cdot dr$$

Найдемъ интеграль:

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - (R - r)^2}}{r} \cdot dr$$

его можно написать въ видѣ:

$$\int \frac{a^2 - (R - r)^2}{r \sqrt{a^2 - (R - r)^2}} \cdot dr$$

Этотъ интеграль разлагается на три:

$$\begin{aligned} & (a^2 - R^2) \int \frac{dr}{r \sqrt{a^2 - (R - r)^2}} + \\ & + \int \frac{(R - r) dr}{r \sqrt{a^2 - (R - r)^2}} + \\ & + \int \frac{R dr}{\sqrt{a^2 - (R - r)^2}} \end{aligned}$$

Первый интеграль даетъ (часть I, § 72, аналогично примѣру 7 на стр. 129):

$$\sqrt{R^2 - a^2} \left\{ \arccos \frac{(R+a)(R-a)}{ar} - \frac{R}{a} \right\}$$

если мы возьмемъ предѣлы $R + a$ и $R - a$, то получимъ для этого выраженія:

$$- \pi \sqrt{R^2 - a^2}$$

второй интеграль дастъ:

$$\sqrt{a^2 - (R - r)^2}$$

и, если взять предѣлы $R - a$ и $R + a$, то получится 0.

Третій интеграль дастъ:

$$R \left(\arccos \frac{R - r}{a} \right)$$

для предѣловъ $R - a$ и $R + a$ получимъ:

$$\pi R$$

слѣдовательно:

$$\int_{R-a}^{R+a} \frac{\sqrt{a^2 - (R-r)^2}}{r} dr =$$

$$= \pi R - \pi \sqrt{R^2 - a^2} = \pi (R - \sqrt{R^2 - a^2})$$

а общій потокъ на площадь поперечнаго сѣченія соленоида будетъ:

$$\Phi = 2\pi n i (R - \sqrt{R^2 - a^2})$$

Среднее же напряженіе поля въ этомъ сѣченіи будетъ, если S площадь этого послѣдняго:

$$H_m = \frac{\Phi}{S} = \frac{2\pi n i}{S} (R - \sqrt{R^2 - a^2})$$

Но:

$$S = \pi a^2,$$

слѣдовательно:

$$H_m = \frac{2 n i}{a^2} \left(R - \sqrt{R^2 - a^2} \right)$$

или:

$$H_m = 2 n i \frac{R - \sqrt{R^2 - a^2}}{a^2} \dots \dots (92)$$

Если a очень мало по отношенію къ R , то H_m въ предѣлѣ, $\left(\text{когда } \frac{a}{R} = 0 \right)$ будетъ $2ni$, ибо множитель

$$\frac{R - \sqrt{R^2 - a^2}}{a^2}$$

или:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}}{\frac{a^2}{R^2}}$$

будетъ въ предѣлѣ, когда $\frac{a}{R} = 0$, равенъ единицѣ. Чтобы провѣрить это, стоитъ только отыскать предѣлъ предыдущаго выраженія, которое при $\frac{a}{R} = 0$ принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$ (см. часть I, § 38).

Выраженіе поля $2\pi i$ можно представить въ видѣ:

$$4\pi n_1 i,$$

если взять $n = 2\pi n_1$, т. е. получится выраженіе аналогичное выраженію поля прямолинейнаго соленоида.

95. Электромагниты. Если мы возьмемъ кусокъ желѣза и помѣстимъ его внутри соленоида, то вслѣдствіе намагничивающаго дѣйствія поля соленоида, этотъ кусокъ желѣза станетъ магнитомъ (§ 72). Соленоидъ можно практически осуществить, намотавъ на желѣзный стержень рядъ послѣдовательныхъ спиралей изолированной проволоки. Желѣзный стержень вмѣстѣ съ намотанной спиралью на него проволокою получаетъ названіе электромагнита, на томъ основаніи, что при пропусканіи черезъ проволочную обмотку тока этотъ желѣзный стержень становится магнитомъ и сохраняетъ свойства магнита все время, пока черезъ обмотку проходитъ токъ.

Пусть n_1 число спиралей на единицу длины, i сила тока въ обмоткѣ.

Намагничивающее поле обмотки, если пренебречь дѣйствіемъ полюсовъ (§ 90), будетъ:

$$H = 4\pi n_1 i$$

Магнитная индукція въ желѣзномъ стержнѣ будетъ (§ 72).

$$B = \mu H = (1 + 4\pi\kappa) H$$

Пусть S поперечное сѣченіе обмотки, S' такое же сѣченіе желѣзнаго стержня. Потокъ, пронизывающій сѣченіе S обмотки будетъ:

$$\Phi = S' B + (S - S') H = S' (1 + 4\pi\kappa) H + (S - S') H = H (S + 4\pi\kappa S') = 4\pi n_1 i (S + 4\pi\kappa S'). \quad (93)$$

Потокъ черезъ различныя поперечныя сѣченія электромагнита не будетъ однимъ и тѣмъ же. Вслѣдствіе ослабляющаго дѣйствія полюсовъ этотъ потокъ будетъ уменьшаться по мѣрѣ приближенія къ концамъ, вотъ отчего силовыя линіи будутъ выходить частью изъ боковыхъ граней электромагнита, т. е. также, какъ и въ магнитахъ. Поэтому аналогично этимъ послѣднимъ интенсивность намагничиванія не будетъ одинакова во всѣхъ сѣченіяхъ (сравни § 69). Не смотря на это, на практикѣ принимаютъ, что потокъ одинаковъ черезъ всѣ сѣченія, за исключеніемъ очень короткихъ электромагнитовъ.

96. Притягательная сила электромагнитовъ. Для того, чтобы вычислить эту силу, продѣлавмъ въ электромагнитѣ поперечную бесконечно тонкую щель, какъ это мы сдѣлали для постоянного магнита (§) Если въ плоскости этой щели интенсивность намагничиванія J , то сила притяженія двухъ стѣнокъ щели будетъ (§ 76):

$$2\pi J^2 S,$$

гдѣ S' площадь поперечнаго сѣченія щели. Такою силою, слѣдовательно, будетъ притягиваться одна стѣнка щели другою. Но кромѣ того эта же стѣнка будетъ притягиваться намагничивающимъ полемъ H обмотки и эта сила притяженія будетъ:

$$H \cdot \sigma \cdot S$$

гдѣ σ магнитная плоскость притягиваемой стѣнки. Но $\sigma = J$, слѣдовательно сила притяженія поля будетъ:

$$HJ S$$

Слѣдовательно, общая сила, которая будетъ стремиться притянуть одинъ отрѣзокъ электромагнита къ другому будетъ:

$$(HJ + 2\pi J^2) S$$

Однако, къ этому выраженію нужно прибавить еще добавочный членъ. Дѣйствительно, такъ какъ мы про-

дѣлили щель черезъ весь электромагнитъ, т. е. раздѣлили на двѣ части не только желѣзный стержень, но и еще самую обмотку, то кромѣ притяженія стержней между собою, будутъ притягиваться также раздѣленные обмотки. Эта сила притяженія такого будетъ вида:

$$2\pi J'^2 \cdot S = 2\pi \sigma^2 \cdot S$$

гдѣ σ магнитная плотность у сторонъ раздѣла соленоида; но мы знаемъ уже (§ 92 уравн. 86) что:

$$\sigma = i n_1$$

а потому сила притяженія между обѣими частями соленоида будетъ:

$$2\pi n_1^2 \cdot i^2 \cdot S$$

но

$$4\pi n_1 i = H$$

слѣдовательно:

$$2\pi n_1^2 i^2 S = \frac{H^2}{8\pi} S$$

а потому полная сила притяженія электромагнита будетъ:

$$(H J + 2\pi J^2) S + \frac{H^2}{8\pi} S$$

но

$$J = \kappa H,$$

замѣняя, получимъ:

$$\left(\kappa H^2 + 2\pi \kappa^2 H^2 + \frac{H^2}{8\pi} \right) S$$

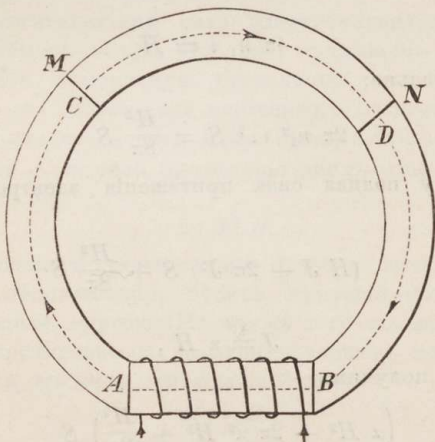
или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi} \left(16 \pi^2 \kappa^2 H^2 + 8 \pi \kappa H^2 + H^2 \right) S = \\ & = \frac{S}{8\pi} \left(4 \pi \kappa H + H \right)^2 = \frac{S}{8\pi} H^2 \left(1 + 4 \pi \kappa \right)^2 = \\ & = \frac{S}{8} \left(H \mu \right)^2 = \frac{S}{8\pi} B^2 = \frac{B^2 S}{8\pi} \quad . \quad (94) \end{aligned}$$

ГЛАВА XV.

Магнитная цѣпь.

97. Магнетодвижущая сила и магнитное сопротивление. Представимъ себѣ электромагнитъ $A B$, концы котораго A и B замкнуты (фиг. 91) проникаемою для силовыхъ линій средою $A C D B$ (жельзомъ, напримѣръ). Весь магнитный потокъ электромагнита сконцентрируется ббльшею частью въ только что упомянутой жельзной массѣ, которая подобно металлическому проводнику по отношенію къ току явится магнитною цѣпью для проходящаго черезъ нее магнитнаго потока.



Фиг. 91.

Магнитная цѣпь подчиняется законамъ, аналогичнымъ закону Ома и его производнымъ.

Разсмотримъ два сѣченія M и N въ цѣпи $A C D B$ и на этихъ сѣченіяхъ выберемъ двѣ точки C и D , соотвѣтствующіе одной и той же силовой линіи магнитнаго потока. Эти двѣ точки, будучи въ магнитномъ полѣ электромагнита, находятся при нѣкоторыхъ по-

тенціалахъ V_C и V_D . Если H напряженіе поля электромагнита въ какой-нибудь точкѣ потенціала V , то (§ 9):

$$H = - \frac{dV}{dx}$$

Если магнитный потокъ Φ и проницаемость желѣза μ , то:

$$\Phi = \mu \cdot H \cdot S$$

гдѣ S поперечное сѣченіе цѣпи (мы предполагаемъ, что это сѣченіе вездѣ одинаково). Слѣдовательно:

$$H = \frac{\Phi}{\mu \cdot S}$$

и

$$- \frac{dV}{dx} = \frac{\Phi}{\mu \cdot S}$$

откуда

$$dV = - \frac{\Phi}{\mu \cdot S} \cdot dx$$

Пусть l длина силовой линіи между сѣченіями C и D , тогда получимъ:

$$\int_c^D V = - \frac{\Phi}{\mu \cdot S} \int_0^l dx$$

или

$$V_D = V_C = - \frac{\Phi}{\mu \cdot S} \cdot l = - \Phi \cdot \frac{l}{\mu \cdot S}$$

или еще

$$V_C - V_D = - \Phi \cdot \frac{l}{\mu \cdot S} \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Это выраженіе совершенно аналогично зависимости разности потенціала въ двухъ точкахъ C и D проводника, по которому проходитъ токъ; дѣйствительно, мы въ этомъ случаѣ имѣемъ (§ 47):

$$V_C - V_D = I \cdot R$$

сравнивая это выраженіе съ уравн. (95), мы видимъ,
Войнаровский. Руков. по электротехн.

что роль тока играет здѣсь потокъ Φ , а сопротивленія выраженіе

$$\frac{l}{\mu \cdot s}.$$

Такимъ образомъ мы назовемъ сопротивленіемъ магнитной цѣпи или ея части величину пропорціональную длинѣ и обратно пропорціональную поперечному сѣченію и магнитной проницаемости этой цѣпи или ея части. Выраженіе (95) показываетъ также, что, если единица массы перемѣщается въ магнитной цѣпи отъ точки C къ D (по направленію силовыхъ линій), то потенціалъ этой точки уменьшается на величину

$$\Phi \cdot \frac{l}{\mu \cdot s},$$

гдѣ l путь, пройденный единицею массы.

Предположимъ теперь, что единица массы перемѣщается отъ положительнаго полюса A электромагнита и возвращается къ этому же полюсу по другую его сторону. Если L путь, пройденный этою массою, т. е. длина всей магнитной цѣпи, то, на основаніи предыдущаго потенціалъ единицы массы уменьшится на величину:

$$\Phi \frac{L}{\mu \cdot s}$$

а вѣдь уменьшеніе потенціала соотвѣтствуетъ работѣ, произведенной силами поля при перемѣщеніи единицы массы. Но эта работа съ другой стороны равна $4 \pi n i$, если n число оборотовъ проволоки на электромагнитѣ и i сила тока, проходящаго черезъ эти обороты, ибо единица массы при своемъ перемѣщеніи пронизаетъ n замкнутыхъ контуровъ тока, и такъ:

$$4 \pi n i = \Phi \frac{L}{\mu \cdot s}$$

величина $4 \pi n i$ получаетъ названіе магнетодвижущей силы по аналогіи съ электродвижущею силою.

Если же магнитная цѣпь состояла изъ частей съ различными поперечными сѣченіями и различною проницаемостью, то легко понять, что тогда бы мы получили уравненіе:

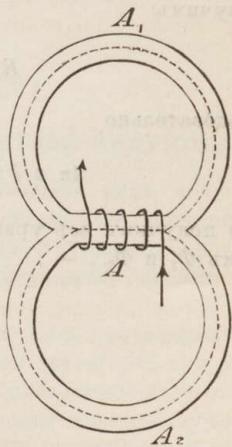
$$4 \pi n i = \Phi \frac{l}{\mu s} + \Phi \cdot \frac{l'}{\mu' s'} + \Phi \cdot \frac{l''}{\mu'' s''} + \dots$$

или

$$4 \pi n i = \Phi \sum \frac{l}{\mu s} \dots \dots \dots (96)$$

98. Развѣтвленіе магнитнаго потока. Для развѣтвленій магнитнаго потока имѣетъ мѣсто теорема, аналогичная теоремѣ Киркгоффа, относящейся къ развѣтвленію тока (§ 53). Такъ, возьмемъ двѣ замкнутыхъ магнитныхъ цѣпи A_1 и A_2 (фиг. 92) отвѣтвленныхъ отъ одной общей части A , на которую намотано n спиралей проволоки. Если черезъ эту проволоку мы пропустимъ токъ силою i , то изъ A выйдетъ нѣкоторый потокъ Φ , который развѣтвится на двѣ части Φ_1 и Φ_2 такимъ образомъ, что:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \dots \dots \dots (97)$$



Фиг. 92.

т. е. согласно первой части теоремы Кирхгоффа. Примѣняя вторую теорему Кирхгоффа, сначала къ замкнутому контуру $A A_1$, а затѣмъ къ замкнутому контуру $A A_2$, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} 4 \pi n i &= \Phi \cdot \frac{l}{\mu s} + \Phi_1 \frac{l_1}{\mu_1 s_1} \\ 4 \pi n i &= \Phi \cdot \frac{l}{\mu s} + \Phi_2 \frac{l_2}{\mu_2 s_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (98)$$

гдѣ l , μ , s длина, проницаемость и поперечное сѣченіе

части A , а $l_1, l_2, \mu_1, \mu_2, s_1, s_2$ тѣ же величины для частей A_1 и A_2 . Вычитая уравненія (98) одно изъ другого, получимъ:

$$\Phi_1 \frac{l_1}{\mu_1 s_1} = \Phi_2 \frac{l_2}{\mu_2 s_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

т. е. развѣтвленные потоки обратно пропорціональны ихъ магнитнымъ сопротивленіямъ. Если мы обозначимъ магнитныя сопротивленія частей A_1 и A_2 черезъ R_1 и R_2 , а общее сопротивленіе для полного потока Φ черезъ R , то аналогично развѣтвленнымъ токамъ получимъ:

$$R = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

слѣдовательно

$$4\pi n i = \Phi \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

что получимъ изъ уравненій (97) и (98), если исключимъ Φ_1 и Φ_2 . — .

ОТДѢЛЪ V.

Электромагнитная индукція.

ГЛАВА XVI.

Явленія электромагнитной индукціи.

99. Фарадей въ 1831 году открылъ рядъ явленій, называемыхъ явленіями электромагнитной индукціи и заключающихся въ томъ, что въ замкнутомъ проводникѣ появляется токъ при слѣдующихъ обстоятельствахъ.

1) Если мы имѣемъ два замкнутыхъ проводника a и b , расположенныхъ одинъ вблизи другаго, то при пропусканіи тока въ a , напр., въ b , появляется (на мгновеніе) токъ противоположнаго направленія первому току.

Если въ проводникѣ a токъ исчезаетъ, то въ проводникѣ b опять появится (на мгновеніе) токъ такого же направленія, какъ исчезающій токъ.

Если проводникъ a , по которому циркулируетъ постоянный токъ (постоянной силы и не мѣняющагося направленія) удаляется отъ b , то въ b появится токъ того же направленія; наоборотъ, если a приближается къ b , то въ b появляется токъ обратнаго направленія.

Если въ проводникѣ a токъ измѣняется, то, при уменьшеніи этого тока, въ b получается токъ того же направленія, а при увеличеніи тока въ a , въ b получается токъ обратнаго направленія.

2) Аналогичныя явленія получаются, если провод

никъ *a* съ токомъ замѣнить магнитомъ и удалять или приближать этотъ магнитъ отъ проводника *b* или же измѣнять интенсивность намагничиваванія магнита.

100. Законъ Ленца. Ленцъ формулировалъ законъ, которымъ опредѣляются всѣ явленія индукціи, происходящія при относительномъ перемѣщеніи замкнутого проводника и магнитнаго поля, производимаго токомъ или магнитомъ. Этотъ законъ можно выразить слѣдующимъ образомъ: При всякомъ относительномъ перемѣщеніи магнитнаго поля и замкнутого проводника, въ этомъ послѣднемъ появляется токъ, вызывающій соотвѣтствующее сопротивление этому перемѣщенію.

Токъ, появляющійся въ проводникѣ *b*, называется индуктируемымъ или вторичнымъ токомъ, токъ же, вызывающій индуктируемый токъ, называется индуктирующимъ или первичнымъ токомъ.

101. Если разобрать всѣ предъидущія явленія и обстоятельства образованія индуктируемаго тока, то не трудно придти къ слѣдующему общему выводу. Въ данномъ замкнутомъ проводникѣ появляется токъ всякій разъ, когда измѣняется число силовыхъ линій, пересѣкающихъ его контуръ; иначе говоря когда силовой потокъ, пронизывающій контуръ проводника измѣняется. Направленіе и сила индуктируемаго тока будутъ таковы, что появленіе индуктируемаго тока будетъ сопротивляться произведенному измѣненію силового тока. Такъ, если потокъ, пронизывающій контуръ проводника уменьшается, то въ проводникѣ появится токъ такого направленія, при которомъ его силовыя линіи будутъ складываться съ потокомъ, чтобы восполнить уменьшеніе этого послѣдняго.

Эти общіе выводы являются прямымъ слѣдствіемъ закона сохраненія энергіи и тѣхъ гипотезъ, которыя мы привели относительно силовыхъ линій, на страницѣ 44 этой части нашего сочиненія.

102. Общій законъ электромагнитной индукціи. Лордъ

Кельвинъ и Гельмгольцъ, основываясь на законѣ сохраненія энергій, вывели общій законъ, который во всѣхъ случаяхъ опредѣляетъ силу и направленіе индуктируемаго тока.

Положимъ, что мы имѣемъ въ данномъ полѣ замкнутый проводникъ, сопротивленіе котораго r . Пусть Φ силовой потокъ, пронизывающій контуръ этого замкнутого проводника въ данный моментъ. Предположимъ теперь, что мы какимъ-либо путемъ измѣнили этотъ потокъ такъ, что черезъ промежутокъ времени dt потокъ сталъ $\Phi + d\Phi$, т. е. измѣнился на $d\Phi$, гдѣ $d\Phi$ положительная или отрицательная величина. Если вслѣдствіе этого измѣненія появится токъ, то сила этого тока, на основаніи закона сохраненія энергій, должна произвести какъ разъ ту работу, которая была затрачена съ внѣшней стороны на измѣненіе потока черезъ контуръ на величину $d\Phi$. Эта работа тока выразится въ видѣ нагрѣванія за промежутокъ времени dt . Пусть, слѣдовательно, i сила этого тока, появившагося вслѣдствіе измѣненія потока на $d\Phi$ и r сопротивленіе замкнутого проводника, тогда работа нагрѣванія будетъ:

$$i^2 \cdot r \cdot dt.$$

Если dT внѣшняя работа, затраченная на измѣненіе потока на $d\Phi$, то на основаніи закона сохраненія энергій получимъ:

$$dT = i^2 r dt.$$

Опредѣлимъ работу dT . Эта работа будетъ какъ разъ равна и противоположна по знаку той, которая была бы произведена, если бы въ замкнутомъ проводникѣ существовалъ уже токъ i и если бы силовой токъ, пронизывающій его контуръ, измѣнился на $d\Phi$, а эта послѣдняя работа будетъ равна съ обратнымъ знакомъ (см. § 9, стр. 20) разности потенціальныхъ энергій тока и потока въ началѣ и концѣ промежутка времени dt , а именно разности выраженій

$$- i \Phi \text{ и } - i (\Phi + d\Phi) \quad (\text{см. § 89})$$

т. е.

$$+ i \cdot d\Phi .$$

слѣдовательно:

$$dT = - i \cdot d\Phi .$$

Но мы нашли выше, что:

$$dT = i^2 \cdot r \cdot dt$$

поэтому:

$$- i d\Phi = i^2 r \cdot dt$$

откуда:

$$i = - \frac{\frac{d\Phi}{dt}}{r} (101)$$

Это выраженіе показываетъ, что токъ i , индуктируемый въ замкнутомъ проводникѣ, является результатомъ электродвижущей силы

$$\left(- \frac{d\Phi}{dt} \right) ;$$

но отношеніе

$$\frac{d\Phi}{dt}$$

представляетъ собою измѣненіе силового потока въ единицу времени. Отсюда слѣдуетъ теорема.

Теорема. Если черезъ замкнутый контуръ проходитъ переменный магнитный потокъ, то въ этомъ контурѣ индуктируется электродвижущая сила, равная по величинѣ и противоположная по знаку измѣненію тока въ единицу времени.

Если къ выраженію

$$\frac{d\Phi}{dt}$$

примѣнить разсужденія, которыми мы пользовались въ 1-й части нашего курса (§ 85) при выводѣ скорости

въ данный моментъ для случая неравноѣрнаго движенія, то точнѣе будетъ назвать это выраженіе

$$\frac{d\Phi}{dt}$$

быстротою измѣненія магнитнаго потока въ данный моментъ. Слѣдовательно индуцируемая электродвижущая сила въ каждый моментъ равна по величинѣ и противоположна по знаку быстротѣ измѣненія потока въ этотъ моментъ.

103. Правило Максвелла. Мы уже замѣтили выше (§ 101), что, при измѣненіи магнитнаго потока въ замкнутомъ контурѣ, направление индуцируемаго тока опредѣляется тѣмъ соображеніемъ, что индуцируемый токъ стремится создать потокъ, который препятствовалъ бы измѣненію даннаго потока, т. е., если этотъ послѣдній уменьшается, то токъ стремится создать потокъ, который складывался бы съ даннымъ потокомъ, и наоборотъ. Отсюда легко вывести правило для опредѣленія направленія индуцируемаго тока, а слѣдовательно и для направленія индуцируемой электродвижущей силы, пользуясь правиломъ пробочника (§ 80), опредѣляющимъ направленіе потока, порождаемаго электрическимъ токомъ.

Правило заключается въ слѣдующемъ:

Если черезъ данный контуръ потокъ уменьшается, то индуцируемая электродвижущая сила будетъ имѣть направленіе вращенія пробочника, ввертываемаго по направленію силовыхъ линій потока, если же потокъ увеличивается, то направленіе электродвижущей силы будетъ обратно вращенію пробочника, ввертываемаго по направленію силовыхъ линій потока.

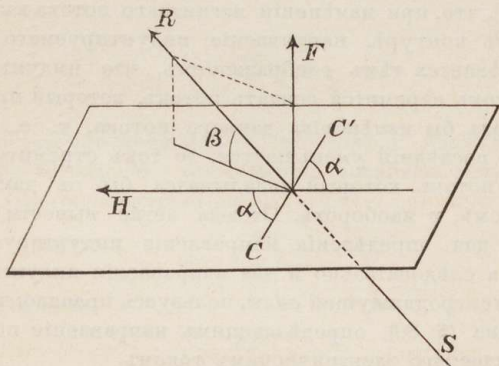
На основаніи только что сказаннаго, ясно, что это правило есть прямое слѣдствіе правила, приведеннаго нами въ отдѣлѣ объ электромагнетизмѣ (§ 80) и закона сохраненія энергіи.

104. Опредѣленіе электродвижущей силы индукціи

при перемѣщеніи проводника въ данномъ магнитномъ полѣ. Мы уже видѣли въ отдѣлѣ объ электромагнетизмѣ (§ 84), что сила дѣйствія магнитнаго поля H на элементъ проводника $cc' = dl$ (фиг. 93) равна:

$$F = Hi \, dl \cdot \sin \alpha$$

гдѣ α уголъ элемента dl съ направлениемъ поля H около этого элемента. Мы знаемъ также, что сила F перпендикулярна къ плоскости P , проходящей черезъ элементъ dl и направление поля.



Фиг. 93.

Работа произведенная при перемѣщеніи проводника на dx по какому либо направлению RS равна силѣ F умноженной на проекцію перемѣщенія dx на направление силы, т. е. умноженной на $dx \cdot \sin \beta$, гдѣ β уголъ направления RS съ плоскостью P . Слѣдовательно выраженіе работы будетъ:

$$H \cdot i \, dl \sin \alpha \sin \beta \cdot dx$$

Работа элементарнаго перемѣщенія dx всего замкнутаго проводника будетъ:

$$\int_0^l Hi \cdot dl \cdot \sin \alpha \sin \beta \cdot dx$$

или, такъ какъ i одинаковъ для всѣхъ элементовъ проводника:

$$i \int_0^l H . dl . \sin \alpha \sin \beta . dx.$$

Примѣняя теперь разсужденіе § 102, не трудно найти что если сопротивленіе замкнутого проводника будетъ r , то для индуцируемаго тока на основаніи закона сохраненія энергіи будемъ имѣть:

$$i^2 . r . dt = i \int_0^l H . dl . \sin \alpha . \sin \beta \, dx$$

откуда:

$$i = - \frac{1}{r} \int_0^l \frac{H \, dl . \sin \alpha . \sin \beta . dx}{dt}$$

Это выраженіе показываетъ, что абсолютная величина индуцируемой электродвигательной силы будетъ:

$$\int_0^l \frac{H . dl . \sin \alpha . \sin \beta \, dx}{dt}$$

откуда замѣчаемъ, что индуцируемая въ замкнутомъ проводникѣ электродвижущая сила есть сумма элементарныхъ электродвижущихъ силъ вида:

$$\frac{H . dl . \sin \alpha . \sin \beta . dx}{dt}$$

Но $\frac{dx}{dt}$ есть скорость перемѣщенія проводника; называя ее v , получимъ для элементарной электродвижущей силы индукціи:

$$de = H . dl . \sin \alpha . \sin \beta . v (102)$$

Если мы возьмемъ конечную часть проводника l , то при его перемѣщеніи въ данномъ полѣ въ немъ будетъ индуцироваться электродвижущая сила:

$$el = v \int_0^l H . dl . \sin \alpha \sin \beta (103)$$

Это выраженіе даетъ возможность вычислять индуктируемую электродвижущую силу въ какой угодно части какой угодно формы проводника, перемѣщающагося въ данномъ полѣ. Тутъ нужно помнить, что α есть уголъ проводника съ направлениемъ поля, β уголъ перемѣщенія съ плоскостью поля и проводника. Если уголъ $\alpha = 0$, то $\sin \alpha = 0$ и слѣдовательно e_i будетъ $= 0$. Это значитъ, что если проводникъ остается все время параллельнымъ силовымъ линіямъ поля, то индукціи не будетъ.

Точно также, если $\beta = 0$, то $e_i = 0$. Это значитъ, что, если проводникъ перемѣщается параллельно силовымъ линіямъ поля, т. е. скользить по этимъ послѣднимъ, то индукціи также не будетъ:

Оба эти весьма важные вывода, опредѣляющіе собою случаи индукціи сводятся къ общему правилу, вытекающему изъ гипотезъ, высказанныхъ нами въ этой части сочиненія на стр. 44, а именно сводятся къ тому, что индукція имѣетъ мѣсто лишь тогда, когда проводникъ при своемъ перемѣщеніи перерѣзываетъ силовыя линіи.

Электродвижущую силу индукціи въ части перемѣщающагося проводника можно выразить еще иначе. мы нашли, что:

$$de = \frac{H \, dl \cdot \sin \alpha \, \sin \beta \, dx}{dt}$$

Но въ отдѣлѣ объ электромагнетизмѣ мы показали, что выраженіе:

$$H \cdot dl \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \, dx = d\Phi$$

гдѣ $d\Phi$ потокъ перерѣзанный проводникомъ за все время перемѣщенія dx (см. § 86).

Слѣдовательно, можно сказать, что электродвижущая сила, индуктируемая въ любой части l проводника, измѣряется потокомъ, перерѣзываемымъ проводникомъ въ единицу времени.

Направленіе электродвижущей силы, индуцируемой въ перемѣщаемомъ проводникѣ опредѣлится на основаніи закона Ленца.

105. Количество индуцированного электричества.

Положимъ, что за нѣкоторый конечный промежутокъ времени потокъ черезъ данный замкнутый контуръ измѣнился на нѣкоторую величину Φ , т. е. въ началѣ былъ на примѣръ Φ_0 , а сталъ въ концѣ упомянутого промежутка времени $\Phi_0 + \Phi$. Во время измѣненія потока въ проводникѣ будетъ индуцироваться токъ:

$$i = - \frac{d\Phi}{r}$$

т. е. въ каждую секунду времени будетъ индуцироваться количество i электричества.

За время dt количество индуцируемаго электричества будетъ $i \cdot dt$, а за весь промежутокъ времени Δt , въ теченіе котораго потокъ измѣнился на Φ , это количество будетъ:

$$\int_0^{\Delta t} i \cdot dt$$

Подставляя вмѣсто i его значеніе, приведенное выше,

$$i = - \frac{d\Phi}{r}, \text{ получимъ:}$$

$$\int_0^{\Phi} - \frac{d\Phi}{r} = - \frac{1}{r} \int_0^{\Phi} d\Phi = - \frac{\Phi}{r}$$

итакъ количество индуцированного электричества q , равно:

$$q = - \frac{\Phi}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

ГЛАВА XVII.

Взаимоиндукція и самоиндукція.

106. Взаимоиндукція. Если въ данномъ замкнутомъ проводникѣ проходитъ переменный по силѣ и направленію токъ, то во всѣхъ сосѣднихъ замкнутыхъ проводникахъ индуктируются того или другаго направленія токи. Наоборотъ, если въ окружающихъ замкнутыхъ проводникахъ или цѣпяхъ циркулируютъ переменные токи, то въ данномъ проводникѣ будутъ индуктироваться въ каждый моментъ токи той или другой силы того или другаго направленія. Говорятъ, что данная замкнутая цѣпь и окружающія замкнутыя цѣпи взаимно индуктируютъ. Само же явленіе называется взаимоиндукціею.

Представимъ себѣ замкнутую цѣпь C , черезъ которую проходитъ нѣкоторый токъ i и которая расположена въ магнитномъ полѣ. Пусть Φ' потокъ, проходящій отъ этого поля черезъ контуръ цѣпи. Тогда, мы уже знаемъ (§ 89), энергія тока въ данномъ полѣ будетъ:

$$W = - i \cdot \Phi'.$$

W изображаетъ ту потенциальную энергію, которую приобрѣтетъ или истратитъ цѣпь C , когда она перемѣстится изъ безконечности въ данное положеніе. Это будетъ то, что мы назвали потенциальною энергіею замкнутой цѣпи C въ присутствіи даннаго поля. Если это послѣднее образуется другою замкнутой цѣпью C' съ токомъ i' , то мы скажемъ, что $- i \Phi'$ будетъ энергія цѣпи C въ присутствіи цѣпи C' . Очевидно, что $- i \Phi'$ можно разсматривать какъ работу, которую нужно произвести или которая будетъ произведена магнитными силами, чтобы обѣ цѣпи перенести изъ безконечности въ данныя имъ положенія. Точно также, если i' токъ, циркулирующій по цѣпи C' и Φ потокъ, пронизывающій эту цѣпь, но исходящій изъ цѣпи C , то легко видѣть, что величина $- i' \cdot \Phi$ представитъ

также ту работу, которую нужно затратить или которая будет затрачена магнитными силами, чтобы перенести обѣ цѣпи изъ безконечности въ данныя имъ положенія. Ясно, что работа $- i \Phi'$ и $- i' \Phi$ равны, а потому

$$- i \Phi' = - i' \Phi$$

или

$$\frac{\Phi}{i} = \frac{\Phi'}{i'}$$

пусть оба эти отношенія $= M$, тогда получимъ для взаимной потенціальной энергіи цѣпей C и C' :

$$W = - i \Phi' = - i' \Phi = - M i i' . . (105)$$

Множитель M называется коэффициентомъ взаимной индукціи двухъ цѣпей.

Изъ выраженія

$$M = \frac{\Phi}{i} = \frac{\Phi'}{i'} (106)$$

видно, что M есть потокъ, который пронизываетъ одну цѣпь, когда въ другой токъ равенъ единицѣ, а изъ выраженія:

$$W = - M i i'$$

видно, что M есть взаимная потенціальная энергія двухъ цѣпей, когда въ нихъ циркулируютъ токи, равные единицѣ.

Такимъ образомъ если въ цѣпи C проходитъ переменный токъ i , то цѣпь C' будетъ пронизывать переменный потокъ

$$\Phi = M . i$$

и въ ней будетъ индукироваться электродвижущая сила

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(M i)}{dt} . . . (107)$$

Если M не зависитъ отъ измѣненія тока, что будетъ, когда проницаемость среды, окружающей цѣпь c' бу-

деть величиною постоянною, т. е. когда около не будетъ желѣза (см. § 72), то:

$$e = - M \frac{di}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

Ниже мы покажемъ, что выраженіе (108) электродвижущей силы слѣдуетъ дополнить еще однимъ членомъ вслѣдствіе еще одного явленія, имѣющаго мѣсто параллельно съ явленіемъ взаимоиנדукціи. Это явленіе называется самоиндукціею.

107. Самоиндукція. Представимъ себѣ замкнутый проводникъ въ пространствѣ, гдѣ нѣтъ никакого посторонняго магнитнаго поля, предположимъ, что въ этомъ проводникѣ вслѣдствіе нѣкоторой электродвижущей силы появляется токъ i , этотъ токъ порождаетъ вокругъ замкнутаго проводника нѣкоторое поле или, иначе, нѣкоторый магнитный потокъ. Допустимъ, что токъ i въ цѣпи измѣняется, тогда, конечно, будетъ измѣняться и имъ порождаемый силовой потокъ. Мы же видѣли уже, что если вокругъ данной замкнутой цѣпи измѣняется ее пронизывающій магнитный потокъ, то въ этой цѣпи индуктируется эл. дв. сила, пропорціональная быстротѣ измѣненія потока. Слѣдовательно при измѣненіи тока въ замкнутой цѣпи, будетъ индуктироваться нѣкоторая эл. движ. сила, которая будетъ дѣйствовать противъ даннаго тока, если этотъ послѣдній измѣняется увеличиваясь, и того же направленія, какъ и данный токъ, если этотъ токъ уменьшается. Направленіе этой электродвиж. силы можно провѣрить посредствомъ правила Макеуэлла (§ 103). Если въ пространствѣ, окружающемъ данную цѣпь, гдѣ циркулируетъ переменный токъ i , нѣтъ магнитныхъ веществъ, какъ желѣзо, сталь и т. п., то можно принять, что силовой потокъ, порождаемый токомъ, будетъ пропорціоналенъ силѣ этого послѣдняго; такимъ образомъ можно написать, что потокъ Φ тока i будетъ:

$$\Phi = L . i$$

гдѣ L коэффиціентъ пропорціональности.

Легко видѣть, что L есть потокъ, порождаемый токомъ, сила котораго равна единицѣ. Явленіе образованія въ цѣпи даннаго тока электродвижущей силы, вслѣдствіе измѣненія силы этого тока называется самоиндукціею: токъ какъ бы самъ въ своей собственной цѣпи индуцируетъ нѣкоторую электродвижущ. силу. Коэффициентъ L называется коэффициентомъ самоиндукціи.

Если среда, окружающая цѣпь даннаго тока, изъ магнитнаго вещества, какъ желѣзо, сталь и т. п., то магнитный потокъ, исходящій изъ цѣпи не будетъ пропорціоналенъ силѣ тока а выразится болѣе сложною функціею отъ силы этого послѣдняго, ибо проницаемость среды (§ 72) будетъ измѣняться въ зависимости отъ намагничивающаго дѣйствія, т. е. въ зависимости отъ силы тока. Въ этомъ случаѣ коэффициентомъ самоиндукціи мы назовемъ отношеніе потока Φ , порождаемаго токомъ, къ силѣ этого послѣдняго, т. е. отношеніе

$$L = \frac{\Phi}{i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

Тогда опять будемъ имѣть:

$$\Phi = L \cdot i$$

Но тутъ L не есть уже величина постоянная, а функція силы тока

$$L = f(i)$$

Перейдемъ теперь къ выводу выраженія эл. дв. силы самоиндукціи.

Если данный токъ i измѣнится за время dt на di , то его силовой потокъ, который былъ $L \cdot i$ измѣнится на $d(L \cdot i)$, а слѣдовательно эл. дв. сила самоиндукціи, согласно общему закону индукціи (§ 102), будетъ:

$$- \frac{d(L \cdot i)}{dt}$$

Такимъ образомъ, въ цѣпи будутъ дѣйствовать двѣ электродвижущія силы, одна e дающая начало току въ цѣпи, а другая — $\frac{d(Li)}{dt}$, происходящая отъ измѣненія самого тока въ цѣпи. Слѣдовательно, сила тока, который будетъ въ дѣйствительности циркулировать въ цѣпи, сопротивленіе которой r , будетъ не:

$$\frac{e}{r}$$

а:

$$\frac{e - \frac{d(Li)}{dt}}{r}$$

т. е. будетъ результатомъ этихъ двухъ электродвижущихъ силъ. Итакъ, если въ данной цѣпи дѣйствуетъ переменная электродвижущая сила, то сила тока будетъ:

$$i = \frac{e - \frac{d(Li)}{dt}}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

Изъ этого выраженія выводимъ:

$$ir = e - \frac{d(Li)}{dt}$$

или помножая на r и переставляя члены:

$$ei = i^2 r + \frac{d(Li)}{dt} \cdot i$$

Помножая обѣ части на dt , получимъ окончательно:

$$ei \cdot dt = i^2 r \cdot dt + d(Li) \cdot i \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

Но $ei \cdot dt$ есть полная энергія, доставляемая за время dt источникомъ тока, электродвижущая сила котораго равна e , $i^2 r \cdot dt$ есть энергія, выдѣляющаяся въ видѣ теплоты въ данной цѣпи за тотъ же промежутокъ времени, а выраженіе $d(Li) \cdot i = d\Phi \cdot i$ есть та работа, которую нужно затратить, чтобы произвести измѣненіе потока Φ на $d\Phi$, когда въ цѣпи течетъ токъ i

(смотри разсужденія § 102). Такимъ образомъ, уравненіе (111) показываетъ, что энергія, доставляемая источникомъ, равна алгебраической суммѣ энергіи, затрачиваемой на нагрѣваніе, и энергіи измѣненія магнитнаго потока въ контурѣ цѣпи. Эта послѣдняя будетъ либо отрицательная, либо положительная: положительною она будетъ тогда, когда i увеличивается, т. е. когда $di > 0$ и отрицательною, когда i уменьшается. Отсюда слѣдуетъ, что, если токъ въ цѣпи сначала постепенно возрастаетъ, отъ источника расходуется, кромѣ энергіи на нагрѣваніе, еще энергія на увеличеніе магнитнаго потока, эта энергія скопляется въ видѣ потенциальной, а затѣмъ, когда токъ начинаетъ уменьшаться, то эта энергія какъ бы возвращается источнику, что совершенно согласно съ закономъ сохраненія энергіи. Это не трудно показать и математически. Пусть отъ 0 до t_1 времени токъ возрастаетъ отъ 0 до нѣкотораго значенія i , а затѣмъ пусть этотъ токъ отъ t_1 до t_2 убываетъ, прійдя снова отъ i до 0. Тогда въ первый періодъ времени источникъ истратитъ энергіи:

$$\int_0^{t_1} e i dt = \int_0^{t_1} i^2 \cdot r dt + \int_0^i i \cdot d(Li) \dots \dots (a)$$

за періодъ времени [отъ t_1 до t_2 источникъ истратитъ:

$$\int_{t_1}^{t_2} e i dt = \int_{t_1}^{t_2} i^2 \cdot r \cdot dt + \int_i^0 i d(Li)$$

Но:

$$\int_i^0 i d(Li) = - \int_0^i i d(Li)$$

а потому предъидущее выраженіе можно написать въ видѣ:

$$\int_{t_1}^{t_2} e i dt = \int_{t_1}^{t_2} i^2 r dt - \int_0^i i d(Li) \dots \dots (3)$$

Это показываетъ, что за второй періодъ, когда токъ

уменьшается отъ i до 0 энергія $\int_0^i i d(Li)$ воз-

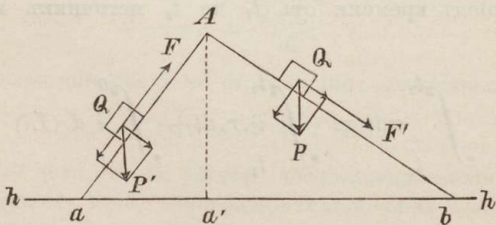
вращается источнику, ибо она входитъ во вторую часть уравненія со знакомъ $(-)$.

Слѣдовательно, когда токъ измѣнился отъ 0 до i и затѣмъ снова сталъ $=0$, источникъ истратилъ энергіи:

$$\int_0^{t_1} e i dt + \int_{t_1}^{t_2} e i dt = \int_0^{t_1} i^2 r dt + \int_{t_1}^{t_2} i_2 \cdot r \cdot dt$$

такъ какъ при сложеніи уравненій (α) и (β) $\int i d(Li)$ исчезаетъ.

Дѣйствіе самоиндукціи въ разобраннымъ нами случаѣ можно уподобить подъему и спуску груза по



Фиг. 94.

двумъ наклоннымъ плоскостямъ. Пусть имѣемъ грузъ Q (фиг. 94), который нужно сначала поднять съ плоскости hh на вершину A по наклонной плоскости aA ,

а затѣмъ опустить съ вершины A на ту же плоскость hh по наклонной плоскости Ab . Пусть F усиліе, съ которымъ нужно потянуть грузъ, чтобы его втащить на вершину A . Работа, которую мы затратили будетъ:

$$F \text{ } aA$$

Эта работа сложится изъ двухъ: 1) изъ работы на преодоленіе тренія груза Q по плоскости, которая выдѣлится въ видѣ теплоты и работы, затрачиваемой на преодоленіе дѣйствія тяжести груза, пусть T_F работа тренія и пусть P вѣсъ груза, работа на преодоленіе этого вѣса при подъемѣ отъ a до A , будетъ равна силѣ вѣса P умноженной на проекцію пути Aa на направленіе силы, т. е. на вертикаль (ибо P направлена вертикально), но проекція Aa на вертикаль будетъ $Aa' = H$. Слѣдовательно, эта работа будетъ:

$$P \times H$$

Итакъ полная работа, затраченная на подъемъ груза будетъ:

$$T_F + P \times H$$

Эта работа $P \times H$ скопится въ видѣ потенциальной энергіи, ибо грузъ вѣсомъ P , поднятый на высоту H , обладаетъ потенциальною энергіею $P \times H$, дѣйствительно, при паденіи съ высоты H тѣло будетъ способно произвести работу $P \times H$ (§ 1). Когда мы начнемъ тащить грузъ по плоскости Ab , то работа, которую мы затратимъ, будетъ равна разности работы на треніе груза o по плоскости Ab и работы вѣса P груза, ибо теперь при спускѣ вѣсъ груза помогаетъ силѣ, спускающей грузъ изъ A къ плоскости hh . Работа вѣса опять будетъ равна $P \times H$. Такимъ образомъ, при спускѣ груза мы затратимъ работу:

$$T''_F - P \times H$$

иначе говоря, работа $P \times H$, которая была затрачена при подъемѣ на увеличеніе потенциальной энергіи груза, при спускѣ намъ цѣликомъ вернется, такъ что въ концѣ концовъ, когда грузъ, поднявшись въ A ,

спустится на ту же плоскость, гдѣ онъ былъ раньше, мы затратимъ лишь работу на треніе:

$$T_F + T'_F$$

которая выдѣлится въ видѣ теплоты.

То же мы нашли, разбирая дѣйствіе самоиндукціи при увеличеніи тока отъ 0 до i и при уменьшеніи его снова отъ i до 0.

Это еще лишній разъ показываетъ, что между электромагнитными явленіями и явленіями механическими существуетъ полная аналогія, да оно такъ и должно быть, ибо всѣ явленія основаны на законѣ сохраненія энергіи. Зная механику, можно установить всѣ зависимости между электромагнитными явленіями, опираясь лишь на законъ сохраненія энергіи.

108. Внутренняя потенциальная энергія тока. Изъ предъидущаго мы видимъ, что когда токъ нарастаетъ отъ 0 до нѣкоторой величины i , то происходитъ на-

копленіе потенциальной энергіи, равной $\int_0^i i \, d(Li)$

Это значитъ, что съ появленіемъ тока силою i связано накопленіе потенциальной энергіи $\int_0^i i \, d(Li)$

точно также, какъ съ поднятіемъ груза на высоту H . Поэтому мы скажемъ, что токъ силою i обладаетъ по-

тенциальною энергіею $\int_0^i i \, d(Li)$ Эту энергію мы

назовемъ внутреннею потенциальною энергіею тока.

При размыканіи тока i освобождается, слѣдовательно, энергія

$$\int_0^i i \, d(Li) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Эта энергія выдѣляется внѣшнимъ образомъ въ видѣ искры, появляющейся между размыкаемыми частями цѣпи или, какъ говорятъ, въ видѣ экстратока. Въ томъ случаѣ, когда L величина постоянная, внутренняя потенциальная энергія тока будетъ:

$$\int_0^i i \, d(Li) = \int_0^i i \, L \, di = L \int_0^i i \, di = \frac{1}{2} L i^2. \quad (113)$$

109. Полная электродвижущая сила индукціи. Предположимъ, что мы имѣемъ рядомъ двѣ неподвижныхъ замкнутыхъ цѣпи A и A' , въ которыхъ дѣйствуютъ электродвижущія силы e и e' отъ нѣкоторыхъ источниковъ тока. Пусть L и L' коэфф. самоиндукціи и M коэфф. взаимной индукціи обѣихъ цѣпей.

Въ цѣпяхъ A и A' получатся токи i и i' , изъ которыхъ каждый будетъ результатомъ дѣйствія 3-хъ электродвижущихъ силъ, а именно: токъ i будетъ происходить отъ дѣйствія электродвижущей силы e , эл. дв. силы самоиндукціи

$$- \frac{d(Li)}{dt}$$

и эл. дв. силы взаимной индукціи отъ цѣпи A'

$$- \frac{d(Mi')}{dt};$$

а токъ i' отъ эл. дв. силы e' , эл. дв. силы

$$- \frac{d(L'i')}{dt}$$

и эл. дв. силы

$$- \frac{d(Mi)}{dt}.$$

Слѣдовательно, если сопротивленіе цѣпей r и r' :

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{e - \frac{d(Li)}{dt} - \frac{d(Mi')}{dt}}{r} \\ i' &= \frac{e' - \frac{d(L'i')}{dt} - \frac{d(Mi)}{dt}}{r'} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (114)$$

Въ частномъ случаѣ если вторая цѣпь не имѣетъ источника тока, а представляетъ собою просто замкнутую цѣпь, т. е. если $e' = 0$, то

$$i' = \frac{-\frac{d(Li')}{dt} - \frac{d(Mi)}{dt}}{r'} (115)$$

выраженіе

$$-\frac{d(Li')}{dt} - \frac{d(Mi)}{dt}$$

есть полная эл. движ. сила, индуцируемая въ цѣпи A' токомъ i цѣпи A .

ОТДѢЛЪ VI.

Системы единиц для измѣренія электрическихъ и магнитныхъ величинъ.

ГЛАВА XVIII.

Абсолютныя системы единицъ.

110. Въ главѣ IV введенія мы уже сказали, что, выбравъ три основныя единицы — единицу длины, единицу массы и единицу времени, мы можемъ произвести единицы для всѣхъ остальныхъ величинъ, съ которыми приходится имѣть дѣло въ прикладныхъ наукахъ (за исключеніемъ единицы температуры и единицы свѣта), пользуясь зависимостью этихъ величинъ отъ длины, массы и времени. Мы уже показали, какъ такимъ путемъ произвести единицы геометрическія и механическія. Точно такимъ же образомъ можно будетъ установить и единицы для измѣренія электрическихъ и магнитныхъ величинъ, ибо между этими величинами и величинами механическими, какъ мы это неоднократно показали при разборѣ электрическихъ и магнитныхъ явленій, существуетъ вполне опредѣленная связь. Основная зависимость электрическихъ и магнитныхъ величинъ отъ механическихъ устанавливается закономъ Кулона. Такъ, для электрическихъ величинъ эта зависимость выражается уравненіемъ:

$$f = k \frac{qq'}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

ствуешь съ силою, равною 1 динѣ. Выведемъ зависимость этой единицы отъ абсолютныхъ основныхъ единицъ (сантиметра, грамма, секунды). Для этого возьмемъ уравненіе (α') въ предположеніи, что $k = 1$.

$$f = \frac{q^2}{r^2}$$

Отсюда выводимъ:

$$q = (f \cdot r^2)^{1/2} = f^{1/2} \cdot r$$

принимая теперь, что въ это уравненіе входятъ единицы соответствующихъ величинъ, введемъ символическое обозначеніе (см. § 23) этихъ единицъ.

$$(Q) = (F)^{1/2} \cdot (L)$$

по

$$(F) = (L \ M \ T^{-2}) \text{ (см. § 23 стр. 61)}$$

а потому:

$$(Q) = (L^{1/2} \cdot M^{1/2} \ T^{-1}) \cdot (L) = (L^{3/2} \ M^{1/2} \ T^{-1})$$

Точно такимъ же образомъ выведемъ размѣры остальныхъ единицъ.

Электрическій потенціалъ:

$$v = \frac{q}{r}$$

Размѣръ единицы электрическаго потенціала будетъ:

$$(V) = \frac{(Q)}{(L)} = \frac{(L^{3/2} \cdot M^{1/2} \ T^{-1})}{(L)} = (L^{1/2} \ M^{1/2} \ T^{-1})$$

Напряженіе электрическаго поля:

$$H = - \frac{dV}{dl}$$

Слѣдовательно

$$(H) = \frac{(V)}{(L)} = (L^{-1/2} \ M^{1/2} \ T^{-1}).$$

Емкость:

$$C = \frac{q}{V}$$

слѣдовательно:

$$(C) = \frac{(Q)}{(V)} = \frac{(L^{3/2} M^{1/2} T^{-1})}{(L^{1/2} M^{1/2} T^{-1})} = (L).$$

Сила тока.

Это есть количество электричества, протекающее въ единицу времени, т. е.

$$i = \frac{q}{t}$$

слѣдовательно:

$$(I) = \frac{(Q)}{(T)} = (L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}).$$

Сопротивленіе.

По закону Ома:

$$i = \frac{V}{R}$$

слѣдовательно:

$$(I) = \frac{(V)}{(R)}$$

откуда:

$$(R) = \frac{(V)}{(I)} = \frac{(L^{1/2} M^{1/2} T^{-1})}{(L^{3/2} M^{1/2} T^{-2})} = (L^{-1} T)$$

Для того, чтобы вывести измѣреніе электростатическихъ единицъ для магнитныхъ величинъ, воспользуемся зависимою, выражающею дѣйствіе тока на магнитную массу.

Предположимъ, что мы имѣемъ часть проводника въ видѣ дуги круга, радіусомъ R , по которой проходитъ токъ силою $= i$. Если примѣнить теорему Лапласа (§ 82), то легко найти, что дѣйствіе этой части проводника на магнитную массу m , помѣщенную въ центрѣ круга дуги будетъ:

$$f = k \frac{lim}{R^2}$$

Отсюда выводимъ:

$$m = \frac{1}{k} \cdot \frac{f \cdot R^2}{l \cdot i}$$

Если $f = 1$ динъ, $R = 1$ см. $l = 1$ см. и $i =$ единица силы тока въ электростатической системѣ, то:

$$m = \frac{1}{k}$$

Иначе говоря, когда длина дуги проводника, ея радиусъ и сила протекающаго тока будутъ равны единицѣ, то дѣйствіе тока въ центрѣ круга дуги на количество массы равной $\frac{1}{k}$ будетъ равнымъ 1 динъ.

Слѣдовательно $\frac{1}{k}$ будетъ та магнитная масса, которая, помѣщенная въ центрѣ предыдущаго проводника будетъ дѣйствовать на него съ силою равною одной динѣ. Примемъ эту массу равною единицѣ, тогда $\frac{1}{k} = 1$. Размѣры этой единицы массы будутъ:

$$\left(M_m \right)^{*)} = \frac{(F) (L)^2}{(L) (I)}$$

Или замѣняя эти единицы ихъ размѣрами въ зависимости отъ основныхъ единицъ (L) (M) и (T) получимъ:

$$\left(M_m \right) = \left(L^{1/2} M^{1/2} \right)$$

Точно такимъ же образомъ опредѣлимъ и размѣры единицъ для остальныхъ магнитныхъ величинъ въ электростатической системѣ единицъ.

112. Электромагнитная система. Если въ уравненіи (β) (§ 110) мы примемъ $m = m'$ и $K = 1$, то получимъ:

$$f = \frac{m^2}{r^2}$$

Согласно этому уравненію мы примемъ за единицу количества магнетизма, такое количество, которое на

*) Мы обозначимъ единицу магнитной массы символически черезъ (M_m) въ отличіе отъ символическаго обозначенія (M) массы грамма.

равное ему количество и расположенное на разстояніи = 1 см. будетъ дѣйствовать съ силою равною 1 динѣ.

Отсюда:

$$(M_m) = (F)^{4/2} \cdot (L)$$

Но:

$$(F) = (L M T^{-2}),$$

а потому:

$$M_m = L^{3/2} M^{4/2} T^{-1}$$

Размѣры единицъ для остальныхъ магнитныхъ величинъ выведутся, подобно электростатическимъ, при посредствѣ отношеній, существующихъ между этими величинами. Въ слѣдующей таблицѣ мы приводимъ съ одной стороны отношеніе между величинами, а съ другой размѣры соотвѣтствующихъ единицъ:

Для того, чтобы въ электромагнитной системѣ выразить размѣры единицъ для электрическихъ величинъ, мы воспользуемся зависимостью, выражающею напряженіе магнитнаго поля въ центрѣ проводника, который имѣетъ форму дуги круга и по которому проходить токъ силою = i .

$$H = \frac{li}{r^2}$$

гдѣ r радіусъ дуги.

Отсюда заключаемъ, что единица силы тока въ электромагнитной системѣ будетъ сила такого тока, который, проходя по дугѣ круга, радіусомъ и длиною равными единицѣ, дѣйствуетъ на единицу магнитной массы, расположенной въ ея центрѣ, съ силою равною единицѣ.

Магнитныя величины.	Отношеніе между величинами.	Размѣры единицъ.
Магнитный потен- ціаль	$V = \frac{m}{r}$	$(L^{1/2} M^{1/2} T^{-1})$
Напряженіе маг- нитнаго поля .	$H = - \frac{dV}{dr}$	$(L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1})$
Магнитный мо- ментъ	$A = l \cdot m$	$(L^{5/2} M^{1/2} T^{-1})$
Интенсивность на- магничиванія .	$J = \frac{A}{u}$ гдѣ u = объ- емъ	$(L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1})$
Магнитная плот- ность	$\sigma = \frac{m}{S}$ гдѣ S площадь	$(L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1})$
Напряженіе маг- нитнаго слоя .	$P = \sigma \cdot \epsilon$ гдѣ ϵ толщина слоя = длинѣ	$(L^{1/2} M^{1/2} T^{-1})$
Магнитный по- токъ	$\Phi = H S$ гдѣ S площадь	$(L^{3/2} M^{1/2} T^{-1})$
Коэффициентъ на- магничиванія .	$\kappa = \frac{J}{H}$	1
Магнитная прони- цаемость . . .	$\mu = 1 + 4\pi\kappa$	1
Магнитная индук- ція	$B = \mu H$	$(L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1})$

Изъ выраженія:

$$H = \frac{li}{r^2}$$

выводимъ:

$$(H) = \frac{(L)(I)}{(L)^2} = \frac{(I)}{(L)}$$

откуда:

$$\begin{aligned} (I) = (H) (L) &= \left(L^{1/2} M^{1/2} T^{-1} \right) (L) = \\ &= L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} \end{aligned}$$

единица количества электричества: мы знаемъ, что:

$$i = \frac{q}{t}$$

откуда:

$$q = i t$$

и

$$(Q) = (I) (T) = L^{3/2} M^{1/2}$$

Единица сопротивленія выведется изъ закона Джауля, устанавливающего, что количество теплоты пропорціонально произведенію квадрата силы тока на сопротивленіе и время протеканія тока:

$$W = i^2 \cdot r \cdot t$$

Но теплота эквивалентна механической работѣ и измѣряется тѣми же единицами, какъ эта послѣдняя (§ 23).

Но размѣръ единицы работы:

$$L^2 MT^{-2}$$

Слѣдовательно:

$$\left(L^2 MT^{-1} \right) = (I)^2 \cdot (R) \cdot (T)$$

откуда:

$$(R) = \frac{(L^2 MT^{-2})}{(I)^2 (T)} = \frac{(L^2 MT^{-2})}{(L^{1/2} M^{1/2} T^{-1})^2 (T)} = LT^{-1}$$

Разность потенциаловъ. По закону Ома, имѣемъ:

$$\frac{\Delta V}{R} = i$$

откуда

$$\begin{aligned} (V) &= (I) (R) = (L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}) (LT^{-1}) = \\ &= (L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}) \end{aligned}$$

Такого же измѣренія будетъ и эл. дв. сила, измѣряемая разностью потенциаловъ.

Емкость имѣемъ:

$$c = \frac{q}{v}$$

$$(c) = \frac{(\varphi)}{(V)} = L^{-1} T^2$$

Коэффициентъ самоиндукціи имѣемъ:

$$L_i = \frac{\Phi}{i}$$

гдѣ Φ магнитный потокъ, образуемый токомъ i .

Но:

$$\begin{aligned} (\Phi) &= L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} \\ (I) &= L^{1/2} M^{1/2} T^{-1} \end{aligned}$$

Слѣдовательно:

$$(L_i) = \frac{(\Phi)}{(I)} = (L)$$

Точно также найдемъ, что размѣръ единицы коэф. взаимоиנדукціи будетъ:

$$(M_i) = (L)$$

113. Значеніе коэффиціентовъ k и отношеніе между электростатическими и электромагнитными единицами. Когда мы брали уравненіе Кулона для электрическихъ или магнитныхъ единицъ, то въ той или другой системѣ мы приравнивали коэффиціентъ k единицъ, благодаря чему и опредѣлялась основная единица, отъ которой мы производили остальные. Такъ въ системѣ электростатическихъ единицъ коэф. k относящійся къ электрическимъ величинамъ и входящій въ уравненіе

$$f = k \frac{qq'}{r^2}$$

мы приняли $k = 1$, откуда опредѣлилась единица количества электричества. Затѣмъ коэфф. k , относящійся къ магнитнымъ величинамъ, мы въ электростатической системѣ приняли равнымъ единицѣ для того, чтобы въ этой системѣ опредѣлить единицу количества магнетизма. Но эта единица будетъ уже не отвлеченное число, а единица опредѣленныхъ размѣровъ по отношенію къ абсолютнымъ единицамъ. Дѣйствительно, если мы возьмемъ уравненіе Кулона, относящееся къ магнитнымъ массамъ, куда входитъ этотъ коэффиціентъ:

$$f = k \frac{m^2}{r^2}$$

и выразимъ количество магнетизма m въ только что опредѣленной нами электростатической единицѣ, а остальные величины въ динахъ и сантиметрахъ (f и r), то получимъ:

$$n \cdot (F) = k \frac{p^2 \cdot (M_m)^2}{u^2 \cdot (L)^2}$$

гдѣ n, p, u — числа отвлеченныя, показывающія сколько единицъ заключается въ каждой величинѣ.

Отсюда:

$$k = \frac{(F') \cdot (L)^2}{(M_m)^2} \cdot \frac{n \cdot u^2}{p^2}$$

вставляя вмѣсто (F') и (M_m) ихъ символическіе размѣры, получимъ:

$$k = \frac{n \cdot u^2}{p^2} \frac{(LMT^{-2}) \cdot (L)^2}{(L^{1/2} M^{1/2})^2} = \frac{n \cdot u^2}{p^2} \cdot (L^2 T^{-2})$$

что показываетъ, что k пропорціонально квадрату длины и обратно пропорціонально квадрату времени. Можно написать еще:

$$k = \frac{n \cdot u^2}{p^2} (LT^{-1})^2$$

что показываетъ, что k пропорціогнально квадрату скорости.

Эту то величину, пропорціональную квадрату скорости, мы и приняли равной единицѣ, при опредѣленіи единицы магнитной массы въ электростатической системѣ.

Объяснимъ теперь слѣдующій парадоксъ. Размѣры напряженія магнитнаго поля въ электростатической системѣ можно выразить исходя изъ двухъ опредѣленій:

1) Магнитное поле есть сила дѣйствующая на единицу магнитной массы, слѣдовательно, если на магнитную массу m дѣйствуетъ сила f , то на единицу магнитной массы будетъ дѣйствовать сила:

$$H = \frac{f}{m}$$

а потому можно написать:

$$(H) = \frac{(F')}{(M_m)}$$

но

$$(F) = LM T^{-2}$$

а

$$\left(\frac{M}{m} \right)$$

въ электростатическихъ единицахъ будетъ:

$$\left(L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \right)$$

Слѣдовательно:

$$(H) = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} \dots \dots (\alpha)$$

Съ другой стороны если V потенціалъ,
то

$$H = - \frac{dV}{dl},$$

отсюда

$$(H) = \frac{(V)}{(L)}$$

но магнитный потенціалъ

$$v = \frac{m}{r}$$

откуда

$$(V) = \frac{\left(\frac{M}{m} \right)}{(L)}$$

и

$$(H) = \frac{\left(\frac{M}{m} \right)}{(L)^2} = L^{-\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} \dots \dots (\beta)$$

какъ видно формула (α) не сходится съ формулою (β) , для H получаются совершенно различные размѣры. Отчего это? Мы сейчасъ покажемъ, что это только кажущееся различіе. Дѣйствительно, когда мы написали выраженіе потенціала:

$$v = \frac{m}{r}$$

то мы забыли коэффиціентъ k , который въ уравненіи Кулона для магнитныхъ массъ измѣренія $L^2 T^{-2}$. А выраженіе потенціала выводится изъ выраженія

силы, определяемой уравненіемъ Кулона. Слѣдовательно необходимо написать:

$$v = k \frac{m}{r}$$

или, если вмѣсто k , m и r вставить ихъ размѣры, то получимъ символическое обозначеніе:

$$(V) = \left(L^2 T^{-2} \right) \frac{(M_m)}{(L)}$$

въ этомъ уравненіи мы не пишемъ отвлеченнаго числа, показывающаго сколько единицъ $(L^2 T^{-2})$ содержитъ коэффиц. k , ибо намъ важны здѣсь лишь размѣры въ абсолютныхъ единицахъ.

Если теперь въ выраженіе (V) подставить вмѣсто (M_m) его значеніе, то получимъ:

$$(V) = \left(L^2 T^{-2} \right) \frac{L^{1/2} M^{4/2}}{L} = L^{3/2} M^{4/2} T^{-2}$$

Вставляя въ выраженіе:

$$(H) = \frac{(V)}{(L)}$$

предыдущія размѣры (V) получимъ:

$$(H) = \frac{L^{3/2} M^{4/2} T^{-2}}{(L)} = L^{1/2} M^{4/2} T^{-2}$$

т. е. выраженіе совершенно согласное съ выраженіемъ (α) , найденнымъ по другому опредѣленію поля, опредѣленію, которое не зависѣло отъ k .

Разсуждая точно такимъ же образомъ найдемъ, что коэффиціентъ k , входящій въ уравненіе кулона для электрическихъ величинъ.

$$f = k \frac{qq'}{r^2}$$

будетъ измѣренія $(L^2 T^{-2})$, когда q и q' будутъ выражены въ электромагнитныхъ величинахъ. Зная это, мы также можемъ легко объяснить кажущееся разли-

чіе въ размѣрахъ потенціала, выведенныхъ либо на основаніи формулы:

$$i = \frac{v}{r}$$

либо на основаніи формулы:

$$v = \frac{q}{r}$$

если во вторую формулу поставимъ коэффициентъ k и напомнимъ:

$$v = k \frac{q}{r}$$

при чемъ будемъ помнить, что k измѣренія:

$$(L^2 T^{-2}).$$

Изъ закона кулона для электрическихъ массъ, мы имѣемъ:

$$f = k \frac{q^2}{r^2}$$

Если мы выразимъ q въ электростатическихъ единицахъ (Q_s), то коэффициентъ k будетъ равенъ единицѣ, когда f выражено въ динахъ, а r въ сантиметрахъ. Поэтому полагая $q = n \cdot (Q_s)$, $f = p \cdot (F)$ и $r = u \cdot (L)$, можемъ написать:

$$p \cdot (F) = \frac{n^2 (Q_s)}{u^2 (L)} \dots (\alpha)$$

гдѣ отвлеченныя числа p и $\frac{n^2}{u^2}$ должны быть одинаковы, т. е. $p = \frac{n^2}{u^2}$

Зададимся теперь такимъ вопросомъ: сколько нужно взять единицъ (Q_m) электромагнитной системы, чтобы на разстояніи $u \cdot (L)$ произвести дѣйствіе равное $p \cdot (F)$. Пусть x это число. Тогда, въ виду того, что

электрическія массы берутся въ электромагнитныхъ единицахъ, коэффициентъ k останется и мы получимъ:

$$p(F) = k \frac{x^2(Q_m)}{u^2(L)} \dots (\beta)$$

гдѣ слѣдовательно:

$$p = k \frac{x^2}{u^2}$$

сравнивая:

$$(\alpha) \text{ и } (\beta),$$

найдемъ:

$$k \cdot x^2 = n^2 = p^*)$$

отсюда видимъ, что число электромагнитныхъ единицъ x будетъ $\sqrt{k}$ разъ меньше числа электростатическихъ единицъ, т. е. что электромагнитная единица количества электричества въ $\sqrt{k}$ разъ больше электростатической. Иначе говоря можно написать:

$$\frac{(Q_m)}{(Q_s)} = \sqrt{k}$$

точно также найдемъ, для единицъ силъ тока:

$$\frac{(I_m)}{(I_s)} = \sqrt{k}$$

для сопротивленій:

$$\frac{(R_s)}{(R_m)} = k$$

*) ибо оба отвлеченныя числа:

$$\frac{n^2}{u^2} \text{ и } k \frac{x^2}{u^2}$$

равняются числу p

для емкостей:

$$\frac{(C_m)}{(C_s)} = k$$

для разностей потенциаловъ:

$$\frac{(V_m)}{(V_s)} = k$$

и т. д.

абсолютная величина k , какъ показали изслѣдованія, пропорціоннальна квадрату скорости свѣта, т. е. для воздуха эта величина $= (3 \times 10 \text{ см. въ сек.})^2$

ГЛАВА XIX.

Система практическихъ единицъ.

114. Электростатическія и электромагнитныя единицы не совсѣмъ удобны для измѣренія всѣхъ величинъ, съ которыми приходится имѣть дѣло въ примѣненіяхъ электричества и магнетизма. Эти единицы или слишкомъ крупны (для измѣренія нѣкоторыхъ величинъ) или слишкомъ мелки. Такъ не удобно было бы принять за практическую единицу длины 1 см., а употребляютъ болѣе крупную единицу равную 100 см., называемую метромъ. Для измѣренія электрическихъ и магнитныхъ величинъ выбрали также для измѣренія нѣкоторыхъ величинъ болѣе крупныя единицы въ нѣсколько разъ бѣльшія абсолютныхъ, для измѣренія же другихъ взяли единицы въ нѣсколько разъ меньшія абсолютныхъ. Такимъ образомъ получили рядъ такъ называемыхъ практическихъ единицъ.

115. Такъ для единицы электрическаго сопротивленія выбрана единица, названная омомъ (омъ), равная 10^9 абсолютныхъ электромагнитныхъ единицъ.

Практическая единица силы тока — амперъ

равная $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ абсолютной электромагнитной единицы силы тока.

Исходя изъ этихъ двухъ единицъ и пользуясь отношеніями между электрическими и магнитными величинами, можно опредѣлить всѣ остальные практическія единицы.

Такъ практическая единица напряженія или разности потенціаловъ—вольтъ, равна такому напряженію или такой разности потенціаловъ, которая между концами проводника сопротивленіемъ $= 1$ ому даетъ силу тока $= 1$ амперу, 1 вольтъ $= 10^8$ абс. эл. маг. единицъ.

Практическая единица количества электричества—кулонъ, это количество электричества, протекающее въ секунду времени черезъ сѣченіе проводника, черезъ которой проходитъ токъ силою въ 1 амперъ.

$$1 \text{ кулонъ} = 10^{-1} \text{ абсол. эл. маг. ед.}$$

Практическая единица емкости фарада. Это емкость тѣла заряженнаго 1 -мъ кулономъ электричества при потенціалѣ равномъ 1 -му вольту.

$$1 \text{ фарада} = 10^{-9} \text{ абсол. эл. маг. ед.}$$

Практическая единица электрической работы будетъ вольтъ-кулонъ, ибо работа, произведенная электрическими силами надъ массою или количествомъ электричества $= q$ будетъ равняться измѣненію потенціала, помноженному на количество электричества.

$$T = \Delta v \times q$$

откуда единица работы равна 1 вольтъ $\times 1$ кулонъ.

Вольтъ-кулонъ называется джаулемъ. И такъ единица электрической работы—джауль

$$1 \text{ джауль} = 10^7 \text{ эрговъ} = \frac{1}{9,81} \text{ килограмметровъ.}$$

Дѣйствительно:

$$1 \text{ джауль} = 1 \text{ вольт} \times 1 \text{ кулонъ} = 10^8 \text{ абс. эл. маг. ед.} \times 10^{-1} \text{ абс. эл. м. ед.} = 10^7 \text{ абс. эл. маг. ед., т. е. } 10^7 \text{ эрговъ.}$$

Практическая единица электрической мощности = джауль-секундѣ (или джауль въ секунду см. § 23), т. е. равно:

$$1 \text{ вольту} \times 1 \text{ кулонъ въ секунду}$$

Но 1 кулонъ въ секунду = 1 амперу (ибо количество электричества, протекающее въ секунду равно силѣ тока). Слѣдовательно единица электрической мощности = 1 вольт $\times$ амперъ или, какъ говорятъ, вольтъ-амперъ.

Эта единица называется уаттомъ, 1 уаттъ = 1 вольтъ-амперу = 10^9 эргъ-секундамъ (или эрговъ въ секунду) = $\frac{1}{9,81}$ килограмметровъ въ секунду

Практическая единица коэффиціента самоиндукціи названа генри. Это будетъ коэфф. самоиндукціи замкнутого проводника, въ которомъ при появленіи тока въ 1 амперъ, появляется потокъ равный единицѣ.

$$1 \text{ генри} = 10^9 \text{ абсол. единицъ.}$$

Мы уже замѣтили раньше, что измѣреніе единиц коэф. самоиндукціи одинаково съ измѣреніемъ длины. Слѣдовательно можно сказать, что 1 генри = 10^9 см.

116. Въ заключеніе приводимъ сравнительную таблицу практическихъ, электромагнитныхъ и электростатическихъ единицъ, составленной на основаніи зависимости этихъ единицъ, причемъ коэффиціентъ k взять = $(3 \cdot 10)^2$ (см. § 109 и § 111).

Практическія единицы.	Электромагнит. единицы.	Электростатическія единицы.
Омъ равенъ .	10^9	$\frac{10^9}{3^2 20^{20}}$
Амперъ „ .	10^{-1}	$10^{-1} \times 3 \times 10^{10}$
Вольтъ „ .	10^8	$\frac{10^8}{3 \times 10^{20}}$
Кулонъ „ .	10^{-1}	$10^{-1} \times 3 \times 10^{10}$
Фарада „ .	10^{-9}	$10^{-9} \times 3^2 \times 10^{20}$
Генри „ .	10^9	10^9
Джауль „ .	10^7	10^7
Уаттъ „ .	10^7	10^7

Этимъ мы закончимъ вторую часть нашего сочиненія. Въ ней мы привели всѣ тѣ основы, которыя необходимо твердо усвоить электрику для того, чтобы стать *maître de la situation* въ каждомъ вопросѣ или задачѣ, которыя будутъ встрѣчаться во многообразныхъ примѣненіяхъ электричества на практикѣ.

Въ слѣдующей части мы приведемъ рядъ общихъ вопросовъ и задачъ, рѣшеніе которыхъ во-первыхъ покажетъ, какъ слѣдуетъ примѣнять основные элементы теоріи, а во-вторыхъ, послужить необходимымъ матеріаломъ для дальнѣйшаго изученія практическихъ примѣненій электричества и магнетизма.

П Р И Б А В Л Е Н І Е.

Л И Т Е Р А Т У Р А.

И. И. Борманъ. Основанія ученія объ электрическихъ и магнитныхъ явленіяхъ. Ч. I. Электростатика и электрический токъ. Ч. II. Магнетизмъ, электромагнетизмъ, электродинамика, индукція.

Жуберъ. Основы ученія объ электричествѣ.

Vaschy. Traité d'électricité et de magnetisme.

Bertrand. Leçons sur la théorie mathématique de l'électricité.

P. Minel. Introduction à l'électricité industrielle 1-er volume: potentiel, flux de force, grandeurs électriques 2-e volume: circuit magnetique, induction, machines.

Marcel Deprez. Traité d'électricité industrielle théorique et pratique 1-er et 2-e fascicule. 1898 r.

Thompson S. P. L'électroaimant et l'électromécanique. 1895 r.

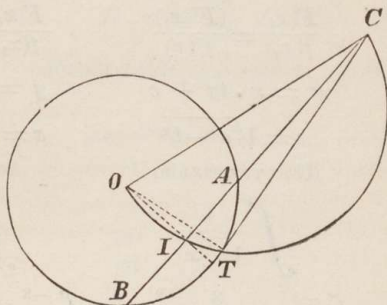
J. J. Thomson. Elemente der mathematischen Theorie der Elektrizität und des Magnetismus 1897 r.

I. A. Ewing. Magnetische Induction in Eisen und verwandten Metallen.

Gustav Benischke. Magnetismus und Elektrizität mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Praxis. 1896 r.

ПОПРАВКИ ДЛЯ I-й ЧАСТИ.

На страницѣ 3, фиг. 1 должна быть исправлена, а именно, какъ это представлено на прилагаемомъ чертежѣ, затѣмъ, начиная отъ четвертой строки сверху:



вмѣсто: изъ центра O опустимъ перпендикуляръ на сѣкущую AB и продолжимъ этотъ перпендикуляръ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ T .

слѣдуетъ читать: изъ центра O опустимъ перпендикуляръ на сѣкущую AB . На OC опишемъ полуокружность, которая пересѣчетъ данную окружность въ точкѣ T . Соединимъ CT (и т. д. согласно съ напечатаннымъ дальше текстомъ).

Далѣе отмѣтимъ слѣдующія опечатки.

стр.	строка:	напечатано:	слѣдуетъ:
4	7 сверху	неясная	неясная
10	9 снизу	$\left(1 + \frac{1}{x'-1}\right)^{x'-1} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right);$	$\left(1 + \frac{1}{x'-1}\right)^{x'-1} \left(1 + \frac{1}{x'-1}\right)$
13	2 снизу	$\beta = k \cdot \alpha^{n-1} + \epsilon$	$\beta = k \alpha^n + \epsilon$
14	4 снизу	Пусть будутъ безконечно малыя второго порядка.	Пусть будутъ безконечно малыя n -го порядка.
15	4 сверху	второго	n -го

стр.	строка:	напечатано:	слѣдуетъ:
15	2 снизу	второго	n-го
35	5 снизу	$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{Sin} x}{\text{Cos}^2 x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{Sin} x}{\text{Cos}^2 x}$
41	12 сверху	$\frac{dy}{dx} = y (\lg x + 1)$	$\frac{dy}{dx} = y (\lg_e x + 1)$
47	16 сверху	производную x	производной по x
52	1 снизу	$\frac{F(x_1)}{f(x_1)} = \frac{(F'(x_1))}{f'(x)}$	$\frac{F(x_1)}{f(x_1)} = \frac{F'(x_1)}{f'(x_1)}$
76	4 снизу	$y = x \cdot tg + c$	$y = x \operatorname{tg} \alpha + c$
85	11 сверху	$x = \sqrt{a^2 - b^2}$	$x = -\sqrt{a^2 - b^2}$
104	11 снизу	Дѣйствительно	Но
105	1 снизу	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$
115	3 снизу	$8 \int x^{-3} dx = \frac{8}{-2} x^{-2} + C; 8 \int x^{-3} dx = -\frac{8}{2} x^{-2} + C$	
124	3 сверху	$\lg_e (a + \sqrt{x^2 - 1}) + C; \lg_e (x + \sqrt{x^2 - 1}) + C$	
126	1 снизу	и $x = a + \beta v$	откуда $x = \beta v - \alpha$
127	4 сверху	$a (\beta^2 v + \beta^2)$	$a (\beta^2 v^2 + \beta^2)$
—	6 "	$\frac{1}{a\beta} \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + 1}}$	$\frac{1}{\sqrt{a\beta}} \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + 1}}$
точно также во всѣхъ остальныхъ формулахъ на той же страницѣ			
вмѣсто $\frac{1}{a\beta}$ слѣдуетъ поставить $\frac{1}{\sqrt{a\beta}}$. Въ формулѣ 9-й строки снизу			
вмѣсто знака = въ выраженіи въ скобкахъ написать знакъ —			
178	4 снизу	$\frac{1}{2} \sum m v^2 - \frac{1}{1} m v_0^2 =$ $= T - T_0;$	$\frac{1}{2} \sum m v^2 -$ $-\frac{1}{2} \sum m v_0^2 = T - T_0$

ПОПРАВКИ ДЛЯ II-й ЧАСТИ.

<i>стр.</i>	<i>строка:</i>	<i>напечатано:</i>	<i>слѣдуетъ:</i>
16	16 снизу	$H \cdot l = \frac{dV}{dl}$	$H = - \frac{dV}{dl}$
22	11—12 снизу	абсолютной величины;	алгебраической вели- чины
—	9 „	динномъ полѣ	данномъ полѣ
56	3 строка въ выносѣ	$2\pi (1 - \cos \sigma)$	$2\pi (1 - \cos \alpha)$
64	11 сверху	$\frac{10^2}{60} \left(\frac{L}{T_2} \right)$	$\frac{10^2}{60} \left(\frac{L}{T} \right)$
—	3 снизу	$\frac{60}{102}$	$\frac{60}{10^2}$
—	1 снизу	$\frac{5400 \times 60}{102}$	$\frac{5400 \times 60}{10^2}$

Примѣчаніе. Если будутъ найдены еще опечатки во 2-й ча-
сти, эти опечатки будутъ помѣщены въ началѣ 3-й части сочиненія.

Теоретическій и практический курсъ электротехники. Сост. **П. Войнаровский**, преподаватель электротехническаго института. Часть I. Основныя свѣдѣнія изъ высшей математики, необходимыя электротехнику. Съ 31 рис. 1897 г. Въ изыщн. перепл. 1 р. 50 к. Часть II. Основы теории электрическихъ и магнитныхъ явленій. Съ 94 рис. 1899 г. въ пер. ц. 1 р. 80 к.

Весь курсъ будетъ раздѣленъ на 10 частей. 3 часть содержитъ: Практическую электротехнику. 4 часть: Электродвигатели постояннаго и переменнаго тока. 5 часть: Трансформаторы постояннаго и переменнаго тока. 6 часть: Электрическое освѣщеніе. 7 часть: Передача и распредѣленіе электрич. энергіи. 8 часть: Электротехническія измѣренія. 9 часть: Гальванопластика, электрометаллургія, электрическая пайка. 10 часть: Примѣрн. проекты динамо-машинъ, электродвигателей, трансформаторовъ, проекты со смѣтами по электрическому освѣщенію, по передачѣ электрической энергіи и т. п.

Практическое руководство къ примѣненію электричества въ промышленности. Единицы измѣренія.—Батареи и электрическія машины.—Электрическое освѣщеніе.—Электрическая передача работы.—Гальванопластика и металлургія.—Телефонія. Составили: **Е. Кадіа** и **Л. Дюбость**. Съ 257-ю чертежами въ текстѣ. Перев. съ 4-го франц. изданія. **Н. де-Шаріеръ**. Русское изданіе 3-е. 1894. Цѣна 5 р., въ перепл. 5 р. 75 к.

Заслуживаетъ вниманія то обстоятельство, что на русскомъ языкѣ предстоящая книга, чисто специальная по содержанию—выдерживаетъ уже третье изданіе. Такой успѣхъ, очевидно, кромѣ интереса, внушаемаго самымъ предметомъ, не въ малой мѣрѣ зависитъ и отъ присущихъ книгѣ Кадіа и Дюбоста достоинствъ. И въ самомъ дѣлѣ, по широтѣ программы, ясности и обстоятельности изложенія—трудно что-нибудь требовать болѣе отъ specialнаго руководства. Кромѣ подробнаго изложенія всѣхъ основныхъ понятій и фактовъ, необходимыхъ для полнаго уразумѣнія практическихъ примѣненій электричества, книга содержитъ описаніе всѣхъ способовъ этихъ примѣненій—освѣщенія, передачи работы, гальванопластики, электрометаллургіи и телефоніи. По мѣрѣ накопленія новостей во всѣхъ областяхъ примѣненія электричества, авторъ немедленно заноситъ ихъ въ новыя изданія своей книги, которая въ ея нынѣшнемъ видѣ представляетъ полный и добросовѣстный сводъ нов. данныхъ, добытыхъ наукою и практикою. Вообще книга Кадіа и Дюбоста одно изъ самыхъ существенно полезныхъ приобрѣтеній нашей литературы въ технической области. Желаемъ ей прежняго, неизмѣннаго успѣха.

Изданія К. Л. Риккера въ С.-Петербургѣ.

Невскій пр., № 14.

Справочная книга для электротехниковъ. Составили Н. Гравинкель и Н. Штрэннеръ. Переводъ съ 3-го нѣмецк. издан. Д. Голова. Съ 250 рисунками. 1893. Цѣна 4 р. 80 к., въ кож. перепл. 6 руб.

Изъ предисловія переводчика: Это сочиненіе Гравинкеля и Штрэнкера въ оригиналѣ имѣло большой успѣхъ, въ короткое время выдержало два изданія и приобрѣло себѣ извѣстность необходимой **настойной книги для электротехниковъ.** Дѣйствительно, она представляетъ собою одну изъ самыхъ полныхъ (если не самую полную) справочныхъ электротехническихъ книгъ и, по богатству заключающихся въ ней свѣдѣній, можетъ быть весьма полезной для лицъ, занимающихся различными отраслями электротехники, начиная отъ телеграфистовъ, телефонистовъ и электроосвѣтителей и кончая проводчиками электрическихъ звонковъ.

Добавленіе къ справочной книгѣ для электротехниковъ Н. Гравинкеля и Н. Штрэнкера. Составилъ по 4-го нѣмецк. изданію инженеръ-механикъ Д. Головъ. Съ 12 рис. 1895. Цѣна 50 коп.

Практическое руководство къ построенію динамо-машинъ съ постояннымъ токомъ. Инженеръ-технолога Л. А. Боровича. 2 исправл. и значительно дополненное изданіе. Съ 164 рис. 1894. Цѣна 3 р., въ переплетѣ 3 р. 50 к.

Введеніе въ ученіе объ электричествѣ. Чтенія Б. Ю. Кольбе, препод. физики въ училищѣ св. Анны въ Спб. 1 часть. Статическое электричество. Съ 75 рис. 1893. Цѣна 1 р. 20 к., въ перепл. 1 р. 60 к. 2 часть. Динамическое электричество. Съ 75 рис. 1896. Цѣна 1 р. 40 к., въ перепл. 1 р. 80 к.

Рекомендовано Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просв. для основныхъ и ученическихъ библіотекъ мужскихъ и женскихъ гимназій, реальныхъ училищъ, учительскихъ институтовъ и семинарій.

Изложеніе лекцій настолько хорошо и популярно, что по прочтеніи ихъ, составляется полное представленіе о предметѣ. Книга эта можетъ служить прекраснымъ пособіемъ для изученія электричества и доступна всѣмъ, интересующимся электричествомъ, лицамъ. Издана книга отлично и рисунки исполнены очень отчетливо.

(«Смоленскій Вѣстникъ», 1893, № 44).

Изразцы и мозаика (монументальная эмалевая живопись) Очеркъ техники и значеніе ихъ въ декоративномъ искусствѣ и зодчествѣ, **В. Селезнева**. Съ 19 рис. 1896. Цѣна 1 р.

Въ виду вновь растущаго значенія монументальн. эмалевой полихроміи, важной, между прочимъ, для возрождающагося русскаго стиля въ зодчествѣ, является весьма кстати появленіе названной брошюры, представляющей очеркъ техники мозаичной изразцовой полихроміи и значенія ея въ декоративномъ искусствѣ и зодчествѣ.

Предлагаемая брошюра раздѣлена на 2 части. Въ первой части дается историческій обзоръ монументальной эмалевой полихроміи съ древнѣйшихъ временъ, являющійся довольно интереснымъ, несмотря на краткость. Во второй части изложена общая техника мозаичной и изразцовой полихроміи, причемъ сообщается не мало полезныхъ свѣдѣній и указаній.

(«Ремесленная Газета», 1896, № 29).

Образцы архитектурныхъ деталей для употребленія въ среднихъ и низшихъ техническихъ училищахъ, реальныхъ училищахъ и т. п. заведенійхъ.

Пятнадцать листовъ образцовъ съ краткимъ руководствомъ къ пользованію ими архитектора **М. Шервинскаго**, директора ремеслен. училища въ Ригѣ. 1891. Цѣна атласа въ 15 листовъ—6 руб. и руководства съ 155 рис.—1 р.

Ледники и искусственное охлажденіе. Практическое руководство для техниковъ, инженеровъ, архитекторовъ, строителей и т. д. Составилъ **С. Н. Ванновъ**. Съ 94 рис., 1896. Цѣна 1 р. 50 к.

Паровыя и ручныя прачешныя по системѣ **О. Шимеля**. Соч. инженеръ-технолога **М. Лудзскаго**. Съ 46 рис. 2 изданіе 1896. Цѣна 80 к.

Механика для техническихъ и ремесленныхъ училищъ, а также самообученія. Сост. **Ф. Губеръ**. Перев. съ 4-го нѣмецк. изд. подъ ред. **М. А. Савича**. 2 русск. изд., исправленное и дополненное по указаніямъ автора. Съ 489 чертежами въ текстѣ. 1891. Цѣна 3 р., въ переплетѣ 3 р. 65 к.

Книга Губера хорошо составлена, весь матеріалъ въ ней стройно и разносторонне обработанъ, содержаніе книги изобилуетъ множествомъ и такихъ подробностей и такихъ ссылокъ на литературные источники, которыя всегда полезно имѣть подъ руками и преподавателямъ механики, и любителямъ научныхъ приложеній ея. 41 печатный листъ текста этой книга поясняется 4^{1/2} сотнями ясно исполненныхъ чертежей и рисунковъ и множествомъ числовыхъ примѣровъ и задачъ во всѣхъ отдѣлахъ курса.

(«Техническій Сборникъ», 1891, № 7).

Искусственное высушиваніе дерева. Составилъ инженеръ-технологъ **А. А. Прессъ**. 2 исправл. и дополн. изданіе. Съ 25 рис. 1895. Цѣна 80 к.

Имѣть сухое дерево для всякихъ подѣлокъ, въ особенности болѣе тонкихъ и въ достаточномъ количествѣ, трудно; книжка г. Пресса даетъ многія полезныя указанія, какъ по естественной, такъ и по искусственной сушкѣ. Подробнѣе изложены основанія послѣдней, причемъ приведены и сравнены различные способы сушки дерева и описаны нѣсколько хорошихъ сушиленъ за границей и лѣсопильный аппаратъ Булыгина.

(«Правит. Вѣстникъ», 1895, № 22),

Уходъ за паровыми котлами и машинами. Руков. для машинистовъ и кочегаровъ, удостоенное преміи Импер. Русскаго Техническаго Общества. Соч. **С. Войслава**. 3 исправл. издан. Съ 18 рис. 1898. Цѣна въ перепл. 1 р.

Очевидная польза отъ употребленія этой книжки сказалась бы очень скоро, такъ какъ всѣ свѣдѣнія, необходимыя для машинистовъ и кочегаровъ, изложены весьма простымъ и понятнымъ языкомъ. Въ началѣ изложены правила объ уходѣ и присмотрѣ за паровыми котлами, даны основныя понятія о горѣніи и о свойствахъ водяного пара, объяснено устройство топокъ, приборовъ, питающихъ паровой котель, и приборовъ, составляющихъ принадлежность всякаго котла, находящагося въ дѣйствіи; наконецъ, обстоятельно изложены правила пусканія въ ходъ парового котла, ухода за нимъ, остановокъ дѣйствія котла и чистка его. Второй отдѣлъ книжки посвященъ машинамъ. Здѣсь кратко и ясно объяснены части паровыхъ машинъ: шатуны, кривошипы, поршни-сальники и проч., даны необходимыя свѣдѣнія о золотникахъ, клапанахъ, кулисахъ, регуляторахъ и проч., далѣе изложенъ уходъ, присмотръ, содержаніе въ чистотѣ, установка, провѣрка и незначительныя исправленія этихъ частей. Все это пояснено достаточнымъ количествомъ простыхъ и ясныхъ чертежей и не затруднено ни формулами, ни теоретическими выводами.

Основанія графическихъ способовъ разсчета сооружений. Начала статистики сооружений. **С. Н. Куницкаго**. 2-е исправл. и улучш. изданіе. Съ 61 рис. 1897. Цѣна 1 р. 60 к.

Основанія графическихъ способовъ разсчета мостовъ простыхъ системъ. Статистика сооружений. Составилъ проф. Института Инженеровъ Путей Сообщенія. **С. Н. Куницкій**. 2 исправл. изданіе. Съ 64 полиטיפажми 1895. Цѣна 1 р. 60 к.