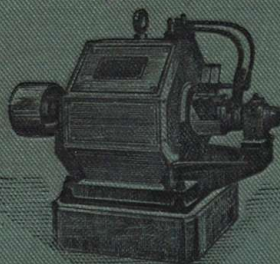


НА ДОМ
ДАЕТСЯ

Теоретич. и Практическій
Курсъ
Электротехники



Л. Войнаровскаго

Ч. III.

Теорія явленій
перемѣнныхъ токовъ
въ однофазныхъ
и многофазныхъ цѣпяхъ

P. 1.5082

ИЗДАНИЕ
РИККЕРА С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Изданія К. Л. Риккера въ С.-Петербургѣ.

Невскій пр., № 14.

Теоретическій и практическій курсъ электротехники. Сост. **П. Войнаровскій**, преподаватель Электротехническаго института. Часть I. Основныя свѣдѣнія изъ высшей математики, необходимыя электротехнику. Съ 31 рис. 1897, въ перепл. 1 р. 50 к. Часть II. Основы теоріи электрическихъ и магнитныхъ явленій. Съ 94 рис. 1899, въ перепл. ц. 1 р. 80 к. Часть III. Теорія переменнаго тока. Съ 102 рис. 1902 г., въ перепл. ц. 1 р. 60 к.

Электротехника. Соч. **Л. Свенторжецкаго**, преподават. Николаевской Инженерной Академіи. Основные законы.—Техническія измѣренія.—Аккумуляторы, динамомашинны и электродвигатели постояннаго тока. 2-е знач. дополн. и перераб. изданіе. Текстъ съ отдѣльн. атласомъ чертежей въ 65 табл. 1901, ц. 7 р., въ изящномъ переплетѣ ц. 9 р.

Электротехника переменнаго, однофазнаго и трехфазнаго тока. Сочин. **Л. Свенторжецкаго**. Основныя законы, измѣренія, динамомашинны. 1904 фиг. въ перепл. ц. 7 р.

Р. 1.5082

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



1.5082

Войнаровский П. Д. Теоретиче

Изданія К. Л. Риккера въ С.-Петербургѣ.

Невскій пр., № 14.

Справочная книга для электротехниковъ. Составили Н. Гравиннель и Н. Штрэнкертъ. Переводъ съ 3-го нѣмецк. издан. Д. Гольца. Съ 250 рисун. 1893, ц. 4 р. 80 к.

Карманная книжка для установщиковъ электрическаго освѣщенія. Инж. С. ф.-Гайсберга. Переводъ съ 17-го нѣм. изд. В. Н. Лебединскаго. Съ 154 рис. Русское изданіе 4-е. 1899. Въ перепл. 1 р. 20 к.

Начальное руководство къ самостоятельному изученію высшей математики и механики. Сост. проф. Н. Б. Делоне. Съ 321 фигурой въ текстѣ. 1900, ц. 4 р. 20 к., въ изящн. перепл. 5 р.

Дифференціальное и интегральное исчисленія съ приложеніями къ анализу и геометріи. Составилъ А. Пароменскій. 2 испр. изд. Съ 56 фиг. 1901. Ц. 4 р., въ изящн. перепл. 4 р. 50 к.

Мы можемъ рекомендовать курсъ дифференціального и интегрального исчисленія г. Пароменскаго, какъ одинъ изъ лучшихъ учебниковъ по этому предмету, притомъ вполне приспособленный къ самоученію и изобилующій примѣрами, составляющими главную основу всякой математической науки.

„Новости“ 1893, № 336.

Курсъ физики проф. О. Д. Хвольсона. Томъ I. Введеніе.—Механика.—Нѣкоторые измѣрительные приборы и способы измѣренія.—Ученія о газахъ, жидкостяхъ и твердыхъ тѣлахъ. 2-е пересмотренн. и дополненное изданіе. Съ 396 рис. 1900. Ц. 5 р. Томъ II. Ученіе о звукѣ (акустика).—Ученіе о лучистой энергіи. Съ 597 рис. 1898, ц. 5 р. Томъ III. Ученіе о теплотѣ. Съ 230 рис. 1899, ц. 5 р., въ изящн. пер. на 80 к. дороже.

Четвертый томъ будетъ содержать ученіе о магнетизмѣ и объ электричествѣ (выйдетъ въ 1903 г.).

Краткой курсъ физики для медиковъ, естествоиспытателей и техниковъ, профессора О. Д. Хвольсона. Часть I. Введеніе.—Нѣкоторые измѣрительные приборы и способы измѣренія.—Ученіе о газахъ, жидкостяхъ и твердыхъ тѣлахъ. Съ 242 рис. Часть II. Ученіе о звукѣ (акустика).—Ученіе о лучистой энергіи. Съ 307 рис. Часть III. Ученіе о теплотѣ. Съ 166 рис. 1900. Цѣна каждой части 2 р. 50 к., въ изящн. переплетѣ 3 р. Весь курсъ рассчитанъ на 4 части. Часть IV выйдетъ въ 1903 г.

Лекціи по термодинамикѣ проф. теоретич. физики Макса Планка. Перев. съ нѣмецкаго подъ ред. проф. И. И. Боргмана. Съ рис. 1900, ц. 2 р. 40 к.

З. Х-261

ТЕОРЕТИЧЕСКІЙ И ПРАКТИЧЕСКІЙ КУРСЪ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.

Ч. III.

Теорія явленій перемѣнныхъ токовъ въ
однофазныхъ и многофазныхъ цѣпяхъ.

45,03
621,3

621,3

ТЕОРЕТИЧЕСКІЙ И ПРАКТИЧЕСКІЙ КУРСЪ

ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.

Составилъ

П. Д. Войнаровскій,

Профессоръ Электротехническаго Института Императора Александра III.

Часть III.

Теорія явленій переменныхъ токовъ въ однофазныхъ
и многофазныхъ цѣпяхъ.

Съ 102 фигурами въ текстѣ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Изданіе К. Л. Риккера.

Невскій проспектъ, 14.

1902.

ТЕОРІЯ ЯВЛЕНІЙ ПЕРЕМѢННЫХЪ ТОКОВЪ

ВЪ ОДНОФАЗНЫХЪ И МНОГОФАЗНЫХЪ ЦѢЛЯХЪ.

Составилъ

П. Д. Войнаровскій,

Профессоръ Электротехническаго Института Императора Александра III.

Р. 15082
Превср. 1935 Часть III.

Теоретическаго и практическаго курса электротехники.

Съ 102 фигурами въ текстѣ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Изданіе К. Л. Риккера.

Невскій проспектъ, 14.

1902.

ПРОБЕЖЕНО
1945

ПРОБЕЖЕНО
1952



Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 21 іюня 1902 года.

ПРЕДИСЛОВІЕ

къ третьей части.

При составленіи теоретическаго и практическаго руководства по электротехникѣ мы предполагали въ III части изложить о динамашинахъ постоянного и переменнаго тока. Однако практика преподаванія намъ показала, что при настоящемъ развитіи электротехники весьма полезно и даже необходимо предпослать цѣлый довольно обширный отдѣлъ, въ которомъ читатель могъ бы основательно ознакомиться съ наиболѣе характерными явленіями переменнаго тока. Выпускаемая въ настоящее время III часть содержитъ теоретическій анализъ основныхъ явленій въ цѣпяхъ переменнаго тока. Кромѣ алгебраическаго и графическаго методовъ мы привели еще символическій методъ Steinmetz'a, который, хотя и уступаетъ, по нашему мнѣнію, въ общемъ методу графическому, но въ нѣкоторыхъ специальныхъ случаяхъ онъ дѣйствительно является весьма удобнымъ средствомъ для быстрого рѣшенія задачъ по переменному току. Въ нашемъ курсѣ мы старались показать, когда этому методу слѣдуетъ отдавать предпочтеніе въ сравненіи съ графическимъ методомъ.

Главу VII мы спеціально посвятили изслѣдованію явленій переменныхъ токовъ въ присутствіи металлическихъ немагнитныхъ и магнитныхъ массъ и ввели понятіе о кажущемся сопротивленіи отъ токовъ Фуко и гистерезиса. Въ послѣдней (VIII) главѣ мы остановились на изслѣдованіи несинусоидальныхъ токовъ.

Въ заключеніе считаю долгомъ выразить искреннюю признательность Н. А. Жданову, взявшему на себя трудъ по корректурѣ, а также Г. Станевичу, указавшему на нѣкоторыя опечатки.

Проф. П. Войнаровскій.

10-го іюня 1902 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ГЛАВА I.

Періодическія функціи.

§§	Стр.
1. Опредѣленіе періодическихъ функцій	1
2. Простыя гармоническія функціи	2
3. Сложеніе простыхъ гармоническихъ функцій.	5
4. Сумма гармоническихъ функцій различнаго числа періодовъ	6
Графическое изображеніе гармоническихъ функцій.	
5. Графическое изображеніе въ ортогональныхъ координатахъ	6
6. Графическое изображеніе въ полярныхъ ко- ординатахъ	8
7. Изображеніе гармоническихъ функцій посред- ствомъ вращающихся векторовъ	11
8. Теоремы о сложении гармоническихъ функцій.	12
9. Средній квадратъ гармонической функціи . .	15
Символическое изображеніе гармоническихъ функцій.	
10. Опредѣленія	18
11. Арифметическія дѣйствія съ гармоническими функціями при символическомъ обозначеніи.	20

ГЛАВА II.

Явленія переменнаго тока въ простыхъ цепяхъ безъ развѣтвленій.

12. Цѣпь безъ самоиндукціи и емкости	24
13. Дѣйствующая сила тока	25

§§	Стр.
14. Дѣйствующая электродвижущая сила	27
15. Зависимость между напряженіемъ въ произвольной части цѣпи, начальной электродвижущей силой и паденіемъ напряженія . . .	28
16. Дѣйствіе нѣсколькихъ электродвижущихъ силъ въ цѣпи безъ самоиндукціи и емкости . .	29
17. Мощность тока въ цѣпи безъ самоиндукціи .	33
18. Цѣпь съ самоиндукціей	36
19. Мощность тока въ цѣпи съ самоиндукціей . .	46
20. Общая сводка предыдущихъ выводовъ	50
21. Задачи I и II	52
22. Цѣпь съ емкостью	56
23. Опредѣленіе напряженія у зажимовъ конденсатора	60
24. Цѣпь съ самоиндукціей и емкостью	62
25. Явленіе резонанса напряженій	64
26. Измѣненіе напряженія у зажимовъ конденсатора при измѣненіи самоиндукціи и емкости. .	67
27. Выраженіе совмѣстнаго дѣйствія самоиндукціи и емкости	70
28. Дѣйствіе двухъ электродвижущихъ силъ въ цѣпи съ самоиндукціей	72
29. Цѣпь съ нѣсколькими самоиндукціями, включенными послѣдовательно	73
30. Задача I: опредѣленіе электродвижущей силы для цѣпи съ нѣсколькими самоиндукціями и емкостями, включенными послѣдовательно .	77
31. Задача II: опредѣленіе задерживанія	82

ГЛАВА III.

Развѣтвленіе перемѣнныхъ токовъ.

32. Теоремы о сложеніи токовъ и электродвижущихъ силъ въ развѣтвленіяхъ	83
33. Задача I	86
34. Задача II	89
35. Задача III.	91

§§	Стр.
36. Комбинированное сопротивление и комбинированная самоиндукция или емкость въ развѣтвленныхъ цѣпяхъ	94
37. Задача IV	99
38. Резонансъ токовъ	104

ГЛАВА IV.

Сопоставленіе методовъ для изслѣдованія переменнаго тока.

39. Общее заключеніе о разсмотрѣнныхъ методахъ.	112
40. Примѣненіе алгебраическаго и графическаго метода	113
41. Примѣненіе символическаго метода	115

ГЛАВА V.

Многофазныя системы.

42. Опредѣленія	118
---------------------------	-----

Симметричныя связанныя уравновѣшенныя системы.

43. Система типа <i>A</i>	122
44. Система трехфазная треугольникомъ	136
45. Система четырехфазная четырехугольникомъ	139
46. Система типа <i>B</i>	141
47. Система трехфазная звѣздой	149
48. Система четырехфазная звѣздой	150
49. Система типа <i>C</i>	150
50. Система трехфазная типа <i>C</i> (звѣздой)	155
51. Система четырехфазная типа <i>C</i> (звѣздой)	155
52. Система типа <i>D</i>	155

Симметричныя связанныя неуравновѣшенныя системы.

53. Трехфазная система треугольникомъ.	157
54. Трехфазная система звѣздой	164
55. Частный случай предыдущей системы.	168

Несимметричныя связанныя системы.

56. Опредѣленія	169
57. Двухфазная уравновѣшенная и неуравновѣшенная системы	170
58. Частный случай этой системы	175
59. Заключение о двухфазной системѣ	176
60. Моноциклическая система	177

Глава VI.

Явленія переменныхъ токовъ въ трансформаторныхъ цѣпяхъ.

61. Взаимодѣйствіе между трансформаторными катушками	182
62. Распределение токовъ въ первичной и вторичной цѣпяхъ трансформатора.	185
63. Случай вѣшной цѣпи съ самоиндукціей.	195

Глава VII.

Явленія переменныхъ токовъ въ присутствіи металлическихъ массъ.

64. Случай немагнитныхъ металлическихъ массъ.	197
65. Случай магнитныхъ металлическихъ массъ.	200

Глава VIII.

Несинусоидальныя токи.

66. Сложные гармоническіе переменные токи.	210
67. Теорема I	212
68. Теорема II	212
69. Дѣйствующая сила несинусоидальнаго тока	214
70. Выраженія для несимметричныхъ и симметричныхъ періодическихъ токовъ и электродвижущихъ силъ	219
71. Дѣйствіе сложной періодической электродвижущей силы въ цѣпи съ самоиндукціей и емкостью	219
72. Резонансъ напряженій	222

ГЛАВА I.

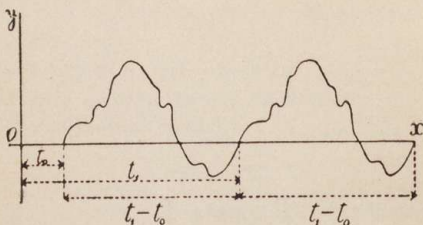
Періодическія функціи.

1. Предположимъ, что у насъ имѣется нѣкоторая перемѣнная величина, измѣняющаяся въ зависимости отъ другой, на примѣръ отъ времени по нѣкоторому закону

$$y=f(t).$$

Предположимъ, что измѣненія этой функціи подчиняются слѣдующимъ условіямъ: при измѣненіи t отъ 0 до ∞ функція измѣняется слѣдующимъ образомъ: при $t=t_0$ $y=0$; при измѣненіи t отъ t_0 до t_1 функція измѣняется, то возрастаая, то убывая, то, переходя чрезъ нуль, становится временами отрицательною, то наконецъ при $t=t_1$ становится снова равна нулю и послѣ этого начинаетъ пріобрѣтать тѣ же значенія, что и въ промежуткѣ времени t_1-t_0 , т. е. на примѣръ для $t=t_1+t'$, ея значеніе будетъ то же, что для t_0+t' , гдѣ t' измѣняется отъ 0 до t_1-t_0 , затѣмъ снова черезъ новый промежутокъ времени t_1-t_0 , т. е. послѣ момента $t_1+t_1-t_0$ опять принимаетъ тѣ же значенія и т. д.; словомъ значенія функціи будутъ повторяться черезъ промежутки времени t_1-t_0 . Тогда говорятъ, что функція y — періодическая и время полного періода будетъ $T=t_1-t_0$; время t_0 называется эпохою измѣненія періодической функціи, также началомъ фазы или просто фазою.

На прилагаемой фигурѣ представлена одна изъ періодическихъ функцій графически.



Фиг. 1.

2. Мы здѣсь взяли самый общій видъ періодической функціи. Самою простою періодическою функціею является такъ называемая простая гармоническая функція вида:

$$y = A \cdot \sin (mt \pm \varphi)$$

Разсмотримъ функцію $y = A \cdot \sin (mt + \varphi)$. Она будетъ равна нулю, когда

$$\sin (mt + \varphi) = 0$$

т. е. когда

$$mt + \varphi = k\pi,$$

гдѣ k какое угодно цѣлое число, т. е. при

$$t = \frac{k\pi}{m} - \frac{\varphi}{m}$$

Функція будетъ отрицательна, когда

$$mt + \varphi = (2k + 1)\pi + \alpha$$

или когда

$$mt + \varphi = 2k\pi - \alpha$$

и т. д.

Если

$$mt + \varphi = \alpha$$

$$mt + \varphi = 2\pi + \alpha$$

$$mt + \varphi = 4\pi + \alpha$$

$$\dots \dots \dots$$

$$mt + \varphi = 2k\pi + \alpha$$

то значенія функціи:

$$\begin{aligned} y_1 &= A \sin \alpha \\ y_2 &= A \sin (2\pi + \alpha) \\ y_3 &= A \sin (4\pi + \alpha) \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= A \sin (2k\pi + \alpha) \end{aligned}$$

будуть одинаковы и будутъ измѣняться въ одномъ и томъ же порядкѣ при измѣненіи α отъ 0 до 2π .

Это значитъ, что при всѣхъ значеніяхъ t , измѣняющихся согласно уравненіямъ:

$$\begin{aligned} mt + \varphi &= \alpha & ; & \quad t = \frac{\alpha - \varphi}{m} \\ mt + \varphi &= 2\pi + \alpha; & t &= \frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha - \varphi}{m} \\ mt + \varphi &= 4\pi + \alpha; & t &= \frac{4\pi}{m} + \frac{\alpha - \varphi}{m} \\ &\dots \dots \dots \\ mt + \varphi &= 2k\pi + \alpha; & t &= \frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha - \varphi}{m} \end{aligned}$$

гдѣ α можетъ имѣть всѣ значенія отъ 0 до 2π , значенія функціи будутъ повторяться въ томъ же порядкѣ, иначе говоря эти повторенія будутъ черезъ промежутки времени:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha - \varphi}{m} - \frac{\alpha - \varphi}{m}, \\ \frac{4\pi}{m} + \frac{\alpha - \varphi}{m} - \left(\frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha - \varphi}{m} \right) \end{aligned}$$

и т. д., то есть черезъ промежутки времени $\frac{2\pi}{m}$. Такимъ образомъ полный періодъ этой функціи будетъ $T = \frac{2\pi}{m}$; эпоха фазы или фаза будетъ $-\frac{\varphi}{m}$, ибо при

$$t = -\frac{\varphi}{m}, \quad y = 0, \quad \text{гдѣ } m = \frac{2\pi}{T}$$

$\frac{1}{T}$ представляетъ собою число полныхъ періодовъ

въ единицу времени, т. е. въ секунду. Пусть $\frac{1}{T} = n$, тогда можемъ написать

$$y = A \sin(2\pi nt + \psi),$$

гдѣ $\psi = \frac{\varphi}{m}$.

Точно также для функціи

$$y = A \sin(mt - \varphi)$$

найдемъ, что полный періодъ будетъ

$$T = \frac{2\pi}{m}$$

$$\psi = \frac{\varphi}{m}$$

и слѣдовательно

$$y = A \sin(2\pi nt - \psi)$$

Обѣ функціи разнятся по фазѣ на $\psi - (-\psi) = 2\psi$.

Для первой функціи фаза ея опережаетъ начало временъ на ψ , а вторая функція наоборотъ отстаетъ по фазѣ отъ начала временъ на ψ .

Если мы примемъ за начало временъ фазу 1-й функціи, то это будетъ значить, что при $t = 0$, $y = 0$, слѣдовательно $\frac{\varphi}{m} = 0$ и тогда

$$y = A \sin mt = A \sin 2\pi nt.$$

Функція

$$y = A \sin(mt - \varphi)$$

при этомъ выборѣ начала временъ приметъ видъ:

$$y = A \sin(mt - 2\varphi),$$

ибо разность фазъ между 1-ой и 2-ой функціей равна $\frac{2\varphi}{m}$, причемъ фаза 2-ой функціи запаздываетъ по отношенію къ 1-ой.

Вообще если имѣемъ двѣ функціи:

$$y = A \sin(2\pi nt + \psi)$$

$$y_1 = A' \sin(2\pi nt + \psi'),$$

то разность фазъ будетъ $\psi' - \psi$ и если примемъ фазу 1-ой функціи за начало временъ, то 2-ая функція приметъ видъ

$$y = A' \sin [2\pi nt + (\psi' - \psi)]$$

3. Алгебраическая сумма двухъ простыхъ гармоническихъ функцій одинаковаго періода есть также гармоническая функція.

Пусть имѣемъ:

$$\begin{aligned} y' &= A' \sin (2\pi nt + \psi') \\ y'' &= A'' \sin (2\pi nt + \psi'') \end{aligned}$$

Требуется доказать, что:

$$y = y' \pm y'' = A \sin (2\pi nt + \psi).$$

Подставляя вмѣсто y' и y'' ихъ значенія въ развернутомъ видѣ, найдемъ:

$$\begin{aligned} y' \pm y'' &= A' \sin 2\pi nt \cdot \cos \psi' + A' \cos 2\pi nt \cdot \sin \psi' \pm \\ &\quad \pm A'' \sin 2\pi nt \cos \psi'' \pm A'' \cos 2\pi nt \sin \psi'' \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} y' \pm y'' &= \sin 2\pi nt \{A' \cos \psi' \pm A'' \cos \psi''\} + \\ &\quad + \cos 2\pi nt \{A' \sin \psi' \pm A'' \sin \psi''\} \end{aligned}$$

Полагая

$$A' \cos \psi' \pm A'' \cos \psi'' = A \cos \psi. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$A' \sin \psi' \pm A'' \sin \psi'' = A \sin \psi. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

получимъ

$$\begin{aligned} y' + y'' &= A \sin 2\pi nt \cos \psi + A \cos 2\pi nt \sin \psi = \\ &= A \sin (2\pi nt + \psi) \end{aligned}$$

причемъ изъ уравненій (1) и (2)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{A' \sin \psi' \pm A'' \sin \psi''}{A' \cos \psi' \pm A'' \cos \psi''}$$

а возвышая (1) и (2) въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$A^2 = (A' \sin \psi' \pm A'' \sin \psi'')^2 + (A' \cos \psi' \pm A'' \cos \psi'')^2.$$

Точно также докажемъ, что алгебраическая сумма нѣсколькихъ гармоническихъ функцій одного и того

періода будетъ гармоническою функціею того же періода, т. е. если имѣемъ:

$$y_1 = A_1 \sin (2\pi nt + \psi_1)$$

$$y_2 = A_2 \sin (2\pi nt + \psi_2)$$

$$y_n = A_n \sin (2\pi nt + \psi_n),$$

то

$$y = y_1 + y_2 + y_3 \dots + y_n = A \sin (2\pi nt + \psi).$$

4. Алгебраическая сумма гармоническихъ функцій разнаго числа періодовъ не будетъ простою гармоническою функціею, но все же будетъ періодическою функціею. Наоборотъ всякая періодическая функція по теоремѣ Фурье можетъ быть представлена въ видѣ алгебраической суммы гармоническихъ функцій разнаго періода.

Такъ, если имѣемъ періодическую функцію

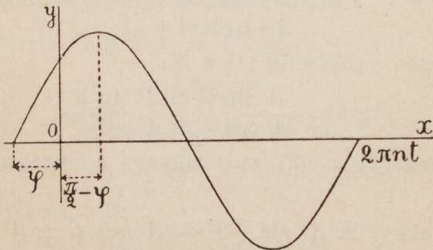
$$y = f(t)$$

то можно всегда написать

$$y = A_1 \sin (2\pi nt + \varphi_1) + A_2 \sin (2\pi nt + \varphi_2) + A_3 \sin (2\pi n_3 t + \varphi_3) + \dots + A_k \sin (2\pi n_k t + \varphi_k).$$

Графическое изображеніе гармоническихъ функцій.

5. Графическое изображеніе въ ортогональныхъ координатахъ. Если, какъ абсциссы, будемъ откладывать



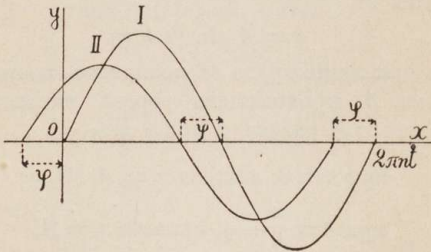
Фиг. 2.

t или $2\pi nt$, а какъ ординаты соотвѣтствующія значенія $y = A \sin (2\pi nt + \varphi)$, то получимъ кривую, изображенную на фиг. 2.

Для $2\pi nt + \varphi = 0$ или для $2\pi nt = -\varphi$ кривая пересѣчетъ ось абсциссъ;

для $2\pi nt + \varphi = \frac{\pi}{2}$ или для $2\pi nt = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ордината кривой будетъ maximum;

для $2\pi nt + \varphi = \pi$ или для $2\pi nt = \pi - \varphi$ кривая опять пересѣчетъ ось абсциссъ и т. д.



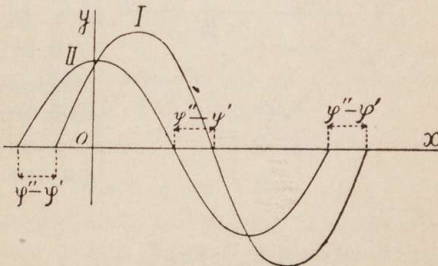
Фиг. 3.

Если имѣемъ двѣ функціи

$$y' = A' \sin (2\pi nt) \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

$$y'' = A'' \sin (2\pi nt + \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

то получимъ изображение фиг. 3.



Фиг. 4.

Вообще двѣ функціи

$$y' = A' \sin (2\pi nt + \varphi')$$

$$y'' = A'' \sin (2\pi nt + \varphi'')$$

изображаются кривыми I и II (фиг. 4).

6. Графическое изображеніе въ полярныхъ координатахъ. Пусть

$$2\pi nt = \theta, \quad y = \rho$$

тогда

$$y = A \sin (2\pi nt + \varphi)$$

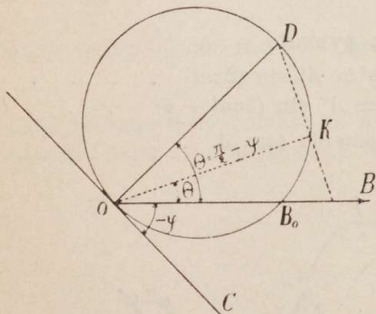
обращается въ

$$\rho = A \sin (\theta + \varphi)$$

Это есть уравненіе круга въ полярныхъ координатахъ, діаметромъ A , проходящаго черезъ начало координатъ. Векторъ ρ равенъ 0 при $\theta = -\varphi$;

при $\theta = 0$, векторъ $\rho = A \sin \varphi$;

при $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, векторъ $\rho = A$.



Фиг. 5.

Пусть OB направление вектора, отъ котораго мы будемъ откладывать начало угловъ θ . Тогда величина вектора для этого направленія будетъ (фиг. 5):

$$OB_0 = A \sin \varphi.$$

Направленіе діаметра круга соотвѣтственно углу, при которомъ $\rho =$

A , т. е. когда

$$(\theta + \varphi) = \frac{\pi}{2}; \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

будетъ OD .

Направление вектора, когда $\rho = 0$, будетъ OC , образующее съ OB уголъ $\angle BOC = -\varphi$, ибо тогда при $\theta = -\varphi$

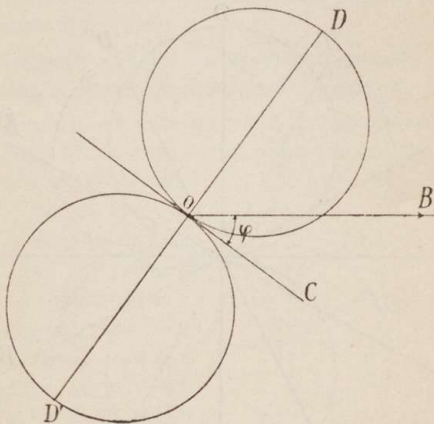
$$\rho = A \sin (\theta + \varphi) = 0.$$

Докажемъ теперь, что векторъ OK проведенный подъ какимъ угодно угломъ θ къ OB , будетъ изображать мгновенное значеніе функціи соотвѣтственно углу θ , т. е. будетъ изображать величину

$$A \sin (\theta + \varphi).$$

Дѣйствительно изъ прямоугольнаго треугольника ODK имѣемъ:

$$OK = OD \cdot \sin \angle ODK;$$



Фиг. 6.

но $\angle ODK = \angle KOC$, ибо оба эти угла измѣряются половиною дуги OB_0K . Слѣдовательно

$$OK = OD \cdot \sin \angle KOC,$$

откуда

$$OK = A \sin (\theta + \varphi).$$

Кругъ OB_0D будетъ изображать мгновенныя значенія функціи $\rho = A \sin (\theta + \varphi)$ до тѣхъ поръ пока $\theta + \varphi < \pi$. Для большихъ значеній угла, $A \sin (\theta + \varphi)$ будетъ имѣть отрицательныя значенія, которые могутъ

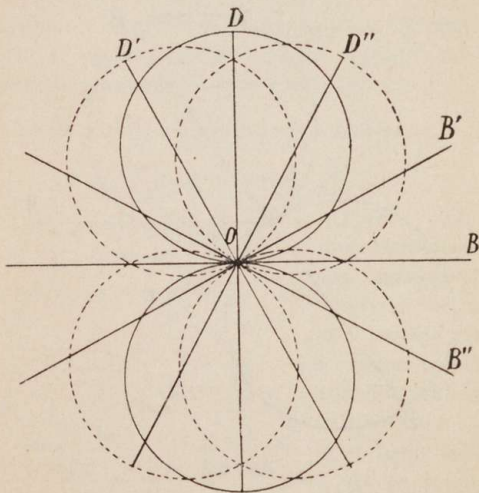
быть изображены вторымъ кругомъ, одинаковаго діаметра съ первымъ и также касательнымъ къ вектору OC (фиг. 6).

Такимъ образомъ функцію

$$A \sin (\theta + \varphi) \text{ или}$$

$$A \sin (2\pi nt + \varphi)$$

графически можно изобразить двумя окружностями, діаметръ которыхъ равенъ амплитудѣ A и которыя касательны къ вектору OC , составляющему съ векторомъ начала угловъ (или временъ), уголъ равный углу фазы данной функціи. Этотъ уголъ вектора OC откла-



Фиг. 7.

дывается въ противоположную сторону угловъ $2\pi nt$, если фаза опережаетъ начало временъ и по направленію этихъ послѣднихъ, если фаза запаздываетъ передъ началомъ временъ.

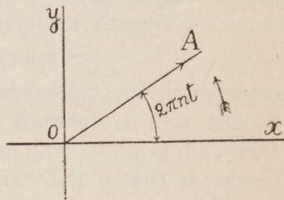
Если мы изображаемъ нѣсколько гармоническихъ функцій, то фазу одной изъ нихъ можно взять за на-

чало время, т. е. тогда векторъ фазы будетъ совпадать для этой функціи съ векторомъ начала время.

На прилагаемомъ чертежѣ (фиг. 7) изображены три функціи одинаковой амплитуды A , но разнящіяся по фазѣ; для краткости каждую изъ функцій мы будемъ характеризовать діаметромъ положительнаго круга (т. е. круга, который даетъ положительныя значенія). На чертежѣ функція OD' отстаетъ по фазѣ отъ функціи OD , а функція OD'' опережаетъ фазу этой послѣдней. Векторъ OB фазы функціи OD принять за начало время. Изъ чертежа уже видно, насколько неудобенъ этотъ графическій способъ изображенія въ случаѣ одновременнаго изслѣдованія нѣсколькихъ гармоническихъ функцій.

7. Перейдемъ теперь къ третьему способу графическаго изображенія гармонической функціи.

Представимъ себѣ векторъ OA , вращающійся вокругъ точки O въ плоскости чертежа съ угловою скоростью $2\pi n$ и пусть въ моментъ t , уголъ, составляемый векторомъ OA съ произвольно выбранною осью ox , будетъ $2\pi nt$. Мы предполагаемъ, что векторъ OA вращается по направленію обратному движенію часовой стрѣлки. Очевидно, что ось



Фиг. 8.

ox представляетъ собою направленіе вектора, когда $t=0$. Ясно, что при положеніи вектора OA въ моментъ t , т. е. когда уголъ $Aox = 2\pi nt$, проекція этого вектора на ось oy перпендикулярную къ ox будетъ

$$y = OA \sin 2\pi nt$$

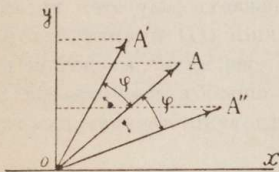
и это въ какой угодно моментъ, т. е. при какомъ угодно углу $2\pi nt$. Отсюда заключаемъ, что простая гармоническая функція вида $y = A \sin 2\pi nt$ можетъ быть представлена векторомъ OA , равнымъ по вели-

чинѣ амплитудѣ A , вращающимся вокругъ точки O съ угловою скоростью $2\pi n$ по направленію обратному движенію часовой стрѣлки. Начало вращенія, т. е. начало времени опредѣляется направленіемъ оси ox .

Возьмемъ теперь функцію:

$$y' = A' \sin(2\pi nt + \varphi).$$

Пусть опять (фиг. 9) ox есть ось начала времени. Ясно,



Фиг. 9.

что если векторъ OA въ данный моментъ t , образуя уголъ $Aox = 2\pi nt$, изображаетъ функцію $A \sin(2\pi nt)$, то векторъ OA' , отодвинутый впередъ по направленію вращенія на уголъ φ , будетъ изображать въ любой моментъ функцію

$$A \sin(2\pi nt + \varphi).$$

Точно также векторъ OA'' , отодвинутый назадъ отъ A на уголъ φ будетъ изображать функцію

$$A \sin(2\pi nt - \varphi).$$

Отсюда выводимъ слѣдующее заключеніе: если векторъ OA , при выбранной оси времени ox , представляетъ собою въ любой моментъ функцію $A \sin 2\pi nt$, то векторы OA' и OA'' отодвинутые первый впередъ на уголъ φ , а второй назадъ на уголъ φ , будутъ соответственно въ тѣ же моменты изображать функціи $A \sin(2\pi nt + \varphi)$ и $A \sin(2\pi nt - \varphi)$.

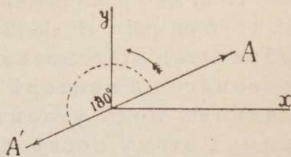
8. Установимъ теперь нѣсколько теоремъ, которыя намъ будутъ необходимы для дальнѣйшихъ изслѣдованій теоріи переменнаго тока графическимъ методомъ.

Теорема I. Если функція $y = A \sin 2\pi nt$ изображается векторомъ OA , то функція $y' = -A' \sin 2\pi nt$ изобразится векторомъ OA' , составляющимъ съ OA уголъ въ 180° , отложеннымъ отъ OA по направленію вращенія вектора.

Дѣйствительно функцію y' мы можемъ написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$y' = A' \sin(2\pi nt + \pi);$$

тогда на основаніи предыдущаго, она изобразится векторомъ OA' , составляющимъ съ OA уголъ $= \pi$, отложенный по направленію вращенія.



Фиг. 10.

Теорема II. Если функціи $A \sin(2\pi nt + \varphi)$ и $A' \sin(2\pi nt + \varphi')$ изображаются векторами OA и OA' , то функція $y = A \sin(2\pi nt + \varphi) + A' \sin(2\pi nt + \varphi')$ изобразится векторомъ совпадающимъ по величинѣ и положенію съ діагональю параллелограмма, построеннаго на OA и OA' .

Дѣйствительно, если мы возьмемъ проекціи векторовъ OA , OA' и OB на ось oy , то въ каждый моментъ мы будемъ имѣть:

$$oa + oa' = ob$$

$$\text{ибо } ob = oa + ab$$

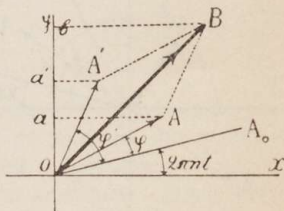
Но ab есть проекція AB , а проекція AB равна проекціи OA' , такъ какъ AB и OA' равны и параллельны, поэтому

$$ab = oa'$$

и слѣдовательно

$$oa + oa' = ob.$$

Примѣчаніе. На чертежѣ положеніе векторовъ OA и OA' мы опредѣлили слѣдующимъ образомъ: мы провели сначала ось OA_0 , составляющую съ осью ox уголъ $A_0ox = 2\pi nt$ и представляющую собой направленіе вектора функціи $A \sin 2\pi nt$ или функціи $A' \sin 2\pi nt$ и затѣмъ уже по отношенію къ этому вектору, согласно предыдущему опредѣлили положеніе векторовъ OA и OA' углами φ и φ' .



Фиг. 11.

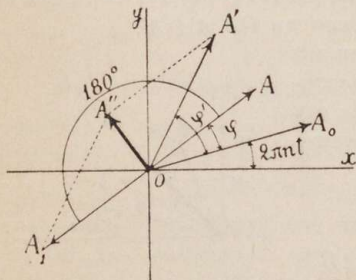
Теорема III. Если функція $A \sin(2\pi nt + \varphi)$ и $A' \sin(2\pi nt + \varphi')$ изображены векторами OA и OA' , то функція $A' \sin(2\pi nt + \varphi') - A \sin(2\pi nt + \varphi)$ изобразится діагональю параллелограмма построеннаго на векторѣ OA' и векторѣ OA_1 , проведенномъ подъ угломъ 180° къ вектору OA и равнымъ этому послѣднему (фиг. 12).

Это слѣдуетъ изъ теоремъ I и II, ибо разность

$$A' \sin(2\pi nt + \varphi') - A \sin(2\pi nt + \varphi)$$

можно разсматривать, какъ сумму

$$A' \sin(2\pi nt + \varphi') + A \sin(2\pi nt + \varphi + \pi).$$



фиг. 12.

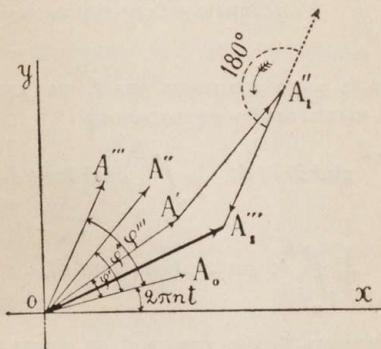
Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что векторы гармоническихъ функцій складываются между собою, какъ векторы силъ.

Поэтому мы можемъ формулировать общую теорему:

Теорема IV. Векторъ алгебраической сум-

мы нѣсколькихъ гармоническихъ функцій одного и того же періода, по величинѣ и положенію совпадаетъ съ векторомъ замыкающей многоугольника, образованнаго отрѣзками прямыхъ равныхъ и параллельныхъ векторамъ слагаемыхъ гармоническихъ функцій, причемъ направленіе отрѣзковъ берется одинаковое съ направленіемъ векторовъ, соотвѣтствующихъ слагаемымъ съ знакомъ $(+)$ и противоположное, т. е. отличающихся на 180° для векторовъ соотвѣтствующихъ слагаемымъ со знакомъ $(-)$.

Такъ если мы имѣемъ алгебраическую сумму функций $A' \sin(2\pi nt + \varphi') + A'' \sin(2\pi nt + \varphi'') - A''' \sin(2\pi nt + \varphi''')$ изображенныхъ векторами OA' , OA'' , OA''' , то эта сумма будетъ представлена векторомъ OA_1''' , замыкающимъ многоугольникъ $OA'A_1''A_1'''$ (фиг. 13).



Фиг. 13.

Сторона $A_1''A_1'''$ отложена на 180° (по направленію нүю вращенія) по отношенію къ прямой, проведенной пунктиромъ и представляющей собою прямую равную и одинаково направленную съ векторомъ OA''' .

9. Средній квадратъ гармонической функции.

Среднимъ квадратомъ гармонической функции

$$y = A \sin(2\pi nt \pm \varphi)$$

мы называемъ выраженіе:

$$k^2 = \frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt$$

гдѣ T время полного періода.

Вычислимъ это выраженіе.

Развернемъ y , а именно напомнимъ:

$$y = A [\sin 2\pi nt \cos \varphi \pm \cos 2\pi nt \sin \varphi]$$

откуда

$$y^2 = A^2 [\sin^2 2\pi nt \cos^2 \varphi + \cos^2 2\pi nt \sin^2 \varphi \pm$$

$$\pm 2 \sin 2\pi nt \cos 2\pi nt \sin \varphi \cos \varphi],$$

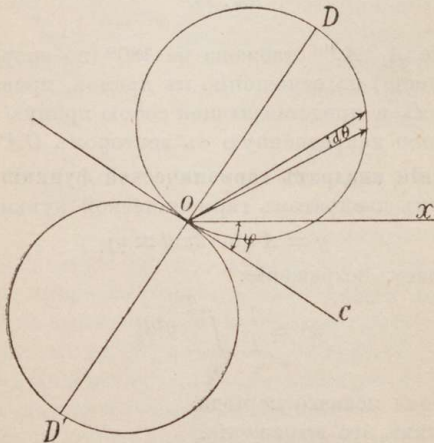
Тогда

$$k^2 = \frac{A^2}{T} \int_0^T \sin^2 2\pi nt \cos^2 \varphi dt + \frac{A^2}{T} \int_0^T \cos^2 2\pi nt \sin^2 \varphi dt \\ \pm \frac{A^2}{T} \int_0^T 2 \sin 2\pi nt \cos 2\pi nt \sin \varphi \cos \varphi dt$$

или, такъ какъ φ не зависитъ отъ t , то выражение k сведется къ вычисленію интеграловъ

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 2\pi nt dt, \quad \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 2\pi nt dt \text{ и} \\ \frac{1}{T} \int_0^T 2 \sin 2\pi nt \cos 2\pi nt dt.$$

Мы предлагаемъ болѣе простой и наглядный спо.



Фиг. 14.

собъ опредѣленія среднего квадрата. Изобразимъ функцію $y = A \sin (2\pi nt + \varphi)$ въ полярныхъ координатахъ

(фиг. 14); тогда y будетъ векторомъ окружности OD , діаметръ которой A . Для положительныхъ величинъ будетъ служить окружность OD , для отрицательныхъ OD' .

Пусть

$$2\pi nt = \theta,$$

тогда

$$y = \sin (\theta \div \varphi) \text{ и } d\theta = 2\pi n dt.$$

Отсюда

$$y^2 dt = \frac{1}{2\pi n} y^2 d\theta$$

Кромѣ того

$$\frac{1}{T} = n,$$

слѣдовательно

$$\frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^2 d\theta.$$

Но

$$\frac{1}{2} y^2 d\theta = \frac{1}{2} y \cdot y d\theta$$

есть площадь элементарнаго сектора, заключеннаго между двумя безконечно близкими векторами, слѣдовательно

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} y^2 d\theta$$

будетъ сумма площадей двухъ окружностей OD и OD' , а такъ какъ

$$\int_0^{2\pi} y^2 d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} y^2 d\theta,$$

то можемъ написать, что

$$\int_0^{2\pi} y^2 d\theta = 2 \left\{ \pi \frac{\overline{OD^2}}{4} + \pi \frac{\overline{OD'^2}}{4} \right\} = \pi A^2$$

ибо $OD = OD' = A$.

Итакъ

$$\int_0^{2\pi} y^2 d\theta = \pi A^2$$

слѣдовательно

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^2 d\theta = \frac{\pi A^2}{2\pi} = \frac{A^2}{2}.$$

Такимъ образомъ средній квадратъ будетъ

$$k^2 = \frac{A^2}{2}$$

Откуда

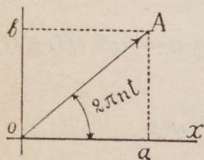
$$k = \sqrt{\frac{A^2}{2}}.$$

Мы назовемъ k векторомъ средней квадратовъ. Очевидно, что этотъ векторъ есть ни что иное, какъ радиусъ окружности, площадь которой равна суммѣ площадей окружностей OD и OD'

$$\pi k^2 = 2 \frac{\pi A^2}{4} \text{ и } k = \sqrt{\frac{A^2}{2}}.$$

Символическое изображеніе гармоническихъ функцій.

10. Мы уже видѣли, что гармоническую функцію



Фиг. 15.

вида $y = A \sin 2\pi nt$ можно представить въ видѣ вектора $OA = A$, проведеннаго къ выбранной за начало временъ оси ox подъ угломъ $2\pi nt$ (фиг. 15). Положеніе вектора OA очевидно опредѣлится двумя его ортогональными проекціями oa и ob . Ясно, что

$$oa = OA \cos 2\pi nt = A \cos 2\pi nt$$

$$ob = OA \sin 2\pi nt = A \sin 2\pi nt.$$

Если мы возьмемъ теперь другую синусоидальную функцію $y = A' \sin (2\pi nt + \varphi)$, то ее можно представить векторомъ OA' , составляющимъ съ OA (впередъ по направленію вращенія) уголъ φ . Этотъ векторъ также можно опредѣлить его ортогональными проекціями oa' и ob' , а именно

$$oa' = OA' \cos (2\pi nt + \varphi) = A' \cos (2\pi nt + \varphi)$$

$$ob' = OA' \sin (2\pi nt + \varphi) = A' \sin (2\pi nt + \varphi).$$

Мы уже видѣли, что векторъ суммы нѣсколькихъ гармоническихъ функцій есть замыкающая многоугольника, сторонами котораго являются отрѣзки равные и параллельные. Но изъ геометріи извѣстно, что проекція замыкающей многоугольника равняется суммѣ проекцій составляющихъ на любую ось. Слѣдовательно, если ортогональныя составляющія вектора гармонической суммы будутъ om и on , причемъ om , горизонтальная ея проекція, а on вертикальная и если (oa', ob') , (oa'', ob'') такія же проекціи векторовъ слагающихъ гармоникъ, то на основаніи только что сказаннаго можемъ написать

$$om = oa' \pm oa'' \pm oa''' \pm \dots$$

$$on = ob' \pm ob'' \pm ob''' \pm \dots$$

Иначе говоря, если мы каждый векторъ опредѣлимъ его проекціями на двѣ взаимно-перпендикулярныя оси или, какъ мы будемъ называть эти проекціи, ортогональными составляющими, то мы можемъ свести геометрическое сложеніе векторовъ къ алгебраическому сложенію вышеупомянутыхъ составляющихъ cadaго вектора.

Ортогональныя составляющія вектора гармонической функціи мы будемъ различать на вертикальную и горизонтальную составляющія, предполагая, что мы проектируемъ векторъ на горизонтальную и вертикальную оси.

Если даны обѣ составляющія вектора a и b , то гар-

моническая функция вполне определена. Действительно векторъ

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \dots \dots \dots (1)$$

дальше $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} 2\pi nt \dots \dots \dots (2)$

ибо $a = A \cos 2\pi nt$
 $b = A \sin 2\pi nt.$

Слѣдовательно выраженіе (1) даетъ намъ амплитуду A , а выраженіе (2) величину $2\pi nt$.

Изъ выраженія (1) мы видимъ, что составляющія a и b таковы, что равна A не ихъ сумма, а корень квадратный изъ суммы ихъ квадратовъ.

Мы можемъ условиться изображать векторъ гармонической функции, напимѣръ, слѣдующимъ образомъ:

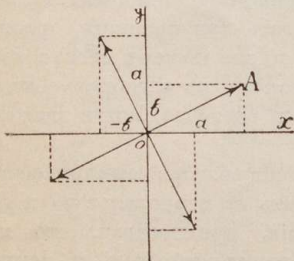
$$a + jb.$$

Это будетъ лишь символическое изображеніе, гдѣ значекъ j поставленъ при b для того, чтобы показать, что b есть вертикальная слагающая и что она отнюдь не складывается алгебраически съ горизонтальной слагающей a .

Если горизонтальная слагающая вектора a , а вертикальная — b , то такой векторъ мы изобразимъ символически черезъ

$$a - jb.$$

11. Возьмемъ векторъ и рассмотримъ, какъ будутъ измѣняться его составляющія, когда этотъ векторъ будетъ поворачиваться послѣдовательно на 90° (фиг. 16).



Въ первомъ квадрантѣ векторъ изобразится выраженіемъ:

$$a + jb$$

Если теперь векторъ повернулся на 90° по от-

Фиг. 16.

ношенію къ первому положенію, то мы видимъ, что его вертикальной составляющей будетъ a , а горизонтальною — b , то есть символически такой векторъ обозначится черезъ:

$$ja - b$$

Не трудно видѣть, что выраженіе $ja - b$ можно вывести изъ предыдущаго $a + jb$, если условиться, что $j^2 = -1$.

Дѣйствительно помножимъ $a + jb$ на j , тогда мы получимъ:

$$(a + jb)j = aj + j^2b$$

и если $j^2 = -1$, то получимъ

$$(a + jb)j = aj - b$$

Повернемъ векторъ еще на 90° , тогда его составляющія будутъ: вертикальная — b , горизонтальная — a , т. е. этотъ векторъ символически изобразится черезъ

$$-a - jb$$

Не трудно видѣть, что

$$-a - jb = (aj - b)j,$$

если $j^2 = -1$.

При поворотѣ вектора еще на 90° его составляющія станутъ: горизонтальная b и вертикальная — a , т. е. символически онъ обозначится черезъ

$$b - ja.$$

Не трудно видѣть, что:

$$b - ja = (-a - jb)j,$$

если $j^2 = -1$.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что умноженіе символическаго обозначенія вектора на j соответствуетъ повороту этого вектора на 90° впередъ, если условиться, что $j = \sqrt{-1}$.

Также не трудно видѣть, что умноженіе символическаго обозначенія вектора на $(-j)$ соответствуетъ повороту вектора на 90° назадъ. Умноженіе символическаго выраженія век-

тора на (-1) соответствует повороту вектора впередъ на 180° .

Если имѣемъ нѣсколько гармоническихъ функций, которыя символически обозначены черезъ

$$\pm a' \pm jb', \quad \pm a'' \pm jb'', \quad \pm a''' \pm jb'''. \dots$$

то, такъ какъ мы уже знаемъ, что каждая изъ ортогональныхъ составляющихъ вектора суммы предыдущихъ функций равна алгебраической суммѣ соответствующихъ составляющихъ слагаемыхъ функций, мы можемъ написать:

$$A = \pm a' \pm a'' \pm a''' \dots$$

$$B = \pm b' \pm b'' \pm b''' \dots$$

и слѣдовательно символическое обозначеніе суммы предыдущихъ гармоническихъ функций будетъ:

$$A + jB = (\pm a' \pm a'' \pm a''' \pm \dots) + j(\pm b' \pm b'' \pm b''' \pm \dots)$$

Отсюда слѣдуетъ, что сложение и вычитаніе гармоническихъ функций сводится при символическомъ обозначеніи къ сложению и вычитанію комплексныхъ (мнимыхъ) величинъ.

Символическое обозначеніе синусоидальной функции мы будемъ обозначать, тою же буквою, какъ и ея амплитуда, но будемъ ставить надъ ней значекъ $\wedge$. Такъ, если мы имѣемъ функцию, амплитуда которой A , то мы напишемъ:

$$\hat{A} = a + jb, \text{ гдѣ}$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Если имѣемъ два символическихъ обозначенія $\hat{A}$ и $\hat{A}'$, то ихъ произведеніе соответствуетъ алгебраическому произведенію ихъ комплексныхъ выраженій

$$\hat{A} \cdot \hat{A}' = (a + jb)(a' + jb')$$

Можно преобразовать это произведеніе, замѣчая, что $j^2 = -1$. Мы получимъ

$$\hat{A} \hat{A}' = (aa' - bb') + j(a'b + ab')$$

Слѣдовательно, если

$$\hat{A} = a + jb, \quad \hat{A}' = a' + jb'$$

и если
то

$$\hat{A} \hat{A}' = \hat{c},$$

$$c = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (a'b + ab')^2}$$

Пусть теперь

$$\frac{\hat{A}}{\hat{A}'} = \hat{q}$$

Найдемъ q . Имѣемъ

$$\begin{aligned} \frac{\hat{A}}{\hat{A}'} &= \frac{a + jb}{a' + jb'} = \frac{(a + jb)(a' - jb')}{(a' + jb')(a' - jb')} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \\ &+ \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2} \cdot j \end{aligned}$$

Слѣдовательно

$$\hat{q} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2} j$$

откуда

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\left(\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}\right)^2 + \left(\frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}\right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{(aa' + bb')^2 + (a'b - ab')^2}}{a'^2 + b'^2} \end{aligned}$$

Если символическое значеніе $\hat{A}$ помножимъ на не-
комплексное значеніе k , то получимъ

$$\hat{A} k = \hat{c}$$

причемъ

$$c = A \cdot k.$$

Дѣйствительно, если $\hat{A} = a + jb$, то

$$\hat{c} = \hat{A} \cdot k = ak + jbk.$$

откуда

$$c = \sqrt{(ak)^2 + (bk)^2} = k \sqrt{a^2 + b^2} = k \cdot A.$$

Если символическое значеніе приводится къ виду
некомплекснаго выраженія, то есть если будемъ имѣть

$$\hat{A} = a$$

то тогда

$$A = a$$

Приведенныхъ выше основныхъ правилъ касательно символическихъ обозначеній гармоническихъ функцій достаточно для того, чтобы можно было примѣнять въ дальнѣйшемъ такъ называемый символическій методъ изслѣдованій переменнаго тока.

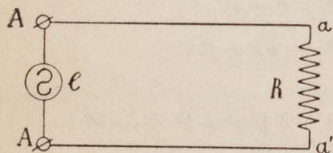
Познакомивъ въ этой главѣ читателя съ основными свойствами гармоническихъ функцій и со способами ихъ изображенія, мы теперь перейдемъ къ изслѣдованію основныхъ явленій переменнаго тока въ томъ предположеніи, что переменный токъ измѣняется по простому синусоидальному закону, т. е. что его можно всегда разсматривать, какъ простую гармоническую функцію времени. При нашихъ теоретическихъ изслѣдованіяхъ мы будемъ примѣнять болѣею частью третій графическій методъ, но въ то же время мы постараемся показать, въ какихъ случаяхъ удобнѣе анализъ чисто алгебраическій и когда слѣдуетъ отдать предпочтеніе символическому методу.

ГЛАВА II.

Явленія переменнаго тока въ простыхъ цѣпяхъ безъ развѣтвленій.

12. Цѣпь безъ самоиндукціи и емкости. Предположимъ, что мы имѣемъ простую цѣпь безъ самоиндукціи и емкости съ сопротивленіемъ R (фиг. 17), у зажимовъ которой дѣйствуетъ электродвижущая сила вида:

$$e = E \sin 2\pi nt$$



Фиг. 17.

Опредѣлимъ силу тока въ этой цѣпи. Для этого напомнимъ уравненіе электрической работы. Если въ данное мгновеніе сила тока есть i , то работа, расхо-

дуемая въ цѣпи въ теченіе безконечно малаго промежутка времени dt , будетъ

$$i^2 R dt.$$

Съ другой стороны работа, доставляемая въ цѣпь, будетъ:

$$e i dt.$$

Уравненіе работы будетъ:

$$e i dt = i^2 R dt,$$

откуда

$$e = i R,$$

и

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E \sin 2\pi n t}{R}.$$

Наибольшее значеніе тока будетъ:

$$I = \frac{E}{R}$$

Слѣдовательно сила тока въ каждый моментъ можетъ быть выражена въ видѣ

$$i = I \sin 2\pi n t.$$

Отсюда видимъ, что, если въ цѣпи безъ самоиндукціи дѣйствуетъ переменная электродвижущая сила, то сила тока въ цѣпи будетъ также переменная такого же періода и фазы, какъ и электродвижущая сила.

13. Дѣйствующая сила тока. Такъ какъ сила тока въ каждый моментъ мѣняется, то работа тока за данный промежутокъ времени t опредѣлится выраженіемъ:

$$R \int_0^t i^2 dt.$$

Разсмотримъ работу тока за какое-нибудь цѣлое число періодовъ, т. е. выраженіе

$$R \int_0^{nT} i^2 dt.$$

Этотъ интеграль мы можемъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\int_0^{nT} i^2 dt = \int_0^T i^2 dt + \int_T^{2T} i^2 dt + \dots + \int_{(n-1)T}^{nT} i^2 dt$$

Но такъ какъ функція періодическая и время полнаго періода T , то ясно, что:

$$\int_0^T i^2 dt = \int_T^{2T} i^2 dt = \dots = \int_{(n-1)T}^{nT} i^2 dt$$

а слѣдовательно можемъ написать:

$$\int_0^{nT} i^2 dt = n \int_0^T i^2 dt$$

Представимъ себѣ теперь, что мы имѣемъ нѣкоторый постоянный токъ X , который за промежутокъ времени nT произведетъ ту же работу, что и переменный токъ за тотъ же промежутокъ времени. Тогда мы можемъ написать равенство:

$$X^2 R n T = R n \int_0^T i^2 dt$$

откуда

$$X^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt.$$

Но $\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt$ есть средняя квадратовъ функціи

$$i = I \sin 2\pi n t$$

и какъ мы уже знаемъ (§ 9) равна $\frac{I^2}{2}$. Слѣдовательно

$$X^2 = \frac{I^2}{2}$$

откуда

$$X = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что если въ цѣпи бу-

детъ дѣйствовать постоянный токъ, сила котораго равна амплитудѣ переменнаго тока, раздѣленной на $\sqrt{2}$, то такой токъ за любое число періодовъ произведетъ такую же работу, какъ и данный переменный токъ. Величина $\frac{I}{\sqrt{2}}$ называется дѣйствующею си-

лою даннаго переменнаго тока. Она служитъ какъ-бы мѣриломъ работы переменнаго тока и эта-то величина дается измѣрительными приборами. Дѣйствующую силу переменнаго тока мы будемъ обозначать большою буквою со значкомъ δ внизу I_δ . Впрочемъ, во всѣхъ нашихъ вычисленіяхъ мы будемъ брать наибольшую силу тока I , которая отъ дѣйствующей отличается лишь на множитель $\sqrt{2}$, ибо

$$I_\delta = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad \text{откуда}$$

$$I = I_\delta \sqrt{2}.$$

14. Дѣйствующая электродвижущая сила. Энергія доставляемая въ цѣпь, какъ мы показали выше, будетъ въ бесконечно малый промежутокъ времени:

$$e i d t.$$

Но мы нашли, что:

$$i = \frac{e}{R}$$

въ каждый моментъ времени, слѣдовательно:

$$e i d t = \frac{e^2 d t}{R}$$

Работа за n -ое число періодовъ будетъ:

$$\frac{1}{R} \int_0^{nT} e^2 d t$$

Подобно предыдущему можемъ написать

$$\int_0^{nT} e^2 d t = n \int_0^T e^2 d t$$

Пусть E_0 некоторая постоянная электродвижущая сила, которая въ той же цѣпи R произведетъ такую же работу за данное число періодовъ. Тогда можемъ написать:

$$E_0^2 \cdot nT = n \int_0^T e^2 dt,$$

откуда

$$E_0^2 = \frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt = \frac{E^2}{2}$$

ибо

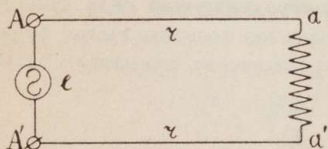
$$e = E \sin 2\pi nt$$

Итакъ:

$$E_0 = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

E_0 мы также назовемъ дѣйствующею электродвижущею силою.

15. Опредѣлимъ теперь зависимость между электродвижущей силой у зажимовъ $A A'$ и напряженіемъ v у зажимовъ aa' (фиг. 18).



Фиг. 18.

Пусть r, r сопротивленія проводниковъ $Aa, A'a'$. Если въ цѣпи сила тока i , то на основаніи урав-

ненія работы получимъ:

$$e idt = i^2 r dt + v idt + i^2 r dt$$

или

$$e = 2ri + v$$

откуда

$$v = e - 2ri.$$

Если

$$e = E \sin 2\pi nt$$

то, какъ мы уже нашли выше,

$$i = I \sin 2\pi nt.$$

Подставляя въ предыдущее уравненіе, найдемъ:

$$E \sin 2\pi nt = 2r I \sin 2\pi nt + v$$

откуда

$$v = (E - 2rI) \sin 2\pi nt$$

или

$$v = V \sin 2\pi nt$$

гдѣ

$$V = E - 2rI$$

Слѣдовательно v такая же функція, какъ и e и совпадаетъ съ этою послѣднею по фазѣ.

Изъ предыдущаго мы видимъ, что въ цѣпи безъ самоиндукціи и емкости наибольшія значенія величинъ e , i и v , а слѣдовательно и дѣйствующихъ значенія этихъ величинъ связаны между собою простою алгебраическою зависимою, а именно:

$$I = \frac{E}{R}, \quad E = V + 2rI$$

$$I_{\partial} = \frac{E_{\partial}}{R}, \quad E_{\partial} = V_{\partial} + 2rI_{\partial}$$

Такъ какъ e , i , v совпадаютъ по фазѣ, то векторы E , I , V геометрически совпадаютъ по направленію.

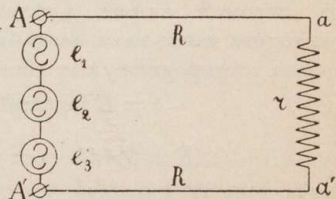
16. Дѣйствіе нѣсколькихъ электродвижущихъ силъ въ цѣпи безъ самоиндукціи и емкости.

Предположимъ, что въ цѣпи $Aaa'A'$ дѣйствуютъ три электродвижущихъ силы (фиг. 19).

$$\begin{aligned} e_1 &= E_1 \sin 2\pi nt, \\ e_2 &= E_2 \sin (2\pi nt + \varphi), \\ e_3 &= E_3 \sin (2\pi nt + \varphi'). \end{aligned}$$

Пусть сопротивленіе проводовъ Aa и Aa' равняется каждое

R , а полезное сопротивленіе aa' равно r .



Фиг. 19.

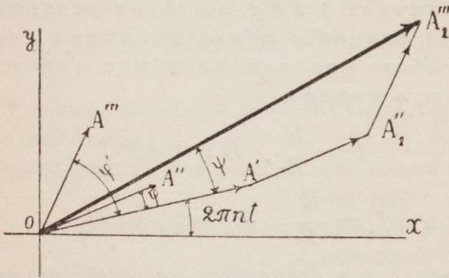
Уравнение работы за бесконечно малый промежуток времени dt будетъ:

$$e_1 idt + e_2 idt + e_3 idt = Ri^2 dt + ri^2 dt + Ri^2 dt.$$

По упрощеніи получимъ:

$$e_1 + e_2 + e_3 = (2R + r) i$$

Все будетъ, слѣдовательно, происходить такъ, какъ если бы въ цѣпи $(2R + r)$ дѣйствовала сумма электродвижущихъ силъ $e_1 + e_2 + e_3$. Какъ уже мы знаемъ, эта сумма изобразится векторомъ, который является геометрическою равнодѣйствующею векторовъ e_1, e_2, e_3 (§ 8).



Фиг. 20.

Если $OA' = E_1$, $OA'' = E_2$, $OA''' = E_3$ векторы этихъ послѣднихъ, положеніе которыхъ показано на прилагаемой діаграммѣ (фиг. 20), то OA_1''' будетъ векторомъ искомой суммы. Слѣдовательно, все будетъ происходить такъ, какъ если бы въ данной цѣпи дѣйствовала электродвижущая сила

$$e = E \sin(2\pi nt + \psi)$$

гдѣ

$$E = OA_1''' \quad \psi = \angle A_1''' OA'$$

Тогда можемъ написать:

$$E \sin(2\pi nt + \psi) = (2R + r) i$$

откуда

$$i = \frac{E}{2R + r} \sin(2\pi nt + \psi)$$

Амплитуда тока i будетъ:

$$I = \frac{E}{2R + r}$$

т. е. равняется амплитудѣ равнодѣйствующей электродвижущей силы, раздѣленной на сопротивление цѣпи. Слѣдовательно и дѣйствующая сила тока будетъ равняться дѣйствующей электродвижущей силѣ E_0 , раздѣленной на сопротивление $2R + r$

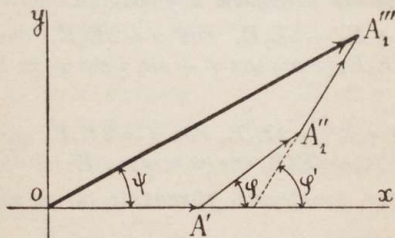
$$I_0 = \frac{E_0}{2R + r}$$

Если V амплитуда напряженія у зажимовъ aa' , то какъ и раньше мы найдемъ:

$$V = E - 2RI$$

$$V_0 = E_0 - 2RI_0$$

Предыдущій графикъ мы можемъ нѣсколько упростить. При геометрическомъ сложении векторовъ намъ достаточно знать относительное положеніе этихъ послѣднихъ. Примемъ направленіе вектора электродвижущей силы $e_1 = E_1 \sin 2\pi nt$ за начальную ось, затѣмъ



Фиг. 21.

не будемъ проводить векторовъ OA'' , OA''' а прямо отъ точки A' (конца вектора OA') проведемъ векторъ $A'A''$, образующій съ векторомъ OA' по направленію вращенія уголъ φ и отложимъ на немъ отрѣзокъ $A'A_1''$ равный амплитудѣ E_2 электродвижущей силы e_2 , затѣмъ отъ точки A_1'' проведемъ векторъ $A_1''A_1'''$, составляющій

съ OA' углом φ' и отложимъ $A_1''A_1'''$ равное амплитудѣ E_3 электродвижущей силы e_3 . Затѣмъ замкнемъ OA_1''' . Векторъ OA_1''' будетъ равенъ вектору искомой суммы электродвижущихъ силъ и будетъ по направленію совпадать съ векторомъ этой суммы.

Пользуясь предыдущимъ графикомъ, мы можемъ быстро найти численное значеніе амплитуды E и фазы ψ .

Дѣйствительно, спроектируемъ многоугольникъ $OA'A_1''A_1'''$ сначала на ось OA' , а затѣмъ на ось перпендикулярную къ $OA' - oy$.

Тогда, замѣчая, что $OA' = E_1$, $A'A_1'' = E_2$, $A_1''A_1''' = E_3$, получимъ:

$$E_1 + E_2 \cos \varphi + E_3 \cos \varphi' = E \cos \psi \dots (1)$$

$$E_2 \sin \varphi + E_3 \sin \varphi' = E \sin \psi \dots (2)$$

Возьмемъ обѣ части уравненій въ квадраты; складывая, получимъ:

$$\begin{aligned} & \left\{ E_1 + E_2 \cos \varphi + E_3 \cos \varphi' \right\}^2 + \\ & + \left\{ E_2 \sin \varphi + E_3 \sin \varphi' \right\}^2 = E^2 \end{aligned}$$

или, развертывая квадраты и упрощая, получимъ:

$$\begin{aligned} E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + 2E_1E_2 \cos \varphi + 2E_1E_3 \cos \varphi' + \\ + 2E_2E_3 [\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi'] = E^2 \end{aligned}$$

или еще

$$\begin{aligned} E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + 2E_1E_2 \cos \varphi + 2E_1E_3 \cos \varphi' + \\ + 2E_2E_3 \cos (\varphi - \varphi') = E^2 \end{aligned}$$

Если теперь раздѣлимъ уравненіе (2) на (1), то получимъ:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{E_2 \sin \varphi + E_3 \sin \varphi'}{E_1 + E_2 \cos \varphi + E_3 \cos \varphi'}.$$

Примѣнимъ къ той же задачѣ символическій методъ.

Пусть:

$$\hat{E}_1 = a_1 + ja_1', \quad \hat{E}_2 = a_2 + ja_2', \quad \hat{E}_3 = a_3 + ja_3',$$

пусть сила тока

$$\hat{I} = k + jk'.$$

Изъ уравненія элементарной работы мы вывели, что

$$e_1 + e_2 + e_3 = (2R + r) i.$$

Отсюда, переходя къ символическимъ обозначеніямъ, можемъ написать:

$$\hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \hat{E}_3 = (2R + r) \hat{I}$$

и

$$(a_1 + a_2 + a_3) + j(a_1' + a_2' + a_3') = (2R + r)(k + jk').$$

Отсюда выводимъ:

$$k = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2R + r}$$

$$k' = \frac{a_1' + a_2' + a_3'}{2R + r}$$

Но

$$I = \sqrt{k^2 + k'^2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{k'}{k},$$

$$I = \sqrt{\frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{(2R + r)^2} + \frac{(a_1' + a_2' + a_3')^2}{(2R + r)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a_1' + a_2' + a_3'}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

Но если мы примемъ векторъ электродвижущей силы E за начальную ось, то:

$$\begin{aligned} a_1 &= E_1 & a_1' &= 0 \\ a_2 &= E_2 \cos \varphi & a_2' &= E_2 \sin \varphi \\ a_3 &= E_3 \cos \varphi' & a_3' &= E_3 \sin \varphi' \end{aligned}$$

Подставляя эти значенія въ предыдущее уравненіе получимъ:

$$I = \frac{1}{2R + r} \sqrt{\left[\left\{ E_1 + E_2 \cos \varphi + E_3 \cos \varphi' \right\}^2 + \left\{ E_2 \sin \varphi + E_3 \sin \varphi' \right\}^2 \right]}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{E_2 \sin \varphi + E_3 \sin \varphi'}{E_1 + E_2 \cos \varphi + E_3 \cos \varphi'}$$

17. Мощность тока въ цѣпи безъ самоиндукціи.

Если въ цѣпи дѣйствуетъ электродвижущая сила

$e = E \sin 2\pi nt$, то элементарная работа, производимая въ цѣпи, будетъ

$$e i dt,$$

гдѣ i сила тока, циркулирующаго въ цѣпи въ данный моментъ. Работа за n періодовъ будетъ:

$$\int_0^{nT} e i dt.$$

Но мы уже знаемъ, что $i = I \sin 2\pi nt$, если $e = E \sin 2\pi nt$; слѣдовательно предыдущее выраженіе приметъ видъ:

$$\int_0^{nT} EI \sin^2 2\pi nt dt.$$

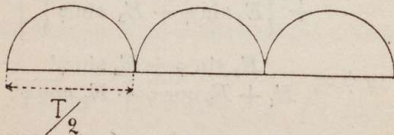
Мощность, доставляемая въ цѣпь, есть работа, доставляемая въ секунду, т. е.

$$\frac{1}{nT} \int_0^{nT} EI \sin^2 2\pi nt dt;$$

выводя EI за знакъ интеграла, получимъ:

$$\frac{1}{nT} EI \int_0^{nT} \sin^2 2\pi nt dt.$$

Но функція $\sin^2 2\pi nt$ есть періодическая функція, періодъ которой равенъ $\frac{T}{2}$, ибо эта функція всегда положительная и пріобрѣтаетъ черезъ промежутки времени $\frac{T}{2}$ въ одинаковомъ порядкѣ одинаковыя значенія (фиг. 22).



Фиг. 22.

Слѣдовательно, замѣчая, что

$$\int_0^{nT} \sin^2 2\pi nt \, dt = \int_0^{2n \frac{T}{2}} \sin^2 2\pi nt \, dt,$$

можемъ написать:

$$\int_0^{2n \frac{T}{2}} \sin^2 2\pi nt \, dt = 2n \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2 2\pi nt \, dt.$$

Но

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2 2\pi nt \, dt = \frac{T}{4},$$

откуда

$$\int_0^{2n \frac{T}{2}} \sin^2 \pi nt \, dt = 2n \frac{T}{4} = \frac{nT}{2},$$

а потому

$$\frac{1}{nT} EI \int_0^{nT} \sin^2 2\pi nt \, dt = \frac{1}{nT} EI \frac{nT}{2} = \frac{EI}{2}$$

Итакъ мощность тока въ цѣпи безъ самоиндукціи будетъ:

$$W_1 = \frac{EI}{2}$$

Замѣтимъ, что

$$E = E_0 \sqrt{2}, \quad I = I_0 \sqrt{2};$$

слѣдовательно:

$$W_1 = E_0 I_0,$$

т. е. мощность переменнаго тока въ цѣпи безъ самоиндукціи и емкости равна произведенію дѣйствующей электродвижущей силы на дѣйствующую силу тока.

Если въ цѣпи дѣйствуетъ нѣсколько электродвижущихъ силъ

$$e_1 = E_1 \sin 2\pi nt, \quad e_2 = E_2 \sin (2\pi nt + \varphi), \\ e_3 = E_3 \sin (2\pi nt + \varphi') \dots \dots,$$

то мощность въ цѣпи будетъ также равняться произведенію равнодѣйствующей E_0 на дѣйствующую силу

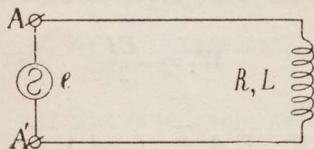
тока I_0 . Это не трудно найти, вспомнив (§ 16), что въ такомъ случаѣ все происходитъ такъ, какъ если бы въ данной цѣпи дѣйствовала электродвижущая сила

$$e = E \sin (2\pi nt + \psi).$$

равная суммѣ электродвижущихъ силъ $e_1, e_2, e_3, \dots$, при чемъ сила тока въ цѣпи будетъ вида

$$i = I \sin (2\pi nt + \psi).$$

18. Цѣпь съ самоиндукціей. Предположимъ, что у насъ имѣется цѣпь (фиг. 23), сопротивленіе которой R и коэффициентъ самоиндукціи L . Пусть у зажимовъ AA' этой цѣпи дѣйствуетъ переменная электродвижущая сила $e = E \sin 2\pi nt$. Опредѣлимъ силу тока, которая будетъ проходить въ каждый моментъ времени въ этой цѣпи. Для этого напомнимъ уравненіе работы за бесконечно малый промежутокъ времени dt . Энергія, доставляемая въ цѣпь, будетъ $eidt$, если i сила тока въ данный моментъ. Съ другой стороны энергія, расходуемая въ тотъ же промежутокъ времени, пойдетъ



Фиг. 23.

во-первыхъ на нагреваніе Ri^2dt и во-вторыхъ на магнитную работу, производимую вслѣдствіе измѣненія магнитнаго потока въ самой цѣпи. Если въ цѣпи или контурѣ съ токомъ i , магнитный потокъ, пронизывающій эту цѣпь или контуръ, измѣняется, то элементарная магнитная работа, какъ извѣстно (см. законъ Максвелла, теорет. и практич. руководство по электротехникѣ, часть II) пропорціональна произведенію $id\Phi$, гдѣ $d\Phi$ измѣненіе магнитнаго потока за время dt . Эта работа будетъ либо положительная, либо отрицательная въ зависимости отъ измѣненія магнит-

наго потока: при увеличеніи магнитнаго потока будетъ происходить затрата работы, при уменьшеніи будетъ имѣть мѣсто отдача энергіи. Мы знака выдѣлять не будемъ, а скроемъ его въ самомъ выраженіи.

Въ разбираемомъ нами случаѣ магнитный потокъ въ цѣпи будетъ порождаться самимъ токомъ и его величина измѣняется произведеніемъ Li . Мы предположимъ, что L не зависитъ отъ измѣненія i . Полагая слѣдовательно:

$$\Phi = Li$$

мы можемъ написать:

$$d\Phi = L di,$$

а слѣдовательно, согласно предыдущему, элементарная работа намагничиванія будетъ:

$$id\Phi = Lidi.$$

Уравненіе работы въ цѣпи выразится слѣдующимъ образомъ:

$$eidt = Ri^2dt + Lidi,$$

откуда

$$e = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Но

$$e = E \sin 2\pi nt;$$

слѣдовательно:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E \sin 2\pi nt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Мы получаемъ такимъ образомъ для i линейное дифференціальное уравненіе перваго порядка. Это уравненіе можно рѣшить по одному изъ общепринятыхъ методовъ, излагаемыхъ въ курсѣ интегральнаго исчисленія. Мы предлагаемъ здѣсь методъ менѣе строгій, но зато болѣе наглядно устанавливающій связь между токомъ и электродвижущей силою. Воспользуемся тѣмъ, что нами было сказано о графическомъ изображеніи гармоническихъ функцій (§§ 7 и 8). Видъ уравненія (1) уже показываетъ намъ, что i будетъ нѣкоторая гармоническая функція такого же періода, какъ и e , то есть i будетъ вида

$$i = I \sin(2\pi nt + \varphi)$$

Мы видимъ далѣе, что $e = E \sin 2\pi nt$ является суммою двухъ электродвижущихъ силъ, одной:

$$L \frac{di}{dt} = 2\pi n L I \cos(2\pi nt + \varphi) = 2\pi n L I \sin(2\pi nt + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

и другой

$$Ri = RI \sin(2\pi nt + \varphi).$$

Объ эти электродвижущія силы разнятся между собою по фазѣ на $\frac{\pi}{2}$, т. е. на 90° .

Векторъ электродвижущей силы e будетъ слѣдовательно замыкающею треугольника, катетами котораго являются векторы вышеупомянутыхъ электродвижущихъ силъ. Отношеніе этихъ векторовъ будетъ:

$$\frac{RI}{2\pi n LI} = \frac{R}{2\pi n L}.$$

Это отношеніе вполне извѣстно, ибо R и L даны. Такимъ образомъ задача сводится къ построенію прямоугольнаго треугольника, гипотенуза котораго E , а катеты относятся какъ $R : 2\pi n L$.

Пусть x и y эти катеты. Тогда имѣемъ:

$$x^2 + y^2 = E^2; \quad \frac{x}{y} = \frac{R}{2\pi n L},$$

откуда:

$$x^2(1 + \frac{4\pi^2 n^2 L^2}{R^2}) = E^2,$$

или

$$x^2 = \frac{E^2 R^2}{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}$$

Но

$$x = RI.$$

Слѣдовательно

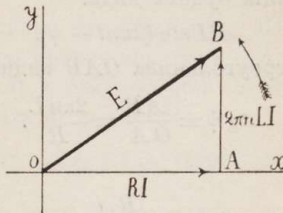
$$R^2 I^2 = \frac{E^2 R^2}{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2},$$

откуда:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (2\pi n L)^2}}.$$

Такимъ образомъ векторъ тока опредѣленъ. Остается опредѣлить еще его фазу φ .

Примемъ направление вектора напряженія $RI \sin(2\pi nt + \varphi)$ за начальное направление, по отноше-
нiю къ которому мы будемъ откладывать осталь-
ные векторы. Пусть ox это направление (фиг. 24).
Отложимъ $OA = RI$, далѣе изъ A проведемъ век-
торъ AB , составляющій съ OA уголъ въ 90° по на-



Фиг. 24.

правленiю вращенiя. Отложимъ $AB = 2\pi n LI$. Век-
торъ AB представить собою электродвижущую силу
 $2\pi n LI \sin(2\pi nt + \varphi + \frac{\pi}{2})$. Проведемъ OB . Ясно, что
 $OB = E$ и по своему положенiю представляет элек-
тродвижущую силу $E \sin 2\pi nt$.

Дѣйствительно, какъ гипотенуза,

$$\begin{aligned} OB &= \sqrt{R^2 I^2 + 4\pi^2 n^2 L^2 I^2} = I \sqrt{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2} = \\ &= \frac{E \sqrt{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}} = E, \end{aligned}$$

а по положенiю это есть замыкающая векторовъ OA и AB , т. е. сумма электродвижущихъ силъ $RI \sin(2\pi nt + \varphi)$

и $2\pi nLI \sin(2\pi nt + \varphi + \frac{\pi}{2})$. Иначе говоря, OB представляет собою электродвижущую силу $E \sin 2\pi nt$.

Изъ построения фиг. 24 видно, что фаза OB опережает фазу вектора RI на уголъ BOA , ибо OB стоитъ впередъ по направлению вращенія отъ OA на уголъ BOA . Изъ этого слѣдуетъ, что наоборотъ фаза вектора RI отстаетъ отъ фазы E на уголъ BOA ; слѣдовательно, если векторъ OB изображаетъ функцію $E \sin 2\pi nt$, то векторъ OA изобразитъ функцію $RI \sin(2\pi nt - BOA)$. Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ $RI \sin(2\pi nt + \varphi)$, найдемъ что $\varphi = -\angle BOA$. Пусть $\angle BOA = \psi$; тогда мы можемъ написать, что предыдущая функція будетъ вида:

$$RI \sin(2\pi nt - \psi),$$

причемъ изъ треугольника OAB видно, что

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{AB}{OA} = \frac{2\pi nL}{R}.$$

Такъ какъ

$$i = \frac{R \cdot i}{R},$$

то сила тока будетъ вида

$$\frac{RI \sin(2\pi nt - \psi)}{R} = I \sin(2\pi nt - \psi).$$

Итакъ если въ цѣпи съ самоиндукціею L и сопротивленіемъ R дѣйствуетъ переменная электродвижущая сила $e = E \sin 2\pi nt$, то въ этой цѣпи сила тока будетъ также переменная и вида $i = I \sin(2\pi nt - \psi)$, причемъ амплитуда тока I равна амплитудѣ E электродвижущей силы, раздѣленной на выраженіе $\sqrt{R^2 + (2\pi nL)^2}$, а фаза тока ψ опредѣляется выраженіемъ $\operatorname{tg} \psi = \frac{2\pi nL}{R}$.

Мы замѣтили раньше изъ уравненія (1), что электродвижущая сила, дѣйствующая въ цѣпи является

суммою какъ бы двухъ электродвижущихъ силъ: $RI \sin (2\pi nt - \psi)$ и $2\pi nLI \sin (2\pi nt - \psi + \frac{\pi}{2})$. Первая есть не что иное, какъ электродвижущая сила необходимая для преодоленія омическаго сопротивленія R при силѣ тока $I \sin (2\pi nt - \psi)$; вторая будетъ электродвижущая сила, необходимая для преодоленія электродвижущей силы, появляющейся въ цѣпи вслѣдствіе самоиндукціи. Первая электродвижущая сила по фазѣ совпадаетъ съ токомъ, а вторая опережаетъ фазу тока на 90° .

Какъ мы уже сказали выше, электродвижущая сила $2\pi nLI \sin (2\pi nt - \psi + \frac{\pi}{2})$ идетъ на преодоленіе электродвижущей силы самоиндукціи. Послѣдняя слѣдовательно прямо противоположна предыдущей электродвижущей силѣ, а слѣдовательно электродвижущая сила самоиндукціи будетъ вида:

$$-L \frac{di}{dt} = -2\pi nLI \sin (2\pi nt - \psi + \frac{\pi}{2}).$$

Но на основаніи предыдущаго (§ 8, теор. I)

$$\begin{aligned} & -2\pi nLI \sin (2\pi nt - \psi + \frac{\pi}{2}) = \\ & = 2\pi nLI \sin (2\pi nt - \psi + \frac{\pi}{2} + \pi) = \\ & = 2\pi nLI \sin (2\pi nt - \psi + \frac{3\pi}{2} - 2\pi) = \\ & = 2\pi nLI \sin (2\pi nt - \psi - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Отсюда заключаемъ, что электродвижущая сила самоиндукціи $(-L \frac{di}{dt})$ будетъ вида

$$2\pi nLI \sin (2\pi nt - \psi - \frac{\pi}{2})$$

и отстаетъ по фазѣ отъ тока на 90° . Обозначимъ ее черезъ e_s . Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$e_s = -L \frac{di}{dt} = 2\pi nLI \sin (2\pi nt - \psi - \frac{\pi}{2}).$$

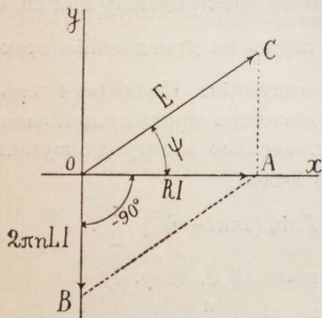
На основаніи этого мы можемъ уравненію (1) придать другой смыслъ. Напишемъ его въ слѣдующемъ видѣ:

$$e - L \frac{di}{dt} = Ri.$$

Вмѣсто $-L \frac{di}{dt}$ подставимъ e_s , тогда получимъ:

$$e + e_s = Ri \dots \dots \dots (2)$$

Это выраженіе показываетъ, что Ri является равнодѣйствующею двухъ электродвижущихъ силъ



Фиг. 25.

одной e и другой электродвижущей силы самоиндукціи. Слѣдовательно векторъ RI будетъ діагональю параллелограмма, построеннаго на векторахъ E и E_s .

Принимая направление вектора I (а слѣдовательно и вектора RI) за начальное направленіе, получимъ слѣдующую діаграмму (фиг. 25):

$$OA = RI, OB = E_s = 2\pi nLI, OC = E.$$

Здѣсь векторъ $OB = E_s$ отложенъ на 90° назадъ по направленію вращенія отъ OA , ибо электродвижущая сила e_s по фазѣ отстаетъ отъ тока, а слѣдовательно и отъ электродвижущей силы RI .

Итакъ если въ цѣпи съ самоиндукціей дѣйствуетъ электродвижущая сила $e = E \sin 2\pi nt$, то амплитуда тока будетъ

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (2\pi nL)^2}}.$$

Фаза тока отстаетъ отъ фазы электродвижущей силы на уголъ ψ , опредѣляемый уравненіемъ:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{CA}{OA} = \frac{2\pi nL}{R}.$$

Амплитуда электродвижущей силы самоиндукціи есть $E_s = 2\pi nLI$, ея фаза отстаетъ отъ фазы тока на 90° , а слѣдовательно отъ фазы электродвижущей силы e на $\psi + \frac{\pi}{2}$.

Электродвижущая сила e можетъ быть разсматриваема, какъ состоящая изъ двухъ составляющихъ: одной RI , амплитуда которой $E_r = RI$ и фаза которой совпадаетъ съ фазою тока, другой $e'_s = L \frac{di}{dt}$, амплитуда которой $E'_s = 2\pi nLI$ и фаза которой опережаетъ фазу тока на 90° , а слѣдовательно опережаетъ фазу электродвижущей силы e на $\frac{\pi}{2} - \psi$.

Зная, что дѣйствующая сила тока и дѣйствующая электродвижущая сила отличаются отъ амплитудъ этихъ величинъ на множитель $\frac{1}{\sqrt{2}}$, получимъ

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (2\pi nL)^2}}$$

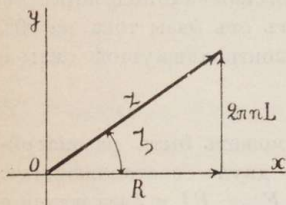
$$E_s^0 = 2\pi nLI_0.$$

Первая формула показываетъ, что дѣйствующая сила тока равна дѣйствующей электродвижущей силѣ, раздѣленной на $\sqrt{R^2 + (2\pi nL)^2}$. По аналогіи съ постояннымъ токомъ, для котораго мы имѣемъ $I' = \frac{E'}{R'}$ выраженіе $\sqrt{R^2 + (2\pi nL)^2}$ можно отнести къ категоріи сопротивленій: это выраженіе называютъ кажущимся сопротивленіемъ. Французы его называютъ *impedance*, нѣмцы *impedanz*, англичане также *impedance*.

Мы его назовемъ задерживаніемъ и будемъ обозначать буквою Z . Итакъ задерживаніе

$$Z = \sqrt{R^2 + (2\pi nL)^2}$$

Задерживаніе Z можно разсматривать, какъ геометрическую сумму двухъ составляющихъ R и $2\pi nL$, образующихъ между собою прямой уголъ (фиг. 26).



Фиг. 26.

Векторъ Z составляетъ съ R уголъ, равный углу разности фазъ тока и электродвижущей силы. Дѣйстви-тельно тангенсъ этого угла, какъ видно изъ діаграммы (фиг. 26) будетъ

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{2\pi nL}{R}.$$

Но раньше мы нашли для угла запаздыванія фазы тока

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\pi nL}{R}.$$

Отсюда видимъ, что

$$\zeta = \psi.$$

Символическое обозначеніе величинъ e , i , e_s , e'_s , R и Z .

Переменная сила тока въ цѣпи можетъ быть обозначена символически выраженіемъ:

$$\hat{I} = k + jk'.$$

Если сопротивление цѣпи R , то слагающая электро-движущей силы, идущая на сопротивление R будетъ:

$$\hat{R}I = kR + jk'R.$$

Слагающая E'_s , идущая на самоиндукцію выражается произведеніемъ тока на самореакцію $x = 2\pi nL$ и эта слагающая отличается по фазѣ отъ $\hat{R}I$ на 90° , слѣдовательно ея символическое выраженіе будетъ вида:

$$\begin{aligned}\hat{E}'_s &= jkx = j2\pi nLI, \\ \hat{E} &= R\hat{I} + E'_s = RI + j2\pi nLI, \\ Z &= R + jx = R + j2\pi nL.\end{aligned}$$

19. Мощность тока въ цѣпи съ самоиндукціею. Работа за безконечно малый промежутокъ времени dt , когда въ цѣпи съ самоиндукціею дѣйствуетъ электро-движущая сила $e = E \sin 2\pi nt$ будетъ

$$E \sin 2\pi nt \, I \sin (2\pi nt - \psi) \, dt,$$

ибо сила тока въ такой цѣпи, какъ мы уже знаемъ (§ 18) будетъ вида $i = I \sin (2\pi nt - \psi)$.

Съ другой стороны эта работа распределяется на нагрѣваніе Ri^2dt и на измѣненіе магнитной потенциальной энергіи $Li \, di$.

За первую четверть періода, когда токъ нарастаетъ, эта послѣдняя работа доставляется источникомъ, а за вторую четверть, когда токъ убываетъ, та же работа возвращается источнику, затѣмъ за третью четверть предыдущая работа доставляется источнику, а за четвертую снова возвращается. Работа, расходуемая на магнитную потенциальную энергію за первую четверть періода будетъ очевидно:

$$\int_0^I Li \, di = L \int_0^I i \, di = L \frac{I^2}{2},$$

гдѣ I наибольшее значеніе тока. Такимъ образомъ за полный періодъ работа, производимая въ цѣпи будетъ, согласно предыдущему съ одной стороны:

$$EI \int_0^T \sin 2\pi nt \sin (2\pi nt - \psi) \, dt,$$

а съ другой

$$RI^2 \int_0^T \sin^2 (2\pi nt - \psi) + L \frac{I^2}{2} - L \frac{I^2}{2} + L \frac{I^2}{2} - L \frac{I^2}{2}.$$

Иначе говоря за полный періодъ работа выразится только нагрѣваніемъ:

$$R \int_0^T i^2 dt,$$

работа же на магнитную потенциальную энергію сведется къ нулю.

Такимъ образомъ за n полныхъ періодовъ мы можемъ написать:

$$W = EI \int_0^{nT} \sin 2\pi nt \sin (2\pi nt - \psi) dt = R \int_0^{nT} i^2 dt$$

или, развертывая выраженіе подъ знакомъ интеграла,

$$\begin{aligned} W &= EI \cos \psi \int_0^{nT} \sin^2 2\pi nt dt - \\ &- EI \sin \psi \int_0^{nT} \sin 2\pi nt \cos 2\pi nt dt = R \int_0^{nT} i^2 dt. \end{aligned}$$

Мощность, т. е. работа въ секунду будетъ:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{nT} EI \cos \psi \int_0^{nT} \sin^2 2\pi nt dt - \\ &- \frac{1}{nT} EI \sin \psi \int_0^{nT} \sin 2\pi nt \cos 2\pi nt dt = \\ &= R \frac{1}{nT} \int_0^{nT} i^2 dt = \frac{RI^2}{2} = RI^2_0 \dots (\S 13). \end{aligned}$$

Но

$$\frac{1}{nT} EI \int_0^{nT} \sin^2 2\pi nt dt = \frac{EI}{2} \dots (\S 17),$$

а

$$\int_0^{nT} \sin 2\pi nt \cos 2\pi nt dt = \frac{1}{2} \int_0^{nT} \sin 4\pi nt dt.$$

Функция $\sin 4\pi nt$ периодическая; ея периодъ будетъ $\frac{T}{2}$, следовательно можемъ написать:

$$\frac{1}{2} \int_0^{nT} \sin 4\pi nt \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2n \frac{T}{2}} \sin 4\pi nt \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} 2n \int_0^{\frac{T}{2}} \sin 4\pi nt \, dt.$$

Но
$$\int_0^{\frac{T}{2}} \sin 4\pi nt \, dt = 0.$$

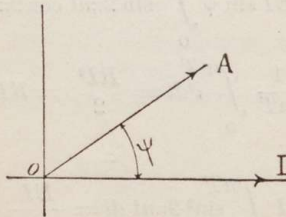
Такимъ образомъ окончательно получимъ:

$$W_1 = \frac{EI}{2} \cos \psi = RI^2_{\partial}.$$

Замѣчая, что $E = E_{\partial} \sqrt{2}$, $I = I_{\partial} \sqrt{2}$, найдемъ

$$W_1 = E_{\partial} I_{\partial} \cos \psi = RI^2_{\partial} \quad \quad (1)$$

Пусть OI направление вектора тока (фиг. 27), тогда векторъ электродвижущей силы изобразится прямою OA



Фиг. 27.

составляющею съ OI (по направлению вращения) уголъ ψ . Проекція OA на OI будетъ $OA \cos \psi = E_{\partial} \cos \psi$. Выраженіе мощности W_1 показываетъ, что эта мощность

равна слагающей электродвижущей силы E_∂ по вектору тока, умноженной на I_∂ . Слагающая электродвижущей силы E_∂ на ось перпендикулярную къ OI будетъ $E_\partial \sin \psi$.

На основаніи предыдущаго (§ 10) мы можемъ слѣдовательно написать:

$$E_\partial = E_\partial \cos \psi + j E_\partial \sin \psi.$$

Помножая обѣ части на I_∂ , получимъ:

$$\widehat{E_\partial I_\partial} = E_\partial I_\partial \cos \psi + j E_\partial I_\partial \sin \psi \dots (2)$$

Отсюда видимъ, что мощность

$$W_1 = E_\partial I_\partial \cos \psi$$

можно разсматривать, какъ горизонтальную составляющую вектора $E_\partial I_\partial$, въ предположеніи, что за горизонтальную ось векторовъ принято направленіе вектора тока и что $E_\partial I_\partial$ совпадаетъ съ векторомъ электродвижущей силы. Точно также можно разсматривать W_1 , какъ горизонтальную составляющую $E_\partial I_\partial$, въ предположеніи, что за горизонтальную ось векторовъ принято направленіе вектора E_∂ и что $E_\partial I_\partial$ совпадаетъ съ векторомъ тока I_∂ . Произведеніе $E_\partial I_\partial$ называютъ кажущеюся мощностью.

Выраженіе (2) показываетъ, что кажущаяся мощность есть геометрическая равнодѣйствующая двухъ мощностей — дѣйствительной мощности $E_\partial I_\partial \cos \psi$ и нѣкоторой фиктивной мощности $E_\partial I_\partial \sin \psi$.

Опредѣлимъ выраженіе этой фиктивной мощности. Мы знаемъ, что

$$E = RI + j E'_s \dots (\S 18)$$

Раздѣливъ на $\sqrt{2}$ получимъ:

$$\widehat{E} = RI_\partial + j(E'_s)_\partial.$$

Помноживъ обѣ части на I_∂ получимъ:

$$\widehat{E_\partial I_\partial} = RI_\partial^2 + j(E'_s)_\partial I_\partial \dots (3)$$

Сравнивая (2), (3) и (1) получимъ:

$$E_{\partial} I_{\partial} \cos \psi + j E_{\partial} I_{\partial} \sin \psi = E_{\partial} I_{\partial} \cos \psi + j (E'_s)_{\partial} I_{\partial},$$

откуда находимъ:

$$E_{\partial} I_{\partial} \sin \psi = (E'_s)_{\partial} I_{\partial}.$$

Эта вторая слагающая мощности называется безуаттною слагающею кажущейся мощности $E_{\partial} I_{\partial}$.

Мы нашли, что она выражается произведениемъ $(E'_s)_{\partial} I_{\partial}$, или еще иначе произведениемъ $2\pi n L I_{\partial}^2$, ибо, какъ мы уже знаемъ (§ 18) $E'_{\partial} = 2\pi n L I$, откуда $(E'_s)_{\partial} = 2\pi n L I_{\partial}$.

Такимъ образомъ мы можемъ написать:

$$E_{\partial} I_{\partial} = R I_{\partial}^2 + j 2\pi n L I_{\partial}^2 \dots (4)$$

Если $R = 0$, то уаттная слагающая $= 0$, и тогда:

$$E_{\partial} I_{\partial} = 2\pi n L I_{\partial}^2,$$

т. е. тогда кажущаяся энергія будетъ равна безуаттной слагающей.

20. Резюмируя все сказанное въ § 19, выпишемъ всѣ величины, съ которыми мы имѣли дѣло при анализѣ цѣпи съ самоиндукціею.

Мы нашли, что если въ такой цѣпи, сопротивленіе которой равно R , а коэффициентъ самоиндукціи равенъ L , дѣйствуетъ электродвижущая сила $e = E \sin 2\pi n t$, то сила тока будетъ вида:

$$i = I \sin (2\pi n t - \psi) \dots (1)$$

гдѣ

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (2\pi n L)^2}} \dots (2)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\pi n L}{R} \dots (3)$$

Комбинируя (2) и (3), мы можемъ еще написать:

$$I = \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi n L}{R}\right)^2}} = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}}$$

или еще

$$I = \frac{E \cos \psi}{R} \dots \dots \dots (4)$$

Задерживаніемъ Z мы условились называть выраженіе

$$Z = \sqrt{R^2 + (2\pi nL)^2} \dots \dots \dots (5)$$

при чемъ самореакціею назвали

$$x = 2\pi nL.$$

Отсюда заключаемъ:

$$Z = \sqrt{R^2 + x^2} \dots \dots \dots (6)$$

Такимъ образомъ можемъ написать:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{E}{Z} \dots \dots \dots (7)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{x}{R} \dots \dots \dots (8)$$

$$E = Z \cdot I \dots \dots \dots (9)$$

Точно также E можно разсматривать, какъ геометрическую сумму двухъ слагающихъ:

$$\hat{E} = RI + j(xI) \dots \dots \dots (10)$$

Электродвижущая сила самоиндукціи:

$$e_s = -L \frac{di}{dt} = 2\pi nLI \sin(2\pi nt - \psi - \frac{\pi}{2}) \dots (11)$$

Амплитуда электродвижущей силы самоиндукціи есть)

$$E_s = 2\pi nLI \dots \dots \dots (12)$$

и изображается векторомъ, отстоящимъ назадъ отъ вектора тока I на $\frac{\pi}{2}$, т. е. на уголъ 90° .

Далѣе мы положили:

$$E'_s = xI = 2\pi nLI \dots \dots \dots (13)$$

и показали, что

$$\text{векторъ } E'_s = - \text{векторъ } E_s$$

или символически:

$$jE'_s = -jE_s \dots \dots \dots (14)$$

Векторы E_s и E'_s разнятся по положенію другъ отъ друга на 180° , слѣдовательно векторъ E'_s опережаетъ на 90° векторъ тока I .

Уравненіе (10) можетъ быть на основаніи вышесказаннаго написано въ слѣдующемъ видѣ:

$$\hat{E} = RI + jE'_s \dots \dots \dots (15)$$

Мощность переменнаго тока:

$$W_1 = E_\partial I_\partial \cos \psi \dots \dots \dots (16)$$

$$W_1 = RI_\partial^2 \dots \dots \dots (17)$$

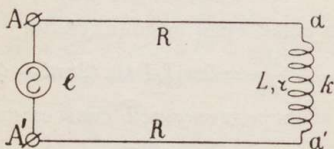
$$E_\partial \hat{I}_\partial = RI_\partial^2 + j2\pi nLI_\partial^2 \dots \dots \dots (18)$$

$$E_\partial \hat{I}_\partial = RI_\partial^2 + jI_\partial^2 x \dots \dots \dots (19)$$

$$2\pi nLI_\partial^2 = xI_\partial^2 = E_\partial I_\partial \sin \varphi \dots \dots \dots (20)$$

Рѣшимъ теперь нѣсколько основныхъ задачъ:

21. Задача I. Дана цѣпь $Aaa'A'$ (фиг. 28). Между зажимами aa' включенъ пріемникъ k , требующій дѣйствующую силу тока I_∂ . Сопротивленіе cadaго изъ



Фиг. 28.

проводниковъ Aa , $A'a'$ равно R . Требуется опредѣлить, какова должна быть дѣйствующая электродвижущая сила у зажимовъ A и A' и каково будетъ напряженіе у зажимовъ a и a' ?

Коэффициентъ самоиндукціи пріемника равенъ L , сопротивление равно r . Самоиндукція частей Aa , $A'a'$ равна нулю.

Пусть e переменная электродвижущая сила у зажи-

мовъ A и A' , пусть E_0 искомоe дѣйствующее значеніе этой электродвижущей силы.

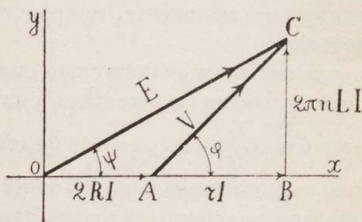
Уравненіе элементарной работы будетъ:

$$e idt = 2Ri^2 dt + ri^2 dt + Lidi,$$

откуда

$$e = 2Ri + ri + L \frac{di}{dt}.$$

Это уравненіе показываетъ, что векторъ искомой электродвижущей силы равенъ геометрической суммѣ векторовъ: $2RI$, rI и $2\pi nLI$, ибо векторы функций $2Ri$, ri и $L \frac{di}{dt}$, какъ мы уже знаемъ (§ 19), будутъ $2RI$, rI и $2\pi nLI$, причемъ векторы $2RI$ и rI совпадаютъ по положенію (по фазѣ) съ векторомъ тока I , а векторъ $E'_s = 2\pi nLI$ опережаетъ векторъ тока на 90° (§ 19 и 20). Отсюда слѣдуетъ построеніе (фиг. 29): выбираемъ



Фиг. 29.

за начальную ось ox направленіе вектора тока, откладываемъ на ox сначала $OA = 2RI$, затѣмъ $AB = rI$, изъ B проводимъ подъ угломъ 90° впередъ по направленію вращенія векторъ BC , равный $2\pi nLI$, соединяемъ OC . Векторъ OC будетъ векторъ искомой электродвижущей силы у AA' . Далѣе не трудно видѣть, что AC есть векторъ напряженія v у зажимовъ aa' . Дѣйствительно уравненіе элементарной работы у зажимовъ aa' даетъ:

$$vidt = ri^2 dt + Lidi,$$

откуда

$$v = ri + L \frac{di}{dt},$$

что показываетъ, что векторъ V есть геометрическая сумма векторовъ rI и $2\pi nLI$; но $rI = AB$, $2\pi nLI = BC$, слѣдовательно AC есть векторъ v .

Построивъ векторъ OC , можно опредѣлить его численное значеніе.

Пусть ψ уголъ AOC , φ уголъ CAB . Проектируя OC на ox получимъ:

$$OC \cos \psi = OA + AB.$$

или

$$OC \cos \psi = 2RI + rI.$$

$$OC \sin \psi = BC = 2\pi nLI,$$

откуда

$$\overline{OC^2} = (2R + r)^2 I^2 + (2\pi nL)^2 I^2$$

Точно также найдемъ и V .

Рѣшимъ теперь ту же задачу, посредствомъ символическаго метода.

Такъ какъ искомая электродвижущая сила есть алгебраическая сумма электродвижущихъ силъ $2Ri$, ri , $L \frac{di}{dt}$, то ея символическое выраженіе будетъ алгебраическая сумма символическихъ значеній векторовъ предыдущихъ электродвижущихъ силъ. Эти векторы выражаются при принятой выше оси ox (ось векторовъ тока)

$$2\hat{R}i = 2RI + j \cdot o,$$

ибо этотъ векторъ не имѣетъ вертикальной слагающей,

$$\hat{r}i = rI + j \cdot o$$

$$L \frac{\hat{d}i}{dt} = o + j \cdot 2\pi nLI$$

Сумма этихъ выраженій будетъ:

$$E = (2RI + rI) + j \cdot 2\pi nLI,$$

откуда

$$E = \sqrt{(2R + r)^2 I^2 + (2\pi nL)^2 I^2}$$

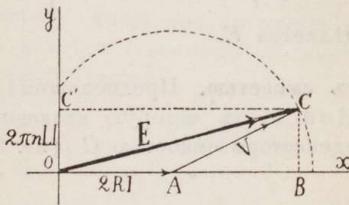
и уголъ вектора E съ осью ox опредѣлится отноше-
ніемъ:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\pi n L}{2R + r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\S 10)$$

Векторъ V будетъ:

$$V = rI + j \cdot 2\pi n LI.$$

Задача II. Рѣшимъ теперь ту же задачу, но при
условіи, что дано дѣйствующее напряженіе V_0 у за-
жимовъ aa' , сила тока I_0 и коэффициентъ самоиндук-
ціи L пріемника k . Сопротивленіе же его не дано.
Обратимся къ графику фиг. 29. Векторъ V есть геоме-
трическая равнодѣйствующая вектора AB , который
неизвѣстенъ, и вектора $BC = 2\pi n LI$. Положеніе конца
 AC извѣстно, ибо $OA = 2RI$, гдѣ R и I извѣстны. Самъ
векторъ V извѣстенъ, слѣдовательно его конецъ C
будетъ гдѣ либо на окружности, описанной изъ A ,
какъ центра радіусомъ равнымъ V (фиг. 30).



Фиг. 30.

Съ другой стороны, такъ какъ его вертикальная сла-
гающая равна $2\pi n LI$ (извѣстная величина), то тотъ
же конецъ C будетъ находиться гдѣ либо на прямой
параллельной къ оси ox , проведенной на разстояніи
 $OC' = 2\pi n LI$. Такимъ образомъ положеніе конца век-
тора V опредѣлится пересѣченіемъ окружности съ
упомянутой параллельною линією. Проведя затѣмъ
 OC , найдемъ векторъ электродвижущей силы E .

Если опустимъ перпендикуляръ CB на ось ox , то
 AB представитъ собою сопротивленіе r пріемника k .

Рѣшимъ ту же задачу символическимъ методомъ. Мы можемъ написать:

$$\hat{V} = X + j \cdot 2\pi n L I \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ X неизвѣстно, ибо r не дано.

Съ другой стороны:

$$\hat{E} = 2RI + \hat{V} = 2RI + X + j 2\pi n L I \dots \dots (2)$$

Изъ уравненія (1) выводимъ:

$$V^2 = X^2 + (2\pi n L I)^2 \dots \dots \dots (3)$$

Изъ уравненія (2)

$$E^2 = (2RI + X)^2 + (2\pi n L I)^2 \dots \dots \dots (4)$$

Изъ уравненія (3) получимъ:

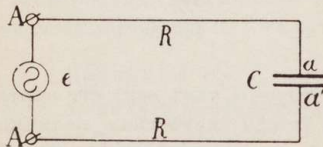
$$X = \sqrt{V^2 - (2\pi n L I)^2}$$

Подставляя въ (4), найдемъ:

$$E^2 = \left\{ 2RI + \sqrt{V^2 - (2\pi n L I)^2} \right\}^2 + (2\pi n L I)^2,$$

откуда опредѣляется E .

22. Цѣпь съ емкостью. Предположимъ, что намъ дана цѣпь $Aa a' A'$, въ которую включенъ послѣдовательно конденсаторъ емкостью C (фиг. 31).



Фиг. 31.

Пусть сопротивление Aa равно R , $A'a'$ равно тоже R . Если въ данное мгновеніе проходитъ токъ i , а электродвижущая сила у зажимовъ AA' будетъ e , то уравненіе элементарной работы будетъ:

$$e i dt = 2R i^2 dt + dw,$$

гдѣ dw работа, затрачиваемая при зарядкѣ конденсатора. Опредѣлимъ эту работу. Предположимъ, что въ данный моментъ напряженіе у арматуръ конденсатора v . Если C емкость его, то какъ извѣстно потенциальная энергія конденсатора въ этотъ моментъ будетъ:

$$\frac{1}{2} C v^2.$$

Кромѣ того, если у арматуръ конденсатора напряженіе v , то накопленное количество электричества будетъ:

$$q = C \cdot v,$$

откуда

$$v = \frac{q}{C}$$

и слѣдовательно потенциальная энергія будетъ:

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

Но если черезъ конденсаторъ течетъ переменный токъ i , то въ моментъ t времени въ немъ накопится количество электричества

$$q = \int_0^t i dt.$$

Работа, производимая въ цѣпи конденсатора за промежутокъ времени dt , будетъ измѣряться измѣненіемъ его потенциальной энергіи, т. е.

$$dw = \frac{q dq}{C}$$

или

$$dw = \frac{1}{C} \cdot i dt \int_0^t i dt,$$

ибо

$$q = \int_0^t i dt, \quad dq = i dt.$$

Написанное нами уравнение элементарной работы будетъ:

$$e idt = 2Ri^2 dt + \frac{1}{C} \cdot idt \int_0^t idt,$$

откуда

$$e = 2Ri + \frac{1}{C} \int_0^t idt.$$

Мы видимъ, что въ каждый моментъ времени электродвижущая сила у зажимовъ AA' является суммою двухъ электродвижущихъ силъ:

$$2Ri \text{ и } \frac{1}{C} \int_0^t idt.$$

Если e представляетъ собою простую гармоническую функцію $e = E \sin 2\pi nt$, то ея слагающія $2Ri$ и $\frac{1}{C} \int_0^t idt$ будутъ также функціи синусоидальныя того

же числа періодовъ. Иначе говоря i будетъ вида:

$$i = I \sin (2\pi nt + \varphi);$$

тогда

$$\begin{aligned} 2Ri &= 2RI \sin (2\pi nt + \varphi), \\ \frac{1}{C} \int_0^t idt &= \frac{1}{C} \int_0^t I \sin (2\pi nt + \varphi) dt = \\ &= \frac{I}{C} \int_0^t \sin (2\pi nt + \varphi) dt. \end{aligned}$$

Но такъ какъ производная функціи $\cos (2\pi nt + \varphi)$ равняется $-2\pi n \sin (2\pi nt + \varphi)$, то

$$\int_0^t \sin (2\pi nt + \varphi) dt = -\frac{1}{2\pi n} \cos (2\pi nt + \varphi) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi n} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi nt - \varphi\right) = \\ = \frac{1}{2\pi n} \sin\left(2\pi nt + \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Слѣдовательно электродвижущая сила e будетъ суммою двухъ слагающихъ:

$$2RI \sin(2\pi nt + \varphi) \text{ и } \frac{I}{2\pi nC} \sin\left(2\pi nt + \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Векторъ E электродвижущей силы e будетъ замыкающей прямоугольнаго треугольника, катетами котораго будутъ векторы:

$$2RI \text{ и } \frac{I}{2\pi nC}.$$

Слѣдовательно будемъ имѣть:

$$E^2 = (2RI)^2 + \frac{I^2}{(2\pi nC)^2}$$

откуда

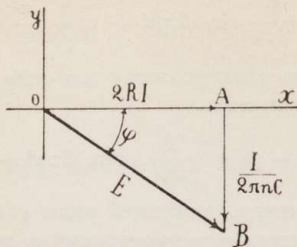
$$I^2 = \frac{E^2}{4R^2 + \frac{1}{4\pi^2 n^2 C^2}},$$

откуда

$$I = \frac{E}{\sqrt{4R^2 + \frac{1}{4\pi^2 n^2 C^2}}}.$$

Примемъ направленіе вектора тока за ось векторовъ. Тогда векторъ $2RI$ будетъ совпадать съ этимъ направленіемъ, ибо функціи $I \sin(2\pi nt + \varphi)$ и $2RI \sin(2\pi nt + \varphi)$ совпадаютъ по фазѣ. Векторъ же $\frac{I}{2\pi nC}$ будетъ отъ вектора тока отстоять на $\frac{\pi}{2}$ назадъ по направленію вращенія, ибо функціи $I \sin(2\pi nt + \varphi)$ и $\frac{I}{2\pi nC} \sin\left(2\pi nt + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ разнятся по фазѣ на $\frac{\pi}{2}$ и вторая отстаетъ отъ первой. Вслѣдствіе этого

получимъ діаграмму, изображенную на прилагаемой фигурѣ (фиг. 32).



Фиг. 32.

Векторъ OB электродвижущей силы $e = E \sin 2\pi nt$ будетъ слѣдовательно отставать отъ вектора OA на уголъ AOB ; поэтому если $e = E \sin 2\pi nt$, то $i = I \sin (2\pi nt + AOB)$. Сравнивая это выражение съ $i = I \sin (2\pi nt + \varphi)$ находимъ, что $\angle AOB = \varphi$.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что въ данномъ случаѣ фаза тока опережаетъ фазу электродвижущей силы, въ противоположность тому, что было въ цѣпи съ самоиндукціей.

Изъ фигуры 32 видно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} AOB = \frac{AB}{OA} = \frac{1}{2R \cdot 2\pi nC}$$

23. Опредѣлимъ напряженіе у зажимовъ конденсатора. Пусть v это напряженіе. Мы нашли раньше (§ 22), что

$$v = \frac{q}{C},$$

а

$$q = \int_0^t i dt.$$

Слѣдовательно:

$$v = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

Но изъ уравненія элементарной работы мы вывели, что

$$e = 2Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

и нашли, что векторъ электродвижущей силы

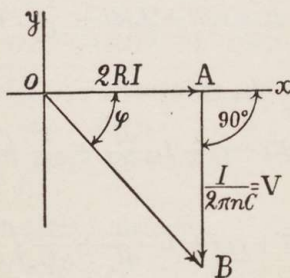
$$\frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

будетъ $\frac{I}{2\pi n C}$.

Слѣдовательно:

$$V = \frac{I}{2\pi n C},$$

причемъ этотъ векторъ отстоитъ отъ вектора тока на уголъ $\frac{\pi}{2}$ назадъ по направленію вращенія. Такимъ образомъ, получимъ діаграмму (фиг. 33).



Фиг. 33.

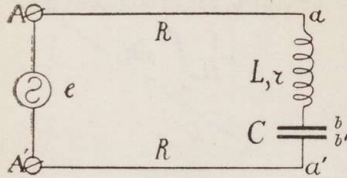
Переходя къ символическимъ выраженіямъ, можемъ слѣдовательно написать:

$$\hat{E} = 2RI - j \cdot V$$

гдѣ

$$V = \frac{I}{2\pi n C}$$

24. Цѣпь съ самоиндукціей и емкостью. Предположимъ теперь, что у насъ имѣется цѣпь $Aaa'A'$, въ которую послѣдовательно включено сопротивление r съ самоиндукціей L и конденсаторъ емкостью C .



Фиг. 34.

Пусть у зажимовъ AA' дѣйствуетъ простая гармоническая электродвижущая сила $e = E \sin 2\pi nt$. Напишемъ уравненіе элементарной работы:

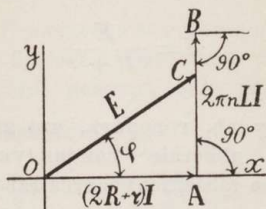
$$e idt = 2Ri^2 dt + r idt + L i di + \frac{1}{C} \cdot idt \int_0^t idt$$

Раздѣливъ на idt , найдемъ:

$$\begin{aligned} e &= 2Ri + ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt = \\ &= (2R + r) i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt. \end{aligned}$$

Отсюда мы видимъ, что электродвижущая сила e есть сумма трехъ слагающихъ: фаза первой $(2R + r)i$ совпадаетъ съ фазой тока i и ея векторъ будетъ $(2R + r)I$; фаза второй опережаетъ фазу тока на $\frac{\pi}{2}$ и ея векторъ $E'_s = 2\pi nLI$ и наконецъ фаза третьей отстаетъ отъ фазы тока на $\frac{\pi}{2}$ и ея векторъ $E'_c = \frac{I}{2\pi nC}$. Слѣдовательно векторъ E электродвижущей силы e

получится по диаграммѣ на фиг. 35, а именно, слѣдуетъ отложить по вектору тока $OA = (2R + r)I$; затѣмъ изъ A провести $AB = 2\pi nLI$ подѣ угломъ 90° впередъ по направленію вращенія къ вектору тока. Далѣе изъ B провести BC подѣ угломъ 90° къ вектору тока, назадъ по направленію вращенія.



Фиг. 35.

Тогда замыкающая OC будетъ векторъ E электро-движущей силы e . Изъ диаграммы видно, что

$$\begin{aligned} E = OC &= \sqrt{(OA)^2 + (AC)^2} = \sqrt{(OA)^2 + (AB - BC)^2} = \\ &= \sqrt{(2R + r)^2 I^2 + \left(2\pi nLI - \frac{I}{2\pi nC}\right)^2} = \\ &= I \sqrt{(2R + r)^2 + \left(2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC}\right)^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} I &= \frac{E}{\sqrt{(2R + r)^2 + \left(2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC}\right)^2}}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{AC}{OA} = \frac{2\pi nLI - \frac{I}{2\pi nC}}{(2R + r)I} = \frac{2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC}}{2R + r}. \end{aligned}$$

Векторъ OC будетъ опережать по фазѣ векторъ тока или будетъ отставать отъ этого послѣдняго въ зависимости отъ того будетъ-ли BC меньше AB или больше AB , т. е. будетъ-ли

$$\frac{1}{2\pi nC} < 2\pi nL \text{ или } > 2\pi nL$$

Когда $BC = AB$, то векторъ OC совпадаетъ съ векторомъ тока. Следовательно электродвижущая сила e будетъ совпадать по фазѣ съ токомъ i , когда

$$\frac{1}{2\pi n C} = 2\pi n L.$$

Тогда

$$I = \frac{E}{2R + r}$$

Въ такомъ случаѣ, говорятъ, что дѣйствіе емкости компенсируетъ дѣйствіе самоиндукціи. Дѣйствительно, сила тока тогда получается такая, какъ если бы въ цѣпи не было ни емкости, ни самоиндукціи.

25. Явленіе резонанса напряженій. Опредѣлимъ теперь напряженіе у борновъ aa' . Если примѣнить къ части между aa' уравненіе элементарной работы, то получимъ:

$$v dt = ri^2 dt + L i di + \frac{1}{C} i dt \int_0^t i dt,$$

откуда:

$$v = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt,$$

откуда видимъ, что v является суммой двухъ электродвижущихъ силъ

$$ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{1}{C} \int_0^t i dt.$$

Иначе говоря векторъ V будетъ геометрической суммой двухъ векторовъ: вектора E_1 и E_c , изъ которыхъ:

$$\hat{E}_1 = rI + j \cdot 2\pi n L I$$

$$\hat{E}_c = -j \frac{I}{2\pi n C}.$$

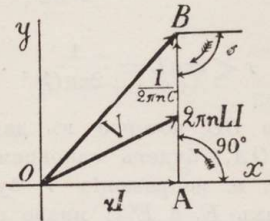
Слѣдовательно:

$$\hat{V} = \hat{E}_1 + \hat{E}_c = rI + j \left(2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC} \right) I,$$

откуда

$$V = \sqrt{(rI)^2 + I^2 \left(2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC} \right)^2} \quad . \quad . \quad (1)$$

Графически V найдется построениемъ, показаннымъ на фиг. 36. Это будетъ замыкающая OB . Векторъ OA взять равнымъ rI , векторъ AB равнымъ $2\pi nLI$ и векторъ BC равнымъ $\frac{I}{2\pi nC}$



Фиг. 36.

Ясно, что векторъ OB изображаетъ собою электро-движущую силу $\hat{E}_1 = rI + j2\pi nLI$. Какъ видно, OB всегда будетъ больше OC (на чертежѣ V). Это видно также изъ сравненія численныхъ значеній:

Дѣйствительно изъ выраженія

$$\hat{E}_1 = rI + j2\pi nLI$$

выводимъ:

$$E_1 = \sqrt{(rI)^2 + (2\pi nLI)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2) видимъ, что $E_1 > V$. Отсюда слѣдуетъ, что напряженіе у зажимовъ aa' меньше, чѣмъ часть его составляющая, т. е. напряженіе между a и b (фиг. 34). Эта разниа будетъ тѣмъ больше, чѣмъ OC ближе будетъ къ OA (фиг. 36); максимумъ разницы бу-

детъ имѣть мѣсто, когда OC совпадаетъ съ OA , т. е. когда $BC = AB$ или когда

$$2\pi nLI = \frac{I}{2\pi nC}$$

т. е. когда

$$2\pi nL = \frac{1}{2\pi nC}$$

Если при этомъ $OA < AB$, а слѣдовательно меньше, чѣмъ и BC (предполагая, что $AB = BC$), т. е., если

$$rI < 2\pi nLI = \frac{I}{2\pi nC}$$

или

$$r < 2\pi nL = \frac{1}{2\pi nC},$$

то выйдетъ, что OC , которое въ данномъ случаѣ совпадаетъ съ OA , будетъ одновременно меньше и AB и BC , т. е. напряжение V будетъ меньше своихъ слагающихъ E_1 и E'_c ; иначе говоря, напряжение у aa' будетъ меньше, чѣмъ каждое изъ напряженій у зажимовъ ab и bb' , или, что все равно у зажимовъ ab и ba' (пренебрегая сопротивленіемъ соединительнаго проводника $b'a'$).

Если сопротивленія R, R подводящихъ проводниковъ $Aa, A'a'$ незначительно, то электродвижущая сила у зажимовъ AA' будетъ весьма мало отличаться отъ электродвижущей силы у зажимовъ aa' , ибо ея векторъ E , какъ мы уже нашли (§ 24)

$$E = I \sqrt{(2R + r)^2 + \left(2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC}\right)^2},$$

а

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{(rI)^2 + \left(2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC}\right)^2} I^2 = \\ &= I \sqrt{r^2 + \left(2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC}\right)^2}. \end{aligned}$$

И тогда получится, что электродвижущая сила у зажимовъ генератора AA' меньше, чѣмъ каждая изъ составляющихъ электродвижущихъ силъ у ab и у ba' . Подобное явленіе называется резонансомъ напряженій.

26. Интересно изслѣдовать измѣненіе напряженія у зажимовъ конденсатора, когда L или C будутъ измѣняться.

Мы уже нашли, что электродвижущая сила у зажимовъ конденсатора

$$E'_c = \frac{I}{2\pi nC}.$$

Но

$$I = \frac{V}{\sqrt{r^2 + \left(2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC}\right)^2}} \dots (1)$$

Слѣдовательно:

$$E'_c = \frac{V}{2\pi nC \sqrt{r^2 + \left(2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC}\right)^2}} \dots (2)$$

Предположимъ, что напряженіе V постоянная величина, т. е., что мы поддерживаемъ постояннымъ напряженіе у зажимовъ aa' , и допустимъ сначала, что C остается постоянной величиной, а L измѣняется. Мы видимъ, что при $L = 0$

$$E'_c = \frac{V}{2\pi nC \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{2\pi nC}\right)^2}}.$$

Далѣе знаменатель будетъ minimum, а слѣдовательно E'_c будетъ maximum, когда

$$u^2 = \left(2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC}\right)^2$$

будетъ minimum. Найдемъ minimum этого выраженія. Первая производная по L будетъ:

$$2u \frac{du}{dL} = 2 \left(2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC}\right) \cdot 2\pi n$$

Эта производная будетъ равняться нулю, когда

$$2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

или когда

$$L = \frac{1}{(2\pi n)^2 C}.$$

Слѣдовательно наибольшее значеніе E'_c будетъ:

$$E'_c = \frac{V}{2\pi nCr}.$$

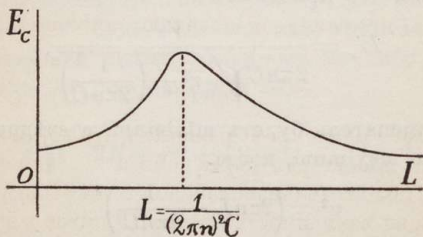
Отсюда видимъ, что, когда L будетъ увеличиваться отъ 0 до $\frac{1}{(2\pi n)^2 C}$, то E'_c будетъ возрастать отъ

$$\frac{V}{2\pi nC \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{2\pi nC}\right)^2}}$$

до

$$\frac{V}{2\pi nCr}.$$

Затѣмъ, когда L будетъ увеличиваться далѣе, т. е. когда $2\pi nL$ будетъ больше $\frac{1}{(2\pi nC)^2}$, то E'_c будетъ снова уменьшаться.



Фиг. 37.

Если мы, какъ абсциссы, будемъ откладывать L , а какъ ординаты — соотвѣтствующія значенія E'_c , то

получимъ кривую, изображенную на фиг. 37. Эта кривая показываетъ, что при измѣненіи L получится внезапное усиленіе напряженія, называющееся резонансомъ напряженія, а условіе при которомъ это усиленіе имѣетъ мѣсто, т. е. условіе

$$2\pi n L - \frac{1}{2\pi n C} = 0$$

называется уравненіемъ резонанса *).

Исслѣдуемъ теперь измѣненіе E'_c въ зависимости отъ измѣненія емкости C .

Преобразовывая уравненіе (2), найдемъ:

$$E'_c = \frac{V}{\sqrt{(2\pi n C)^2 r^2 + (2\pi n L)^2 (2\pi n C)^2 - 2(2\pi n L)(2\pi n C) + 1}},$$

откуда видимъ, что при $C=0$, $E'_c = V$.

Посмотримъ теперь, что будетъ съ E'_c , когда C будетъ увеличиваться. Для этого положимъ $2\pi n C = x$ и координируемъ выраженіе подъ корнемъ по отношенію къ x , тогда получимъ:

$$x^2 [(2\pi n L)^2 + r^2] - 2(2\pi n L)x + 1$$

Это выраженіе будетъ minimum для значенія x , превращающаго первую производную этого выраженія въ нуль.

Первая производная будетъ:

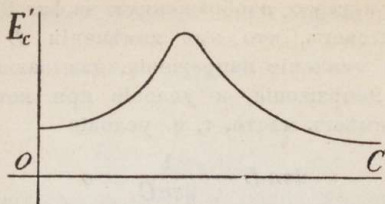
$$2x [(2\pi n L)^2 + r^2] - 2(2\pi n L).$$

Откуда, приравнявая ее нулю, получимъ для x :

$$x = \frac{2\pi n L}{(2\pi n L)^2 + r^2}.$$

Для этого значенія выраженіе подъ корнемъ будетъ minimum, ибо вторая производная не зависитъ отъ x и будетъ положительная, каково бы ни было значеніе x . Графически зависимость E'_c отъ C изобразится кривою, изображенною на фиг. 38.

*) См. Galileo Ferraris, Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik, S. 265, 266 и 267.



Фиг. 38.

27. Изъ того, что было разобрано въ § 24 слѣдуетъ, что случай одновременнаго дѣйствія въ цѣпи и емкости и самоиндукціи можетъ быть сведенъ либо къ случаю дѣйствія только самоиндукціи либо къ случаю дѣйствія только емкости. Когда

$$2\pi nL > \frac{1}{2\pi nC},$$

то все происходитъ такъ, какъ будто бы въ цѣпи дѣйствовала нѣкоторая самоиндукція L' , а когда:

$$2\pi nL < \frac{1}{2\pi nC}$$

то все происходитъ такъ, какъ будто бы въ цѣпи дѣйствовала нѣкоторая емкость C' .

Опредѣлимъ L' и C' .

Если сопротивленіе всей цѣпи R , самоиндукція ея L , то, какъ мы уже знаемъ (§ 18) амплитуда тока будетъ:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (2\pi nL)^2}}$$

Если же въ цѣпи вмѣсто самоиндукціи дѣйствуетъ емкость, то (§ 22):

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi nC}\right)^2}}$$

Напишемъ теперь выраженіе амплитуды тока для

случая, когда въ цѣпи имѣется самоиндукція L и емкость C . Это выраженіе будетъ:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC}\right)^2}} \dots (1)$$

Предположимъ, что $2\pi nL > \frac{1}{2\pi nC}$; тогда все будетъ происходить такъ, какъ если бы въ цѣпи дѣйствовала нѣкоторая самоиндукція L' и мы будемъ имѣть:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (2\pi nL')^2}} \dots \dots \dots (2)$$

Сравнивая (1) и (2), найдемъ:

$$2\pi nL' = 2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC},$$

откуда

$$L' = L - \frac{1}{(2\pi n)^2 C} = \frac{(2\pi n)^2 CL - 1}{(2\pi n)^2 C}.$$

Если же $2\pi nL < \frac{1}{2\pi nC}$, то все будетъ происходить такъ, какъ если бы въ цѣпи дѣйствовала нѣкоторая емкость C' и мы будемъ имѣть:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi nC'}\right)^2}} \dots \dots \dots (3)$$

Сравнивая (3) съ (1), получимъ:

$$\frac{1}{2\pi nC'} = 2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC},$$

откуда:

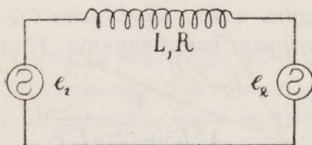
$$\frac{1}{C'} = (2\pi n)^2 L - \frac{1}{C}.$$

или

$$C' = \frac{C}{(2\pi n)^2 CL - 1}.$$

На основаніи всего сказаннаго выше, мы впредь будемъ сводить всѣ вопросы, въ которыхъ будетъ идти рѣчь объ одновременномъ дѣйствіи емкости и самоиндукціи, включенныхъ послѣдовательно, къ вопросамъ, въ которыхъ разбирается либо только дѣйствіе самоиндукціи, либо только дѣйствіе емкости.

28. Рѣшимъ теперь слѣдующую задачу. Предполо-



Фиг. 39.

жимъ, что въ цѣпи съ самоиндукціею L и сопротивленіемъ R дѣйствуютъ двѣ электродвижущихъ силы:

$$\epsilon_1 = E_1 \sin 2\pi nt \text{ и } \epsilon_2 = E_2 \sin (2\pi nt + \psi).$$

Посмотримъ какова будетъ сила тока въ этой цѣпи.

Уравненіе элементарной работы будетъ:

$$\epsilon_1 idt + \epsilon_2 idt = Ri^2 dt + Lidi$$

откуда выводимъ:

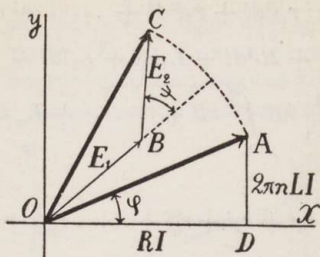
$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Отсюда видимъ, что векторъ суммы E_1 и E_2 равенъ по величинѣ вектору суммы $R I$ и $2\pi n L I$. Если мы примемъ за начальную ось векторовъ, векторъ тока I , то мы знаемъ, что векторъ суммы $R I$ и $2\pi n L I$ составитъ съ начальною осью уголъ φ , опредѣляемый отношеніемъ:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi n L I}{R I} = \frac{2\pi n L}{R}$$

Проведемъ слѣдовательно OA подъ угломъ φ къ начальной оси ox , затѣмъ построимъ діаграмму суммы векторовъ E_1 и E_2 . Для этого (фиг. 40) прове-

демъ произвольную прямую OB , на ней отложимъ $OB = E_1$, изъ точки B проведемъ векторъ BC подъ угломъ ψ къ вектору OB , на BC отложимъ $BC = E_2$, соединимъ затѣмъ OC . Замыкающая OC представитъ



Фиг. 40.

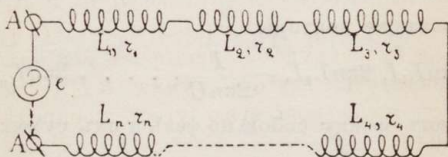
по величинѣ сумму векторовъ E_1 и E_2 . Радиусомъ OC опишемъ дугу, которая засѣчетъ на OA , отрѣзокъ OA . Этотъ отрѣзокъ и будетъ сумма векторовъ RI и $2\pi n L I$. Если опустимъ изъ A перпендикуляръ AD на ox , то получимъ отрѣзки

$$OD = RI \text{ и } AD = 2\pi n L I.$$

Откуда выведемъ

$$I = \frac{OD}{R} = \frac{AD}{2\pi n L}.$$

29. Предположимъ, что въ цѣпь, у зажимовъ кото-



Фиг. 41.

рой дѣйствуетъ электродвижущая сила $e = E \sin 2\pi nt$, (фиг. 41) включены n приемниковъ съ самоиндукціею и емкостью.

Пусть $(L_1, r_1), (L_2, r_2), (C_3, r_3) \dots (L_n, r_n)$ со-
противления, самоиндукции и емкости этихъ приёмни-
ковъ, пусть R сопротивление остальной части цѣпи.
Уравнение элементарной работы будетъ:

$$\begin{aligned} e idt &= r_1 i^2 dt + r_2 i^2 dt + \dots + r_n i^2 dt \\ &+ Ri^2 dt + L_1 i di + L_2 i di + \\ &+ \frac{1}{C_3} idt \int_0^t idt + \dots + L_n i di, \end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{aligned} e &= r_1 i + r_2 i + r_3 i + \dots + r_n i + Ri + \\ &+ L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_3} \int_0^t idt + \dots + L_n \frac{di}{dt}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаемъ, что векторъ E электродви-
жущей силы у зажимовъ является геометрической
суммою векторовъ:

$$RI, r_1 I, r_2 I, \dots r_n I, 2\pi n L_1 I, 2\pi n L_2 I, \frac{I}{2\pi n C_3} \dots 2\pi n L_n I.$$

Векторы $RI, r_1 I, \dots r_n I$ совпадаютъ по фазѣ
и ихъ сумма будетъ векторъ:

$$(R + r_1 + r_2 + \dots + r_n) I \dots (1)$$

Точно также векторы

$$2\pi n L_1 I, 2\pi n L_2 I, -\frac{I}{2\pi n C} \dots 2\pi n L_n I$$

совпадаютъ между собою по фазѣ и ихъ сумма будетъ:

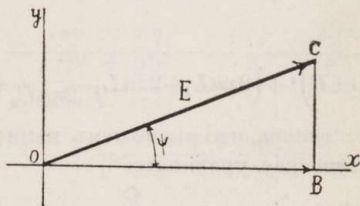
$$(2\pi n L_1 + 2\pi n L_2 - \frac{1}{2\pi n C} + \dots + 2\pi n L_n) I \dots (2).$$

Векторы (1) и (2) разнятся по фазѣ между собою на
 90° . Если мы примемъ за начальную ось векторовъ
векторъ тока I , то геометрическая сумма векторовъ

(1) и (2) образуетъ съ осью векторовъ уголъ ψ , тангенсъ котораго будетъ:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\pi n L_1 + 2\pi n L_2 - \frac{1}{2\pi n C_3} + \dots + 2\pi n L_n}{R + r_1 + r_2 + \dots + r_n}$$

Такъ какъ равнодѣйствующая векторовъ (1) и (2) должна быть равна E , то самые векторы найдутся слѣдующимъ построениемъ: проводимъ OC подъ угломъ къ начальной оси равнымъ ψ (впередъ по направленію



Фиг. 42.

вращенія, если $\operatorname{tg} \psi > 0$, т. е. если $\psi > 0$ и назадъ въ противоположномъ случаѣ). На этой прямой откладываемъ $OC = E$. Катеты OB и CB представляютъ собою векторы (1) и (2). Искомая сила тока I опредѣлится изъ уравненія:

$$\overline{OB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{OC}^2$$

т. е.

$$(r_1 + r_2 + \dots + r_n + R)^2 I^2 + (2\pi n L_1 + 2\pi n L_2 - \frac{1}{2\pi n C_3} + \dots + 2\pi n L_n)^2 I^2 = E^2$$

Отсюда

$$I = \frac{E}{\sqrt{\left(\sum r + R\right)^2 + \left(2\pi n L_1 + 2\pi n L_2 - \frac{1}{2\pi n C_3} + \dots + 2\pi n L_n\right)^2}}$$

Знаменатель есть векторъ геометрической суммы задерживаній:

$$\hat{Z}_0 = R$$

или

$$\hat{I} = \frac{(a \pm ja')(p - jq)}{p^2 + q^2}$$

или еще:

$$\hat{I} = \frac{ap \pm a'q \pm j(a'p \mp aq)}{p^2 + q^2},$$

$$\hat{I} = \frac{ap \pm a'q}{p^2 + q^2} \pm j \frac{a'p \mp aq}{p^2 + q^2}.$$

Откуда:

$$I^2 = \frac{(ap \pm a'q)^2}{(p^2 + q^2)^2} + \frac{(a'p \mp aq)^2}{(p^2 + q^2)^2}$$

Необходимо доказать, что:

$$\frac{(ap \pm a'q)^2 + (a'p \mp aq)^2}{(p^2 + q^2)^2} = \frac{E^2}{Z^2}$$

т. е. что:

$$\frac{(ap \pm a'q)^2 + (a'p \mp aq)^2}{(p^2 + q^2)^2} = \frac{a^2 + a'^2}{p^2 + q^2},$$

ибо мы имѣемъ:

$$E^2 = a^2 + a'^2,$$

$$Z^2 = p^2 + q^2.$$

Сокращая на $p^2 + q^2$ мы придемъ къ доказательству равенства:

$$\frac{(ap \pm a'q)^2 + (a'p \mp aq)^2}{p^2 + q^2} = a^2 + a'^2$$

Развертывая, получимъ:

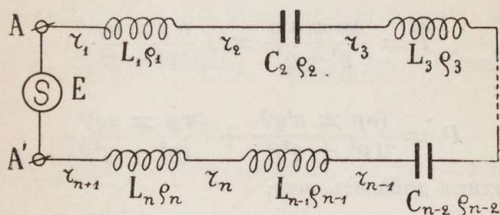
$$\frac{a^2 p^2 + a'^2 q^2 + a'^2 p^2 + a^2 q^2}{p^2 + q^2} = a^2 + a'^2,$$

что очевидно.

30. Рѣшимъ теперь слѣдующія двѣ задачи:

Задача I. Въ данной цѣпи включено послѣдовательно n приемниковъ, изъ которыхъ каждый требуетъ напряженіе соотвѣтственно $V_1, V_2, V_3 \dots V_n$ и силу тока I . Сопротивленія участковъ цѣпи между приемниками равны соотвѣтственно $r_1, r_2 \dots r_n$. У зажи-

мовъ цѣпи имѣется напряженіе E . Нѣкоторые изъ приемниковъ съ самоиндукціею, другіе съ емкостью, на примѣръ, приемники 1, 3 и т. д. съ самоиндукціею, остальные съ емкостью. Дано внутреннее сопротивленіе приемниковъ; пусть $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_n$ эти сопротивленія. Самоиндукцій и емкости приемниковъ не даны. Тре-



Фиг. 43.

буется узнать, достаточно ли данное напряженіе E у зажимовъ AA' и если оно больше, чѣмъ нужно, то какую реакціонную катушку надо включить, чтобы дать соотвѣтствующее напряженіе приемникамъ.

Примемъ за начальную ось векторовъ векторъ тока I . Пусть i мгновенная сила тока, $v_1, v_2, \dots v_n$ мгновенныя напряженія, требуемыя у зажимовъ приемниковъ; тогда получимъ:

$$v_1 = \rho_1 i + L_1 \frac{di}{dt}$$

$$v_2 = \rho_2 i + \frac{1}{C_2} \int_0^t i dt$$

$$\dots \dots \dots$$

$$v_n = \rho_n i + L_n \frac{di}{dt}$$

Напряженіе, которое потребно у зажимовъ AA' будетъ:

$$v = \rho_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + \rho_2 i + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + \dots + \rho_n i + L_n \frac{di}{dt} + r_1 i + r_2 i + \dots + r_{n+1} i.$$

собою искомое напряжение V потребное для n приемниковъ.

Теперь изъ точки O опишемъ окружность радиусомъ равнымъ E . Векторъ OC_n пересѣчетъ эту окружность въ точкѣ K ; тогда векторъ $C_n K$ дастъ намъ то добавочное паденіе вольтъ, которое должна дать реакціонная катушка, чтобы при электродвижущей силѣ E у зажимовъ AA' приемники получили требуемое напряжение $V = OC_n$. Слагающія $C_n P$ и PK вектора $C_n K$ изобразятъ величины pI и $2\pi nLI$, гдѣ p искомое сопротивленіе реакціонной катушки, а $2\pi nL$ искомая реакція самоиндукціи. Слѣдовательно

$$p = \frac{C_n P}{I}$$

$$L = \frac{PK}{2\pi nI}.$$

Катушка вполне опредѣлена.

Можно взять реакціонную катушку съ весьма малымъ сопротивленіемъ, т. е. считать, что слагающая $pI = 0$. Тогда L опредѣлится изъ слѣдующаго построенія: изъ C_n проведемъ параллель къ ox и возставимъ перпендикуляръ $C_n K'$ къ этой параллели. Пусть K' точка пересѣченія этого перпендикуляра съ окружностью, описанною радиусомъ E . Векторъ

$$C_n K' = 2\pi nL'I,$$

откуда

$$L' = \frac{C_n K'}{2\pi nI}$$

Такимъ образомъ тутъ возможны два рѣшенія. Второе рѣшеніе практически выгоднѣе, ибо во второмъ случаѣ въ реакціонной катушкѣ не будетъ потери уаттной энергіи на нагреваніе. Промежуточные векторы $C_n K''$, $C_n K'''$ и т. д. представляютъ также рядъ рѣшеній.

Если располагаемая электродвижущая сила меньше, чѣмъ требуемое для данныхъ приемниковъ напря-

женіе OC_n , то питаніе этихъ послѣднихъ также возможно, если мы добавимъ послѣдовательно съ ними емкость, величина которой опредѣлится пересѣченіемъ вектора, проведеннаго изъ C_n перпендикулярно къ оси ox , съ окружностью, описанною радіусомъ, равнымъ вектору данной электродвижущей силы E . Такимъ образомъ необходимая емкость опредѣлится векторомъ $C_n Q$. Однако это второе рѣшеніе будетъ возможно до тѣхъ поръ, пока E будетъ не меньше того значенія, при которомъ окружность, описанная радіусомъ равнымъ вектору электродвижущей силы будетъ касательна къ $C_n Q$. Для всѣхъ значеній меньшихъ рѣшеніе будетъ невозможно.

Для опредѣленія численныхъ значеній величинъ, характеризующихъ реакціонную катушку, примѣнимъ символическій методъ.

Мы можемъ написать:

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_1 &= \rho_1 I + j \cdot 2\pi n L_1 I \\ \hat{V}_2 &= \rho_2 I - j \frac{I}{2\pi n C_2} \\ \hat{V}_3 &= \rho_3 I + j \cdot 2\pi n L_3 I \\ &\dots \dots \dots \\ \hat{V}_n &= \rho_n I + j \cdot 2\pi n L_n I \\ \hat{\Delta V} &= (r_1 + r_2 + \dots + r_{n+1}) I \end{aligned} \right\} (1)$$

Далѣе, если p сопротивление искомой реакціонной катушки и L ея самоиндукція, то напряжение U , которое потребуется у ея зажимовъ для того, чтобы черезъ нее прошелъ токъ I , будетъ:

$$\hat{U} = pI + j \cdot 2\pi n LI.$$

Ясно что:

$$\hat{\Delta V} + \hat{V}_1 + \hat{V}_2 + \dots + \hat{V}_n + \hat{U} = \hat{E}.$$

Отсюда выводимъ:

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2 \dots r_{n+1} + \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n + p) I + j (2\pi n L_1 - \\ - \frac{1}{2\pi n C_2} + \dots + 2\pi n L_n + 2\pi n L) I = \hat{E}, \end{aligned}$$

откуда:

$$E^2 = (r_1 + r_2 + \dots + r_{n+1} + \rho_1 + \rho_2 + \dots + p)^2 I^2 + \\ + (2\pi n L_1 - \frac{1}{2\pi n C_2} + \dots + 2\pi n L_n + 2\pi n L)^2 I^2 \dots (2)$$

Кромѣ того изъ выраженій (1) выводимъ:

$$V_1^2 = I^2 [\rho_1^2 + (2\pi n L_1)^2]$$

$$V_2^2 = I^2 \left[\rho_2 + \frac{1}{(2\pi n C_2)^2} \right]$$

$$\dots \dots \dots V_n^2 = I^2 [\rho_n + (2\pi n L_n)^2],$$

откуда выводимъ:

$$2\pi n L_1, \frac{1}{2\pi n C_2}, \dots, 2\pi n L_n.$$

Вставляя въ уравненіе (2), получимъ уравненіе, въ которомъ неизвѣстными величинами будутъ только p и $2\pi n L$; если зададимся одною изъ нихъ, то найдемъ другую.

31. Задача II. Въ данной цѣпи дѣйствуетъ электродвижущая сила E , причемъ сила тока равна I . Какое задерживаніе Z' необходимо включить, чтобы уменьшить силу тока до I' .

При силѣ тока I и электродвижущей силѣ E задерживаніе въ цѣпи будетъ:

$$Z = \frac{E}{I},$$

ибо мы знаемъ, что: $I = \frac{E}{Z}$.

Если же сила тока I' , то задерживаніе будетъ:

$$Z + Z' = \frac{E}{I'}$$

откуда

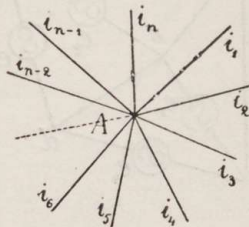
$$Z' = \frac{E}{I'} - \frac{E}{I}.$$

Зная Z' , можемъ разсчитать соотвѣтствующую реакціонную катушку.

ГЛАВА III.

Развѣтвление переменныхъ токовъ.

32. Предположимъ, что къ точкѣ A подходят токи, мгновенныя значенія которыхъ $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$. Ясно, что въ каждое мгновеніе сумма всѣхъ токовъ будетъ равняться нулю. Отсюда слѣдуетъ, что геометрическая сумма векторовъ $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ будетъ также



Фиг. 45.

равна нулю, т. е. векторы $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ будутъ складываться въ замкнутый многоугольникъ. Въ такомъ случаѣ сумма проекцій векторовъ на любую ось будетъ равна нулю. Если, слѣдовательно, мы изобразимъ символически токи $i_1, i_2, \dots, i_n$ черезъ:

$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= k_1 + jk'_1 \\ \hat{I}_2 &= k_2 + jk'_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \hat{I}_n &= k_n + jk'_n,\end{aligned}$$

то:

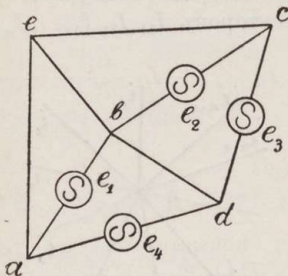
$$\begin{aligned}k_1 + k_2 + \dots + k_n &= 0 \\ k'_1 + k'_2 + \dots + k'_n &= 0\end{aligned}$$

или слѣдовательно символически:

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \dots + \hat{I}_n = 0.$$

Разберемъ теперь болѣе общій случай. Представимъ себѣ сложную сѣть $abcde, \dots$, въ которой

части ab , bc , cd , ad , ... обладают сопротивлениемъ, самоиндукціею или емкостью. Кроме того пусть въ этихъ частяхъ дѣйствуютъ электродвижущія силы e_1 , e_2 , e_3 , e_4 , ... Разсмотримъ одинъ изъ контуровъ $abcd$. Пусть i_1 , i_2 , i_3 , i_4 мгновенныя значенія токовъ въ частяхъ ab , bc , cd , da этого контура. Обозначимъ



Фиг. 46.

черезъ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 мгновенныя значенія потенціаловъ въ узлахъ a , b , c , d . Примѣнимъ уравненія элементарной работы къ каждой части контура, т. е. напишемъ, что энергія доставляемая въ каждое мгновеніе, равна энергіи расходуемой. Пусть L_1 , C_1 , L_2 , C_2 , L_3 , C_3 , L_4 , C_4 самоиндукціи и емкости частей ab , bc , cd , ad . Уравненія элементарныхъ работъ будутъ:
для части ab :

$$e_1 i_1 dt + (v_1 - v_2) i_1 dt = i_1^2 r_1 dt + L_1 i_1 di_1 + \frac{1}{C_1} i_1 dt \int_0^t i_1 dt,$$

для части bc :

$$e_2 i_2 dt + (v_2 - v_3) i_2 dt = i_2^2 r_2 dt + L_2 i_2 di_2 + \frac{1}{C_2} i_2 dt \int_0^t i_2 dt,$$

для части cd :

$$e_3 i_3 dt + (v_3 - v_4) i_3 dt = i_3^2 r_3 dt + L_3 i_3 di_3 + \frac{1}{C_3} i_3 dt \int_0^t i_3 dt,$$

для части da :

$$e_4 i_4 dt + (v_4 - v_1) i_4 dt = i_4^2 r_4 dt + L_4 i_4 di_4 + \frac{1}{C_4} i_4 dt \int_0^t e_4 dt.$$

Сокращая соотвѣтственно эти уравненія на $i_1 dt$, $i_2 dt$... и складывая, получимъ:

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 + e_4 &= i_1 r_1 + i_2 r_2 + i_3 r_3 + i_4 r_4 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \\ &+ L_2 \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} + L_4 \frac{di_4}{dt} + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt + \\ &+ \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2 dt + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3 dt + \frac{1}{C_4} \int_0^t i_4 dt. \end{aligned}$$

Это уравненіе показываетъ, что геометрическая сумма векторовъ $E_1 + E_2 + E_3 + E_4$ равняется геометрической суммѣ векторовъ:

$$\begin{aligned} r_1 I_1, \quad r_2 I_2, \quad r_3 I_3, \quad r_4 I_4, \\ 2\pi n L I_1, \quad 2\pi n L I_2, \quad 2\pi n L I_3, \quad 2\pi n L I_4, \\ -\frac{I_1}{2\pi n C_1}, \quad -\frac{I_2}{2\pi n C_2}, \quad -\frac{I_3}{2\pi n C_3}, \quad -\frac{I_4}{2\pi n C_4}. \end{aligned}$$

Вообще мы можемъ слѣдовательно написать:

$$\sum e = \sum ri + \sum L \frac{di}{dt} + \sum \frac{1}{C} \int_0^t i dt,$$

или еще:

$$\sum e - \sum ri - \sum L \frac{di}{dt} - \sum \frac{1}{C} \int_0^t i dt = 0.$$

Отсюда двѣ слѣдующихъ теоремы:

Теорема I. Во всякой сложной сѣти въ каждомъ узлѣ векторы токовъ складываются въ видѣ замкнутаго многоугольника.

Теорема II. Во всякой сложной сѣти въ каждомъ замкнутомъ контурѣ векторы электродвижущихъ силъ и векторы вида $-RI, -2\pi nLI, \frac{I}{2\pi nC}$ складываются въ замкнутый многоугольникъ.

Замѣчая, что геометрическая сумма векторовъ $r_1I_1, 2\pi nL_1I_1, \frac{I_1}{2\pi nC_1}$ изображается символически произведениемъ $\hat{Z}_1 \hat{I}_1$,
гдѣ

$$\hat{Z}_1 = r_1 + j \left(2\pi nL_1 - \frac{1}{2\pi nC_1} \right)$$

и

$$Z = \sqrt{r_1^2 + \left(2\pi nL_1 - \frac{1}{2\pi nC_1} \right)^2},$$

мы можемъ предыдущія теоремы выразить слѣдующими символическими уравненіями:

Для всякаго узла:

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \dots + \hat{I}_n = 0$$

или

$$\sum \hat{I} = 0.$$

Для всякаго контура:

$$\hat{I}_1 \hat{Z}_1 + \hat{I}_2 \hat{Z}_2 + \dots + \hat{I}_n \hat{Z}_n = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \dots + \hat{E}_n$$

или

$$\sum \hat{I} \hat{Z} = \sum \hat{E},$$

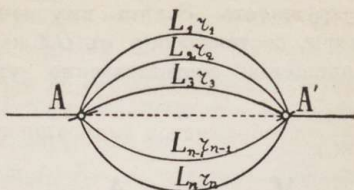
гдѣ E дѣйствующія въ контурѣ электродвижущія силы.

На приведенныхъ выше теоремахъ основана вся теорія явленій въ сложныхъ цѣпяхъ.

Мы теперь перейдемъ къ примѣненію этихъ теоремъ въ наиболѣе характерныхъ случаяхъ.

33. Задача I. Между зажимами AA' имѣется n развѣтвленій, сопротивленія которыхъ $r_1, r_2, r_3 \dots r_n$ и

коэффициенты самоиндукции $L_1, L_2, L_3 \dots L_n$. Дано напряжение у зажимовъ AA' ; требуется определить силы токовъ въ развѣтвленіяхъ и силу главнаго тока.



Фиг. 47.

Пусть V напряжение у зажимовъ AA' . Обозначимъ черезъ $I_1, I_2, \dots I_n$ силы токовъ въ развѣтвленіяхъ и черезъ I силу главнаго тока.

Ясно, что: -

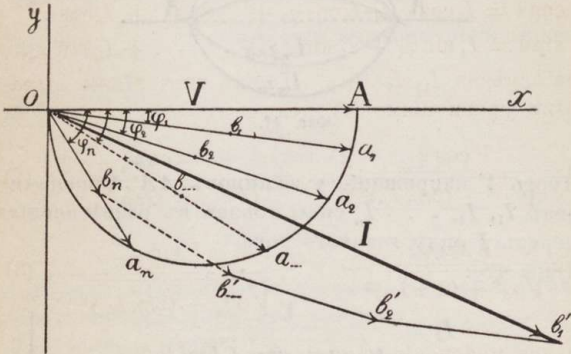
$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{V}{\sqrt{r_1^2 + (2\pi n L_1)^2}} \\ I_2 &= \frac{V}{\sqrt{r_2^2 + (2\pi n L_2)^2}} \\ &\dots \dots \dots \\ I_n &= \frac{V}{\sqrt{r_n^2 + (2\pi n L_n)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При этомъ мы знаемъ, что V является гипотенузою прямоугольныхъ треугольниковъ, катеты которыхъ будутъ соответственно векторами $(r_1 I_1, 2\pi n L_1 I_1)$, $(r_2 I_2, 2\pi n L_2 I_2)$ и т. д. Кроме того мы знаемъ, что векторы $r_1 I_1, r_2 I_2, \dots r_n I_n$ составляютъ съ направлениемъ вектора V углы, тангенсы которыхъ соответственно равны отношеніямъ:

$$\frac{2\pi n L_1}{r_1}, \quad \frac{2\pi n L_2}{r_2}, \quad \dots \quad \frac{2\pi n L_n}{r_n}.$$

Иначе говоря эти углы извѣстны. Зная V и эти углы

легко опредѣлить векторы $r_1 I_1$, $r_2 I_2$ и т. д. слѣдующимъ построениемъ: беремъ за начальную ось векторовъ направление вектора V , откладываемъ на этой оси $OA = V$, затѣмъ опишемъ на OA , какъ на диаметрѣ полуокружность. Затѣмъ изъ точки O проведемъ векторы, составляющіе съ OA назадъ по направлению вращенія соотвѣтственно углы φ_1 , φ_2 ,



Фиг. 48.

$\varphi_3 \dots \varphi_n$, опредѣляемые выше приведенными отношеніями $\frac{2\pi n L_1}{r_1}$, $\frac{2\pi n L_2}{r_2}$ и т. д. Эти векторы пересѣкутъ полуокружность въ точкахъ $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$. Отрѣзки $oa_1, oa_2, oa_3 \dots oa_n$ представляютъ собою по положенію и величинѣ векторы $r_1 I_1, r_2 I_2, r_3 I_3, \dots r_n I_n$. Отложимъ на нихъ $ob_1, ob_2 \dots ob_n$ равныя $\frac{oa_1}{r_1}, \frac{oa_2}{r_2} \dots \frac{oa_n}{r_n}$; тогда $ob_1, ob_2 \dots ob_n$ изобразятъ векторы токовъ $I_1, I_2, I_3 \dots I_n$.

На основаніи первой теоремы векторы $ob_1, ob_2, \dots ob_n$ и векторы искомага главнаго тока должны сложиться въ замкнутый многоугольникъ, иначе говоря векторъ главнаго тока долженъ замкнуть многоугольникъ векторовъ $ob_1, ob_2, ob_3 \dots ob_n$. Построимъ этотъ послѣдній и для удобства начнемъ съ вектора

ob_n , проводя послѣдовательно черезъ b_n прямую $b_nb'_{n-1}$, параллельную и равную вектору ob_{n-1} ; затѣмъ черезъ b'_{n-1} прямую $b'_{n-1}b'_{n-2}$, равную и параллельную вектору ob_{n-2} и т. д. Соединивъ ob'_1 , получимъ векторъ ob'_1 , равный I по величинѣ и положенію. Проектируя діаграмму $ob'_1 b'_2 b'_3 \dots b'_{n-1} b_n$ на ось ox и на ось ей перпендикулярную, получимъ:

$$I \cos \theta = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2 + \dots + I_n \cos \varphi_n$$

$$I \sin \theta = I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2 + \dots + I_n \sin \varphi_n,$$

откуда замѣняя $I_1, I_2 \dots I_n$ ихъ значеніями, выраженными уравненіями (1), получимъ:

$$I \cos \theta = \frac{V \cos \varphi_1}{\sqrt{r_1^2 + (2\pi n L_1)^2}} + \dots + \frac{V \cos \varphi_n}{\sqrt{r_n^2 + (2\pi n L_n)^2}} \dots (2)$$

$$I \sin \theta = \frac{V \sin \varphi_1}{\sqrt{r_1^2 + (2\pi n L_1)^2}} + \dots + \frac{V \sin \varphi_n}{\sqrt{r_n^2 + (2\pi n L_n)^2}} \dots (3)$$

Эти два уравненія дадутъ намъ I и $\operatorname{tg} \theta$.

34. Задача II. Въ предъидущемъ развѣтвленіи дана сила главнаго тока, найти силы токовъ въ развѣтвленіяхъ, зная сопротивленія и коэффиціенты самоиндукціи въ этихъ послѣднихъ.

Предположимъ, что у зажимовъ AA' дѣйствуетъ нѣкоторая электродвижущая сила V' вмѣсто V ; тогда силы токовъ въ развѣтвленіяхъ будутъ:

$$I'_1 = \frac{V'}{\sqrt{r_1^2 + (2\pi n L_1)^2}}$$

$$I'_2 = \frac{V'}{\sqrt{r_2^2 + (2\pi n L_2)^2}}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$I'_n = \frac{V'}{\sqrt{r_n^2 + (2\pi n L_n)^2}}.$$

Отсюда видимъ, сравнивая съ выраженіями (1), что:

$$\frac{I_1}{I'_1} = \frac{I_2}{I'_2} = \dots = \frac{I_n}{I'_n} = \frac{V}{V'}.$$

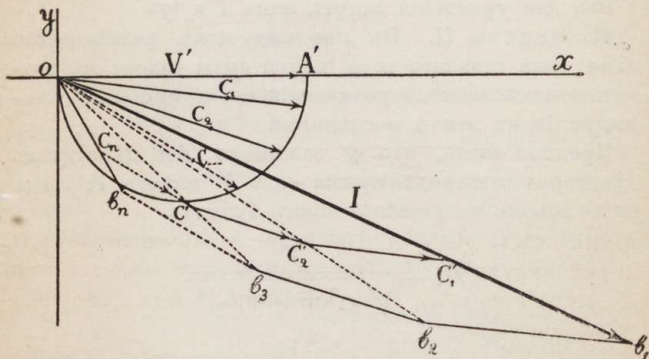
Иначе говоря, многоугольникъ построенный на векторахъ:

$$I'_1 r_1, I'_2 r_2 \dots I'_n r_n,$$

будетъ подобенъ многоугольнику, построенному на искомахъ векторахъ:

$$I_1 r_1, I_2 r_2 \dots I_n r_n.$$

Отсюда слѣдующее рѣшеніе: на оси ox откладываемъ $OA' = V'$ и строимъ многоугольникъ $OC'_1 C'_2 \dots C'_n$, стороны котораго соотвѣтственно будутъ равны $I'_1, I'_2, \dots, I'_n$, а замыкающая OC'_1 будетъ



Фиг. 49.

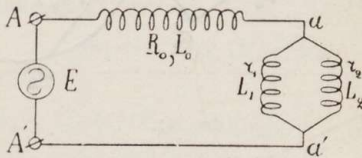
равна геометрической суммѣ $I'_1, I'_2, \dots, I'_n$. Отложимъ теперь на OC'_1 векторъ ob_1 , равный данному главному току I , затѣмъ проведемъ $(b_1b_2), (b_2b_3) \dots (b_{n-1}b_n)$ соотвѣтственно параллельно сторонамъ $C'_1C'_2,$

$C'_2 C'_3, \dots, C'_{n-1} C'_n$. Тогда $b_1 b_2, b_2 b_3, \dots, b_{n-1} b_n, o'_n$ представлять собою искомые токи $I_1, I_2, \dots, I_n$. Зная же $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$, не трудно найти напряжение V , ибо V будет гипотенузой каждого из прямоугольных треугольников, катеты которых соответственно равны:

$$(r_1 I_1, 2\pi n L_1), (r_2 I_2, 2\pi n L_2) \dots$$

Аналитическое решение этой задачи сведется к определению сначала V и θ из уравнений (2) и (3) (см. предыдущую задачу), где $I, r_1, r_2, \dots, L_1, L_2, \dots$ даны. Затем, зная V , определим при помощи уравнений (1) (см. задачу I) $I_1, I_2, \dots, I_n$.

35. Задача III. Дана цепь $Aaa'A'$, у зажимов которой AA' действует электродвижущая сила E , а у зажимов aa' включены параллельно приемники с сопротивлением r_1, r_2 и самоиндукцией L_1, L_2 .



Фиг. 50.

Цепь между Aa и $A'a'$ обладает сопротивлением R_0 и самоиндукцией L_0 . Определить силу главного тока I_0 , силы токов I_1, I_2 в приемниках и напряжение V у зажимов aa' .

Предположим, что у зажимов aa' напряжение V' ; тогда в ветвях 1 и 2 будут токи I_1, I_2 , векторы которых $I_1 r_1, I_2 r_2$ определятся диаграммой $OA'a'_1 a'_2$, где $OA' = V'$. Пусть затем ob'_1, ob'_2 соответственно равны I_1, I_2 . Вектор им соответствующего главного тока I_0 определится диаграммой oc'_0 . Отложим затем по oc'_0 вектор $od'_0 = I_0 R_0$. Если у зажимов

Примѣнимъ къ той же задачѣ символическій методъ.
Первая теорема Кирхгоффа даетъ:

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \hat{I}_0 (1).$$

Вторая теорема Кирхгоффа, примѣненная къ контуру $Aa1a'A'$, даетъ:

$$\hat{E} = \hat{I}_0 \hat{Z}_0 + \hat{I}_1 \hat{Z}_1 (2).$$

Точно также для контура $Aa2a'A'$ получимъ:

$$\hat{E} = \hat{I}_0 \hat{Z}_0 + \hat{I}_2 \hat{Z}_2 (3).$$

Мы имѣемъ:

$$\hat{Z}_0 = R_0 + j . 2\pi n L_0$$

$$\hat{Z}_1 = r_1 + j . 2\pi n L_1$$

$$\hat{Z}_2 = r_2 + j . 2\pi n L_2.$$

Пусть:

$$\hat{I}_1 = k_1 + jk'_1$$

$$\hat{I}_2 = k_2 + jk'_2.$$

Тогда уравненіе (1) даетъ:

$$\hat{I}_0 = (k_1 + k_2) + j (k'_1 + k'_2) (4).$$

Уравненіе (2):

$$E = \{(k_1 + k_2) + j (k'_1 + k'_2)\} (R_0 + j . 2\pi n L_0) + \\ + (k_1 + jk'_1) (r_1 + j . 2\pi n L_1) (5).$$

Уравненіе (3):

$$\hat{E} = \{(k_1 + k_2) + j (k'_1 + k'_2)\} (R_0 + j . 2\pi n L_0) + \\ + (k_2 + jk'_2) (r_2 + j . 2\pi n L_2) (6).$$

Изъ двухъ послѣднихъ уравненій выводимъ:

$$(k_1 + jk'_1) (r_1 + j . 2\pi n L_1) = (k_2 + jk'_2) (r_2 + j . 2\pi n L_2),$$

откуда:

$$k_1 r_1 - k'_1 2\pi n L_1 = k_2 r_2 - k'_2 2\pi n L_2, (7)$$

$$k'_1 r_1 + k_1 2\pi n L_1 = k'_2 r_2 + k_2 2\pi n L_2 (8)$$

Выберемъ векторъ E за начальную ось; тогда

$$\hat{E} = E.$$

Уравнение (5) будетъ тогда:

$$E = \{ (k_1 + k_2) + j(k'_1 + k'_2) \} (R_0 + j \cdot 2\pi n L_0) + \\ + (k_1 + jk'_1) (r_1 + j \cdot 2\pi n L_1) \dots \dots (9).$$

Это уравнение дасть:

$$(k_1 + k_2) R_0 - (k'_1 + k'_2) 2\pi n L_0 + k_1 r_1 - k'_1 2\pi n L_1 = E, \quad (10)$$

$$(k'_1 + k'_2) R_0 + (k_1 + k_2) 2\pi n L_0 + k'_1 r_1 + k_1 2\pi n L_1 = 0. \quad (11)$$

Изъ уравнений (7), (8), (10) и (11) выведемъ k_1 , k'_1 , k_2 , k'_2 . Зная же k_1 , k'_1 , k_2 , k'_2 опредѣлимъ амплитуды токовъ I_1 , I_2 , I_0 и тангенсы угловъ, разностей фазъ токовъ I_0 , I_1 , I_2 и фазы электродвижущей силы E .

36. Комбинированное сопротивление и комбинированная самоиндукція или емкость въ развѣтвленныхъ цѣпяхъ. Мы уже видѣли, что если между двумя точками A и A' (§ 33, фиг. 47) имѣется n развѣтвленій съ сопротивленіемъ и самоиндукціею и если V напряженіе между A и A' , то силы токовъ въ развѣтвленіяхъ будутъ соотвѣтственно:

$$I_1 = \frac{V}{\sqrt{r_1^2 + (2\pi n L_1)^2}}$$

$$I_2 = \frac{V}{\sqrt{r_2^2 + (2\pi n L_2)^2}},$$

и т. д.

Сила главнаго тока I будетъ геометрическою суммою векторовъ I_1 , I_2 ... Представимъ себѣ, что всѣ развѣтвленія въ совокупности замѣнены однимъ общимъ проводникомъ съ такимъ сопротивленіемъ R и самоиндукціею L , чтобы:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (2\pi n L)^2}}.$$

Сопротивленіе R и самоиндукцію L мы назовемъ комбинированнымъ сопротивленіемъ и комбинированною самоиндукціею или также эквивалентнымъ сопротивленіемъ и самоиндукціею, аналогично комбинированному сопротивленію отвѣтвленій въ цѣпяхъ постоян-

наго тока. Опредѣлимъ величины R и L . Для этой цѣли весьма удобно примѣнить символическій методъ.

Мы можемъ написать:

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{V}}{r_1 + j \cdot 2\pi n L_1}$$

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{V}}{r_2 + j \cdot 2\pi n L_2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\hat{I}_n = \frac{\hat{V}}{r_n + j \cdot 2\pi n L_n}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{R + j \cdot 2\pi n L}$$

Если мы выберемъ за начальную ось векторовъ, векторъ напряженія V , то тогда:

$$\hat{V} = V$$

и слѣдовательно можемъ написать:

$$\hat{I}_1 = \frac{V}{r_1 + j \cdot 2\pi n L_1},$$

$$\hat{I}_2 = \frac{V}{r_2 + j \cdot 2\pi n L_2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\hat{I}_n = \frac{V}{r_n + j \cdot 2\pi n L_n},$$

$$\hat{I} = \frac{V}{R + j \cdot 2\pi n L}$$

Но, согласно предыдущему (§ 32):

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + \hat{I}_n.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{V}{R + j \cdot 2\pi n L} = \frac{V}{r_1 + j \cdot 2\pi n L_1} + \frac{V}{r_2 + j \cdot 2\pi n L_2} + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + \\ + \frac{V}{r_n + j \cdot 2\pi n L_n},$$

откуда:

$$\frac{1}{R + j \cdot 2\pi n L} = \frac{1}{r_1 + j \cdot 2\pi n L_1} + \frac{1}{r_2 + j \cdot 2\pi n L_2} + \dots + \frac{1}{r_n + j \cdot 2\pi n L_n}.$$

Преобразуемъ это выражение, освобождая знаменателей отъ комплексныхъ выражений. Тогда получимъ:

$$\frac{R - j \cdot 2\pi n L}{R^2 + (2\pi n L)^2} = \frac{r_1 - j \cdot 2\pi n L_1}{r_1^2 + (2\pi n L_1)^2} + \dots + \frac{r_n - j \cdot 2\pi n L_n}{r_n^2 + (2\pi n L_n)^2}$$

или еще:

$$\begin{aligned} \frac{R}{R^2 + (2\pi n L)^2} - j \cdot \frac{2\pi n L}{R^2 + (2\pi n L)^2} &= \frac{r_1}{r_1^2 + (2\pi n L_1)^2} + \\ &+ \frac{r_2}{r_2^2 + (2\pi n L_2)^2} + \dots + \frac{r_n}{r_n^2 + (2\pi n L_n)^2} - j \left\{ \frac{2\pi n L_1}{r_1^2 + (2\pi n L_1)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2\pi n L_2}{r_2^2 + (2\pi n L_2)^2} + \dots + \frac{2\pi n L_n}{r_n^2 + (2\pi n L_n)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Откуда выводимъ:

$$\frac{R}{R^2 + (2\pi n L)^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{r_k}{r_k^2 + (2\pi n L_k)^2} = A \quad . \quad . \quad (1).$$

$$\frac{2\pi n L}{R^2 + (2\pi n L)^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2\pi n L_k}{r_k^2 + (2\pi n L_k)^2} = B \quad . \quad . \quad (2).$$

Раздѣливъ (1) на (2), найдемъ:

$$\frac{R}{2\pi n L} = \frac{A}{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

откуда:

$$R = \frac{A}{B} \cdot 2\pi n L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Вставляя въ (1), получимъ:

$$\frac{\frac{A}{B} \cdot 2\pi nL}{\frac{A^2}{B^2} \cdot (2\pi nL)^2 + (2\pi nL)^2} = A.$$

Откуда:

$$\frac{AB}{A^2 + B^2} = A \cdot 2\pi nL$$

и

$$2\pi nL = \frac{B}{A^2 + B^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (5).$$

Вставляя въ (4), получимъ:

$$R = \frac{A}{A^2 + B^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (6).$$

Таковы выраженія комбинированнаго сопротивленія R и комбинированной самоиндукции L .

Если бы вмѣсто самоиндукции у насъ были емкости $C_1, C_2, C_3, \dots, C_k$, то тогда:

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{r_k}{r_k^2 + \frac{1}{(2\pi nC_k)^2}}$$

$$B = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{r_k^2 + \frac{1}{(2\pi nC_k)^2}}$$

и тогда опять нашли бы:

$$R = \frac{A}{A^2 + B^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (7)$$

$$\frac{1}{2\pi nC} = \frac{B}{A^2 + B^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (8).$$

Для кажущагося комбинированнаго сопротивленія или для задерживанія получимъ:

$$Z = \sqrt{R^2 + (2\pi nL)^2} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Слѣдовательно кажущаяся проводимость или пропускаемость будетъ:

$$y = \frac{1}{Z} = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Пользуясь комбинированными сопротивленіями и комбинированными самоиндукціею и емкостью, можно упростить значительно рѣшеніе задачъ по развѣтвленію переменныхъ токовъ. Такъ возьмемъ задачу III § 35. Комбинированное сопротивление и самоиндукція вѣтвей 1 и 2 согласно формуламъ (5) и (6) и (1) и (2) будутъ:

$$2\pi nL = \frac{B}{A^2 + B^2}$$

$$R = \frac{A}{A^2 + B^2}$$

гдѣ

$$A = \frac{r_1}{r_1^2 + (2\pi nL_1)^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + (2\pi nL_2)^2}$$

$$B = \frac{2\pi nL_1}{r_1^2 + (2\pi nL_1)^2} + \frac{2\pi nL_2}{r_2^2 + (2\pi nL_2)^2}.$$

Зная L и R , задача сведется къ опредѣленію силы тока I_0 въ цѣпи, сопротивление которой $R_0 + R$ и самоиндукція $L_0 + L$, и у зажимовъ которой дѣйствуетъ электродвижущая сила E . Тогда можемъ написать:

$$I_0 = \frac{E}{\sqrt{(R_0 + R)^2 + \{2\pi n(L_0 + L)\}^2}},$$

а уголъ разности фазъ тока I и электродвижущей силы E опредѣлится формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi n(L_0 + L)}{R_0 + R}.$$

Теперь не трудно найти токи I_1 и I_2 . Дѣйствительно

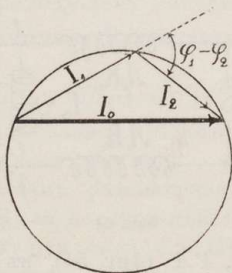
векторъ тока I_1 образуетъ съ векторомъ напряженія V у зажимовъ aa' уголъ φ_1 , опредѣляемый отношеніемъ:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2\pi n L_1}{R_1}.$$

Векторъ тока I_2 образуетъ съ тѣмъ же векторомъ V уголъ φ_2 , тангенсъ котораго:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2\pi n L_2}{R_2}.$$

Слѣдовательно векторы I_1 и I_2 образуютъ между собою уголъ: $\varphi_1 - \varphi_2$; кромѣ того изъ первой теоремы Кирхгоффа слѣдуетъ, что векторы I_0, I_1, I_2 образуютъ замкнутый многоугольникъ, т. е. въ данномъ случаѣ треугольникъ. Такъ какъ I_0 уже опредѣлено, а кромѣ того $I_1 Z_1 = I_2 Z_2$, гдѣ Z_1 и Z_2 кажущіяся сопротивленія вѣтвей, то опредѣленіе I_1 и I_2 сведется къ построенію (или рѣшенію) треугольника, въ которомъ извѣстна сторона I_0 и уголъ ($\varphi_1 - \varphi_2$) между двумя другими сторонами I_1 и I_2 . На фиг. 52 показана геометрическая зависимость векторовъ I_0, I_1 и I_2 .

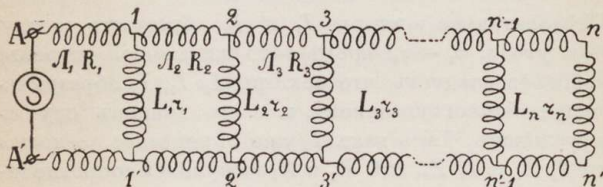


Фиг. 52.

37. Задача IV. Дана цѣпь съ развѣтвленіями 1, 2, 3 n , сопротивленія которыхъ соотвѣтственно равны $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$, а коэффициенты самоиндукціи $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n$. Извѣстны также сопротивленія и самоиндукціи участковъ $A-1, 1-2, 2-3, \dots$ равныя соотвѣтственно $R_1 \Lambda_1, R_2 \Lambda_2, \dots, R_n \Lambda_n$.

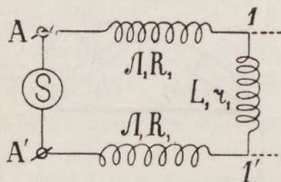
Въ цѣпи дѣйствуетъ электродвижущая сила $e = E \sin 2\pi nt$. Требуется опредѣлить силы токовъ въ отвѣтвленіяхъ $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ и силы токовъ въ участкахъ $A-1, 1-2, \dots, (n-1)-n$ (фиг. 53).

Сопротивленія и самоиндукціи участковъ $A'-1', 1'-2', \dots, (n'-1')-n'$ соответственно предполагаются равными $\Lambda_1, R_1, \Lambda_2, R_2, \dots, \Lambda_n, R_n$, т. е. такими же какъ и въ участкахъ $A-1, 1-2, \dots, (n-1)-n$.



Фиг. 53.

Обозначимъ силы токовъ въ участкахъ черезъ $J_1, J_2, J_3, \dots, J_n$. Разсмотримъ сначала часть $A11'A'$. Токъ J_1 въ участкахъ $A-1, A'-1'$ опредѣлится, если замѣтить, что онъ будетъ тотъ же, какъ и въ



Фиг. 54.

простой цѣпи $A1, 1'A'$ (фиг. 54), въ которой между зажимами $1-1'$ включено комбинированное сопротивление и комбинированная самоиндукція изъ r_1, L_1 и всей остальной части сѣти. Опредѣлимъ сначала эти комбинированныя величины.

Выразимъ сначала комбинированное сопротивление и комбинированную самоиндукцію между зажимами $(n-1)$ и $(n'-1)$; тутъ комбинируются двѣ части:

$$r_{n-1}, L_{n-1} \text{ съ } (2R_n + r_n), (2\Lambda_n + L_n).$$

Слѣдовательно (§ 36) комбинированное сопротивление ρ_{n-1} и комбинированная самоиндукція λ_{n-1} будутъ:

$$\rho_{n-1} = \frac{A}{A^2 + B^2}, \quad \lambda_{n-1} = \frac{B}{A^2 + B^2},$$

гдѣ

$$\begin{aligned} A &= \frac{r_{n-1}}{r_{n-1}^2 + (2\pi n L_{n-1})^2} + \\ &+ \frac{(2R_n + r_n)}{(2R_n + r_n)^2 + \{2\pi n (2\Lambda_n + L_n)\}^2} \\ B &= \frac{2\pi n L_{n-1}}{r_{n-1}^2 + (2\pi n L_{n-1})^2} + \\ &+ \frac{2\pi n (2\Lambda_n + L_n)}{(2R_n + r_n)^2 + \{2\pi n (2\Lambda_n + L_n)\}^2} \end{aligned}$$

У зажимовъ $n-2$ будутъ комбинироваться части:

$$r_{n-2}, L_{n-2} \text{ съ } (2R_{n-1} + \rho_{n-1}), (2\Lambda_{n-1} + \lambda_{n-1}).$$

Аналогично предыдущему найдемъ ρ_{n-2} и λ_{n-2} .

Наконецъ у зажимовъ 1, 1' будутъ комбинироваться части:

$$r_1, L_1 \text{ съ } (2R_2 + \rho_2), (2\Lambda_2 + \lambda_2)$$

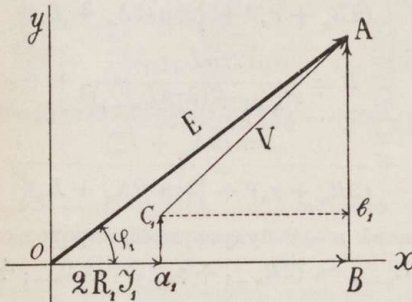
и дадутъ комбинированное сопротивление ρ_1 и комбинированную самоиндукцію λ_1 .

Теперь мы можемъ разсматривать простую цѣпь $A, 1, 1'A'$ (фиг. 54), въ которой дѣйствуетъ у зажимовъ AA' электродвижущая сила $e = E \sin 2\pi nt$ и которая имѣетъ сопротивление $2R_1 + \rho_1$ и самоиндукцію: $2\Lambda_1 + \lambda_1$. Такимъ образомъ опредѣленіе тока J_1 и напряженія V_1 у зажимовъ 1, 1' сведется къ рѣшенію задачи §§ 18 и 21.

Выберемъ за начальную ось векторовъ направление вектора тока J_1 (фиг. 55); проведемъ къ оси подъ угломъ φ_1 , опредѣляемымъ отношеніемъ:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2\pi n (2\Lambda_1 + \lambda_1)}{2R_1 + \rho_1}$$

прямую, на которой отложимъ $OA = E$. Изъ точки A опустимъ перпендикуляръ на ось векторовъ; тогда $OB = (2R_1 + \rho_1) J_1$, откуда опредѣлится J_1 . Опредѣлимъ теперь V_1 . Ясно, что E является геометрическою суммою векторовъ: V_1 , $2R_1 J_1$ и $(2\pi n \times 2\Lambda_1) J_1$. Отложимъ слѣдовательно на ox отрѣзокъ $oa_1 = 2R_1 J_1$; затѣмъ на перпендикулярѣ a_1c_1 отрѣзокъ $a_1c_1 = (2\pi n \times 2\Lambda_1) J_1$; соединимъ c_1A ; тогда c_1A представитъ собою векторъ V_1 .



Фиг. 55.

Опредѣливъ V_1 , построимъ такую же діаграмму для опредѣленія J_2 и V_2 , рассматривая цѣпь 1—1' 2—2', какъ самостоятельную, у зажимовъ которой 1—1' дѣйствуетъ электродвижущая сила V_1 и сопротивление которой равно $2R_2 + \rho_2$, а самоиндукція $2\Lambda_2 + \lambda_2$. Когда опредѣлимъ V_2 и J_2 , перейдемъ къ цѣпи 2—2', 3—3' и т. д.

Зная $V_1, V_2, V_3 \dots V_n$, не трудно уже опредѣлить $I_1, I_2, I_3 \dots I_n$, ибо:

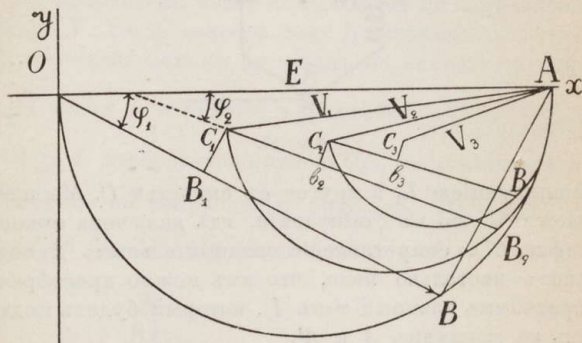
$$I_1 = \frac{V_1}{\sqrt{r_1^2 + (2\pi n L_1)^2}}$$

$$I_2 = \frac{V_2}{\sqrt{r_2^2 + (2\pi n L_2)^2}}$$

.....

$$I_n = \frac{V_n}{\sqrt{r_n^2 + (2\pi n L_n)^2}}$$

Строя отдѣльныя діаграммы для каждой пары зажимовъ 1 — 1', 2 — 2' и т. д. намъ придется каждый разъ за начальную ось векторовъ брать послѣдовательно направленіе векторовъ токовъ $J_1, J_2, \dots$. Но можно построить общую діаграмму, выбравъ за начальную ось направленіе вектора электродвижущей силы E . Тогда для опредѣленія J_1 , описываемъ на E , т. е. на векторѣ OA полуокружность; проводимъ къ OA пря-



Фиг. 56.

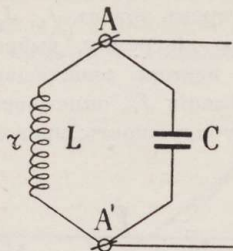
мую OB подъ угломъ φ_1 ; отръзокъ OB будетъ изображать векторъ $(2R_1 + \rho_1)J_1$; отръзокъ же BA — векторъ $2\pi n(2\Lambda_1 + \lambda_1)J_1$. Далѣе на OB откладываемъ $OB_1 = 2R_1J_1$, возставляемъ къ OB_1 перпендикуляръ B_1C_1 , откладываемъ $B_1C_1 = 2\pi n \cdot 2\Lambda_1 \cdot J_1$; тогда C_1A представитъ векторъ V_1 . Для опредѣленія V_2 , описываемъ на C_1A полуокружность, черезъ C_1 проводимъ прямую C_1B_2 подъ угломъ φ_2 , опредѣляемымъ отношеніемъ:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2\pi n(2\Lambda_2 + \lambda_2)}{2R_2 + \rho_2}.$$

Далѣе на C_1B_2 откладываемъ $c_1b_2 = 2R_2J_2$, возставляемъ перпендикуляръ b_2c_2 , откладываемъ $b_2c_2 = 2\pi n \cdot 2\Lambda_2J_2$; векторъ C_2A представитъ собою V_2 и т. д.

38. Резонансъ токовъ. Заканчивая эту главу, разберемъ слѣдующій частный случай развѣтвленія токовъ.

Предположимъ, что между зажимами A и A' , у которыхъ дѣйствуетъ напряжение $v = V \sin 2\pi nt$ включено два отвѣтвленія, одно съ сопротивленіемъ r и



Фиг. 57.

самоиндукціею L , а другое съ емкостью C . Мы предположимъ, что въ отвѣтвленіи, гдѣ включена емкость C (фиг. 57), сопротивление соединительныхъ проводниковъ настолько мало, что имъ можно пренебречь. Опредѣлимъ главный токъ I_0 , который будетъ подходить къ зажимамъ A и A' .

Токъ въ отвѣтвленіи r , L будетъ:

$$I_1 = \frac{V}{\sqrt{r^2 + (2\pi nL)^2}}.$$

Токъ въ отвѣтвленіи C будетъ:

$$I_2 = \frac{V}{\sqrt{\left(\frac{1}{2\pi nC}\right)^2}} = 2\pi nCV.$$

Векторъ главнаго тока I_0 будетъ замыкающею векторовъ I_1 и I_2 . Примемъ за начальную ось векторовъ, векторъ напряженія V . Векторъ тока I_1 образуетъ съ векторомъ V назадъ по направленію вращенія уголъ φ_1 , опредѣляемый отношеніемъ:

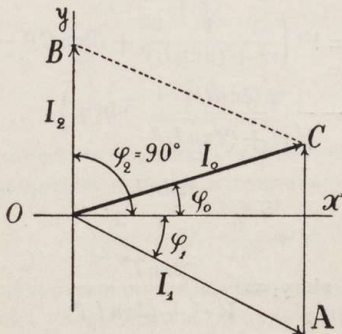
$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2\pi nL}{r}.$$

Векторъ тока I_2 образуетъ съ векторомъ V впередъ по направленію вращенія уголъ φ_2 , опредѣляемый отношеніемъ:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\left(\frac{1}{2\pi n C} \right)}{0} = \infty,$$

ибо сопротивление отвлѣтленія равно нулю; иначе говоря $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Построимъ діаграмму векторовъ (фиг. 58). Проведемъ ось ox , направленіе которой мы беремъ по направленію вектора V . Тогда векторъ тока I_1 изобразится прямою OA , составляющею съ ox назадъ по направленію вращенія уголъ φ_1 и равною выраженію $\frac{V}{\sqrt{r^2 + (2\pi n L)^2}}$. Векторъ I_2 изобразится прямою OB , составляющею съ ox впередъ по направленію вращенія уголъ $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ и равный $2\pi n C V$. Проведемъ черезъ A векторъ AC



Фиг. 58.

равный и параллельный вектору OB . Соединимъ OC векторъ OC будетъ изображать главный токъ I_0 , ибо OC является замыкающею векторовъ $OA = I_1$ и $AC = I_2$.

Чтобы определить численное значение амплитуды I_0 главного тока, спроектируемъ диаграмму OAC на ось ox , а затѣмъ на ось перпендикулярную къ ox . Обозначимъ уголъ COX черезъ φ_0 . Проектируя на ось ox получимъ:

$$OC \cos \varphi_0 = OA \cos \varphi_1$$

или

$$I_0 \cos \varphi_0 = I_1 \cos \varphi_1 \dots \dots \dots (1)$$

Проектируя на ось перпендикулярную, найдемъ:

$$OC \sin \varphi_0 = -OA \sin \varphi_1 + AC$$

или

$$I_0 \sin \varphi_0 = -I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \dots \dots \dots (2)$$

Возвышая уравненія (1) и (2) въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$I_0^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2 \sin \varphi_1.$$

Но

$$I_1^2 = \frac{V^2}{r^2 + (2\pi nL)^2},$$

$$I_2^2 = (2\pi nC)^2 V^2,$$

откуда:

$$I_0^2 = V^2 \left\{ \frac{1}{r^2 + (2\pi nL)^2} + (2\pi nC)^2 - \frac{2(2\pi nC)}{\sqrt{r^2 + (2\pi nL)^2}} \sin \varphi_1 \right\}.$$

Но

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2\pi nL}{r},$$

откуда

$$\sin \varphi_1 = \frac{2\pi nL}{\sqrt{r^2 + (2\pi nL)^2}},$$

Предыдущее уравненіе будетъ тогда вида:

$$I_0^2 = V^2 \left\{ \frac{1}{r^2 + (2\pi nL)^2} + (2\pi nC)^2 - \frac{2(2\pi nC) \cdot (2\pi nL)}{r^2 + (2\pi nL)^2} \right\}.$$

Положимъ для краткости:

$$2\pi nL = x, \quad 2\pi nC = y.$$

Тогда можем написать:

$$I_0^2 = V^2 \left\{ \frac{1}{r^2 + x^2} + y^2 - \frac{2xy}{r^2 + x^2} \right\}.$$

Предположим сначала, что y остается постоянною, а мѣняется x . Найдемъ minimum I_0^2 . Для этого приравняемъ первую производную по x нулю. Тогда получимъ:

$$\frac{-2x}{(r^2 + x^2)^2} - \frac{2(r^2 + x^2)y - 4x^2y}{(r^2 + x^2)^2} = 0.$$

Такъ какъ $r^2 + x^2$ всегда больше нуля, то можемъ написать:

$$-2x - 2r^2y + 2x^2y = 0$$

или еще:

$$x^2y - x - r^2y = 0,$$

откуда:

$$x = \frac{1}{2y} \pm \sqrt{\frac{1}{4y^2} + r^2}.$$

Отбрасывая отрицательный корень, получимъ:

$$x = \frac{1}{2y} + \sqrt{\frac{1}{4y^2} + r^2}.$$

При $x = 0$

$$I_0^2 = V^2 \left(\frac{1}{r^2} + y^2 \right).$$

Затѣмъ по мѣрѣ того, какъ x увеличивается, I_0^2 будетъ уменьшаться и когда x станетъ равнымъ

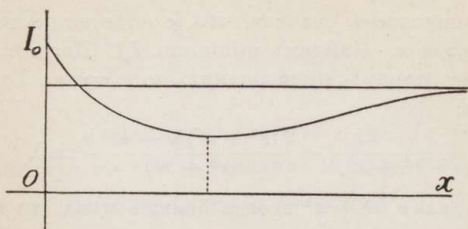
$$\frac{1}{2y} + \sqrt{\frac{1}{4y^2} + r^2},$$

то I_0^2 , а слѣдовательно и I_0 будетъ наименьшимъ. При дальнѣйшемъ увеличеніи x , I_0 будетъ снова возрастать и когда x станетъ равнымъ безконечности, то I_0 станетъ равнымъ:

$$I_0^2 = V^2 y^2 \text{ или } I_0 = Vy.$$

Легко видѣть, что I_0 будетъ также равно Vy , когда $1 - 2xy = 0$ или когда $x = \frac{1}{2y}$.

На фиг. 59 представлена графически зависимость I_0 отъ x .



Фиг. 59.

То же изслѣдованіе можно произвести графически. Обратимся къ діаграммѣ фигуры 60; мы замѣчаемъ, что $CA = I_2 = 2\pi n CV$. Такъ какъ мы предполагаемъ, что C и V величины постоянныя, то векторъ CA все время будетъ величиною постоянною и параллельною къ ou . Векторъ OA будетъ измѣняться въ зависимости отъ $2\pi nL$, ибо онъ равенъ

$$I_1 = \frac{V}{\sqrt{r^2 + (2\pi nL)^2}} = \frac{V \cos \varphi_1}{r},$$

такъ какъ

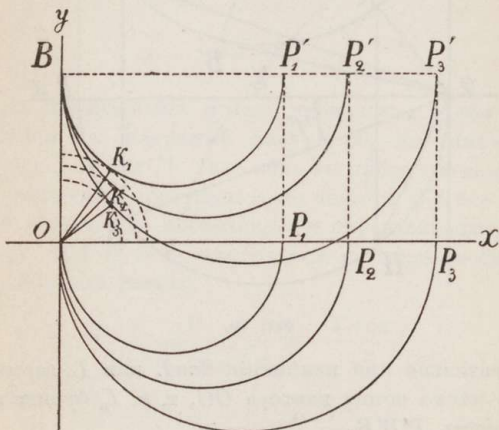
$$\cos \varphi_1 = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (2\pi nL)^2}}.$$

Если r остается постояннымъ, то при измѣненіи L отъ 0 до ∞ , конецъ A вектора OA будетъ описывать полуокружность, описанную на $\frac{V}{r}$ какъ на діаметрѣ. Дѣйствительно (фиг. 60) для любой точки A этой полуокружности имѣемъ:

$$OA = OP \cos \varphi_1 = \frac{V}{r} \cos \varphi_1.$$

Такъ какъ векторъ AC долженъ оставаться равнымъ и параллельнымъ самому себѣ, то при перемѣщеніи

полуокружности BP' къ оси ox , т. е. при уменьшеніи OB или что тоже при уменьшеніи C (ибо $OB = 2\pi nCV$) minimum OK будетъ уменьшаться. Легко видѣть также, что по мѣрѣ того, какъ r будетъ уменьшаться, полуокружность BP' будетъ увеличиваться, ибо $BP' = OP = \frac{V}{r}$, а слѣдовательно при одномъ и томъ же C , т. е. при одномъ и томъ же $2\pi nCV$ или OB , minimum OK будетъ уменьшаться и когда r будетъ равно нулю, minimum OK будетъ нуль. Въ этомъ



Фиг. 61.

случаѣ имѣетъ мѣсто полный резонансъ токовъ, а именно главный токъ $I_0 = 0$, тогда какъ слагающіе токи не равны нулю, а именно, тогда $I_2 = 2\pi nCV$, $I_1 = I_2 = \frac{V}{2\pi nL}$, причемъ слѣдовательно имѣетъ мѣсто зависимость: $2\pi nC = \frac{1}{2\pi nL}$. Отсюда видимъ, что полный резонансъ токовъ обусловливается тою же зависимостью, какъ и полный резонансъ напряженій (см. § 26).

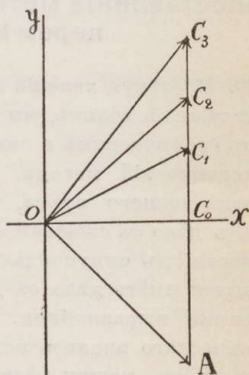
Замѣтимъ, что при полномъ резонансѣ токовъ, расходъ энергіи будетъ равенъ нулю, ибо токи I_1 и I_2 тогда будутъ разниться по фазѣ на 90° отъ напряженія: I_1 будетъ отставать по фазѣ отъ V на 90° , а I_2 будетъ опережать V на 90° . Тогда въ вѣтви 1 расходъ энергіи будетъ:

$$VI_1 \cos \varphi_1 = VI_1 \cos 90^\circ = 0;$$

въ вѣтви 2:

$$VI_2 \cos \varphi_2 = VI_2 \cos 90^\circ = 0.$$

Точно такимъ же образомъ можно изслѣдовать зависимость I_0 въ случаѣ, когда въ вѣтви 1 самоиндукція остается постоянною, а въ вѣтви 2 емкость измѣняется. Въ этомъ случаѣ векторъ OA (фиг. 62) останется постояннымъ по величинѣ и положенію, конецъ же C вектора AC будетъ при измѣненіи емкости перемѣщаться по AC ; такимъ образомъ для разныхъ значеній вектора AC будемъ имѣть соотвѣтствующія значенія вектора OC , какъ это показано на диаграммѣ фиг. 62, гдѣ разныя значенія I_0 изображены векторами OC_1 , OC_2 и т. д.



Фиг. 62.

Мы видимъ, что I_0 будетъ minimum, когда векторъ тока $I_2 = AC_0$, т. е. когда емкость будетъ:

$$C = \frac{AC_0}{2\pi n V},$$

ибо $I_2 = 2\pi n CV$, какъ мы это нашли уже раньше. Въ этомъ случаѣ I_0 будетъ совпадать по фазѣ съ напряженіемъ V у зажимовъ.

Въ заключеніе прибавимъ, что при изслѣдованіи резонанса токовъ не такъ важно знать абсолютное зна-

ченіе главнаго тока, какъ отношеніе его къ слагающимъ токамъ I_1 и I_2 , т. е. отношенія $\frac{I_1}{I_0}$ и $\frac{I_2}{I_0}$. Эти отношенія можно назвать коеэффиціентомъ резонанса, также силою резонанса (*Stärke der Stromresonanz* *). По діаграммамъ фиг. 61 можно послѣдовательно опредѣлить предыдущія отношенія въ зависимости отъ разныхъ значеній L или C .

ГЛАВА IV.

Сопоставленіе методовъ для изслѣдованія переменнаго тока.

39. Изслѣдуя явленія переменнаго тока въ простыхъ и сложныхъ сѣтяхъ, мы пользовались главнымъ образомъ графическимъ и символическимъ методами. Чисто аналитическій методъ, какъ мы показали въ самомъ началѣ нашего курса, не удобенъ, ибо приходится имѣть дѣло съ сложеніемъ, вычитаніемъ, умноженіемъ и дѣленіемъ синусоидальныхъ функцій и вообще приходится имѣть дѣло съ довольно сложными алгебраическими выраженіями. Однако совсѣмъ безъ алгебраическаго анализа нельзя обойтись, ибо необходимо установить между разными величинами, опредѣляющими переменный токъ, зависимости, которыя можно было бы выразить числами. Поэтому графическій методъ необходимо дополнить алгебраическими уравненіями, т. е. перевести зависимость, выражаемую графически діаграммою, на алгебраическія формулы.

Символическій методъ значительно упрощаетъ задачу алгебраическаго метода. При посредствѣ его можно быстро выразить числами величины, опредѣляющія переменный токъ, но этотъ методъ не даетъ возможности, въ противоположность графическому

*) C. Heinke: Wechselstrommessungen und magnetische Messungen.

методу, представить картину разбираемаго явления и слѣдовательно не даетъ возможности уяснить такъ отчетливо, какъ графическій методъ, интимную связь между разными элементами переменнаго тока.

По нашему мнѣнію, для рѣшенія задачъ по переменному току слѣдуетъ примѣнять параллельно и графическій и алгебраическій методъ, въ наиболѣе же сложныхъ случаяхъ въ помощь графическому методу полезно предпослать символическій методъ. Этотъ послѣдній въ свою очередь незамѣнимъ, когда на первомъ планѣ ставится требованіе опредѣлить окончательную алгебраическую зависимость между данными и искомыми величинами. Ниже мы приведемъ нѣсколько общихъ правилъ для примѣненія того или другого метода.

40. Примѣненіе алгебраическаго и графическаго метода. При рѣшеніи какой-либо задачи или изслѣдованіи какого либо вопроса по переменному току слѣдуетъ прежде всего выразить алгебраическими уравненіями зависимость между мгновенными значеніями, входящихъ въ данный вопросъ величинъ, допуская, что эти величины не измѣняются за безконечно малый промежутокъ времени. Такимъ образомъ мы получимъ рядъ алгебраическихъ уравненій, связывающихъ между собою слѣдующія величины:

$$e, v, ri, L \frac{di}{dt}, \frac{1}{C} \int_0^t idt,$$

гдѣ e, v, i суть синусоидальныя функціи. Вспоминая,

что $e, v, ri, L \frac{di}{dt}, \frac{1}{C} \int_0^t idt$ изображаются графически векторами, величины которыхъ равны соотвѣ-

ственно:

$$E, V, rI, 2\pi nLI \text{ и } \frac{I}{2\pi nC}$$

и которые составляютъ съ выбранною за начальную ось векторовъ тѣ или другіе углы, мы тотчасъ же по

алгебраическимъ уравненіямъ можемъ судить, въ какія геометрическія фигуры складываются векторы входящихъ въ уравненіе величинъ. Построивъ діаграммы, будемъ проектировать ихъ на ось векторовъ и на ось перпендикулярную, выражая при этомъ, что проекція замыкающей равна суммѣ проекцій составляющихъ; тогда мы получимъ рядъ уже алгебраическихъ уравненій, устанавливающихъ зависимость между векторами и углами, которые они образуютъ съ осью векторовъ, а слѣдовательно и углами, которые они образуютъ между собою.

При составленіи алгебраическихъ уравненій между мгновенными величинами слѣдуетъ примѣнять слѣдующую очевидную теорему:

Въ любой цѣпи или части ея производимая энергія за безконечно малый промежутокъ времени равна суммѣ энергій, потребляемыхъ за тотъ же промежутокъ въ этой цѣпи или части цѣпи.

Примѣняя графическій методъ, слѣдуетъ руководствоваться слѣдующими теоремами:

I. Въ простой замкнутой цѣпи векторъ дѣйствующей электродвижущей силы является замыкающей векторовъ: rI , $2\pi nLI$, $-\frac{I}{2\pi nC}$, гдѣ r — сопротивление, L — коэффициентъ самоиндукціи, C — емкость, I — амплитуда тока, причемъ векторы: $2\pi nLI$ и $-\frac{I}{2\pi nC}$ образуютъ всегда уголъ равный $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ съ векторомъ rI .

II. Во всякой сложной цѣпи

а) векторы токовъ въ точкахъ развѣтвленія складываются въ замкнутый многоугольникъ;

б) векторы rI , $2\pi nLI$, $-\frac{I}{2\pi nC}$ и векторы дѣйствующихъ электродвижущихъ силъ во вся-

комъ замкнутомъ контурѣ складываются также въ замкнутый многоугольникъ.

При разборѣ сложныхъ случаевъ, когда придется одновременно примѣнять часть (а) и часть (б) теоремы II, необходимо будетъ строить двѣ діаграммы:

діаграмму векторовъ вида $E, rI, 2\pi nLI, -\frac{I}{2\pi nC}$ и діа-

грамму векторовъ I , причемъ, если діаграмма векторовъ $E, rI, 2\pi nLI, -\frac{I}{2\pi nC}$ построена, то всѣ век-

торы величинъ I , входящихъ въ предыдущія выраженія будутъ извѣстны, если извѣстны r , ибо векторы rI и I совпадаютъ по направленію. Наоборотъ если можно построить сначала діаграмму векторовъ I , то

діаграмма векторовъ $E, rI, 2\pi nLI$ и $-\frac{I}{2\pi nC}$, опредѣ-

лится при посредствѣ первой діаграммы, если r, L и C извѣстны (см. § 33, задача I). Часто діаграмма век-

торовъ $E, V, rI, 2\pi nLI$ и $\frac{I}{2\pi nC}$ является неопредѣ-

ленною лишь потому, что не извѣстна одна изъ величинъ V или I или E ; тогда задавшись произвольнымъ значеніемъ для такой величины строимъ діаграмму, которая будетъ подобна искомой, а затѣмъ уже опредѣляемъ векторы этой послѣдней путемъ пропорциональности (см. § 34, задача II или § 35, задача III).

41. Примѣненіе символическаго метода. Примѣненіе символическаго метода основано на слѣдующихъ символическихъ уравненіяхъ:

Обозначимъ черезъ $\hat{E}$ электродвижущую силу, черезъ $\hat{I}$ силу тока, черезъ $\hat{Z}$ задерживаніе; пусть кромѣ того постоянныя данной цѣпи или цѣпей будутъ r, L, C (сопротивленіе, самоиндукція и емкость).

Тогда для простой цѣпи будемъ имѣть:

$$\hat{Z} = r + j \cdot x; \quad Z = \sqrt{r^2 + x^2} \dots (1)$$

гдѣ

$$x = \sum \left(2\pi n L - \frac{1}{2\pi n C} \right).$$

Въ частномъ случаѣ, когда $L = 0$

$$x = - \sum \frac{1}{2\pi n C}$$

и когда $C = \infty$, т. е. когда нѣтъ емкости включенной послѣдовательно,

$$x = \sum 2\pi n L.$$

Далѣ имѣемъ:

$$\hat{E} = \hat{Z} \cdot \hat{I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\hat{I} = k + j \cdot k' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Слѣдовательно:

$$\hat{E} = (k + j \cdot k') (r + j \cdot x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\hat{E} = (kr - k'x) + j \cdot (k'r + kx) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

и:

$$E = \sqrt{(kr - k'x)^2 + (k'r + kx)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Если за начальную ось векторовъ, выбрать векторъ тока, то:

$$k' = 0. \quad k = I \quad \text{и} \quad \hat{I} = I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Тогда:

$$\hat{E} = r \cdot I + j \cdot x I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

и

$$E = \sqrt{(rI)^2 + (xI)^2} = I \sqrt{r^2 + x^2} = I \cdot Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Если за начальную ось векторовъ выберемъ векторъ электродвижущей силы $\hat{E}$, то:

$$\hat{E} = E$$

и тогда изъ уравненія (5) получимъ:

$$kr - k'x = E$$

$$k'r + kx = 0$$

откуда

$$\frac{k'}{k} = - \frac{x}{r}$$

и

$$k' = -k \frac{x}{r}$$

$$kr + k \frac{x^2}{r} = E,$$

откуда:

$$k = E \frac{r}{r^2 + x^2} = E \frac{r}{Z^2} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$k' = -E \frac{x}{Z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\hat{I} = E \frac{r}{Z^2} - j \cdot E \frac{x}{Z^2} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Въ сложныхъ цѣпяхъ для каждаго узловаго пункта будемъ имѣть уравненіе вида:

$$\sum \hat{I} = 0,$$

т. е.

$$\sum k = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$\sum k' = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

гдѣ $\hat{I}$ будутъ вида $k + jk'$.

Для каждаго же замкнутаго контура получимъ уравненія вида:

$$\sum \hat{E} = \sum \hat{Z} \hat{I}$$

т. е.

$$\sum \hat{E} = \sum (r + j \cdot x) (k + j \cdot k') \quad . \quad . \quad (15)$$

или:

$$\sum \hat{E} = \sum (rk - xk') + j \sum (rk' + xk) \quad . \quad (16)$$

Такимъ образомъ пользуясь тою или другою группою 16-ти вышеприведенныхъ уравненій можно будетъ рѣшить любую задачу по переменному току.

ГЛАВА V.

Многофазныя системы.

42. Если мы имѣемъ n электродвижущихъ силъ одного и того же періода, но разнящихся между собою по фазѣ, включенныхъ въ систему цѣпей такъ, что въ этихъ послѣднихъ получатся токи того же періода и разнящіеся между собою по фазѣ, то такую систему мы назовемъ многофазною системою.

Если n электродвижущихъ силъ одинаковой амплитуды разнятся между собою по фазѣ на $\frac{1}{n}$ періода, то многофазная система называется симметричною; во всѣхъ другихъ случаяхъ система будетъ асимметричною. Разсмотримъ сначала симметричныя многофазныя системы.

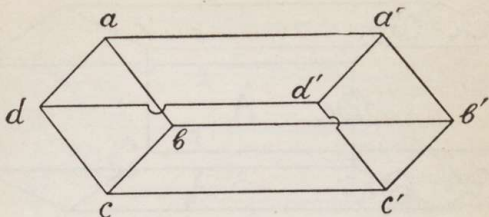
Если каждая электродвижущая сила включена въ самостоятельную цѣпь, то вся система получаетъ наименование независимой многофазной системы; если же электродвижущія силы включены въ систему контуровъ взаимно связанныхъ между собою, то такая многофазная система называется связанною многофазною системою.

Анализъ независимой n -фазной системы сведется къ анализу n однофазныхъ системъ. Поэтому мы будемъ разсматривать лишь связанные многофазныя системы.

Связанная многофазная система характеризуется числомъ фазныхъ токовъ. Такъ мы скажемъ, что система n -фазная, если будемъ имѣть n токовъ, разнящихся по фазѣ.

Въ многофазной системѣ мы будемъ называть самостоятельнымъ контуромъ такой контуръ цѣпи, который не можетъ быть образованъ изъ комбинаціи какихъ-либо другихъ контуровъ. Такъ, напримѣръ, въ системѣ, изображенной на фиг. 63, мы имѣемъ четыре самостоятельныхъ контура: $aa'b'b$, $bb'c'c$, $cc'd'd$, $aa'd'd$;

контуры же $abcd$ и $a'b'c'd'$ уже не могут рассматриваться, какъ самостоятельные, ибо они геометрически неизбѣжно образуются, если существуютъ уже вышеприведенные четыре контура.



Фиг. 63.

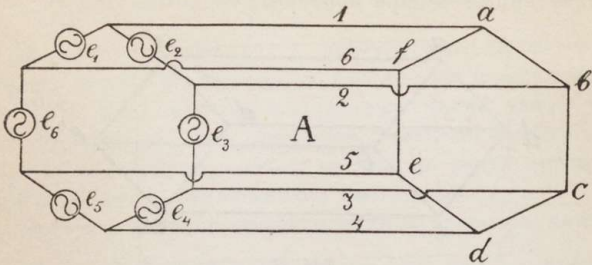
Мы будемъ рассматривать только такія многофазныя системы, въ которыхъ число включенныхъ электродвижущихъ силъ равно числу самостоятельныхъ контуровъ. Для подобныхъ системъ на практикѣ примѣняютъ два способа соединеній: а) электродвижущія силы соединены въ замкнутый многоугольникъ, б) электродвижущія силы соединены звѣздой.

При той и другой комбинаціяхъ, цѣпи могутъ замыкаться либо многоугольникомъ, либо звѣздой. Такимъ образомъ мы получимъ четыре типа соединеній показанныхъ на фигурахъ 64—67, въ A , B , C и D .

Включение приемниковъ въ системѣ A производится подобно многоугольнику $abcdef$, гдѣ каждая изъ сторонъ ab , bc , и т. д. рассматривается, какъ отдѣльный приемникъ; въ системахъ B и C приемники включаются подобно звѣздѣ $abcdef$, гдѣ вѣтви ao , bo , co , do , eo , fo изображаютъ отдѣльные приемники. Такимъ образомъ, если у насъ n -фазная система типа A , то приемники будутъ распределены на n группъ; въ первую группу войдутъ приемники, включенные параллельно между проводами 1—2 (см. фиг. 64), во вторую группу приемники, включенные параллельно между проводами 2—3 и т. д., въ n -ю группу—приемники, включенные параллельно между проводами $(n-1) - n$.

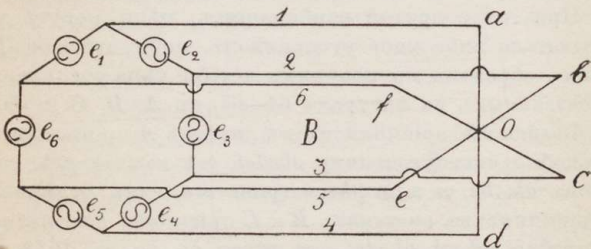
Въ системѣ B (фиг. 65) приемники будутъ также

раздѣлены на n группъ, но между каждымъ двумя смежными проводами они будутъ какъ бы по два включены послѣдовательно; такъ между проводами



Фиг. 64.

1 — 2 приемникъ группы № 1 будетъ какъ бы соединенъ послѣдовательно съ приемникомъ группы № 2; далѣе между проводами 2 — 3 приемникъ группы № 2 будетъ послѣдовательно соединенъ съ приемникомъ группы № 3 и т. д.

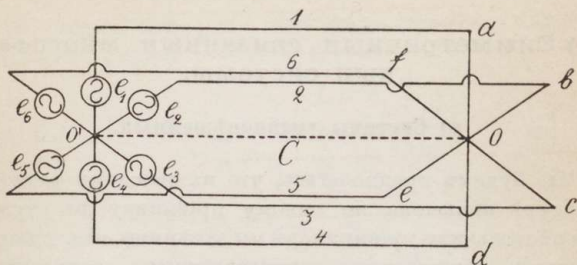


Фиг. 65.

Въ системѣ C (фиг. 66) приемники будутъ включены параллельно въ каждомъ контурѣ, образованномъ каждымъ крайнимъ проводомъ 1, 2, 3, . . . n и среднимъ проводомъ $0'0$ и т. д.

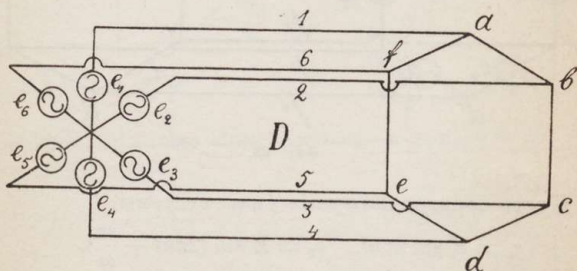
Контуры, между которыми включаются приемники, называются фазными контурами или вульгарно фазами данной системы. Въ нашемъ примѣрѣ фазными конту-

рами будутъ въ системѣ *A*: контуры — $1ab2$, $2bc3$, $3cd4$ и т. д.; въ системѣ *B*: контуры — $1aob2$, $2boc3$, $3cod4$ и т. д.; въ системѣ *C*: контуры — $1aoo$, $2boo$, $3coo$ и т. д.



Фиг. 66.

Если въ каждомъ фазномъ контурѣ пріемники потребляютъ одинаковую энергію и если комбинированныя ихъ сопротивленіе, самоиндукція и емкость одинаковы (включая сопротивленіе проводовъ контура и соединительныхъ проводовъ), то такая многофазная



Фиг. 67.

система называется уравновѣшенной; въ противномъ случаѣ говорятъ, что система не уравновѣшена.

Какъ уже мы сказали выше, мы будемъ разсматривать только такія связанные многофазныя системы, въ

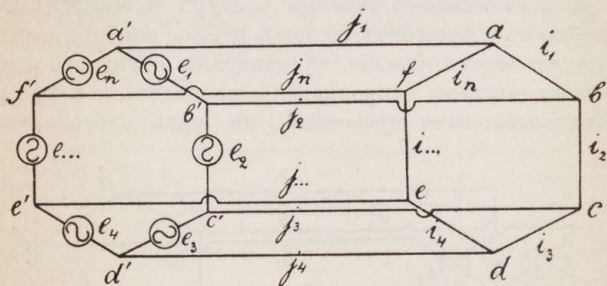
которыхъ число электродвижущихъ силъ равно числу самостоятельныхъ контуровъ и которыя относятся либо къ типу *A*, либо къ типу *B*, либо къ типу *C*.

А) Симметричныя связанныя многофазныя системы.

а) Системы уравновѣшенныя.

Мы будемъ предполагать, что въ каждомъ фазномъ контурѣ включено по одному приѣмнику; въ случаѣ же нѣсколькихъ приѣмниковъ мы замѣнимъ ихъ однимъ общимъ обладающимъ эквивалентнымъ сопротивленіемъ и эквивалентными самоиндукціею и емкостью.

43. Разсмотримъ сначала систему типа *A* (фиг. 68).



Фиг. 68.

Пусть электродвижущія силы системы

$$e_1 = E \sin 2\pi nt, \quad e_2 = E \sin \left(2\pi nt + \frac{2\pi}{n} \right),$$

$$e_3 = E \sin \left(2\pi nt + 2 \frac{2\pi}{n} \right) \text{ и т. д. . . .}$$

$$e_n = E \sin \left(2\pi nt + (n-1) \frac{2\pi}{n} \right).$$

Предположимъ, что приѣмники обладаютъ сопротивленіемъ r и самоиндукціею λ ; пусть также сопротивление каждаго провода 1, 2, 3, . . . n равно R , а са-

Въ каждое мгновеніе мы имѣемъ, примѣняя теоремы Кирхгоффа для точекъ $a, b, c, d \dots$

$$\left. \begin{aligned} j_1 - i_1 + i_n &= 0 \\ j_2 + i_1 - i_2 &= 0 \\ j_3 + i_2 - i_3 &= 0 \\ &\vdots \\ j_n + i_{n-1} - i_n &= 0. \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= j_1 R + i_1 r - j_2 R + L \frac{dj_1}{dt} - L \frac{dj_2}{dt} + \lambda \frac{di_1}{dt}, \\ e_2 &= j_2 R + i_2 r - j_3 R + L \frac{dj_2}{dt} - L \frac{dj_3}{dt} + \lambda \frac{di_2}{dt} \\ . &. \\ e_{n-1} &= j_{n-1} R + i_{n-1} r - j_n R + L \frac{dj_{n-1}}{dt} - \\ &\quad - L \frac{dj_n}{dt} + \lambda \frac{di_{n-1}}{dt} \\ e_n &= j_n R + i_n r - j_1 R + L \frac{dj_n}{dt} - L \frac{dj_1}{dt} + \lambda \frac{di_n}{dt}. \end{aligned} \right\} (2)$$
$$\left. \begin{aligned} e_1 &= R(j_1 - j_2) + L \left(\frac{dj_1}{dt} - \frac{dj_2}{dt} \right) + i_1 r + \lambda \frac{di_1}{dt} \\ e_2 &= R(j_2 - j_3) + L \left(\frac{dj_2}{dt} - \frac{dj_3}{dt} \right) + i_2 r + \lambda \frac{di_2}{dt} \\ . &. \\ e_{n-1} &= R(j_{n-1} - j_n) + L \left(\frac{dj_{n-1}}{dt} - \frac{dj_n}{dt} \right) + \\ &\quad + i_{n-1} r + \lambda \frac{di_{n-1}}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$e_n = R(j_n - j_1) + L \left(\frac{dj_n}{dt} - \frac{dj_1}{dt} \right) + i_n r + \lambda \frac{di_n}{dt}.$$

Изъ уравненій (1) выводимъ, складывая ихъ:

$$j_1 + j_2 + j_3 + \dots + j_n = 0. \quad (4)$$

Изъ уравненій (3), складывая, найдемъ:

$$e_1 + e_2 + \dots + e_n = (i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n)r + \lambda \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \dots + \frac{di_n}{dt} \right).$$

Но

$$e_1 + e_2 + \dots + e_n = E \left\{ \sin 2\pi n t + \sin \left(2\pi n + \frac{2\pi}{n} \right) + \right. \\ \left. + \sin \left(2\pi n t + 2 \frac{2\pi}{n} \right) + \dots + \sin \left(2\pi n t + (n-1) \frac{2\pi}{n} \right) \right\}.$$

Изъ тригонометрии извѣстно, что сумма синусовъ въ скобкахъ равна нулю, слѣдовательно:

$$e_1 + e_2 + \dots + e_n = 0,$$

откуда выводимъ:

$$r(i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n) + \lambda \left(\frac{di_1}{dt} + \dots + \frac{di_n}{dt} \right) = 0.$$

Такъ какъ $i_1, i_2, i_3 \dots i_n$ предполагаются синусоидальными функціями, то ихъ сумма также будетъ синусоидальною функціею (см. § 3). Производныя функціи $\frac{di_1}{dt}, \frac{di_2}{dt} \dots$ также будутъ синусоидальными функціями, но будутъ по фазѣ отличаться отъ функцій $i_1, i_2 \dots i_n$ на $\frac{\pi}{2}$; слѣдовательно ихъ сумма также будетъ синусоидальною функціею, отличающеюся отъ первой по фазѣ на $\frac{\pi}{2}$. Такимъ образомъ предыдущее уравненіе приведетъ къ виду:

$$rA \sin (2\pi n t + \varphi) + \lambda A \sin \left(2\pi n t + \frac{\pi}{2} + \varphi \right) = 0.$$

Это уравненіе должно имѣть мѣсто для всякаго значенія t , что будетъ возможно лишь при условіи, когда:

$$A \sin(2\pi nt + \varphi) = 0$$

и

$$A \sin(2\pi nt + \frac{\pi}{2} + \varphi) = 0.$$

Иначе говоря, когда

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n = 0 \quad \dots \dots (5)$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \dots + \frac{di_n}{dt} = 0 \quad \dots \dots (6)$$

Исключимъ изъ уравненій (3)

$$j_1, j_2 \dots j_n \text{ и } \frac{dj_1}{dt}, \frac{dj_2}{dt} \dots \frac{dj_n}{dt}.$$

Изъ уравненій (1) выводимъ:

$$j_1 - j_2 = 2i_1 - i_n - i_2$$

$$j_2 - j_3 = 2i_2 - i_1 - i_3$$

$$j_3 - j_4 = 2i_3 - i_2 - i_4$$

$$\dots \dots \dots$$

$$j_n - j_1 = 2i_n - i_{n-1} - i_1.$$

Отсюда выводимъ:

$$\frac{dj_1}{dt} - \frac{dj_2}{dt} = 2 \frac{di_1}{dt} - \frac{di_n}{dt} - \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{dj_2}{dt} - \frac{dj_3}{dt} = 2 \frac{di_2}{dt} - \frac{di_1}{dt} - \frac{di_3}{dt}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{dj_n}{dt} - \frac{dj_1}{dt} = 2 \frac{di_n}{dt} - \frac{di_{n-1}}{dt} - \frac{di_1}{dt}.$$

ставляющаго съ первымъ векторомъ, согласно уравненіямъ (8), уголъ въ $\left(180^\circ + \frac{2\pi}{n}\right)$ (ибо этотъ векторъ взять со знакомъ —),

— RI , отнесеннаго къ току i_n и слѣдовательно составляющаго съ первымъ векторомъ уголъ въ $\left(180^\circ + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right)$,

вектора $-2\pi nLI$, отнесеннаго къ току i_2 и составляющаго съ третьимъ векторомъ уголъ въ 90° ,

вектора $-2\pi nL\dot{I}$, отнесеннаго къ току i_n и составляющаго съ четвертымъ векторомъ уголъ въ 90° .

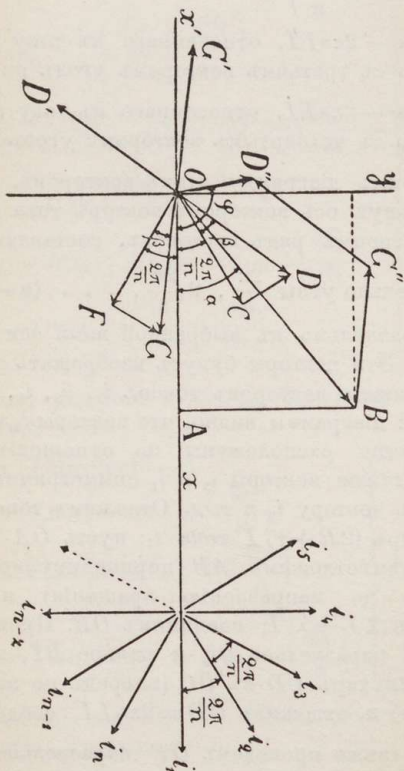
Построимъ діаграмму этихъ векторовъ. Выберемъ за начальную ось векторовъ векторъ тока i_1 . Въ сторонѣ построимъ рядъ векторовъ, составляющихъ по слѣдовательно углы $\frac{2\pi}{n}$, $2\frac{2\pi}{n}$, . . . $(n-1)\frac{2\pi}{n}$ съ осью параллельно къ выбранной нами оси векторовъ (фиг. 69). Эти векторы будутъ изображать относительное положеніе векторовъ токовъ $i_1, i_2, i_3, \dots i_n$. Изъ этой діаграммы видно, что векторы i_2 и i_n будутъ симметрично расположены по отношенію къ вектору i_1 ; также векторы i_3 и i_1 симметричны по отношенію къ вектору i_2 и т. д. Отложимъ теперь на оси ox , векторъ $(2R+r)I$ тока i_1 ; пусть OA этотъ векторъ; затѣмъ отложимъ AB перпендикулярно къ OA (впередъ по направленію вращенія) и примемъ $AB=2\pi n(2L+\lambda)I$; соединимъ OB . Проведемъ теперь OC параллельно Oi_2 и равное RI , возставимъ перпендикуляръ CD къ OC (впередъ по направленію вращенія) и, отложивъ $CD=2\pi nLI$, соединимъ OD .

Точно также проведемъ OF параллельно Oi_n , т. е. симметрично къ OC , возставимъ перпендикуляръ FG и отложимъ $FG=2\pi nL$. Соединимъ OG . Ясно, что векторы OB, OD, OG будутъ геометрическія суммы векторовъ:

$$(2R + r) i_1 \text{ и } (2L + \lambda) \frac{di_1}{dt}$$

$$Ri_2 \text{ и } L \frac{di_2}{dt}$$

$$Ri_n \text{ и } L \frac{di_n}{dt} .$$



Фиг. 69.

Если мы проведемъ OD' и OG' подъ углами въ 180° къ OD и OG , то эти векторы представлятъ геометрическія суммы векторовъ:

$$- Ri_2 \text{ и } - L \frac{di_2}{dt}$$

$$- Ri_n \text{ и } - L \frac{di_n}{dt}.$$

Слѣдовательно замыкающая векторовъ OB , OD' и OG' будетъ векторъ электродвижущей силы e_1 ; чтобы построить эту замыкающую, проведемъ изъ точки B векторъ BG'' равный и параллельный къ OG' , далѣе изъ G'' проведемъ векторъ $G''D''$, равный и параллельный къ OD' . Замыкающая OD'' будетъ векторомъ электродвижущей силы e_1 . Уголъ $D''OX$ будетъ равенъ углу φ .

Если мы теперь перейдемъ къ уравненію второму системы (7), то замыкающая вектора электродвижущей силы e_2 опредѣлится такою же діаграммою, какъ и e_1 ; только, такъ какъ мы для второй діаграммы возьмемъ за начальную ось векторовъ, векторъ тока i_2 , составляющій съ Oi_1 уголъ $= \frac{2\pi}{n}$, то выйдетъ, что вторая діаграмма будетъ какъ бы повернута по отношенію къ первой на уголъ $\frac{2\pi}{n}$; слѣдовательно векторъ замыкающей e_2 будетъ равенъ по величинѣ вектору e_1 , но переставленъ по отношенію къ нему на уголъ $\frac{2\pi}{n}$ (впередъ по направленію вращенія). Точно также діаграмма третьяго уравненія системы (7) дастъ намъ векторъ e_3 , отстоящій впередъ по направленію вращенія на уголъ $\frac{2\pi}{n}$ по отношенію къ e_2 , а слѣдовательно на уголъ $2 \frac{2\pi}{n}$ по отношенію къ e_1 и т. д.

Такимъ образомъ мы видимъ, что если мы примемъ значеніе $i_1, i_2, i_3 \dots i_n$ согласно уравненіямъ (8),

то складывая векторы, согласно уравненіямъ (7) получимъ электродвижуція силы, разнящіяся послѣдовательно по фазѣ на уголь $\frac{2\pi}{n}$. Амплитуда I и уголь φ опредѣляется изъ діаграммы $OBG''D''$, зная, что OD'' должно равняться E .

Изъ діаграммы мы видимъ, что

$$\begin{aligned} OB &= \sqrt{OA^2 + AB^2} = \\ &= \sqrt{(2R+r)^2 I^2 + (2\pi n)^2 (2L+\lambda)^2 I^2} = \\ &= I \sqrt{(2R+r)^2 + (2\pi n)^2 (2L+\lambda)^2}. \end{aligned}$$

Далѣе:

$$\begin{aligned} BG'' &= OG' = OG = \sqrt{R^2 I^2 + (2\pi n L)^2 I^2} = \\ &= I \sqrt{R^2 + (2\pi n L)^2} \\ G''D'' &= OD' = OG' = OG = I \sqrt{R^2 + (2\pi n L)^2} \\ \operatorname{tg} BOA &= \frac{BA}{OA} = \frac{2\pi n (2L+\lambda)}{2R+r} \\ \operatorname{tg} DOC &= \frac{DC}{OC} = \frac{2\pi n L}{R}. \end{aligned}$$

Полагая $\angle BOA = \alpha$ и $\angle DOC = \beta$, легко видѣть, что $DOX = \beta + \frac{2\pi}{n}$. Такъ какъ $G''D''$ параллельно OD , то уголь вектора $G''D''$ съ OX также будетъ равенъ $\beta + \frac{2\pi}{n}$. Кромѣ того имѣемъ:

$$\angle GOX = \angle G'OX' = G''BY = \frac{2\pi}{n} - \beta$$

Проектируя діаграмму $OBG''D''$ на ось векторовъ OX и на ось перпендикулярную и замѣчая, что $D''B$ параллельна къ оси OX , найдемъ:

$$\begin{aligned} OB \cos \alpha &= OD'' \cos \varphi + G''D'' \cos \left(\beta + \frac{2\pi}{n} \right) \\ &\quad + BG'' \cos \left(\frac{2\pi}{n} - \beta \right) \\ OB \sin \alpha &= OD'' \sin \varphi + D''G'' \sin \left(\beta + \frac{2\pi}{n} \right) - \\ &\quad - BG'' \sin \left(\frac{2\pi}{n} - \beta \right) \end{aligned}$$

Полагая:

$$OD'' = E, \quad OB = kI, \quad G''D'' = BG'' = k'I,$$

гдѣ

$$k = \sqrt{(2R + r)^2 + (2\pi n)^2 (2L + \lambda)^2},$$

$$k' = \sqrt{R^2 + (2\pi nL)^2},$$

получимъ предыдущія уравненія въ слѣдующемъ видѣ:

$$kI \cos \alpha = E \cos \varphi + k'I \left\{ \cos \left(\beta + \frac{2\pi}{n} \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{n} - \beta \right) \right\}$$

$$kI \sin \alpha = E \sin \varphi + k'I \left\{ \sin \left(\beta + \frac{2\pi}{n} \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{n} - \beta \right) \right\}$$

или по упрощеніи:

$$E \cos \varphi = kI \cos \alpha - 2k'I \cos \beta \cos \frac{2\pi}{n} \quad (A)$$

$$E \sin \varphi = kI \sin \alpha - 2k'I \sin \beta \cos \frac{2\pi}{n} \quad (B)$$

Къ этимъ уравненіямъ присоединяются формулы:

$$k = \sqrt{(2R + r)^2 + (2\pi n)^2 (2L + \lambda)^2} \quad . \quad . \quad (a)$$

$$k' = \sqrt{R^2 + (2\pi nL)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi n (2L + \lambda)}{2R + r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

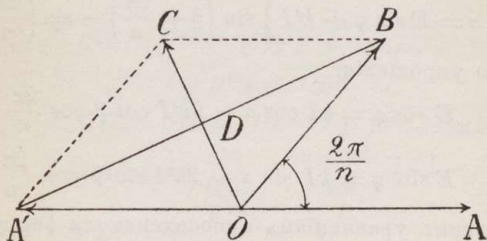
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\pi nL}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Изъ уравненій (A) и (B) опредѣлимъ уголъ φ и амплитуду токовъ I , а именно:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k \sin \alpha - 2k' \sin \beta \cos \frac{2\pi}{n}}{k \cos \alpha - 2k' \cos \beta \cos \frac{2\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad (A')$$

$$I = \frac{E}{\sqrt{k^2 - 4kk' \cos (\alpha - \beta) \cos \frac{2\pi}{n} + 4k'^2 \cos \frac{2\pi}{n}}} \quad (B')$$

Опредѣлимъ теперь амплитуды токовъ j . Изъ уравненій (1) мы видимъ, что векторъ каждаго тока j есть геометрическая разность векторовъ смежныхъ токовъ i , т. е. токовъ, разнящихся между собою по фазѣ на уголъ въ $\frac{2\pi}{n}$. Слѣдовательно амплитуда J токовъ j есть діагональ параллелограмма, построеннаго на векторахъ I , образующихъ уголъ въ $180^\circ - \frac{2\pi}{n}$, ибо векторъ J есть геометрическая сумма двухъ векторовъ I и $(-I)$, т. е. сумма векторовъ OB и OA' (фиг. 70), гдѣ



Фиг. 70.

$OA' = OA$, причемъ $OA = OB = I$. Изъ чертежа видимъ, что $CD = DO$ и что слѣдовательно $OC = 2OD = 2CD$; углы въ точкѣ D прямые, а потому

$$DO = OB \cos \angle BOB = OB \cos \frac{A'OB}{2}.$$

Но

$$\angle A'OB = 180^\circ - \frac{2\pi}{n}.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{\angle A'OB}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}$$

$$\cos \frac{A'OB}{2} = \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}.$$

Такимъ образомъ:

$$DO = OB \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}$$

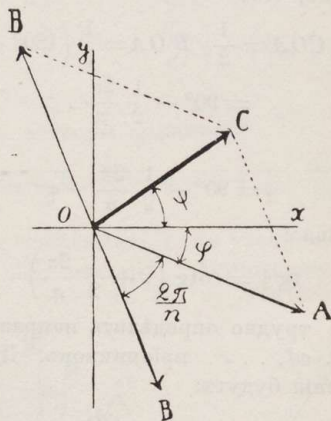
и

$$OC = 2DO = 2OB \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}$$

или

$$J = 2I \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \dots \dots \dots (C)$$

Токи j очевидно по фазѣ будутъ разниться между собою на $\frac{2\pi}{n}$, ибо они слагаются геометрически послѣдовательно изъ токовъ i , разнящихся между собою по фазѣ на уголъ $\frac{2\pi}{n}$. Разность же фазъ между j и



Фиг. 71.

соотвѣтствующею электродвижущей силою, напри-
мѣръ между j_1 и e_1 опредѣлится изъ слѣдующей диа-
граммы. Выберемъ за начальную ось векторовъ век-
торъ электродвижущей силы e_1 ; пусть ox эта ось.
Мы знаемъ, что векторъ тока i_1 разнится по фазѣ (от-
стаетъ) на уголъ φ , опредѣляемый уравненіемъ (A').
Проведемъ слѣдовательно векторъ $OA = I$ подъ угломъ
 φ назадъ по направленію вращенія. Такъ какъ, со-
гласно уравненіямъ (1): $j_1 = i_1 - i_n$ и такъ какъ i_n раз-

нится по фазѣ отъ i_1 на уголъ $(n-1)\frac{2\pi}{n}$ впередъ по направленію вращенія, или, что тоже, на уголъ $\frac{2\pi}{n}$ назадъ по направленію вращенія, то проведемъ векторъ OB подъ угломъ $\frac{2\pi}{n}$ къ вектору OA , назадъ по направленію вращенія; затѣмъ проведемъ векторъ OB' (на 180° къ OB), на OA и OB' построимъ параллелограмъ, діагональ котораго OC изобразитъ векторъ тока j_1 , уголъ $COA = \psi$ будетъ уголъ разности фазъ между электродвижущей силою e_1 и токомъ j_1 . Изъ чертежа видно, что:

$$\begin{aligned}\psi + \varphi &= \angle COA = \frac{1}{2} \angle B'OA = \frac{1}{2} \left(180^\circ - \frac{2\pi}{n} \right) = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n},\end{aligned}$$

откуда

$$\psi = 90^\circ - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} - \varphi$$

и слѣдовательно:

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{cotg} \left(\varphi + \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

Зная j , не трудно опредѣлить напряженія у зажимовъ ab , bc , cd , приемниковъ. Дѣйствительно эти напряженія будутъ:

$$\begin{aligned}v_1 &= r_1 i_1 + \lambda \frac{di_1}{dt} \\ v_2 &= r_2 i_2 + \lambda \frac{di_2}{dt} \\ &\dots \dots \dots \\ v_n &= r_n i_n + \lambda \frac{di_n}{dt}\end{aligned}$$

Замѣняя въ уравненіяхъ (3) суммы $ri + \lambda \frac{di}{dt}$ напряженіями v , получимъ:

$$e_1 = R(j_1 - j_2) + L \left(\frac{dj_1}{dt} - \frac{dj_2}{dt} \right) + v_1$$

Первое выраженіе изобразится векторомъ oa , второе векторомъ ob . Векторъ $oa' = oa$ представить выраженіе

$$- \left(Rj_1 + L \frac{dj_1}{dt} \right)$$

Отложимъ $OC = E$; изъ точки C проведемъ CG параллельно къ ob , GH параллельно къ oa' и отложимъ $CG = GH = ob = oa' = RJ$. Тогда векторъ OH изобразить векторъ искомага напряженія v_1 . Проектируя діаграмму $OECGH$ на ox и на ось перпендикулярную, получимъ:

$$OH \cos \theta + HG \cos (\psi + \beta) + \\ + GC \cos \left(180^\circ - \psi - \beta - \frac{2\pi}{n} \right) = OC$$

$$OH \sin \theta + HG \sin (\psi + \beta) = GC \sin \left(180^\circ - \psi - \beta - \frac{2\pi}{n} \right)$$

Но

$$HG = GC = RJ, \quad OC = E, \quad OH = V;$$

отсюда выводимъ:

$$\left. \begin{aligned} V \cos \theta &= E - RJ \left\{ \cos (\psi + \beta) - \cos \left(\psi + \beta + \frac{2\pi}{n} \right) \right\} \\ V \sin \theta &= RJ \left\{ \sin \left(\psi + \beta + \frac{2\pi}{n} \right) - \sin (\psi + \beta) \right\} \end{aligned} \right\} (E)$$

Уравненія (E) дадутъ V и $\operatorname{tg} \theta$. Зная V легко найти паденіе вольтъ въ каждомъ проводникѣ, а также паденіе вольтъ отъ генератора до приѣмника. Это послѣднее будеть:

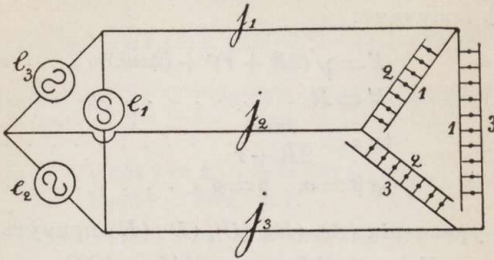
$$E - V.$$

Выведенныя нами уравненія (A), (B), (C), (D), (E) въ связи съ формулами (a), (b), (c), (d) представляютъ собою полное рѣшеніе задачи о распредѣленіи токовъ въ связанной многофазной симметричной системѣ съ включеніемъ по многоугольнику.

44. Какъ частный случай системы типа A, являются трехфазная и четырехфазная системы съ включеніемъ соотвѣтственно треугольникомъ и четырехугольникомъ.

Разсмотримъ сначала трехфазную систему съ включеніемъ по треугольнику. Въ этомъ случаѣ:

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ.$$



Фиг. 73.

Въ такомъ случаѣ уравненія (C), (D) и (E), опредѣляющія зависимость токовъ j отъ i и напряженія v отъ e , примутъ видъ:

$$J = 2I \sin \frac{1}{2} 120^\circ = 2I \sin 60^\circ = I\sqrt{3} \dots (C')$$

$$\psi = 90^\circ - 60^\circ - \varphi = 30^\circ - \varphi \dots \dots \dots (D')$$

Иначе говоря, токи j будутъ опережать по фазѣ токи i на уголъ въ 30° :

$$\left. \begin{aligned} V \cos \theta &= E - RJ \left\{ \cos (30^\circ - \varphi + \beta) - \right. \\ &\quad \left. - \cos (30^\circ - \varphi + \beta + 120^\circ) \right\} \\ V \sin \theta &= RJ \left\{ \sin (30^\circ - \varphi + \beta + 120^\circ) - \right. \\ &\quad \left. - \sin (30^\circ - \varphi + \beta) \right\} \end{aligned} \right\} \dots (E')$$

Изъ уравненія (C') видимъ, что независимо отъ того будутъ ли цѣпи съ самоиндукціею или безъ нея: амплитуда токовъ j равняется амплитудѣ токовъ i , помноженной на $\sqrt{3}$ и что токи j будутъ опережать по фазѣ токи i на уголъ въ 30° .

Предположимъ теперь, что провода, по которымъ циркулируютъ токи j (линейные провода) безъ самоиндукціи, что въ большинствѣ случаевъ и имѣетъ мѣсто на практикѣ. Тогда, обращаясь къ формуламъ (a), (b), (c) и (d), мы должны приравнять L нулю. Въ такомъ случаѣ получимъ:

$$k = \sqrt{(2R + r)^2 + (2\pi n\lambda)^2} \dots\dots\dots (a')$$

$$k' = R \dots\dots\dots (b')$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi n\lambda}{2R + r} \dots\dots\dots (c')$$

$$\operatorname{tg} \beta = 0, \quad \beta = 0 \dots\dots\dots (d')$$

Тогда уравненія (A), (B), (C), (D), (E) примутъ видъ:

$$E \cos \varphi = kI \cos \alpha - 2k'I \cos 120^\circ$$

$$E \sin \varphi = kI \sin \alpha.$$

Но изъ (c') имѣемъ:

$$\cos \alpha = \frac{2R + r}{\sqrt{(2R + r)^2 + (2\pi n\lambda)^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\pi n\lambda}{\sqrt{(2R + r)^2 + (2\pi n\lambda)^2}}.$$

Принимая же во вниманіе формулы a' и b' и замѣчая, что $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} E \cos \varphi &= I(2R + r) + RI = I(3R + r) \\ E \sin \varphi &= 2\pi n\lambda I, \end{aligned} \right\} \dots\dots (A'')$$

откуда:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(3R + r)^2 + (2\pi n\lambda)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi n\lambda}{3R + r}$$

$$J = I \sqrt{3} \dots\dots\dots (C'')$$

$$\psi = 30^\circ - \varphi = 30^\circ - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\pi n\lambda}{3R + r} \dots\dots (D'')$$

$$V \cos \theta = E - RI \sqrt{3} \left\{ \cos (30^\circ - \varphi) - \cos (150^\circ - \varphi) \right\}$$

$$V \sin \theta = RI \sqrt{3} \left\{ \sin (150^\circ - \varphi) - \sin (30^\circ - \varphi) \right\}$$

или упрощая и замѣчая, что:

$$\cos (150^\circ - \varphi) = -\cos (30^\circ + \varphi)$$

$$\sin (150^\circ - \varphi) = \sin (30^\circ + \varphi).$$

$$V \cos \theta = E - RI \sqrt{3} \left\{ \cos (30^\circ - \varphi) + \cos (30^\circ + \varphi) \right\}$$

$$V \sin \theta = RI \sqrt{3} \left\{ \sin (30^\circ + \varphi) - \sin (30^\circ - \varphi) \right\}$$

или:

$$\left. \begin{aligned} V \cos \theta &= E - 3RI \cos \varphi \\ V \sin \theta &= 3RI \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \dots \dots (E'')$$

Если кромѣ того $\lambda = 0$, т. е. если приемники безъ самоиндукціи, то мы будемъ имѣть:

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{E}{3R + r} \\ J &= I \sqrt{3} = \frac{E \sqrt{3}}{3R + r} \\ \psi &= 30^\circ, \quad \varphi = 0, \\ V &= E - 3RI. \end{aligned} \right\} \dots \dots (F)$$

45. Слѣдующая, послѣ трехфазной, симметричная система будетъ четырехфазная. Въ этой системѣ $\frac{2\pi}{n} = 90^\circ$

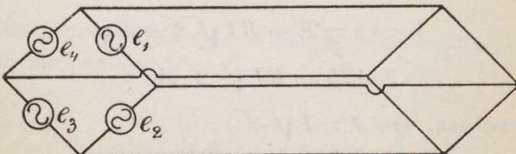
Тогда уравненія A, B, C, D и E примутъ видъ:

$$E \cos \varphi = kI \cos \alpha \dots \dots \dots (A')$$

$$E \sin \varphi = kI \sin \alpha \dots \dots \dots (B')$$

$$J = 2I \sin 45^\circ = I \sqrt{2} \dots \dots \dots (C')$$

$$\psi = 45^\circ - \varphi \dots \dots \dots (D')$$



Фиг. 74.

$$\left. \begin{aligned} V \cos \theta &= E - RJ \left\{ \cos (\psi + \beta) + \sin (\psi + \beta) \right\} \\ V \sin \theta &= RJ \left\{ \cos (\psi + \beta) - \sin (\psi + \beta) \right\} \end{aligned} \right\} \dots (E')$$

Въ частномъ случаѣ, если $L = 0$, то получимъ изъ уравненій (a), (b), (c) и (d):

$$k = \sqrt{(2R + r)^2 + (2\pi n\lambda)^2}$$

$$k' = R$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi n\lambda}{2R + r}$$

$$\operatorname{tg} \beta = 0, \quad \beta = 0.$$

Уравненія (A'), (B'), (C'), (D') и (E'), замѣчая, что:

$$\cos \alpha = \frac{2R + r}{\sqrt{(2R + r)^2 + (2\pi n\lambda)^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\pi n\lambda}{\sqrt{(2R + r)^2 + (2\pi n\lambda)^2}}$$

примутъ видъ:

$$E \cos \varphi = (2R + r)I$$

$$E \sin \varphi = 2\pi n\lambda I$$

$$J = I \sqrt{2}$$

$$\psi = 45^\circ - \varphi.$$

$$V \cos \theta = E - RJ \left\{ \cos (45^\circ - \varphi) + \sin (45^\circ - \varphi) \right\}$$

$$V \sin \theta = RJ \left\{ \cos (45^\circ - \varphi) - \sin (45^\circ - \varphi) \right\}$$

или

$$V \cos \theta = E - RJ \sqrt{2} \cos \varphi$$

$$V \sin \theta = RJ \sqrt{2} \sin \varphi$$

или замѣчая, что $J = I \sqrt{2}$

$$V \cos \theta = E - 2RI \cos \varphi$$

$$V \sin \theta = 2RI \sin \varphi.$$

Наконецъ, если пріемники также безъ самоиндукціи, т. е. если $\lambda = 0$, то

$$\begin{aligned} k &= 2R + r \\ k' &= R \\ \alpha &= 0, \quad \beta = 0 \end{aligned}$$

и уравненія будутъ:

$$E = (2R + r)I,$$

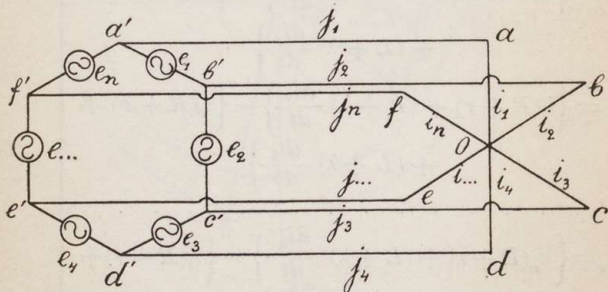
откуда

$$\begin{aligned} I &= \frac{E}{2R + r} \\ J &= I \sqrt{2} = \frac{E \sqrt{2}}{2R + r} \\ \psi &= 45^\circ, \quad \varphi = 0. \\ V &= E - RJ \sqrt{2} \end{aligned}$$

или

$$V = E - 2RI.$$

46. Разсмотримъ теперь системы типа *B*. Сохранимъ тѣ же обозначенія, что и въ предыдущемъ параграфѣ.



Фиг. 75.

Примѣняя теоремы Кирхгоффа къ мгновеннымъ значеніямъ, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} j_1 &= i_1 \\ j_2 &= i_2 \\ &\dots \\ j_n &= i_n \end{aligned} \right\} \begin{aligned} i_1 + i_2 + \dots + i_n &= 0. \\ &\dots \end{aligned} \quad (1)$$

$$e_1 = i_1(R + r) - i_2(R + r) + (L + \lambda) \frac{di_1}{dt} - \\ - (L + \lambda) \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2 = i_2(R + r) - i_3(R + r) + (L + \lambda) \frac{di_2}{dt} - \\ - (L + \lambda) \frac{di_3}{dt}$$

.

$$e_{n-1} = i_{n-1}(R + r) - i_n(R + r) + (L + \lambda) \frac{di_{n-1}}{dt} - \\ - (L + \lambda) \frac{di_n}{dt}$$

$$e_n = i_n(R + r) - i_1(R + r) + (L + \lambda) \frac{di_n}{dt} - \\ - (L + \lambda) \frac{di_1}{dt}$$

или еще:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \left\{ i_1(R + r) + (L + \lambda) \frac{di_1}{dt} \right\} - \left\{ i_2(R + r) + \right. \\ &\quad \left. + (L + \lambda) \frac{di_2}{dt} \right\} \\ e_2 &= \left\{ i_2(R + r) + (L + \lambda) \frac{di_2}{dt} \right\} - \left\{ i_3(R + r) + \right. \\ &\quad \left. + (L + \lambda) \frac{di_3}{dt} \right\} \\ &\dots \dots \dots \\ e_n &= \left\{ i_n(R + r) + (L + \lambda) \frac{di_n}{dt} \right\} - \left\{ i_1(R + r) + \right. \\ &\quad \left. + (L + \lambda) \frac{di_1}{dt} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

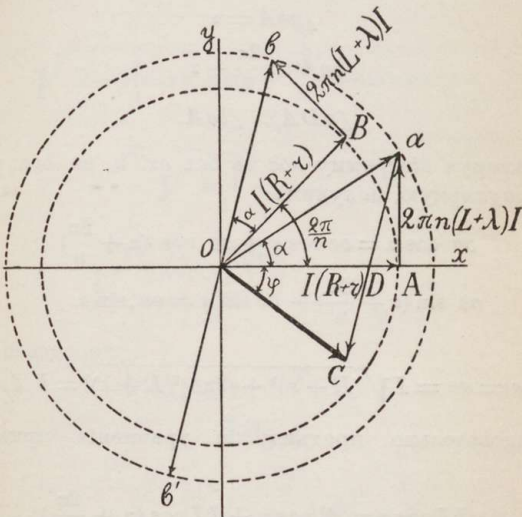
Построимъ діаграмму соответствующую первому уравненію, предполагая, что $i_1, i_2, i_3 \dots$ будутъ вида:

$$i_1 = I \sin(2\pi nt + \varphi) \\ i_2 = I \sin(2\pi nt + \varphi + \frac{2\pi}{n}) \\ \dots \dots \dots$$

$$i_n = I \sin \left(2\pi n t + \varphi + (n-1) \frac{2\pi}{n} \right).$$

Намъ придется построить векторы вида: $I(R+r)$ и $2\pi n(L+\lambda)I$, разнящіеся между собою на уголъ 90° . Выберемъ за начало векторовъ, векторъ тока i_1 , отложимъ $OA = I(R+r)$; затѣмъ проведемъ перпендикуляръ Aa и отложимъ $Aa = 2\pi n(L+\lambda)I$; векторъ oa представить выраженіе:

$$(R+r)i_1 + (L+\lambda) \frac{di_1}{dt}.$$



Фиг. 76.

Проведемъ теперь векторъ OB подъ угломъ $\frac{2\pi}{n}$ къ OA , отложимъ $OB = (R+r)I$; далѣе возставимъ перпендикуляръ Bb и отложимъ $Bb = 2\pi n(L+\lambda)I$; соединимъ ob векторъ ob представить выраженіе:

$$(R+r)i_2 + (L+\lambda) \frac{di_2}{dt}$$

Проведемъ теперь векторъ $ob' = ob$ подъ угломъ 180° къ ob , тогда ob' представитъ выраженіе:

$$- \left\{ (R + r)i_2 + (L + \lambda) \frac{di_2}{dt} \right\}.$$

Электродвижущая сила e_1 , т. е. ея векторъ E является согласно первому уравненію системы (2) замыкающею векторовъ ob' и oa , т. е. будетъ изображаться векторомъ oc . Мы имѣемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi n(L + \lambda)}{R + r}$$

$$\angle aoA = \alpha$$

$$\angle boA = \frac{2\pi}{n} + \alpha$$

$$\angle aDA = \angle boA.$$

Проектируя діаграмму aoc на ось ox и на ось перпендикулярную, получимъ:

$$oa \cos \alpha = oc \cos \varphi + ac \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$ac \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) - oc \sin \varphi = oa \sin \alpha.$$

Но

$$oa = ac = I \sqrt{(R + r)^2 + (2\pi n)^2 (L + \lambda)^2} = k \cdot I.$$

Слѣдовательно предъидущія уравненія примутъ видъ:

$$kI \cos \alpha = E \cos \varphi + kI \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$kI \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) - E \sin \varphi = kI \sin \alpha.$$

Или переставляя члены:

$$\left. \begin{aligned} E \cos \varphi &= kI \left\{ \cos \alpha - \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) \right\} \\ E \sin \varphi &= kI \left\{ \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) - \sin \alpha \right\} \end{aligned} \right\} \dots (A)$$

Изъ этихъ двухъ уравненій выводимъ I и $\operatorname{tg} \varphi$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\sin(\alpha + \frac{2\pi}{n}) - \sin \alpha}{\cos \alpha - \cos(\alpha + \frac{2\pi}{n})} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \cos(\alpha + \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n})}{\sin(\alpha + \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}) \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}} = \end{aligned}$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \cotg(\alpha + \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}) \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

$$\begin{aligned} kI &= \frac{E}{\sqrt{2 - 2\left\{\cos \alpha \cos(\alpha + \frac{2\pi}{n}) + \sin \alpha \sin(\alpha + \frac{2\pi}{n})\right\}}} = \\ &= \frac{E}{\sqrt{2\left\{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right\}}} \end{aligned}$$

Но

$$\sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}} = \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}$$

Слѣдовательно:

$$\begin{aligned} kI &= \frac{E}{2 \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}} \\ I &= \frac{E}{k \cdot 2 \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad (C) \end{aligned}$$

Замѣчая, что $\angle oac = \angle aob = \frac{2\pi}{n}$ и что въ равнобедренномъ треугольникѣ oac .

$$\angle oac = 180^\circ - 2\angle aoc = 180^\circ - 2(\alpha + \varphi),$$

получимъ

$$\frac{2\pi}{n} = 180^\circ - 2(\alpha + \varphi),$$

откуда

$$2(\alpha + \varphi) = 180^\circ - \frac{2\pi}{n}$$

$$\alpha + \varphi = 90^\circ - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}$$

$$\varphi = 90^\circ - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} - \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

что вытекает также изъ уравненія (B).

Опредѣлимъ теперь напряженіе у зажимовъ пріемниковъ. Пусть v_1 напряженіе у зажимовъ ab , v_2 — у зажимовъ bc и т. д. Ясно, что (фиг. 75):

$$v_1 = ri_1 + \lambda \frac{di_1}{dt} - (ri_2 + \lambda \frac{di_2}{dt})$$

ибо, если потенциалы в точках a , b и o соответственно равны v_a , v_b и v_o , то

$$v_1 = (v_a - v_o) - (v_b - v_o) = v_a - v_b.$$

Ho

$$v_a - v_o = ri_1 + \lambda \frac{di_1}{dt},$$

$$v_b - v_o = ri_2 + \lambda \frac{di_2}{dt}.$$

Аналогичныя выраженія найдемъ для v_2 , v_3 и т. д. Вставляя ихъ значенія въ систему (2), получимъ:

$$e_1 = (i_1 R + L \frac{di_1}{dt}) - (i_2 R + L \frac{di_2}{dt}) + v_1$$

$$e_2 = (i_2 R + L \frac{di_2}{dt}) - (i_3 R + L \frac{di_3}{dt}) + v_2.$$

• • • • •

или переставляя члены, получимъ:

$$v_1 = e_1 - (i_1 R + L \frac{di_1}{dt}) + (i_2 R + L \frac{di_2}{dt})$$

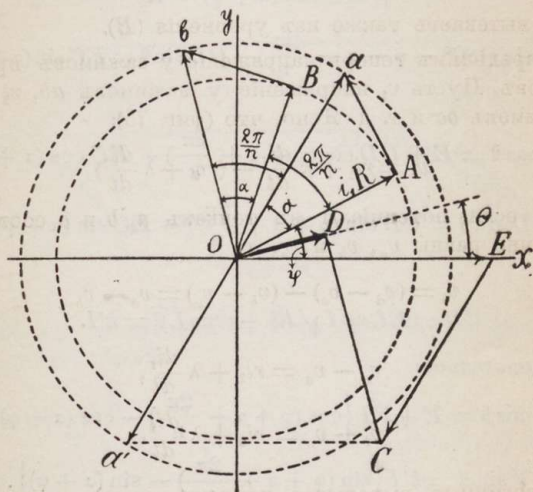
$$v_2 = e_2 - (i_2 R + L \frac{di_2}{dt}) + (i_3 R + L \frac{di_3}{dt})$$

• • • • •

Отсюда видимъ, что векторъ v_1 есть замыкающая трехъ векторовъ:

$$e_1, \quad -(i_1 R + L \frac{di_1}{dt}), \quad (i_2 R + L \frac{di_2}{dt}).$$

Построимъ эти векторы, выбравъ за начальную ось векторовъ векторъ электродвижущей силы e_1 .



Фиг. 77.

Тогда выражение $i_1 R$ изобразится векторомъ OA , отстоящимъ впередъ отъ ox на уголь φ , ибо мы нашли, что электродвижущая сила e_1 отстаетъ по фазѣ на уголь φ отъ $i_1 R$ (см. предыдущую диаграмму фиг. 76). Выражение $i_1 R + L \frac{di_1}{dt}$ изобразится векторомъ oa , а выражение $-(i_1 R + L \frac{di_1}{dt})$ векторомъ oa' ; выражение

$i_2 R + L \frac{di_2}{dt}$ изобразится векторомъ ob . Векторъ OE представляетъ электродвижущую силу e_1 . Изъ точки E проводимъ векторъ EC равный и параллельный oa' ,

изъ C —векторъ CD , равный и параллельный ob ; замыкающая OD будетъ искомый векторъ V напряженія v_1 .

Проектируя діаграмму $ODCE$ на ox и на ось перпендикулярную, получимъ:

$$OD \cos \theta + CD \cos (180^\circ - \varphi - \alpha - \frac{2\pi}{n}) + EC \cos (\alpha + \varphi) = E$$

$$CD \cdot \sin (180^\circ - \varphi - \alpha - \frac{2\pi}{n}) - OD \sin \theta = EC \sin (\alpha + \varphi),$$

или:

$$OD \cos \theta = E + CD \cos (\varphi + \alpha + \frac{2\pi}{n}) - EC \cos (\alpha + \varphi)$$

$$OD \sin \theta = CD \sin (\varphi + \alpha + \frac{2\pi}{n}) - EC \sin (\alpha + \varphi).$$

Но

$$CD = EC = I \sqrt{R^2 + (2\pi n L)^2} = k' I.$$

Слѣдовательно:

$$V \cos \theta = E + k' I \left\{ \cos (\varphi + \alpha + \frac{2\pi}{n}) - \cos (\alpha + \varphi) \right\}$$

$$V \sin \theta = k' I \left\{ \sin (\varphi + \alpha + \frac{2\pi}{n}) - \sin (\alpha + \varphi) \right\}.$$

Преобразовывая, получимъ:

$$V \cos \theta = E - 2k' I \sin (\varphi + \alpha + \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}) \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}$$

$$V \sin \theta = 2k' I \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \cos (\varphi + \alpha + \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}).$$

Но изъ уравненія (D):

$$\varphi = 90^\circ - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} - \alpha,$$

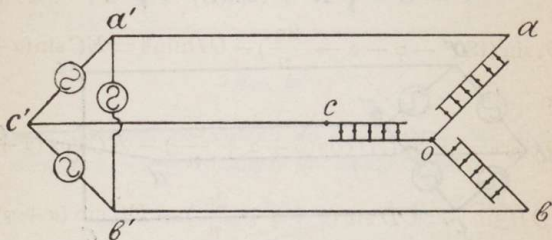
имѣемъ

$$\varphi + \alpha + \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} = 90^\circ.$$

Предыдущія уравненія сведутся къ:

$$V = E - 2k'I \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \dots \dots (E)$$

Переходя теперь къ частнымъ случаямъ — трехфазной и четырехфазной системамъ получимъ слѣдующія соотношенія.



Фиг. 78.

47. Для трехфазной системы типа *B*, уравненія (C), (D) и (E) дадутъ:

$$I = \frac{E}{k \sqrt{3}} = \frac{E}{\sqrt{3} \sqrt{(R+r)^2 + (2\pi n)^2 (L+\lambda)^2}}$$

или

$$I = \frac{E \sqrt{3}}{3 \sqrt{(R+r)^2 + (2\pi n)^2 (L+\lambda)^2}} \dots \dots (C')$$

$$\varphi = 30^\circ - \alpha = 30^\circ - \arctg \frac{2\pi n(L+\lambda)}{R+r} \dots (D')$$

$$V = E - \sqrt{R^2 + (2\pi nL)^2} I \sqrt{3} \dots (E')$$

Если L и λ равны нулю, то получимъ:

$$I = \frac{E \sqrt{3}}{3(R+r)} \dots \dots (C'')$$

$$\varphi = 30^\circ \dots \dots (D'')$$

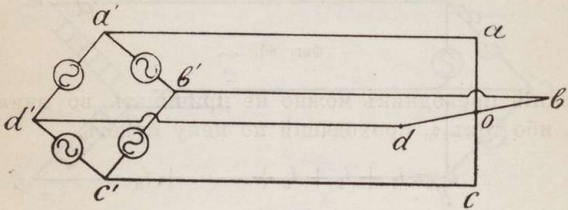
$$V = E - RI \sqrt{3} \dots \dots (E'')$$

48. Для четырехфазной системы типа *B* будемъ имѣть

$$I = \frac{E}{k \sqrt{2}} = \frac{E \sqrt{2}}{2 \sqrt{(R+r)^2 + (2\pi n)^2 (L+\lambda)^2}} \quad (C')$$

$$\varphi = 45^\circ - \alpha \quad (D')$$

$$V = E - \sqrt{R^2 + (2\pi n L)^2} I \sqrt{2} \quad (E')$$



Фиг. 79.

Если L и λ равны нулю, то получимъ:

$$I = \frac{E \sqrt{2}}{2(R+r)} \quad (C'')$$

$$\varphi = 45^\circ \quad (D'')$$

$$V = E - RI \sqrt{2} \quad (E'')$$

49. Перейдемъ теперь къ системѣ *C*. Эта система, очевидно, можетъ быть приведена къ системѣ типа *B*, въ которой будутъ электродвижущія силы соотвѣтственно:

$$e'_1 = e_1 - e_2$$

$$e'_2 = e_2 - e_3$$

$$e'_3 = e_3 - e_4$$

$$\dots$$

$$e'_{n-1} = e_{n-1} - e_n$$

$$e'_n = e_n - e_1$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \dots + \frac{di_n}{dt} = \frac{di_0}{dt}.$$

Слѣдовательно:

$$e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n = (R + r)i_0 + (L + \lambda) \frac{di_0}{dt} + nR_0i_0 + nL_0 \frac{di_0}{dt},$$

или

$$e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n = (R + r + nR_0)i_0 + (L + \lambda + nL_0) \frac{di_0}{dt}.$$

Но

$$e_1 + e_2 + \dots + e_n = 0.$$

Слѣдовательно:

$$(R + r + nR_0)i_0 + (L + \lambda + nL_0) \frac{di_0}{dt} = 0,$$

откуда

$$i_0 = 0, \quad \frac{di_0}{dt} = 0.$$

Что система C приводится къ системѣ B съ электро-движущими силами $e'_1 = e_1 - e_2$, $e'_2 = e_2 - e_3$ и т. д., то это слѣдуетъ изъ уравненій (1), если мы вычтемъ ихъ попарно. Дѣйствительно мы получимъ:

$$e'_1 = e_1 - e_2 = \left\{ (R + r)i_1 + (L + \lambda) \frac{di_1}{dt} \right\} - \left\{ i_2(R + r) + (L + \lambda) \frac{di_2}{dt} \right\}$$

$$e'_2 = e_2 - e_3 = \left\{ (R + r)i_2 + (L + \lambda) \frac{di_2}{dt} \right\} - \left\{ i_3(R + r) + (L + \lambda) \frac{di_3}{dt} \right\}$$

.....

$$e'_n = e_n - e_1 = \left\{ (R + r)i_n + (L + \lambda) \frac{di_n}{dt} \right\} - \left\{ i_1(R + r) + (L + \lambda) \frac{di_1}{dt} \right\}.$$

Эта система уравнений вполне аналогична системѣ (2) § 46.

Найдемъ выраженія:

$$e_1 - e_2, e_2 - e_3 \text{ и т. д.}$$

зная, что:

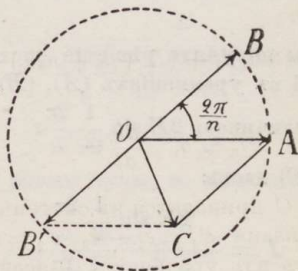
$$e_1 = E \sin 2\pi nt,$$

$$e_2 = E \sin \left(2\pi nt + \frac{2\pi}{n} \right),$$

$$e_3 = E \sin \left(2\pi nt + 2 \frac{2\pi}{n} \right)$$

.

Для этого построимъ e_1 и e_2



Фиг. 81.

Векторъ OA изображаетъ $E \sin 2\pi nt$, векторъ OB — $E \sin \left(2\pi nt + \frac{2\pi}{n} \right)$, а векторъ OB' изобразитъ выражение — $E \sin \left(2\pi nt + \frac{2\pi}{n} \right)$. Следовательно OC изобразитъ разность $E \sin 2\pi nt - E \sin \left(2\pi nt + \frac{2\pi}{n} \right)$. Изъ диаграммы видно, что $\angle AOC = \frac{1}{2} \left(180^\circ - \frac{2\pi}{n} \right) = 90^\circ - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}$. Изъ равнобедреннаго треугольника AOC выводимъ:

$$OC = 2OA \cos \left(90^\circ - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \right) = 2OA \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}.$$

Такимъ образомъ:

$$E' = 2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}.$$

Электродвижушія силы $e'_1, e'_2, e'_3 \dots e'_n$ слѣдовательно будутъ вида:

$$e'_1 = 2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \sin 2\pi n t$$

$$e'_2 = 2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \sin \left(2\pi n t + \frac{2\pi}{n} \right)$$

.

ибо онѣ также послѣдовательно будутъ разниться на уголъ $\frac{2\pi}{n}$.

Итакъ, чтобы получить рѣшеніе системы C стоитъ только въ § 46 въ уравненіяхъ $(A), (B), (C), (D), (E)$ замѣнить E величиною $2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}$.

Уравненіе (C) дасть:

$$I = \frac{2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}}{k \cdot 2 \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}}$$

или

$$I = \frac{E}{k} = \frac{E}{\sqrt{(R+r)^2 + (2\pi n)^2 (L+\lambda)^2}} \dots (C)$$

Уравненіе (D) останется безъ измѣненія, а именно:

$$\varphi = 90^\circ - \alpha - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \dots (D)$$

и уравненіе (E) будетъ:

$$V = 2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} - 2k'I \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}$$

или

$$V = 2 \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \left\{ E - k'I \right\} \dots (E)$$

50. Переходя къ трехфазной системѣ типа C , получимъ:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R+r)^2 + (2\pi n)^2(L+\lambda)^2}} \dots (C')$$

$$\varphi = 90^\circ - \alpha - 60^\circ = 30^\circ - \alpha, \dots (D')$$

$$V = \sqrt{3} (E - k'I). \dots (E')$$

Если L и λ равны нулю, то получимъ:

$$I = \frac{E}{R+r} \dots (C'')$$

$$\varphi = 30^\circ \dots (D'')$$

$$V = \sqrt{3} (E - RI) = rI \sqrt{3} \dots (E'')$$

51. Для четырехфазной системы будемъ имѣть:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R+r)^2 + (2\pi n)^2(L+\lambda)^2}} \dots (C''')$$

$$\varphi = 45^\circ - \alpha \dots (D''')$$

$$V = \sqrt{2} (E - k'I) \dots (E''')$$

Если L и λ равны нулю, то получимъ:

$$I = \frac{E}{R+r} \dots (C''')$$

$$\varphi = 45^\circ \dots (D''')$$

$$V = \sqrt{2} (E - RI) = rI \sqrt{2} \dots (E''')$$

52. Систему D можно разсматривать, какъ производную системы A , замѣнивъ въ этой послѣдней электро-движущія силы $e_1, e_2, e_3 \dots e_n$ черезъ:

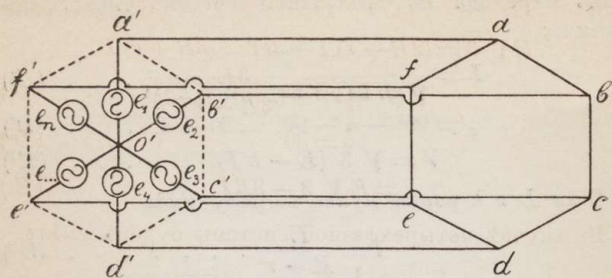
$$e'_1 = e_1 - e_2 = 2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \sin 2\pi nt$$

$$e'_2 = e_2 - e_3 = 2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \sin \left(2\pi nt + \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$e'_3 = e_3 - e_4 = 2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \sin \left(2\pi nt + 2 \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$e'_n = e_n - e_1 = 2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \sin \left(2\pi nt + (n-1) \frac{2\pi}{n} \right)$$



Фиг. 82.

Уравнения A , B , C , D и E (§ 43) примутъ тогда видъ:

$$2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \cos \varphi = kI \cos \alpha - 2k'I \cos \beta \cos \frac{2\pi}{n}. \quad (A)$$

$$2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \sin \varphi = kI \sin \alpha - 2k'I \sin \beta \cos \frac{2\pi}{n}. \quad (B)$$

Формулы (a), (b), (c) и (d) останутся тѣми же, что и § 43.

$$J = 2I \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}. \quad (C)$$

$$\psi = 90^\circ - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} - \varphi. \quad (D)$$

$$\left. \begin{aligned} V \cos \theta &= 2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} - RJ \left\{ \cos (\psi + \beta) - \right. \\ &\quad \left. - \cos \left(\psi + \beta + \frac{2\pi}{n} \right) \right\} \\ V \sin \theta &= RJ \left\{ \sin \left(\psi + \beta + \frac{2\pi}{n} \right) - \sin (\psi + \beta) \right\}. \end{aligned} \right\} (E)$$

Въ случаѣ трехфазной системы въ предыдущихъ формулахъ $2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n}$ будетъ $= E \sqrt{3}$.

Въ частномъ случаѣ, когда L и λ равны нулю, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ и тогда для трехфазной системы будемъ имѣть:

$$E \sqrt{3} = kI + k'I. \quad (A)$$

или

$$E\sqrt{3} = (2R + r)I + RI = (3R + r)I$$

$$J = I\sqrt{3} = \frac{3E}{3R + r} \dots \dots \dots (C')$$

$$\psi = 30^\circ \dots \dots \dots (D')$$

$$V = E\sqrt{3} - 3RI \dots \dots \dots (E')$$

Въ случаѣ четырехфазной системы будемъ имѣть:

$$2E \sin \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} = E\sqrt{2}$$

и при $L = 0$, $\lambda = 0$, получимъ:

$$E\sqrt{2} = (2R + r)I \dots \dots \dots (A'')$$

$$J = I\sqrt{2} = \frac{2E}{2R + r} \dots \dots \dots (C'')$$

$$\psi = 30^\circ \dots \dots \dots (D'')$$

$$V = E\sqrt{2} - 2RI \dots \dots \dots (E'')$$

6) Системы неуравновѣшенныя.

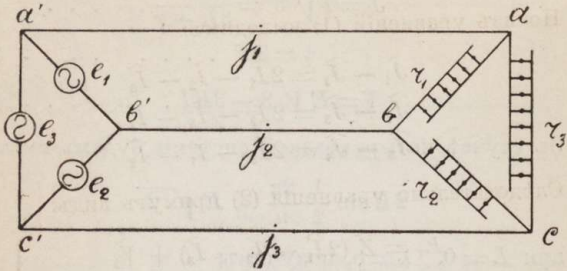
Мы рассмотримъ лишь трехфазную систему, общаго же рѣшенія давать не будемъ, ибо оно будетъ весьма сложно и его результаты мало интересны для практики.

53. Трехфазная система треугольникомъ. Предположимъ, что у насъ имѣется трехфазная система треугольникомъ, т. е. такая, въ которой и электродвижущія силы и пріемники связаны треугольникомъ.

Для рѣшенія этой задачи, вслѣдствіе несимметричности распредѣленія токовъ болѣе удобно примѣнить символическій методъ.

Предположимъ, что сопротивленія и самоиндукціи соединительныхъ проводовъ aa' , bb' , cc' одинаковы и равны соотвѣтственно R и L . Пусть r_1 , r_2 , r_3 сопротивленія вѣтвей ab , bc , ac , коэффициенты же самоиндукціи λ_1 , λ_2 , λ_3 . Обозначимъ черезъ $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$, $\hat{J}_3$, сим-

волическія значенія токовъ въ aa' , bb' , cc' , черезъ $\widehat{I}_1$, $\widehat{I}_2$, $\widehat{I}_3$, такія же значенія для токовъ въ ab , bc ,



Фиг. 83.

ca , затѣмъ черезъ $\widehat{V}_1$, $\widehat{V}_2$, $\widehat{V}_3$ символическія значенія напряженій въ ab , bc , ca . Выберемъ за начальную ось векторовъ, векторъ электродвижущей силы e_1 , тогда

$$\widehat{E}_1 = E, \quad \widehat{E}_2 = -\frac{E}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}E$$

и

$$E_3 = -\frac{E}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}E.$$

Примѣняя теоремы Кирхгоффа къ символическимъ значеніямъ, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{J}_1 &= \widehat{I}_1 - \widehat{I}_3 \\ \widehat{J}_2 &= \widehat{I}_2 - \widehat{I}_1 \\ \widehat{J}_3 &= \widehat{I}_3 - \widehat{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Пусть кажущееся сопротивление частей aa' , bb' , cc' будетъ:

$$\widehat{Z} = R + j \cdot 2\pi nL = R + jX,$$

тогда вторая теорема Кирхгоффа намъ дастъ:

$$\widehat{E}_1 = \widehat{Z}(\widehat{J}_1 - \widehat{J}_2) + \widehat{V}_1$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{E}_2 &= \widehat{Z} (\widehat{J}_2 - \widehat{J}_3) + \widehat{V}_2, \\ \widehat{E}_3 &= \widehat{Z} (\widehat{J}_3 - \widehat{J}_1) + \widehat{V}_3 \end{aligned} \right\} (2)$$

Но изъ уравненій (1) выводимъ:

$$\begin{aligned} \widehat{J}_1 - \widehat{J}_2 &= 2\widehat{I}_1 - \widehat{I}_2 - \widehat{I}_3 \\ \widehat{J}_2 - \widehat{J}_3 &= 2\widehat{I}_2 - \widehat{I}_3 - \widehat{I}_1 \\ \widehat{J}_3 - \widehat{J}_1 &= 2\widehat{I}_3 - \widehat{I}_1 - \widehat{I}_2 \end{aligned}$$

Слѣдовательно уравненія (2) примутъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{E}_1 &= \widehat{Z} (2\widehat{I}_1 - \widehat{I}_2 - \widehat{I}_3) + \widehat{V}_1 \\ \widehat{E}_2 &= \widehat{Z} (2\widehat{I}_2 - \widehat{I}_3 - \widehat{I}_1) + \widehat{V}_2 \\ \widehat{E}_3 &= \widehat{Z} (2\widehat{I}_3 - \widehat{I}_1 - \widehat{I}_2) + \widehat{V}_3 \end{aligned} \right\} (3)$$

Обозначимъ кажущіяся сопротивленія частей ab , bc , ca черезъ:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{J}}_1 &= r_1 + jx_1 \\ \widehat{\mathcal{J}}_2 &= r_2 + jx_2 \\ \widehat{\mathcal{J}}_3 &= r_3 + jx_3 \end{aligned}$$

и замѣтимъ, что:

$$\widehat{I}_1 = \frac{\widehat{V}_1}{\widehat{\mathcal{J}}_1}, \quad \widehat{I}_2 = \frac{\widehat{V}_2}{\widehat{\mathcal{J}}_2}, \quad \widehat{I}_3 = \frac{\widehat{V}_3}{\widehat{\mathcal{J}}_3}.$$

Кромѣ того:

$$\widehat{V}_1 + \widehat{V}_2 + \widehat{V}_3 = 0,$$

откуда

$$\widehat{V}_3 = -(\widehat{V}_1 + \widehat{V}_2).$$

Замѣняя въ уравненіяхъ (3) $\widehat{I}_1$, $\widehat{I}_2$, $\widehat{I}_3$ ихъ значеніями, найдемъ для первыхъ двухъ:

$$\begin{aligned} \widehat{E}_1 &= \widehat{Z} \left(2 \frac{\widehat{V}_1}{\widehat{\mathcal{J}}_1} - \frac{\widehat{V}_2}{\widehat{\mathcal{J}}_2} + \frac{\widehat{V}_1 + \widehat{V}_2}{\widehat{\mathcal{J}}_3} \right) + \widehat{V}_1 \\ \widehat{E}_2 &= \widehat{Z} \left(2 \frac{\widehat{V}_2}{\widehat{\mathcal{J}}_2} - \frac{\widehat{V}_1}{\widehat{\mathcal{J}}_1} + \frac{\widehat{V}_1 + \widehat{V}_2}{\widehat{\mathcal{J}}_3} \right) + \widehat{V}_2 \end{aligned}$$

или, упрощая:

$$\begin{aligned}\widehat{E}_1 &= \widehat{V}_1 \left(1 + \frac{2\widehat{Z}}{\widehat{\delta}_1} + \frac{\widehat{Z}}{\widehat{\delta}_3} \right) + \widehat{V}_2 \widehat{Z} \left(\frac{1}{\widehat{\delta}_3} - \frac{1}{\widehat{\delta}_2} \right) \\ \widehat{E}_2 &= \widehat{V}_2 \left(1 + \frac{2\widehat{Z}}{\widehat{\delta}_2} + \frac{\widehat{Z}}{\widehat{\delta}_3} \right) + \widehat{V}_1 \widehat{Z} \left(\frac{1}{\widehat{\delta}_3} - \frac{1}{\widehat{\delta}_1} \right)\end{aligned}$$

или еще:

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{E}_1}{\widehat{Z}} &= \widehat{V}_1 \left(\frac{1}{\widehat{Z}} + \frac{2}{\widehat{\delta}_1} + \frac{1}{\widehat{\delta}_3} \right) + \widehat{V}_2 \left(\frac{1}{\widehat{\delta}_3} - \frac{1}{\widehat{\delta}_2} \right) \\ \frac{\widehat{E}_2}{\widehat{Z}} &= \widehat{V}_2 \left(\frac{1}{\widehat{Z}} + \frac{2}{\widehat{\delta}_2} + \frac{1}{\widehat{\delta}_3} \right) + \widehat{V}_1 \left(\frac{1}{\widehat{\delta}_3} - \frac{1}{\widehat{\delta}_1} \right).\end{aligned}$$

Величины $\frac{1}{\widehat{\delta}_1}$, $\frac{1}{\widehat{\delta}_2}$, $\frac{1}{\widehat{\delta}_3}$, $\frac{1}{\widehat{Z}}$ представляют величины обратныя кажущимся сопротивленіямъ. Положимъ:

$$\frac{\widehat{E}_1}{\widehat{Z}} = \widehat{\alpha}_1, \quad \frac{\widehat{E}_2}{\widehat{Z}} = \widehat{\alpha}_2$$

$$\frac{1}{\widehat{Z}} + \frac{2}{\widehat{\delta}_1} + \frac{1}{\widehat{\delta}_3} = \widehat{a}$$

$$\frac{1}{\widehat{Z}} + \frac{2}{\widehat{\delta}_2} + \frac{1}{\widehat{\delta}_3} = \widehat{b}$$

$$\frac{1}{\widehat{\delta}_3} - \frac{1}{\widehat{\delta}_1} = \widehat{c} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\widehat{\delta}_3} - \frac{1}{\widehat{\delta}_2} = \widehat{d}$$

Тогда предыдущія уравненія примутъ видъ:

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_1 &= \widehat{V}_1 \widehat{a} + \widehat{d} \widehat{V}_2 \\ \widehat{\alpha}_2 &= \widehat{V}_2 \widehat{b} + \widehat{c} \widehat{V}_1\end{aligned} \quad (4)$$

откуда выводимъ:

$$\widehat{\alpha}_1 \widehat{c} - \widehat{\alpha}_2 \widehat{a} = (\widehat{d} \widehat{c} - \widehat{b} \widehat{a}) \widehat{V}_2$$

и

$$\widehat{V}_2 = \frac{\widehat{\alpha}_1 \widehat{c} - \widehat{\alpha}_2 \widehat{a}}{\widehat{d} \widehat{c} - \widehat{b} \widehat{a}} \quad (5)$$

Точно также найдемъ:

$$\widehat{V}_4 = \frac{\widehat{\alpha}_1 \widehat{b} - \widehat{\alpha}_2 \widehat{d}}{\widehat{b} \widehat{a} - \widehat{d} \widehat{c}} \dots \dots \dots (6)$$

Теперь положимъ:

$$\begin{aligned} \widehat{V}_1 &= p_1 + jq_1, & \widehat{a} &= m_1 + jn_1 \\ \widehat{V}_2 &= p_2 + jq_2, & \widehat{b} &= m_2 + jn_2 \\ \widehat{\alpha}_1 &= h_1 + jk_1, & \widehat{c} &= f_1 + jg_1 \\ \widehat{\alpha}_2 &= h_2 + jk_2, & \widehat{d} &= f_2 + jg_2 \end{aligned}$$

Тогда уравненіе (6) приметъ видъ:

$$p_1 + jq_1 = \frac{(h_1 + jk_1)(m_2 + jn_2) - (h_2 + jk_2)(f_2 + jg_2)}{(m_1 + jn_1)(m_2 + jn_2) - (f_1 + jg_1)(f_2 + jg_2)}$$

или:

$$\begin{aligned} p_1 + jq_1 &= \\ &= \frac{h_1 m_2 - k_1 n_2 - h_2 f_2 + k_2 g_2 + j(h_1 n_2 + k_1 m_2 - h_2 g_2 - k_2 f_2)}{m_1 m_2 - n_1 n_2 - f_1 f_2 + g_1 g_2 + j(m_1 n_2 + m_2 n_1 - f_1 g_2 - f_2 g_1)} \quad (7) \end{aligned}$$

Это выраженіе будетъ вида:

$$p_1 + jq_1 = \frac{A + jB}{C + jD},$$

откуда (см. § 11)

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} \\ q_1 &= \frac{BC - AD}{C^2 + D^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{p_1^2 + q_1^2} = \\ &= \frac{1}{C^2 + D^2} \sqrt{(AC + BD)^2 + (BC - AD)^2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{q_1}{p_1} = \frac{BC - AD}{AC + BD}.$$

Для разбираемаго нами общаго случая, какъ показываетъ уравненіе (7), мы получили для p_1 и q_1 весьма сложныя выраженія. Примѣнимъ наше рѣшеніе къ болѣе простымъ случаямъ. Предположимъ, что у насъ пріемники безъ самоиндукціи или емкости и что магистраліи aa' , bb' , cc' также безъ самоиндукціи; тогда:

$$\widehat{Z} = R, \quad \widehat{\mathcal{Z}}_1 = r_1, \quad \widehat{\mathcal{Z}}_2 = r_2, \quad \widehat{\mathcal{Z}}_3 = r_3.$$

$$\widehat{a} = \frac{1}{\widehat{Z}} + \frac{2}{\widehat{\mathcal{Z}}_1} + \frac{1}{\widehat{\mathcal{Z}}_3} = \frac{1}{R} + \frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_3}$$

$$\widehat{b} = \frac{1}{\widehat{Z}} + \frac{2}{\widehat{\mathcal{Z}}_2} + \frac{1}{\widehat{\mathcal{Z}}_3} = \frac{1}{R} + \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

$$\widehat{c} = \frac{1}{\widehat{\mathcal{Z}}_3} - \frac{1}{\widehat{\mathcal{Z}}_1} = \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1}$$

$$\widehat{d} = \frac{1}{\widehat{\mathcal{Z}}_3} - \frac{1}{\widehat{\mathcal{Z}}_2} = \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2}.$$

Такъ какъ мы за ось векторовъ выбрали векторъ электродвижущей силы e_1 , то:

$$\widehat{E}_1 = E$$

$$\widehat{E}_2 = -\frac{E}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} E$$

$$\widehat{E}_3 = -\frac{E}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} E.$$

Слѣдовательно:

$$\widehat{\alpha}_1 = \frac{\widehat{E}_1}{\widehat{Z}} = \frac{E}{R}$$

$$\widehat{\alpha}_2 = \frac{\widehat{E}_2}{\widehat{Z}} = -\frac{E}{2R} + j \frac{\sqrt{3} E}{2R}.$$

Замѣняя въ уравненіи (6) символическія выраженія ихъ значеніями, получимъ:

$$\widehat{V}_1 = p_1 + jq_1 =$$

$$= \frac{\frac{E}{R} \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \left(\frac{E}{2R} - j \frac{\sqrt{3} E}{2R} \right) \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right)}{\left(\frac{1}{R} + \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) - \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1} \right) \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

откуда:

$$p_1 = \frac{\frac{E}{R} \left[\left(\frac{1}{R} + \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right) \right]}{\left(\frac{1}{R} + \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) - \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1} \right) \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

$$q_1 = \frac{-\frac{\sqrt{3} E}{2R} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right)}{\left(\frac{1}{R} + \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) - \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1} \right) \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right)}{\left(\frac{1}{R} + \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right)}.$$

Предыдущія выражения можно упростить, а именно мы получимъ:

$$p_1 = E \frac{\frac{1}{R} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)}{\frac{1}{R} + 2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + 3R \left(\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_2 r_3} \right)}$$

$$q_1 = -\frac{\sqrt{3} E}{2} \frac{\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2}}{\frac{1}{R} + 2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + 3R \left(\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_2 r_3} \right)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right)}{\frac{1}{R} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)}.$$

Аналогичныя выраженія найдемъ для V_2 и V_3 . Такъ для V_2 въ символическомъ уравненіи (5) замѣнимъ символическія значенія выраженіями, выведенными выше. Мы получимъ:

$$\widehat{V}_2 = p_2 + jq_2 = \frac{\frac{E}{R} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1} \right) + \left(\frac{E}{2R} - j \frac{\sqrt{3} E}{2R} \right) \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right)}{-\Delta}$$

гдѣ Δ тотъ же знаменатель, что и для p_1 и q_1 (т. е. для $\widehat{V}_1$). Отсюда выводимъ:

$$p_2 = -\frac{E}{R} \cdot \frac{\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right)}{\Delta}$$

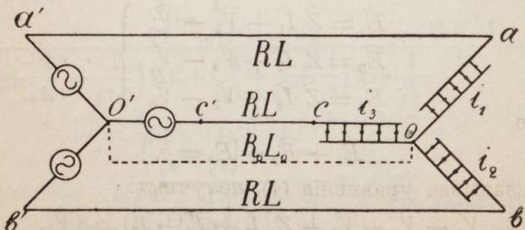
или по упрощеніи:

$$p_2 = -\frac{E}{R} \cdot \frac{\frac{1}{2R} + \frac{3}{2r_3}}{\Delta} = -\frac{E}{2R} \cdot \frac{\frac{1}{R} + \frac{3}{r_3}}{\Delta}$$

$$q_2 = \frac{\sqrt{3} E}{2R} \cdot \frac{\frac{1}{R} + \frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_3}}{\Delta}$$

Далѣе $p_3 = -(p_1 + p_2)$ и $q_3 = -(q_1 + q_2)$.

54. Трехфазная система звѣздою. Пусть приѣмники соединены звѣздою точно также, какъ и электродвижущія силы и предположимъ, что узловыя точки o, o' соединены проводникомъ oo' сопротивленіе котораго R_0 , а самоиндукція L_0 .



Фиг. 84.

Обозначимъ черезъ r_1, r_2, r_3 — сопротивленія приѣмниковъ, а черезъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — ихъ самоиндукціи, затѣмъ черезъ $\widehat{V}_1, \widehat{V}_2, \widehat{V}_3$ символическія значенія напряженій въ oa, ob, oc и черезъ $\widehat{I}_1, \widehat{I}_2, \widehat{I}_3$ такія же значенія для токовъ въ приѣмникахъ. Положимъ далѣе:

$$\widehat{\mathcal{Z}}_1 = r_1 + j \cdot 2\pi n \lambda_1$$

$$\widehat{\mathcal{Z}}_2 = r_2 + j \cdot 2\pi n \lambda_2$$

$$\widehat{\mathcal{Z}}_3 = r_3 + j \cdot 2\pi n \lambda_3$$

$$\widehat{Z} = R + j \cdot 2\pi n L$$

и

$$\widehat{Z}_0 = R_0 + j \cdot 2\pi n L_0.$$

Пусть символическія значенія электродвижущихъ силъ въ $o'a', o'b', o'c'$ будутъ соответственно $\widehat{E}_1, \widehat{E}_2, \widehat{E}_3$

Положимъ также:

$$\widehat{Z}_0 \widehat{I}_0 = \widehat{V}_0.$$

Примѣняя теоремы Кирхгоффа мы получимъ слѣдующія символическія уравненія:

$$\widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 + \widehat{I}_3 = \widehat{I}_0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{V}_1 &= \widehat{\mathcal{Z}}_1 \widehat{I}_1 \\ \widehat{V}_2 &= \widehat{\mathcal{Z}}_2 \widehat{I}_2 \\ \widehat{V}_3 &= \widehat{\mathcal{Z}}_3 \widehat{I}_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{E}_1 &= \widehat{Z} \widehat{I}_1 - \widehat{Z}_0 \widehat{I}_0 + \widehat{V}_1 \\ \widehat{E}_2 &= \widehat{Z} \widehat{I}_2 - \widehat{Z}_0 \widehat{I}_0 + \widehat{V}_2 \\ \widehat{E}_3 &= \widehat{Z} \widehat{I}_3 - \widehat{Z}_0 \widehat{I}_0 + \widehat{V}_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

или еще:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{E}_1 &= \widehat{Z} \widehat{I}_1 + \widehat{V}_1 - \widehat{V}_0 \\ \widehat{E}_2 &= \widehat{Z} \widehat{I}_2 + \widehat{V}_2 - \widehat{V}_0 \\ \widehat{E}_3 &= \widehat{Z} \widehat{I}_3 + \widehat{V}_3 - \widehat{V}_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Но

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 + \widehat{E}_3 = 0.$$

Складывая уравненія (4), получимъ:

$$\widehat{V}_1 + \widehat{V}_2 + \widehat{V}_3 + \widehat{Z} (\widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 + \widehat{I}_3) = 3 \widehat{V}_0.$$

Принимая же во вниманіе уравненіе (1), найдемъ:

$$\widehat{V}_1 + \widehat{V}_2 + \widehat{V}_3 + \widehat{Z} \cdot \widehat{I}_0 = 3\widehat{V}_0,$$

или замѣчая, что

$$\widehat{I}_0 = \frac{\widehat{V}_0}{\widehat{Z}_0},$$

получимъ

$$\widehat{V}_1 + \widehat{V}_2 + \widehat{V}_3 + \frac{\widehat{Z}}{\widehat{Z}_0} \widehat{V}_0 = 3\widehat{V}_0,$$

откуда

$$\widehat{V}_0 = \frac{(\widehat{V}_1 + \widehat{V}_2 + \widehat{V}_3)}{3 - \frac{\widehat{Z}}{\widehat{Z}_0}} \dots \dots \dots (5)$$

Подставляя въ уравненіяхъ (4) вмѣсто $\widehat{I}_1, \widehat{I}_2, \widehat{I}_3$ ихъ значенія, выведенныя изъ уравненій (2), получимъ:

$$\widehat{E}_1 = \frac{\widehat{Z}}{\widehat{\mathcal{Z}}_1} \widehat{V}_1 + \widehat{V}_1 - \widehat{V}_0,$$

$$\widehat{E}_2 = \frac{\widehat{Z}}{\widehat{\mathcal{Z}}_2} \widehat{V}_2 + \widehat{V}_2 - \widehat{V}_0,$$

$$\widehat{E}_3 = \frac{\widehat{Z}}{\widehat{\mathcal{Z}}_3} \widehat{V}_3 + \widehat{V}_3 - \widehat{V}_0,$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{V}_1 &= (\widehat{E}_1 + \widehat{V}_0) \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_1}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_1} \\ \widehat{V}_2 &= (\widehat{E}_2 + \widehat{V}_0) \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_2}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_2} \\ \widehat{V}_3 &= (\widehat{E}_3 + \widehat{V}_0) \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_3}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_3} \end{aligned} \right\} (6)$$

Отсюда, складывая, получимъ:

$$\begin{aligned} \widehat{V}_1 + \widehat{V}_2 + \widehat{V}_3 &= \widehat{E}_1 \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_1}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_1} + \widehat{E}_2 \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_2}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_2} + \\ &+ \widehat{E}_3 \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_3}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_3} + \widehat{V}_0 \left\{ \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_1}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_1} + \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_2}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_2} + \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_3}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_3} \right\} \end{aligned}$$

Но изъ уравненія (5) имѣемъ:

$$\widehat{V}_1 + \widehat{V}_2 + \widehat{V}_3 = \left(3 - \frac{\widehat{Z}}{\widehat{Z}_0}\right) \widehat{V}_0.$$

Тогда предыдущее уравненіе приметъ видъ:

$$\begin{aligned} \widehat{V}_0 \left\{ 3 - \frac{\widehat{Z}}{\widehat{Z}_0} - \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_1}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_1} - \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_2}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_2} - \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_3}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_3} \right\} = \\ = \widehat{E}_1 \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_1}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_1} + \widehat{E}_2 \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_2}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_2} + \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_3}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_3}. \quad (7) \end{aligned}$$

Положимъ теперь:

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{Z}}{\widehat{Z}_0} &= a + jb \\ \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_1}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_1} &= a_1 + jb_1 \\ \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_2}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_2} &= a_2 + jb_2 \\ \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_3}{\widehat{Z} + \widehat{\mathcal{Z}}_3} &= a_3 + jb_3. \end{aligned}$$

Затѣмъ

$$\begin{aligned} a + a_1 + a_2 + a_3 &= A \\ b + b_1 + b_2 + b_3 &= B \\ \widehat{V}_0 &= p_0 + jq_0. \end{aligned}$$

Тогда уравненіе (7) даетъ:

$$(p_0 + jq_0)(3 - A - jB) = \widehat{E}_1(a_1 + jb_1) + \widehat{E}_2(a_2 + jb_2) + \widehat{E}_3(a_3 + jb_3).$$

Но

$$\widehat{E}_1 = E, \quad \widehat{E}_2 = -\frac{E}{2} + j \frac{\sqrt{3} E}{2}, \quad \widehat{E}_3 = -\frac{E}{2} - j \frac{\sqrt{3} E}{2}$$

Слѣдовательно предыдущее уравненіе можно написать въ видѣ:

$$\begin{aligned} p_0(3-A) + q_0B + j \{ q_0(3-A) - p_0B \} = \\ = Ea_1 - \frac{E}{2} a_2 - \frac{E}{2} a_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} Eb_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} Eb_3 + \\ + j \left\{ Eb_1 - \frac{E}{2} b_2 - \frac{E}{2} b_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} Ea_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} Ea_3 \right\} \end{aligned}$$

Отсюда выводимъ:

$$p_0(3-A) + q_0B = E \left(a_1 - \frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_3 \right)$$

$$q_0(3-A) - p_0B = E \left(b_1 - \frac{b_2}{2} - \frac{b_3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} a_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} a_3 \right)$$

откуда:

$$p_0 = E \frac{(3-A) \left(a_1 - \frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} (b_2 - b_3) \right) - B \left(b_1 - \frac{b_2}{2} - \frac{b_3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} (a_2 - a_3) \right)}{(3-A)^2 + B^2}$$

$$q_0 = E \frac{B \left(a_1 - \frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} (b_2 - b_3) \right) + (3-A) \left(b_1 - \frac{b_2}{2} - \frac{b_3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} (a_2 - a_3) \right)}{(3-A)^2 + B^2}$$

откуда

$$V_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{q_0}{p_0}.$$

Зная V_0 , легко уже найти V_1 , V_2 , V_3 , пользуясь уравненіями (6).

55. Перейдемъ теперь къ частнымъ случаямъ, а именно къ случаю, когда магистральные провода и приемники безъ самоиндукціи.

Тогда мы будемъ имѣть:

$$\widehat{\mathcal{J}}_1 = r_1, \quad \widehat{\mathcal{J}}_2 = r_2, \quad \widehat{\mathcal{J}}_3 = r_3$$

$$\widehat{Z} = R, \quad \widehat{Z}_0 = R_0$$

и слѣдовательно:

$$b_1 = b_2 = b_3 = b = 0, \quad B = 0.$$

$$a_1 = \frac{r_1}{R + r_1}, \quad a_2 = \frac{r_2}{R + r_2}, \quad a_3 = \frac{r_3}{R + r_3}, \quad a = \frac{R}{R_0}$$

$$A = \frac{R}{R_0} + \frac{r_1}{R + r_1} + \frac{r_2}{R + r_2} + \frac{r_3}{R + r_3}$$

Тогда:

$$p_0 = E \frac{(3 - A) \left(a_1 - \frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{2} \right)}{(3 - A)^2} = E \frac{a_1 - \frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{2}}{3 - A}$$

$$q_0 = E \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a_2 - a_3}{(3 - A)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{q_0}{p_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a_2 - a_3}{a_1 - \frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{2}}$$

$$V_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2} =$$

$$= E \frac{\sqrt{\left(a_1 - \frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} (a_2 - a_3)^2}}{3 - A}$$

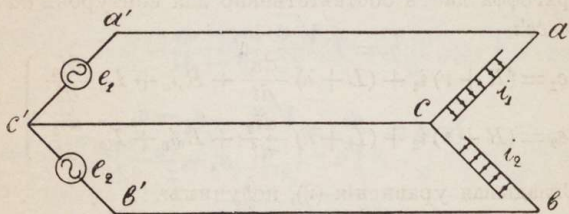
В. Несимметричныя связанныя системы.

56. Если мы имѣемъ n электродвижущихъ силъ, дѣйствующихъ въ n связанныхъ контурахъ и если эти электродвижущія силы разнятся по фазѣ одна отъ другой послѣдовательно на углы не равныя $\frac{2\pi}{n}$, то, какъ мы уже условились раньше, такая n -фазная система, называется несимметричною. Такъ если въ n -фазной системѣ электродвижущія силы разнятся на уголь $\frac{\pi}{n}$, то подобная система будетъ несимметричною. Въ частномъ случаѣ трехфазная си-

стема (треугольникомъ или звѣздою), въ которой электродвижущія силы разнятся на 60° , или двухфазная система, въ которой электродвижущія силы разнятся на 90° , принадлежать къ категоріи несимметричныхъ системъ.

Изъ несимметричныхъ системъ на практикѣ примѣняется только двухфазная, поэтому мы остановимся только на разборѣ этой системы.

По сдѣланному нами раньше опредѣленію связанная двухфазная система должна состоять изъ двухъ контуровъ, поэтому тутъ возможна одна лишь фигура, показанная на прилагаемомъ чертежѣ.



Фиг. 85.

Если вѣтви ac и bc будутъ одинаково нагружены, т. е. будутъ имѣть одинаковыя сопротивленія, самоиндукціи и емкости и если соединительные провода $a'a$ и $b'b$ будутъ также одинаковы, то такую систему мы назовемъ уравновѣшенной; въ противномъ случаѣ она будетъ не уравновѣшенной. Перейдемъ теперь къ болѣе подробному изслѣдованію двухфазной связанной системы.

57. Двухфазная уравновѣшенная и неуравновѣшенная системы. Пусть e_1, e_2 будутъ электродвижущія силы въ вѣтвяхъ $a'c', b'c'$ (см. фигуру 85). Обозначимъ черезъ R сопротивленіе проводовъ $a'a, b'b$, черезъ L ихъ коэффициентъ самоиндукціи, затѣмъ черезъ r и λ сопротивленіе и коэффициентъ самоиндукціи вѣтвей ac и bc и наконецъ черезъ R_0, L_0 сопротивленіе и самоиндукцію провода cc' . Пусть i_1 сила тока въ ac

i_2 сила тока въ bc . Мы будемъ предполагать, что электродвижуція силы e_1 и e_2 будутъ вида:

$$e_1 = E \sin 2\pi nt, \quad e_2 = E \sin \left(2\pi nt + \frac{\pi}{2} \right)$$

или

$$e_2 = E \cos 2\pi nt.$$

Примѣнимъ теоремы Кирхгоффа къ мгновеннымъ значеніямъ токовъ и электродвижущихъ силъ.

Первая теорема Кирхгоффа дастъ:

$$i_1 + i_2 = i_0 \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ i_0 сила тока въ проводникѣ cc' . Вторая теорема Кирхгоффа дастъ соотвѣтственно для контуровъ $aa'cc'$ и $bb'cc'$:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= (R + r) i_1 + (L + \lambda) \frac{di_1}{dt} + R_0 i_0 + L_0 \frac{di_0}{dt} \\ e_2 &= (R + r) i_2 + (L + \lambda) \frac{di_2}{dt} + R_0 i_0 + L_0 \frac{di_0}{dt} \end{aligned} \right\} (2)$$

Складывая уравненія (2), получимъ:

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 &= (R + r) (i_1 + i_2) + (L + \lambda) \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) + \\ &\quad + 2R_0 i_0 + 2L_0 \frac{di_0}{dt}. \end{aligned}$$

Принимая же во вниманіе уравненіе (1), а также и то, что на основаніи этого уравненія имѣемъ:

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{di_0}{dt}$$

получимъ:

$$e_1 + e_2 = (R + r + 2R_0) i_0 + (L + \lambda + 2L_0) \frac{di_0}{dt}. \quad (3)$$

Но

$$e_1 = E \sin 2\pi nt, \quad e_2 = E \cos 2\pi nt.$$

Слѣдовательно сумма $e_1 + e_2$ опредѣлится какъ замыкающая двухъ одинаковыхъ по величинѣ, но взаимно-перпендикулярныхъ векторовъ OA и AB (фиг. 86)

шемъ полуокружность и проведемъ изъ K векторъ KM подъ угломъ θ , определяемымъ отношеніемъ:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2\pi n(L + \lambda)}{R + r} \dots \dots \dots (8)$$

Отрѣзокъ KM представить векторъ $(R+r)I_1$. Точно также, замѣчая изъ уравненій (2), что e_2 есть замыкающая векторовъ $(R+r)I_2$, $2\pi n(L + \lambda)I_2$, R_0I_0 и $2\pi nL_0I_0$, найдемъ, что KN представить собою векторъ $(R+r)I_2$.

Изъ этого графика видно, что токи i_1 и i_2 не будутъ одинаковы и разность ихъ фазъ будетъ иная, чѣмъ разность фазъ между электродвижущими силами e_1 и e_2 , несмотря на то, что обѣ фазы предполагаются нагруженными одинаково. Это оправдываетъ наименованіе двухфазной системы несимметричною.

Опредѣлимъ разность фазъ токовъ i_1 и i_2 . Эта разность равна углу NKM . Пусть $\angle KAO = \alpha$, $\angle KBO = \beta$. Тогда можемъ написать:

$$\angle NKM = \angle BKA - 2\theta$$

Но

$$\angle BKA = 2\pi - (\angle BKO + \angle AKO)$$

$$\angle BKO = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \psi_1 - \varphi_0 \right) - \beta = \frac{\pi}{2} + \psi_1 + \varphi_0 - \beta.$$

$$\angle AKO = \pi - \psi_1 - \varphi_0 - \alpha$$

Слѣдовательно:

$$\angle BKA = \frac{\pi}{2} + \alpha + \beta$$

и

$$\angle NKM = \frac{\pi}{2} + \alpha + \beta - 2\theta \dots \dots \dots (9)$$

Для опредѣленія угловъ α и β спроектируемъ треугольники OKA и OKB на оси ox и oy ; мы тогда получимъ:

$$KA \cos \alpha = OA - OK \cos (\varphi_0 + \psi_1)$$

$$KA \sin \alpha = OK \sin (\varphi_0 + \psi_1),$$

откуда выводимъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OK \sin (\varphi_0 + \psi_1)}{OA - OK \cos (\varphi_0 + \psi_1)} \cdot \cdot \cdot \quad (10)$$

$$KA = \sqrt{OA^2 + OK^2 - 2OA \cdot OK \cos (\varphi_0 + \psi_1)} \quad (11)$$

Точно также найдемъ:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{OK \cos (\varphi_0 + \psi_1)}{OB - OK \sin (\varphi_0 + \psi_1)} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (12)$$

$$KB = \sqrt{OB^2 + OK^2 - 2OB \cdot OK \cdot \sin (\varphi_0 + \psi_1)} \quad (13)$$

Замѣтимъ, что:

$$OA = OB = E$$

$$OK = \sqrt{OH^2 + HK^2} = I_0 \sqrt{R_0^2 + (2\pi n L_0)^2}. \quad (14)$$

Амплитуды токовъ i_1 и i_2 опредѣляются изъ соотношеній:

$$\begin{aligned} KM &= KA \cos \theta \\ KN &= KB \cos \theta, \end{aligned}$$

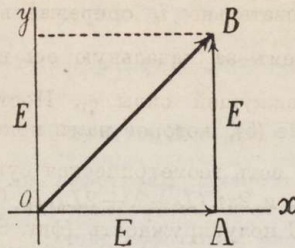
причемъ

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2\pi n (L + \lambda)}{R + r},$$

величины же KA и KB опредѣляются уравненіями (11) и (13).

58. Перейдемъ теперь къ частному случаю, когда самоиндукція во всѣхъ частяхъ двухфазной цѣпи отсутствуетъ, т. е. когда $L = L_0 = \lambda = 0$. Тогда векторъ тока i_0 будетъ совпадать съ векторомъ электродвижущей силы $e_1 + e_2$ (см. ур. 5), иначе говоря уголъ ψ будетъ равенъ нулю, а уголъ $\psi_1 = \frac{\pi}{4}$. Точно также уголъ $\theta = 0$ и уголъ $\varphi_0 = 0$. Слѣдовательно, согласно уравненій (10) и (12) углы α и β будутъ равны, причемъ OK будетъ равно $R_0 I_0$. Мы такимъ образомъ получимъ для α и β :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \frac{R_0 I_0 \sin \frac{\pi}{4}}{E - R_0 I_0 \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{R_0 I_0 \sqrt{2}}{2E - R_0 I_0 \sqrt{2}}.$$



Фиг. 86.

Поэтому

$$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = E \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} BOA = \frac{AB}{OA} = \frac{\pi}{4}.$$

Такимъ образомъ сумма $e_1 + e_2$ будетъ вида:

$$e_1 + e_2 = E \sqrt{2} \sin \left(2\pi n t + \frac{\pi}{4} \right) \dots \dots (4)$$

Тогда для уравненія (3) получимъ:

$$E \sqrt{2} \sin \left(2\pi n t + \frac{\pi}{4} \right) = (R + r + 2R_0) i_0 + \\ + (L + \lambda + 2L_0) \frac{di_0}{dt} \dots \dots \dots (5)$$

Это уравненіе показываетъ, что векторъ I_0 тока i_0 будетъ (см. § 18)

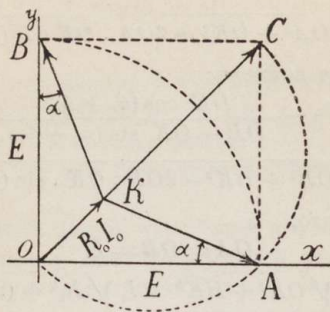
$$I_0 = \frac{E \sqrt{2}}{\sqrt{(R + r + 2R_0)^2 + (2\pi n)^2 (L + \lambda + 2L_0)^2}} \dots (6)$$

а уголъ разности фазъ между $e_1 + e_2$ и токомъ I_0 будетъ данъ отношеніемъ:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\pi n (L + \lambda + 2L_0)}{R + r + 2R_0} \dots \dots \dots (7)$$

Изъ уравненія (4) мы видимъ, что электродвижущая сила $e_1 + e_2$ опережаетъ электродвижущую силу e_1 на уголъ $\frac{\pi}{4}$, т. е. на 45° . Съ другой стороны токъ i_0 от-

Графикъ векторовъ въ разсматриваемомъ случаѣ показываетъ, что токи i_1 и i_2 равны между собою (фиг. 88).



Фиг. 88.

Амплитуды $(R + r) I_1$ и $(R + r) I_2$ будутъ представлены векторами KA и KB .

Уголъ BKA разности фазъ между двумя токами i_1 и i_2 , какъ это видно изъ графика, всегда будетъ больше $\frac{\pi}{2}$ и будетъ зависеть отъ величины вектора OK , т. е. отъ $R_0 I_0$ или иначе отъ паденія вольтъ по среднему проводу. Если $OK = \frac{OC}{2} = \frac{E\sqrt{2}}{2}$, то разность фазъ между токами i_1 и i_2 будетъ равняться 180° .

59. Изъ всего сказаннаго раньше мы видимъ, что двухфазную систему нельзя считать уравновѣшенной, если въ каждую вѣтвь включены пріемники съ одинаковымъ сопротивленіемъ и одинаковою самоиндукціею (или емкостью). Эта система будетъ уравновѣшенной при одинаковомъ числѣ пріемниковъ въ каждой фазѣ лишь въ томъ случаѣ, когда пріемники будутъ безъ самоиндукціи и емкости. Изъ разсмотрѣнія графика, приведеннаго въ § 57, легко замѣтить, что въ томъ случаѣ, когда у насъ будутъ включены пріемники съ самоиндукціею, система будетъ уравновѣшена тогда, когда векторъ тока i_0 совпадаетъ съ векторомъ электро-

движущей силы $e_1 + e_2$, т. е. съ векторомъ OC ; для этого необходимо, чтобы уголъ DOC былъ бы равенъ нулю. Этого можно достигнуть включеніемъ емкости послѣдовательно въ третій проводъ. Величина этой емкости будетъ опредѣлена уравненіемъ:

$$\frac{1}{2\pi n C} = \frac{1}{2} \left\{ 2\pi n (L + \lambda + 2L_0) \right\}.$$

Но въ такомъ случаѣ придется считаться съ резонансомъ напряженій.

Система становится уравновѣшенной и тогда, когда уголъ ϕ будетъ равенъ углу φ_0 т. е. когда имѣемъ соотношеніе

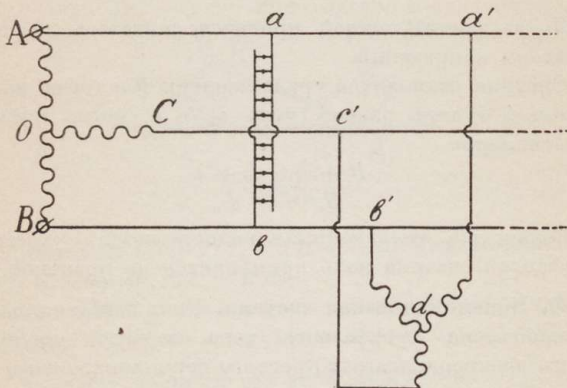
$$\frac{R + r}{R_0} = \frac{L + \lambda}{L_0}$$

Вслѣдствіе приведенныхъ недостатковъ двухфазная связанная система мало примѣняется на практикѣ.

60. Моноциклическая система. Какъ извѣстно, электродвигатели трехфазнаго тока гораздо удобнѣе, чѣмъ электродвигатели простого переменнаго тока; съ другой стороны, если вмѣстѣ съ электродвигателями будемъ включать такіе приемники, какъ лампы, то трехфазная система въ такомъ случаѣ представитъ то неудобство, что, при неодинаковыхъ измѣненіяхъ нагрузки въ фазахъ, напряженіе въ этихъ послѣднихъ сильно мѣняется, что отражается на горѣніи лампъ.

Иначе говоря для лампъ удобнѣе однофазная система, а для электродвигателей трехфазная. Steinmetz предложилъ особую систему, состоящую какъ бы изъ соединенія двухъ системъ — однофазной и трехфазной (или двухфазной), причемъ лампы включены въ однофазную цѣпь, а электродвигатели въ трехфазную и такъ, что работа двигателей не отражается на приемникахъ, включенныхъ въ однофазную цѣпь. Эту систему Steinmetz назвалъ моноциклическою. Она заключается въ слѣдующемъ: предположимъ, что AB представляетъ якорь альтернатора и пусть $e =$

$E \sin 2\pi nt$ есть электродвижущая сила, порождаемая этимъ якоремъ (фиг. 89). Отвѣтимъ отъ середины обмотки AB обмотку OC , намотанную на якорѣ такъ, чтобы въ ней индукировалась во время вращения якоря электродвижущая сила e' , разнящаяся по фазѣ отъ e на 90° , т. е. электродвижущая сила вида: $e' = E' \sin \left(2\pi nt + \frac{\pi}{2} \right)$.



Фиг. 89.

Лампы будемъ включать въ однофазную цѣпь $AabB$, а двигатели d въ цѣпь $Aa'Cc'Bb'$ звѣздою, какъ это показано на чертежѣ.

Покажемъ, что между зажимами AB , AC , BC мы можемъ получить три электродвижущія силы, разнящіяся по фазѣ на $\frac{2\pi}{3}$.

Пусть V_o будетъ потенціалъ въ точкѣ O и V_A , V_B , V_C потенціалы въ точкахъ A , B и C . Въ каждое мгновеніе мы будемъ имѣть:

$$\frac{e}{2} = V_A - V_o,$$

$$\frac{e}{2} = V_o - V_B,$$

ибо только въ такомъ случаѣ:

$$e = V_A - V_B.$$

Далѣе, если:

$$e' = V_C - V_O,$$

то отсюда выводимъ:

$$V_A - V_C = (V_A - V_O) - (V_C - V_O) = \frac{e}{2} - e'$$

$$V_C - V_B = (V_C - V_O) + (V_O - V_B) = \frac{e}{2} + e'.$$

Эти уравненія показываютъ, что если электродвижущая сила между A и C есть разность электродвижущихъ силъ $\frac{e}{2}$ и e' , то электродвижущая сила между B и C будетъ сумма электродвижущихъ силъ $\frac{e}{2}$ и e' .

Точно также, если предположимъ, что

$$e' = V_O - V_C,$$

то получимъ:

$$V_A - V_C = (V_A - V_O) + (V_O - V_C) = \frac{e}{2} + e'$$

$$V_C - V_B = (V_O - V_B) - (V_O - V_C) = \frac{e}{2} - e'.$$

Словомъ, всегда будемъ имѣть, что электродвижущія силы между двумя изъ зажимовъ A и C или B и C равны одна суммѣ электродвижущихъ силъ $\frac{e}{2} + e'$, а другая разности $\frac{e}{2} - e'$.

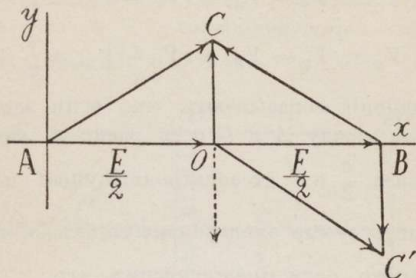
Если, слѣдовательно, отложимъ (фиг. 90) $AO = \frac{E}{2}$, $OB = \frac{E}{2}$ и $OC = E'$, то AC представить сумму $e' + \frac{e}{2}$, а BC разность $e' - \frac{e}{2}$; векторъ же OC' есть разность $\frac{e}{2} - e'$.

Такимъ образомъ мы можемъ получить двѣ комбинаціи электродвижущихъ силъ:

$$\begin{array}{ll} AB = E & \text{между } A \text{ и } B \\ AC & \text{между } A \text{ и } C \\ BC & \text{между } B \text{ и } C \end{array} \quad (\text{I})$$

или

$$\begin{array}{ll}
 AB = E & \text{между } A \text{ и } B \\
 AC & \text{между } A \text{ и } C \\
 OC' & \text{между } B \text{ и } C'
 \end{array}
 \quad (II)$$



Фиг. 90.

Та или другая комбинація будуть зависѣть отъ соединенія концовъ B и C по отношенію къ пріемникамъ.

Остановимся на первой комбинаціи. Мы видимъ, что электродвижущая сила AC опережаетъ электродвижущую силу AB на уголъ $\angle CAO$, а электродвижущая сила BC опережаетъ AB на уголъ $\pi - \angle CBA$ или на $\pi - \angle CAO$.

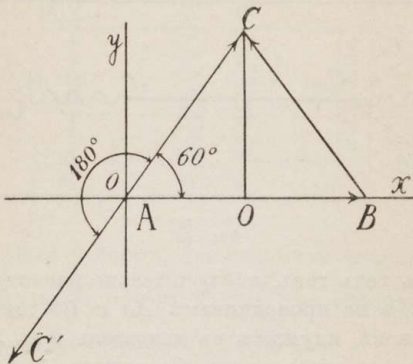
Выберемъ OC такъ, чтобы уголъ $\angle CAO = 60^\circ$; для этого необходимо, чтобы $CO = AO \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = AO \sqrt{3} = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = E \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Подберемъ, слѣдовательно, третью обмотку OC такъ, чтобы она давала намъ электродвижущую силу $\frac{E \sqrt{3}}{2}$; тогда между зажимами A , B и C мы будемъ имѣть три электродвижущія силы (фиг. 91):

$$AB = E, \quad AC = E, \quad BC = E,$$

разнящіяся по фазѣ AC отъ AB на 60° (впередъ), BC отъ AB на 120° (впередъ). Возьмемъ теперь вмѣсто AC электродвижущую силу $AC' = E$, разнящуюся

по фазѣ отъ AC на 180° (впередъ). Ясно, что AC' будетъ разниться отъ AB на $180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$. Итакъ, окончательно мы получимъ три электродвижущія силы AB , BC и AC' , разнящіяся по фазѣ между собою на 120° и каждая изъ нихъ будетъ имѣть амплитуду равную E .



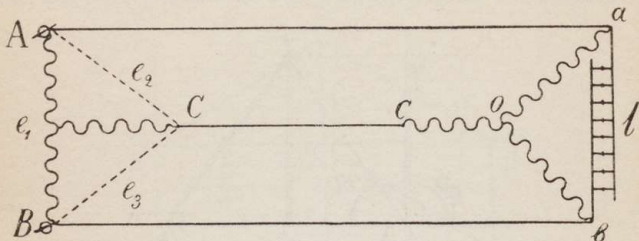
Фиг. 91.

Практически, чтобы получить въ цѣпи электродвижущую силу AC' вмѣсто AC , стоитъ только проводникъ aa' присоединить не къ A , а къ C , а проводникъ cc' къ A , т. е. измѣнить на обратный порядокъ соединенія двухъ проводовъ.

Легко видѣть (фиг. 89), что лампочки включены какъ бы въ простую цѣпь альтернатора AB , обмотка C на лампочки работать не будетъ, двигатель же d будетъ получать токъ отъ всѣхъ трехъ обмотокъ, при чемъ обмотка C будетъ работать исключительно на двигатель.

Распределеніе токовъ въ такой системѣ найти весьма легко, примѣняя теоремы Кирхгоффа и замѣчая, что между A и B , A и C и B и C дѣйствуютъ электродвижущія силы $e_1 = E \sin 2\pi nt$, $e_2 = E \sin \left(2\pi nt + \frac{2\pi}{3} \right)$, $e_3 = E \sin \left(2\pi nt + 2 \frac{2\pi}{3} \right)$, а въ самой цѣпи имѣются

ники съ самоиндукціею (фиг. 92) (обмотки двигателя) ao, bo, co , сопротивление которыхъ r , а коэффициентъ самоиндукціи λ , и приемники безъ самоиндукціи (лампочки l). Не трудно видѣть, что по проводу



Фиг. 92.

Сс будетъ течь токъ, исключительно расходуемый въ двигательъ, а по проводникамъ Aa и Bb токъ равный суммѣ токовъ, идущихъ въ двигатель и въ лампочки. Слѣдовательно, проводникъ Cc можетъ быть тоньше, чѣмъ Aa и Bb .

ГЛАВА VI.

Явленія переменныхъ токовъ въ трансформаторныхъ цѣпяхъ.

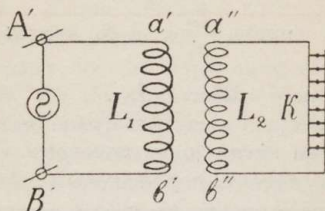
61. Предположимъ, что у насъ имѣется трансформаторная цѣпь, состоящая изъ двухъ цѣпей—первичной $Aa'b'B'$ и вторичной $a''b''K$. Пусть L_1 коэффициентъ самоиндукціи первичной обмотки $a'b'$, L_2 коэффициентъ самоиндукціи вторичной обмотки $a''b''$.

Предположимъ сначала, что магнитный потокъ, порождаемый обмоткою $a'b'$ цѣликомъ проходитъ черезъ обмотку $a''b''$. Пусть i_1 и i_2 токи, циркулирующіе въ данное мгновеніе въ первичной и вторичной обмоткахъ. Магнитный потокъ порождаемый обмоткою $a'b'$ и пронизывающій обмотку $a''b''$ будетъ:

$$\mathfrak{N}_1 = \frac{L_1}{n_1} i_1,$$

гдѣ n_1 число витковъ проволоки первичной обмотки. Взаимная энергія обмотки $a''b''$ и магнитнаго потока $\mathfrak{N}_1$ обмотки $a'b'$ будетъ

$$\mathfrak{N}_1 n_2 i_2 = \frac{L_1}{n_1} n_2 i_1 i_2 \dots \dots \dots (1)$$



Фиг. 93.

Точно также найдемъ, что взаимная энергія обмотки $a'b'$ и магнитнаго потока $\mathfrak{N}_2 = \frac{L_2}{n_2} i_2$, исходящаго изъ $a''b''$ и пронизывающаго $a'b'$ будетъ:

$$\mathfrak{N}_2 n_1 i_1 = \frac{L_2}{n_2} n_1 i_1 i_2 \dots \dots \dots (2)$$

На основаніи закона сохраненія энергіи мы должны имѣть:

$$\mathfrak{N}_1 n_2 i_2 = \mathfrak{N}_2 n_1 i_1 \dots \dots \dots (3)$$

Кромѣ того согласно опредѣленію, коэффициентъ взаимной индукціи между $a'b'$ и $a''b''$ выразится отношеніемъ

$$\frac{\mathfrak{N}_1 n_2}{i_1},$$

а между $a''b''$ и $a'b'$ отношеніемъ

$$\frac{\mathfrak{N}_2 n_1}{i_2}.$$

Изъ уравненія (3) видимъ, что:

$$\frac{\mathfrak{N}_1 n_2}{i_1} = \frac{\mathfrak{N}_2 n_1}{i_2}.$$

Такимъ образомъ находимъ, что коэффициентъ взаимной индукціи между $a'b'$ и $a''b''$ равенъ коэффициенту взаимной индукціи между $a''b''$ и $a'b'$; пусть M этотъ общій коэффициентъ взаимной индукціи; тогда можемъ написать:

$$\frac{\mathfrak{N}_1 n_2}{i_1} = M$$

$$\frac{\mathfrak{N}_2 n_1}{i_2} = M,$$

откуда перемножая, получимъ:

$$M^2 = \frac{\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 n_1 n_2}{i_1 i_2}$$

или замѣняя $\mathfrak{N}_1$ черезъ $\frac{L_1}{n_1} i_1$, а $\mathfrak{N}_2$ черезъ $\frac{L_2}{n_2} i_2$, получимъ:

$$M^2 = L_1 L_2 \dots \dots \dots (A)$$

Перейдемъ теперь къ случаю существованія между $a'b'$ и $a''b''$ утечки магнитныхъ потоковъ. Допустимъ, что магнитный потокъ, порождаемый обмоткою $a'b'$ проникаетъ частью только въ $a''b''$, т. е. пусть въ $a''b''$ проникаетъ потокъ равный не $\mathfrak{N}_1$, а $\eta \mathfrak{N}_1$, гдѣ $\eta < 1$. Тогда взаимная энергія между $a'b'$ и $a''b''$ будетъ:

$$\eta \mathfrak{N}_1 n_2 i_1.$$

Точно также взаимная энергія между $a''b''$ и $a'b'$ будетъ:

$$\eta' \mathfrak{N}_2 n_1 i_1,$$

гдѣ η' коэффициентъ утечки магнитнаго потока $\mathfrak{N}_2$ при проникновеніи его въ $a'b'$. Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$\eta \mathfrak{N}_1 n_2 i_2 = \eta' \mathfrak{N}_2 n_1 i_1.$$

Мы опять получимъ для общаго коэффициента взаимной индукціи:

$$M = \eta \frac{\mathfrak{N}_1 n_2}{i_1}$$

$$M = \eta' \cdot \frac{\mathfrak{N}_2 n_1}{i_2},$$

что по перемноженіи дастъ

$$M^2 = \eta \eta' \cdot \frac{\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 n_1 n_2}{i_1 i_2}$$

или

$$M^2 = \eta \eta' \cdot L_1 L_2.$$

Полагая $\eta \eta' = k$, гдѣ $k < 1$ можемъ слѣдовательно написать для случая существованія магнитной утечки между $a'b'$ и $a''b''$

$$M^2 = k \cdot L_1 L_2 \dots \dots \dots (B)$$

Сравнивая (A) и (B) мы видимъ, что наибольшее значеніе коэффициента взаимной индукціи будетъ

$$M = \sqrt{L_1 L_2},$$

вообще же

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} < \sqrt{L_1 L_2}$$

62. Разсмотримъ теперь распредѣленіе токовъ въ первичной и вторичной цѣпяхъ и опредѣлимъ зависимость между этими токами и дѣйствующими въ цѣпяхъ электродвижущими силами.

Предположимъ, что въ первичной цѣпи у зажимовъ $A'B'$ (см. фиг. 93) дѣйствуетъ переменная электродвижущая сила e_1 , измѣняющаяся по синусоидальному закону; пусть E_1 амплитуда этой электродвижущей силы, а n число періодовъ въ секунду. Обозначимъ черезъ r_1 сопротивленіе цѣпи $A'a'b'B'$, черезъ r_2 сопротивленіе вторичной обмотки $a''b''$ и черезъ R_2 сопротивленіе внѣшней вторичной цѣпи $a''kb''$. Мы сначала предположимъ, что внѣшняя цѣпь $a''kb''$ не имѣетъ ни самоиндукціи, ни емкости.

Для даннаго мгновенія въ первичной цѣпи мы будемъ имѣть:

$$e_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = r_1 i_1 \quad (1)$$

Во вторичной же цѣпи мы получимъ:

$$- M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} = (r_2 + R_2) i_2 \quad (2)$$

Уравненія (1) и (2) намъ показываютъ, что i_1 и i_2 будутъ также синусоидальныя функціи, если e_1 синусоидальная функція. Кроме того легко видѣть, что если амплитуда тока i_2 будетъ I_2 , то амплитуда электродвижущей силы $L_2 \frac{di_2}{dt}$ будетъ $2\pi n L_2 I_2$, гдѣ n число

періодовъ въ секунду; вмѣстѣ съ тѣмъ функція $L_2 \frac{di_2}{dt}$

будетъ разниться по фазѣ отъ i_2 на $\frac{\pi}{2}$, причемъ функ-

ція $L_2 \frac{di_2}{dt}$ опережаетъ фазу тока i_2 на $\frac{\pi}{2}$, а функція

$-L_2 \frac{di_2}{dt}$ отстаетъ по фазѣ отъ i_2 на $\frac{\pi}{2}$.

Точно также замѣтимъ, что, если амплитуда тока i_1 будетъ I_1 , то амплитуда функции $M \frac{di_1}{dt}$ будетъ $2\pi n M I_1$ и функция $M \frac{di_1}{dt}$ будетъ опережать фазу i_1 на $\frac{\pi}{2}$, а функция $-M \frac{di_1}{dt}$ будетъ отставать по фазѣ отъ i_1 на $\frac{\pi}{2}$.

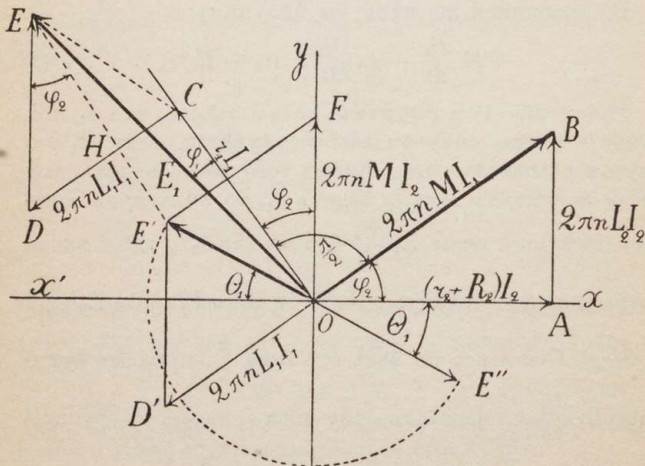
Аналогичныя замѣчания относятся къ функциямъ $L_1 \frac{di_1}{dt}$, $M \frac{di_2}{dt}$, $-L_1 \frac{di_1}{dt}$ и $-M \frac{di_2}{dt}$

Очевидно, что функции $r_1 i_1$ и $(r_2 + R_2) i_2$ по фазѣ совпадаютъ съ i_1 и i_2 и ихъ амплитуды будутъ $r_1 I_1$ и $(r_2 + R_2) I_2$.

Уравненіе (2), переписанное въ слѣдующемъ видѣ:

$$-M \frac{di_1}{dt} = (r_2 + R_2) i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

показываетъ, что векторъ $2\pi n M I_1$ функции $-M \frac{di_1}{dt}$ есть геометрическая сумма векторовъ $(r_2 + R_2) I_2$ и



Фиг. 94.

$2\pi n L_2 I_2$ функций $(R_2 + r_2)i_2$ и $L_2 \frac{di_2}{dt}$, изъ которыхъ вторая опережаетъ первую по фазѣ на $\frac{\pi}{2}$.

Примемъ за начальную ось векторовъ (фиг. 94) векторъ тока i_2 . Отложимъ на этой оси $OA = (r_2 + R_2)I_2$; тогда векторъ функции $L_2 \frac{di_2}{dt}$ изобразится отрезкомъ AB , образующимъ съ OA (впередъ по направленію вращенія) уголъ $\frac{\pi}{2}$ и равнымъ $2\pi n L_2 I_2$. Соединимъ OB , векторъ OB изобразить функцию $-M \frac{di_1}{dt}$. Векторъ первичнаго тока i_1 составитъ съ OB уголъ равный $\frac{\pi}{2}$ впередъ по направленію вращенія, ибо i_1 опережаетъ по фазѣ функцию $-M \frac{di_1}{dt}$ на $\frac{\pi}{2}$.

Направленіе вектора тока i_1 слѣдовательно будетъ OC .

Уравненіе (1), переписанное въ слѣдующемъ видѣ:

$$e_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt},$$

показываетъ, что векторъ электродвижущей силы e_1 есть геометрическая сумма векторовъ $r_1 I_1$, $2\pi n L_1 I_1$ и $2\pi n M I_2$ функций $r_1 i_1$, $L_1 \frac{di_1}{dt}$ и $M \frac{di_2}{dt}$. Отложимъ по вектору тока I_1 векторъ $OC = r_1 I_1$. Затѣмъ проведемъ подъ угломъ $\frac{\pi}{2}$ впередъ по направленію вращенія $CD = 2\pi n L_1 I_1$, далѣе изъ D проведемъ DE равное и параллельное вектору OF , изображающему функцию $M \frac{di_2}{dt}$. Соединимъ OE , векторъ OE изобразить электродвижущую силу e_1 .

Изъ уравненія (1) видно, что:

$$-M \frac{di_2}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt}$$

представляет собою противуэлектродвижущую силу, дѣйствующую въ первичной цѣпи. Построимъ векторъ этой электродвижущей силы. Для этого построимъ сначала векторъ функціи:

$$M \frac{di_2}{dt} + L_1 \frac{di_1}{dt}.$$

Проведемъ изъ O векторъ OD' равный и параллельный CD ; этотъ векторъ представить собою функцію $L_1 \frac{di_1}{dt}$; векторъ OF , какъ мы уже раньше сказали

изображаетъ функцію $M \frac{di_2}{dt}$; слѣдовательно, векторъ

суммы $M \frac{di_2}{dt} + L_1 \frac{di_1}{dt}$ будетъ діагональю параллелограмма $OFE'D'$, т. е. будетъ OE' . Векторъ противуэлектродвижущей силы

$$-M \frac{di_2}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt}$$

изобразится слѣдовательно векторомъ OE'' , составляющимъ съ OE' уголъ въ 180° , т. е. уголъ π .

Построивъ полную діаграмму, мы можемъ теперь установить зависимость между разными величинами первичной и вторичной цѣпей.

Изъ треугольника OAB имѣемъ.

$$\overline{OB^2} = \overline{OA^2} + \overline{AB^2}$$

$$AB = OA \cdot \operatorname{tg} BOA.$$

Слѣдовательно, обозначая черезъ φ_2 уголъ BOA , получимъ:

$$(2\pi n M)^2 I_1^2 = (r_2 + R_2)^2 I_2^2 + (2\pi n L_2)^2 I_2^2,$$

откуда

$$I_1 = \frac{I_2}{2\pi n M} \sqrt{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2} \dots (3)$$

Далѣ

$$2\pi n L_2 I_2 = (r_2 + R_2) I_2 \operatorname{tg} \varphi_2,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2\pi n L_2}{r_2 + R_2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (4)$$

Обозначимъ уголъ разности фазъ COE первичнаго тока и электродвижущей силы e_1 черезъ φ_1 , затѣмъ уголъ XOE'' векторовъ противуэлектродвижущей силы $e'_1 = -M \frac{di_2}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt}$ и тока i_2 черезъ θ_1 . Изъ діаграммы видно, что:

$$\begin{aligned} \angle COF &= \angle BOA = \varphi_2 \\ \angle E'OX' &= \angle E''OA = \theta_1. \end{aligned}$$

Далѣ:

$$\angle E'OX' + \angle EOE' + \angle EOC + \angle COF = \frac{\pi}{2}$$

или

$$\theta_1 + \angle EOE' + \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\angle EOE' = \frac{\pi}{2} - \theta_1 - \varphi_1 - \varphi_2.$$

Но уголъ между векторами электродвижущей силы e_1 и противуэлектродвижущей силы e'_1 равенъ $\angle EOE'' = \pi - \angle EOE'$, слѣдовательно:

$$\angle EOE'' = \frac{\pi}{2} + \theta_1 + \varphi_1 + \varphi_2.$$

Найдемъ сначала зависимость между первичною электродвижущею силою e_1 и первичнымъ токомъ i_1 . Для этого спроектируемъ діаграмму $OCDE$ на векторъ OC тока i_1 и на ось ему перпендикулярную. Замѣчая, что $\angle DEE' = \angle COF = \varphi_2$, мы получимъ, проектируя на OC :

$$OC = OE \cos \varphi_1 - ED \cos \varphi_2.$$

Но

$$OE = E_1, \quad ED = OF = 2\pi n M I_2, \quad OC = r_1 I_1.$$

Слѣдовательно:

$$r_1 I_1 = E_1 \cos \varphi_1 - 2\pi n M I_2 \cos \varphi_2 \dots (5)$$

или

$$E_1 \cos \varphi_1 = r_1 I_1 + 2\pi n M I_2 \cos \varphi_2 \dots (6)$$

Проектируя на ось перпендикулярную къ OC , замѣтимъ, что

$$DC = HC + HD,$$

$$HC = OE \sin \varphi_1$$

$$HD = ED \sin \varphi_2,$$

откуда

$$DC = OE \sin \varphi_1 + ED \sin \varphi_2.$$

Но

$$DC = OD' = 2\pi n L_1 I_1$$

$$ED = OF = 2\pi n M I_2$$

$$OE = E_1.$$

Такимъ образомъ получимъ:

$$2\pi n L_1 I_1 = E_1 \sin \varphi_1 + 2\pi n M I_2 \sin \varphi_2$$

или

$$E_1 \sin \varphi_1 = 2\pi n L_1 I_1 - 2\pi n M I_2 \sin \varphi_2 \dots (7)$$

Но уравненіе (3) намъ даетъ:

$$I_2 = I_1 \frac{2\pi n M}{\sqrt{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2}}$$

а изъ уравненія (4) имѣемъ

$$\sin \varphi_2 = \frac{2\pi n L_2}{\sqrt{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2}}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{r_2 + R_2}{\sqrt{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2}}.$$

Тогда уравненія (6) и (7) можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$E_1 \cos \varphi_1 = r_1 I_1 + \frac{(2\pi n M)^2 (r_2 + R_2)}{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2} I_1$$

$$E_1 \sin \varphi_1 = 2\pi n L_1 I_1 - \frac{(2\pi n M)^2 \cdot 2\pi n L_2}{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2} I_1,$$

откуда выводимъ:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2\pi n L_1 - \frac{(2\pi n M)^2 \cdot 2\pi n L_2}{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2}}{r_1 + \frac{(2\pi n M)^2 (r_2 + R_2)}{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2}} \quad (8)$$

$$E_1^2 = I_1^2 \left[\left\{ r_1 + \frac{(2\pi n M)^2 (r_2 + R_2)}{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2} \right\}^2 + \left\{ 2\pi n L_1 - \frac{(2\pi n M)^2 \cdot 2\pi n L_2}{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2} \right\}^2 \right] \quad (9)$$

что по упрощеніи приметъ видъ:

$$E_1^2 = I_1^2 \left\{ r_1^2 + (2\pi n L_1)^2 + \frac{(2\pi n M)^2 + 2(R_2 + r_2)r_1 - 2(2\pi n L_1)(2\pi n L_2)}{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2} \right\} \quad (9')$$

Полагая:

$$\frac{(2\pi n M)^2 \cdot 2\pi n L_2}{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2} = 2\pi n \lambda \quad (10)$$

$$\frac{(2\pi n M)^2 (r_2 + R_2)}{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2} = \rho \quad (11)$$

можемъ написать:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2\pi n (L_1 - \lambda)}{r_1 + \rho} \quad (12)$$

$$E_1^2 = I_1^2 \left\{ (r_1 + \rho)^2 + (2\pi n)^2 (L_1 - \lambda)^2 \right\}$$

или

$$I_1 = \frac{E_1}{\sqrt{(r_1 + \rho)^2 + (2\pi n)^2 (L_1 - \lambda)^2}} \quad (13)$$

Уравненія (12) и (13) показываютъ, что вліяніе вторичной цѣпи на первичную отражается какъ бы тѣмъ, что коэффициентъ самоиндукціи L_1 уменьшается на нѣкоторую величину λ , а сопротивление r_1 увеличивается на величину ρ . Уравненіе энергіи въ первичной цѣпи можетъ выразиться весьма просто, если введемъ эти фиктивные выраженія, а именно:

$$E_1 I_1 \cos \varphi_1 = I_1^2 (r_1 + \rho) \quad (14)$$

или переходя къ дѣйствующимъ значеніямъ:

$$E'_\partial I'_\partial \cos \varphi_1 = I_\partial^2 (r_1 + \rho) \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Отсюда видно, что ρ можетъ быть опредѣлено при посредствѣ уаттметра, амперметра и вольтметра:

$$r_1 + \rho = \frac{E'_\partial I'_\partial \cos \varphi_1}{I_\partial'^2} = \frac{W}{I_\partial'^2}.$$

Зная же $r_1 + \rho$, найдемъ λ изъ уравненія:

$$E'_\partial = I_\partial \sqrt{(r_1 + \rho)^2 + (2\pi n)^2 L_1 - \lambda)^2}.$$

Уравненія (14) или (15) показываютъ, что работа $E'_\partial I'_\partial \cos \varphi_1$ затрачиваемая въ первичной цѣпи, расходуется на двѣ части: на нагрѣваніе первичной обмотки $I_\partial'^2 r_1$ и на $I_\partial'^2 \rho$, которая есть ни что иное, какъ работа, затрачиваемая во вторичной цѣпи. Покажемъ это.

Энергія расходуемая во вторичной цѣпи будетъ:

$$I_\partial'^2 \cdot (r_2 + R_2).$$

Требуется доказать, что:

$$I_\partial'^2 \rho = I_\partial'^2 (r_2 + R_2)$$

или

$$I_1^2 \rho = I_2^2 (r_2 + R_2). \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Подставляя вмѣсто I_1 и ρ ихъ значенія изъ уравненій (3) и (11) получимъ:

$$\begin{aligned} I_1^2 \rho &= I_2^2 \frac{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2}{(2\pi n M)^2} \times \frac{(2\pi n M)^2 (r_2 + R_2)}{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n L_2)^2} = \\ &= I_2^2 (r_2 + R_2). \end{aligned}$$

Отсюда слѣдуетъ, что работу во вторичной цѣпи можно изслѣдовать по работѣ въ первичной, если извѣстны r_1 , ρ и $\cos \varphi_1$.

Изъ уравненія (16) мы видимъ, что:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\sqrt{r_2 + R_2}}{\sqrt{\rho}} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$I_1 = I_2 \frac{\sqrt{r_2 + R_2}}{\sqrt{\rho}}$$

Отношение

$$\frac{\sqrt{r_2 + R_2}}{\sqrt{\rho}}$$

мы назовемъ коэффициентомъ трансформации.

Изъ уравненія (17) заключаемъ, что ρ можетъ быть опредѣлено также амперметромъ путемъ измѣренія I_1 и I_2 .

Опредѣлимъ теперь противуэлектродвижущую силу e'_1 и разность фазъ между e'_1 и вторичнымъ токомъ i_2 . Векторъ этой электродвижущей силы OE'' , но возьмемъ векторъ ему равный OE' и спроектируемъ діаграмму $OE'D'$ на ox' и на ось перпендикулярную къ этой послѣдней. Мы получимъ тогда:

$$\begin{aligned} OE' \cos \theta_1 &= OD' \cos X'OD' \\ E'D' &= OE' \sin \theta_1 + OD' \sin X'OD' \end{aligned}$$

Но

$$\angle X'OD' = \angle BOA = \varphi_2.$$

Далѣе

$$OE' = E'_1, E'D' = OF = 2\pi n M I_2$$

и

$$OD' = 2\pi n L_1 I_1.$$

Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$E'_1 \cos \theta_1 = 2\pi n L_1 I_1 \cos \varphi_2 \quad . \quad . \quad (18)$$

$$E'_1 \sin \theta_1 = 2\pi n M I_2 - 2\pi n L_1 I_1 \sin \varphi_2 \quad . \quad (19)$$

Откуда:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{2\pi n (M I_2 - L_1 I_1 \sin \varphi_2)}{2\pi n L_1 I_1 \cos \varphi_2}$$

или

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{M I_2 - L_1 I_1 \sin \varphi_2}{L_1 I_1 \cos \varphi_2}.$$

Замѣняя I_2 его значеніемъ изъ уравненія (3) и замѣчая, что:

$$\cos \varphi_2 = \frac{R_2 + r_2}{\sqrt{(R_2 + r_2)^2 + (2\pi n L_2)^2}},$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{2\pi n L_2}{\sqrt{(R_2 + r_2)^2 + (2\pi n L_2)^2}},$$

найдемъ

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{2\pi n M^2 - 2\pi n L_1 L_2}{(R_2 + r_2) L_1}$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = 2\pi n \frac{M^2 - L_1 L_2}{(R_2 + r_2) L_1} \dots \dots \dots (20)$$

Если

$$M^2 = L_1 L_2,$$

то какъ видимъ

$$\operatorname{tg} \theta_1 = 0 \quad \text{и} \quad \theta_1 = 0,$$

то есть, контрѳазная электродвижущая сила e'_1 совпадаетъ по фазѣ со вторичнымъ токомъ i_2 . Изъ уравненій (18) и (19) выводимъ также:

$$E_1'^2 = (2\pi n)^2 \{ (L_1 I_1)^2 + (M I_2)^2 - 2 M L_1 I_1 I_2 \sin \varphi_2 \}$$

или замѣняя I_2 его значеніемъ изъ уравненія (3) и $\sin \varphi_2$ также его значеніемъ, приведеннымъ выше найдемъ:

$$E_1'^2 = (2\pi n)^2 I_1^2 \left\{ L_1^2 + (2\pi n M)^2 \frac{M^2 - 2 L_1 L_2}{(R_2 + r_2)^2 + (2\pi n L_2)^2} \right\} \dots (21)$$

При отсутствіи утечки, т. е. когда:

$$M^2 = L_1 L_2$$

получимъ:

$$E_1'^2 = (2\pi n)^2 I_1^2 \left\{ L_1^2 - (2\pi n M)^2 \frac{L_1 L_2}{(R_2 + r_2)^2 + (2\pi n L_2)^2} \right\}.$$

Если сравнить выраженіе (21) съ выраженіемъ (9') на стр. 191, то легко видѣть, что

$$E_1 = E'_1$$

когда

$$r_1 = 0.$$

Это видно также непосредственно изъ графика.

Найдемъ теперь выражение электродвижущей силы e_2 индуктируемой во вторичной цѣпи. Изъ уравненія (2) видно, что эта электродвижущая сила будетъ:

$$e_2 = -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} = (r_2 + R_2)i_2.$$

Слѣдовательно, она совпадаетъ по фазѣ съ токомъ i_2 и ея амплитуда будетъ:

$$E_2 = (R_2 + r_2)I_2$$

или принимая во вниманіе уравненіе (3)

$$E_2 = I_1 \frac{2\pi n M (R_2 + r_2)}{\sqrt{(R_2 + r_2)^2 + (2\pi n L_2)^2}} \dots (22)$$

Напряженіе у внѣшнихъ зажимовъ вторичной цѣпи будетъ:

$$E'_2 = R_2 I_2$$

или

$$E'_2 = I_1 \frac{2\pi n M R_2}{\sqrt{(R_2 + r_2)^2 + (2\pi n L_2)^2}} \dots (23)$$

63. Предположимъ теперь, что внѣшняя часть $a''kb''$ вторичной цѣпи обладаетъ коэффиціентомъ самоиндукціи λ_2 . Въ этомъ случаѣ графикъ будетъ отличаться отъ разобранныго только тѣмъ, что векторъ AB будетъ равенъ $2\pi n(L_2 + \lambda_2)$ и слѣдовательно формулы (3) и (4) примутъ видъ:

$$I_1 = \frac{I_2}{2\pi n M} \sqrt{(r_2 + R_2)^2 + (2\pi n)^2 (L_2 + \lambda_2)^2} \dots (24)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2\pi n (L_2 + \lambda_2)}{r_2 + R_2} \dots (25)$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что φ_2 увеличится, а слѣдовательно разность фазъ $\frac{\pi}{2} + \varphi_2$ между первичнымъ и вторичнымъ токомъ станетъ больше.

Амплитуды и разности фазъ E_1 , E'_1 , φ_1 , θ_1 электродвижущихъ силъ e_1 , e'_1 получаютъ изъ формулъ (8), (9), (9'), (20) и (21), если мы вмѣсто L_2 подставимъ $L_2 + \lambda_2$. Что же касается электродвижущей силы e'_2

у зажимовъ внешней цѣпи и полной электродвижущей силы e_2 , индуктируемой во вторичной цѣпи, то первая будетъ вида:

$$e'_2 = R_2 i_2 + \lambda_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Слѣдовательно амплитуда ея будетъ:

$$E'_2 = I_2 \sqrt{R_2^2 + (2\pi n \lambda_2)^2}$$

и она будетъ по фазѣ разниться отъ тока на уголъ ψ_2 , тангенсъ котораго опредѣлится отношеніемъ:

$$\operatorname{tg} \psi_2 = \frac{2\pi n \lambda_2}{R_2}.$$

Полная же электродвижущая сила e_2 , согласно уравненію

$$-M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} = \lambda_2 \frac{di_2}{dt} + (R_2 + r_2) i_2$$

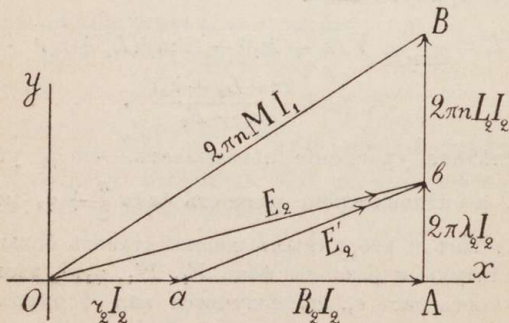
будетъ:

$$e_2 = \lambda_2 \frac{di_2}{dt} + (R_2 + r_2) i_2$$

или еще

$$e_2 = e'_2 + r_2 i_2,$$

откуда видимъ, что ея векторъ будетъ замыкающая двухъ векторовъ: E'_2 и $r_2 I_2$. На прилагаемомъ графикѣ приведено построение электродвижущихъ силъ e_2 и e'_2 .



Фиг. 95.

Векторъ ab представляетъ электродвижущую силу e'_2 , а векторъ ob полную электродвижущую силу e , индуктируемую во вторичной цѣпи.

Если во вторичной цѣпи будетъ включена емкость C и при томъ такая, чтобы

$$L_2 - \frac{1}{(2\pi n)^2 C} = 0,$$

то вставляя въ формулы (3), (4), (8), (9), (9'), (20) и (21)

вмѣсто L_2 выраженіе $L_2 - \frac{1}{(2\pi n)^2 C} = 0$, получимъ:

$$I_1 = \frac{I_2}{2\pi n M} (R_2 + r_2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0.$$

Это показываетъ, что токи I_1 и I_2 будутъ разниться по фазѣ на 90° , ибо разность ихъ фазъ $= \frac{\pi}{2} + \varphi_2$.

Далѣе:

$$E_1^2 = I_1^2 \left\{ r_1^2 + (2\pi n L_1)^2 + (2\pi n M)^2 \frac{(2\pi n M)^2 + 2(R_2 + r_2)r_1}{(r_2 + R_2)^2} \right\},$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{2\pi n M^2}{L_1(R_2 + r_2)}$$

$$E'_1{}^2 = (2\pi n)^2 I_1^2 \left\{ L_1^2 + M^2 \frac{(2\pi n M)^2}{(R_2 + r_2)^2} \right\}.$$

ГЛАВА VII.

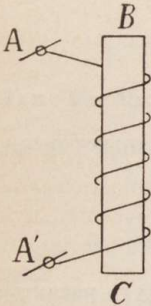
Явленія переменныхъ токовъ въ присутствіи металлическихъ массъ.

64. Случай немагнитныхъ металлическихъ массъ.
Предположимъ, что у насъ имѣется катушка съ сердечникомъ изъ сплошной металлической массы. Пусть у зажимовъ AA' катушки дѣйствуетъ переменная синусоидальная электродвижущая сила вида:

$$e = E \sin 2\pi nt.$$

Вслѣдствіе прохожденія по обмоткѣ AA' переменнаго тока въ стержнѣ BC будутъ индуцироваться

токи Фуко, которые будутъ взаимодействовать на индуктирующую ихъ цѣпь AA' точно такъ же, какъ замкнутая вторичная обмотка трансформатора. Чтобы опредѣлить это взаимодействие мы можемъ всѣ индук-



Фиг. 96.

тируемые токи Фуко замѣнить однимъ эквивалентнымъ, который произвелъ бы тоже самое дѣйствіе. Иначе говоря, мы можемъ замѣнить стержень BC нѣкоторою фиктивною вторичною обмоткою съ сопротивленіемъ ρ , съ коэффициентомъ самоиндукціи λ , причемъ можемъ предположить, что коэффициентъ взаимной индукціи между AA' и этою фиктивною вторичною обмоткою равенъ нѣкоторой величинѣ M . Такимъ образомъ изслѣдование явленій переменнаго тока въ обмоткѣ AA' сведется къ изслѣдованію трансформаторной цѣпи, состоящей изъ двухъ цѣпей — первичной AA' и вторичной фиктивной, опредѣленной выше.

Пусть r сопротивленіе обмотки AA' , L ея коэффициентъ самоиндукціи; тогда, зная сопротивленіе вторичной обмотки ρ , коэффициентъ самоиндукціи λ и коэффициентъ взаимной индукціи между AA' и вторичною обмоткою M , мы получимъ для силы тока I въ цѣпи AA' , согласно тому, что нами было выведено въ § 62 (уравн. 13):

$$I = \frac{E}{\sqrt{(r + \rho')^2 + (2\pi n)^2 (L - \lambda')^2}} \dots \dots (1)$$

гдѣ ρ' и λ' нѣкоторыя фиктивные величины сопротивленія и самоиндукціи, опредѣляемыя, согласно § 62 (ур. 10 и 11), выраженіями:

$$\rho' = \frac{(2\pi n M)^2 \cdot \rho}{\rho^2 + (2\pi n \lambda)^2} \dots \dots \dots (2)$$

$$2\pi n \lambda' = \frac{(2\pi n M)^2 \cdot 2\pi n \lambda}{\rho^2 + (2\pi n \lambda)^2} \dots \dots \dots (3)$$

Уголъ же запаздыванія фазы тока I по отношенію къ фазѣ электродвижущей силы E будетъ:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi n(L - \lambda')}{r + \rho'}.$$

Какъ мы уже знаемъ фиктивное сопротивление ρ' и фиктивную самоиндукцію λ' легко опредѣлить по уаттметру и амперметру.

Сопротивленіе ρ' мы назовемъ кажущимся сопротивленіемъ отъ токовъ Фуко, а самоиндукцію λ' — кажущеюся антисамоиндукцію отъ токовъ Фуко. Мы даемъ величинѣ λ' наименование антисамоиндукціи потому, что она уменьшаетъ дѣйствительную самоиндукцію L разсматриваемой цѣпи.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что изслѣдованіе въ цѣпи переменнаго тока въ присутствіи немагнитныхъ металлическихъ массъ сведется къ изслѣдованію нѣкоторой фиктивной цѣпи, отличающейся отъ данной тѣмъ, что ея омическое сопротивление больше на нѣкоторую фиктивную величину ρ' , а коэффициентъ самоиндукціи меньше на величину λ' . Обѣ эти величины могутъ быть опредѣлены экспериментальнымъ путемъ.

Формулы (2) и (3) показываютъ, что ρ' и λ' не зависятъ отъ тока I , если ρ и λ не зависятъ отъ этого послѣдняго. Иначе говоря для какихъ угодно значеній I_0 тока въ цѣпи AA' мы должны были бы получить для ρ' и λ' постоянныя величины. Однако, по мѣрѣ того, какъ I_0 , а слѣдовательно и I увеличивается, будетъ увеличиваться сопротивление ρ (т. е. сопротивление фиктивной вторичной обмотки, замыкающей стержень BC); это измѣненіе будетъ также зависѣть отъ толщины стержня (см. Steinmetz, Theorie und Berechnung der Wechselstromerscheinungen: Foucault oder Wirbelströme, глава XI). Точно также будетъ измѣняться и λ . Эти измѣненія объясняются тѣмъ, что токи Фуко будутъ взаимодействовать другъ на друга и, конечно, тѣмъ сильнѣе, чѣмъ эти токи будутъ интенсивнѣе, т. е. чѣмъ больше будетъ токъ I . Отсюда слѣ-

дуетъ, что ρ' и λ' также будутъ измѣняться въ зависимости отъ I_0 или отъ I , поэтому для полнаго изслѣдованія цѣпи AA' необходимо предварительно опредѣлить ρ' и λ' въ зависимости отъ I_0 , что легко сдѣлать при помощи уаттметра и амперметра (см. § 62).

Понятно, что потеря на токи Фуко есть ни что иное, какъ энергія расходуемая въ фиктивной вторичной цѣпи, слѣдовательно эта потеря будетъ (§ 62):

$$I_0^2 \rho'.$$

65. Случай магнитныхъ металлическихъ массъ.

а) Предположимъ сначала, что у насъ имѣется катушка съ желѣзнымъ сердечникомъ, состоящимъ изъ пучка проволокъ или тонкихъ листовъ, изолированныхъ другъ отъ друга для избѣжанія токовъ Фуко.

Пусть у зажимовъ катушки дѣйствуетъ электродвижущая сила: $e = E \sin 2\pi nt$, пусть r сопротивление обмотки, L ея коэффициентъ самоиндукціи. Когда черезъ обмотку будетъ проходить переменный токъ i , то онъ будетъ порождать въ катушкѣ соотвѣтствующій магнитный потокъ Φ , который не будетъ измѣняться пропорціонально току, но будетъ нѣкоторою болѣе сложною функціею отъ этой переменной.

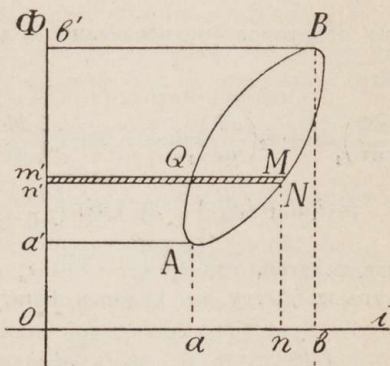
Примѣнимъ къ разсматриваемой цѣпи уравненіе элементарной работы. Мы получимъ:

$$e i dt = i^2 r dt + i d\Phi.$$

Когда i будетъ измѣняться отъ нѣкотораго значенія i_0 до i_n , а затѣмъ опять отъ i_n до i_0 , то Φ будетъ измѣняться, описывая нѣкоторую замкнутую кривую $AMBQA$, причемъ измѣненія по кривой AMB будутъ соотвѣтствовать нарастанію тока отъ i_0 до i_n , а измѣненія по кривой BQA — убыванію тока отъ i_n до i_0 .

Какъ извѣстно выраженіе $i d\Phi$ представляетъ собою элементарную работу намагничиванія или работу, потребную для измѣненія магнитнаго потока на величину $d\Phi$. Опредѣлимъ величину этой работы при измѣненіи тока отъ i_0 до i_n . Пусть ордината nN соотвѣтствуетъ току i , изображенному абсциссою on .

Ясно, что выражение $id\Phi$ изобразится площадью $MNm'n'$, ибо $m'n' = d\Phi$, а $n'N = on = i$. Отсюда слѣдуетъ, что, при измѣненіи тока отъ i_0 до i_n , т. е. отъ oa до ob , затраченная на измѣненіе магнитнаго потока отъ Φ_0 до Φ_n работа будетъ пропорціональна площади ограничиваемой кривою AMB и координатами $a'A$,



Фиг. 97.

$b'B$. Когда же токъ снова будетъ измѣняться отъ i_n до i_0 , то площадь $b'BQAa'$ изобразитъ работу, которая снова будетъ возвращена. Отсюда видимъ, что при циклическомъ процессѣ $AMBQA$ произойдетъ затрата нѣкоторой работы, которая будетъ пропорціональна площади $AMBQA$. Какъ извѣстно, эта затрата идетъ на гистерезисъ и выдѣляется въ видѣ тепла.

Выраженіе элементарной работы $id\Phi$ мы можемъ представить еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$i \frac{d\Phi}{di} di$$

ибо Φ есть функція отъ i .

Пусть

$$\left(\frac{d\Phi}{di}\right)_1, \left(\frac{d\Phi}{di}\right)_2, \dots, \left(\frac{d\Phi}{di}\right)_n$$

будутъ значенія функціи $\frac{d\Phi}{di}$ для послѣдовательныхъ значеній токовъ $i_1, i_2 \dots i_n$. Тогда полная работа при измѣненіи тока отъ i_1 до i_n будетъ вида:

$$i_1 \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_1 di + i_2 \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_2 di + \dots + i_n \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_n di.$$

Выберемъ нѣкоторое среднее значеніе для $\frac{d\Phi}{di}$ такое, чтобы:

$$\begin{aligned} i_1 \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_1 di + i_2 \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_2 di + \dots + i_n \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_n di = \\ = (i_1 di + i_2 di + \dots + i_n di) \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_k. \end{aligned}$$

Тогда предполагая, что $i_1, i_2 \dots i_n$ безконечно близки другъ къ другу, мы можемъ написать:

$$\int_{i_1}^{i_n} \frac{d\Phi}{di} \cdot i di = \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_k \int_{i_1}^{i_n} i di.$$

Точно также при обратномъ процессѣ, т. е. при измѣненіи тока отъ i_n до i_1 можемъ написать:

$$\int_{i_1}^{i_n} \frac{d\Phi}{di} i di = \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_h \int_{i_1}^{i_n} i di.$$

Слѣдовательно, на основаніи сказаннаго выше, работа затраченная на гистерезисъ будетъ вида:

$$\left\{ \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_k - \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_h \right\} \int_{i_1}^{i_n} i di.$$

Если теперь i будетъ измѣняться отъ $-I$ до $+I$, а затѣмъ обратно отъ $+I$ до $-I$, гдѣ I амплитуда

переменнаго тока, то работа на гистерезисъ за полный періодъ будетъ:

$$\left\{ \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_k - \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_h \right\} \int_{-I}^I i di = \\ = \left\{ \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_k - \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_h \right\} I^2 = 2 \left\{ \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_k - \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_h \right\} I_{\partial}^2.$$

Итакъ мы можемъ написать, что полная работа расходуемая за полный періодъ измѣненія тока на измѣненія въ катушкѣ магнитнаго потока, т. е. $\int_{-I}^I i d\Phi$ рав-

няется предъидущему выраженію, а именно:

$$\int_{-I}^I i d\Phi = 2 \left\{ \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_k - \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_h \right\} I_{\partial}^2.$$

Слѣдовательно интегрируя уравненіе элементарной работы, можемъ написать по аналогіи съ тѣмъ, что мы имѣемъ, когда въ цѣли нѣтъ желѣзныхъ массъ:

$$E_{\partial} I_{\partial} \cos \varphi = I_{\partial}^2 r + 2 \left\{ \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_k - \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_h \right\} I_{\partial}^2,$$

гдѣ $\cos \varphi$ будетъ имѣть значеніе нѣкотораго коэффиціента. Изъ предъидущаго мы видимъ, что выраженіе

$$2 \left\{ \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_k - \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_h \right\}$$

играетъ роль нѣкотораго сопротивленія, но сопротивленія зависящаго отъ амплитуды или что тоже отъ дѣйствующей силы тока, ибо мы положили:

$$\int_{-I}^I \frac{d\Phi}{di} i di = \left(\frac{d\Phi}{di} \right)_k \int_{-I}^I i di.$$

То же можно сказать и относительно $\left(\frac{d\Phi}{di} \right)_h$ (соотвѣтственно процессу по кривой BQA). Конечно, эти

среднія величины будутъ зависѣть также отъ вида самой функціи $\frac{a\Phi}{di}$; если же эта функція будетъ одного и того же вида, то ясно, что предъидущія среднія величины будутъ только зависѣть отъ амплитуды тока i .

Положимъ слѣдовательно:

$$2\left\{\left(\frac{d\Phi}{di}\right)_k - \left(\frac{d\Phi}{di}\right)_h\right\} = \rho'',$$

гдѣ ρ'' будетъ зависѣть для даннаго желѣза отъ амплитуды I тока, или, что тоже, отъ дѣйствующей силы тока I_θ .

Тогда уравненіе энергіи приметъ видъ:

$$E_\theta I_\theta \cos \varphi = I_\theta^2 r + I_\theta^2 \rho''$$

или

$$E_\theta I_\theta \cos \varphi = I_\theta^2 (r + \rho''),$$

откуда

$$E_\theta \cos \varphi = I_\theta (r + \rho'')$$

и

$$I_\theta = \frac{E_\theta \cos \varphi}{r + \rho''}.$$

Переходя же къ амплитудамъ получимъ:

$$I = \frac{E \cos \varphi}{r + \rho''}.$$

Такое же выраженіе мы получимъ для цѣпи, сопротивленіе которой $r + \rho''$ и коэффициентъ самоиндукціи которой L таковъ, что:

$$\cos \varphi = \frac{2\pi n L}{\sqrt{(r + \rho'')^2 + (2\pi n L)^2}}.$$

Посмотримъ, какое значеніе будетъ имѣть коэффициентъ самоиндукціи L для разбираемой нами цѣпи.

Для фиктивной цѣпи, приведенной выше мы будемъ имѣть уравненіе элементарной работы

$$e i dt = (r + \rho'') i^2 dt + L i di,$$

откуда:

$$e = (r + \rho'') i + L \frac{di}{dt} \dots \dots \dots (1)$$

Для разбираемой же нами цепи мы будемъ имѣть:

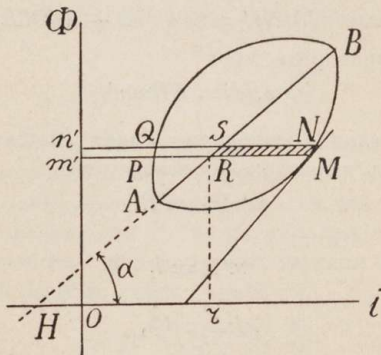
$$eidt = i^2 r dt + id\Phi,$$

откуда:

$$e = ir + \frac{d\Phi}{dt} = ir + \frac{d\Phi}{di} \frac{di}{dt} \dots \dots \dots (2)$$

По аналогіи съ предъидущимъ уравненіемъ за коэффициентъ самоиндукціи намъ слѣдуетъ считать выраженіе $\frac{d\Phi}{di}$, которое есть функція отъ i . Очевидно, что сила тока будетъ сложною періодическою функціею, ибо выраженіе $\frac{d\Phi}{di} \frac{di}{dt}$ есть сложная періодическая функція отъ i .

Сравнивая фиктивное уравненіе (1) съ уравненіемъ (2) мы видимъ, что въ выраженіе $\frac{d\Phi}{di} \frac{di}{dt}$ должно входить выраженіе, эквивалентное произведенію $r''i$. Постараемся вывести внаружу это послѣднее. Для



Фиг. 98.

этого обратимся къ кривой цикла намагничиванія. Проведемъ среднюю прямую AB . По уравненію (2) коэффициентомъ самоиндукціи мы приняли выраженіе $\frac{d\Phi}{di}$; легко видѣть, что это есть ни что иное какъ тан-

генсъ угла касательной въ любой точкѣ кривой цикла съ осью абсциссъ, тангенсъ же прямой AB съ осью абсциссъ представить собою средній коэффициентъ самоиндукціи. Если бы намагничиваніе происходило по прямолинейному пути ABA , то, очевидно, не было бы затраты энергіи на гистерезисъ и тогда бы уравненіе элементарной работы было бы:

$$e idt = i^2 r dt + \operatorname{tg} \alpha \cdot i di.$$

Ко второй части уравненія необходимо прибавить добавочный членъ, выражающій затрату на магнитное треніе (результатомъ котораго является потеря на гистерезисъ за полный ходъ намагничиванія). При измѣненіи тока на di этотъ добавочный членъ изобразится площадью $SRMN$. Дѣйствительно, это какъ разъ то, что нужно добавить къ $\operatorname{tg} \alpha \cdot i di$, чтобы получить полную работу намагничиванія, соотвѣтствующую измѣненію тока на di и равную площади $m'MNn'$ (какъ это мы уже показали раньше); иначе говоря,

$$\text{плоч. } m'MNn' = \operatorname{tg} \alpha \cdot i di + SNMR,$$

что легко провѣрить, ибо:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot i di = SRm'n'.$$

Дѣйствительно, безконечно малая площадь $SRm'n'$ можетъ быть выражена произведеніемъ:

$$m'n' \times m'R.$$

Но

$$m'R = i,$$

а

$$m'n' = d\Phi,$$

и

$$\Phi = om' = Rr = (OH + or) \operatorname{tg} \alpha = (OH + i) \operatorname{tg} \alpha,$$

откуда

$$d\Phi = \operatorname{tg} \alpha \cdot di.$$

Такимъ образомъ получимъ:

$$m'n' = d\Phi = \operatorname{tg} \alpha \cdot di,$$

а площадь $SRm'n'$ будетъ $= i \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot di$.

Итакъ исправленное уравненіе элементарной работы будетъ:

$$eidt = i^2 r dt + \operatorname{tg} \alpha \, idi + (SNMR).$$

При обратномъ процессѣ, т. е. когда намагничиваніе пойдетъ по кривой $BQPA$ добавочная площадь $SRPQ$, напримѣръ, будетъ изображать ту долю энергіи, которая не будетъ возвращена, а удержится опять на магнитное треніе; въ суммѣ, очевидно, при полномъ циклѣ потеряется энергія, изображаемая площадью $AMBQA$. Но элементарная площадь $RSMN$ можетъ быть замѣнена выраженіемъ $\rho'' \cdot i^2 dt$, гдѣ ρ'' будетъ подобрано такъ, чтобы интеграль

$$\int \rho'' i^2 dt = \rho'' \int i^2 dt,$$

какъ разъ равнялся площади $AMBQA$, т. е. выраженію $\rho'' \cdot I^2_{\partial}$, какъ это мы показали выше. Итакъ уравненіе элементарной работы въ дополненномъ видѣ будетъ:

$$eidt = i^2 r dt + \operatorname{tg} \alpha \, idi + \rho'' i^2 dt,$$

откуда:

$$e = i(r + \rho'') + \operatorname{tg} \alpha \, \frac{di}{dt}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если мы возьмемъ для коэффиціента самоиндукціи $\operatorname{tg} \alpha$ да кромѣ того къ сопротивленію r разбираемой цѣпи прибавимъ нѣкоторое фиктивное сопротивление ρ'' , то по отношенію къ электрической работѣ, затрачиваемой въ цѣпи, мы можемъ для уравненія тока взять уравненіе:

$$e = i(r + \rho'') + \operatorname{tg} \alpha \, \frac{di}{dt} \quad (3)$$

или

$$e = i(r + \rho'') + L \frac{di}{dt} \quad (4)$$

Тогда мы получимъ для $\cos \varphi$:

$$\cos \varphi = \frac{2\pi nL}{\sqrt{(r + \rho'')^2 + (2\pi nL)^2}} \quad (5)$$

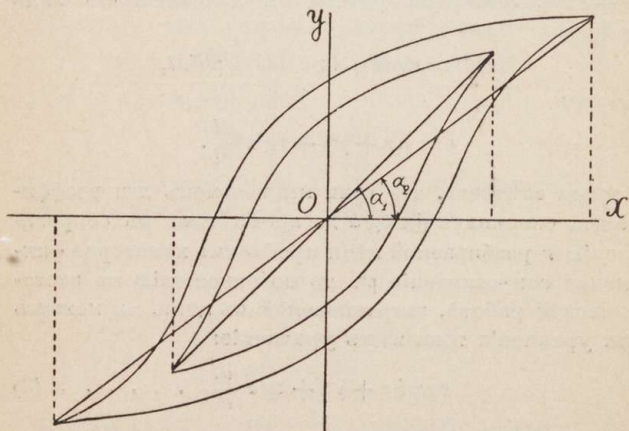
а для тока получимъ:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(r + \rho'')^2 + (2\pi nL)^2}} \dots \dots (6)$$

Конечно, это не будетъ истинное уравненіе тока, ибо этотъ послѣдній изобразится сложною функціею, но предъидущія наши разсужденія сводятся къ замѣнѣ дѣйствительнаго тока нѣкоторымъ простымъ синусоидальнымъ, производящимъ ту же работу, какъ и дѣйствительный токъ. Мы скажемъ, что данный токъ мы замѣнили эквивалентной синусоидой, опредѣляемой дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$e = i(r + \rho'') + L \frac{di}{dt} *).$$

Для того, чтобы опредѣлить эту эквивалентную синусоиду, необходимо опредѣлить ρ'' и $L = \operatorname{tg} \alpha$, что



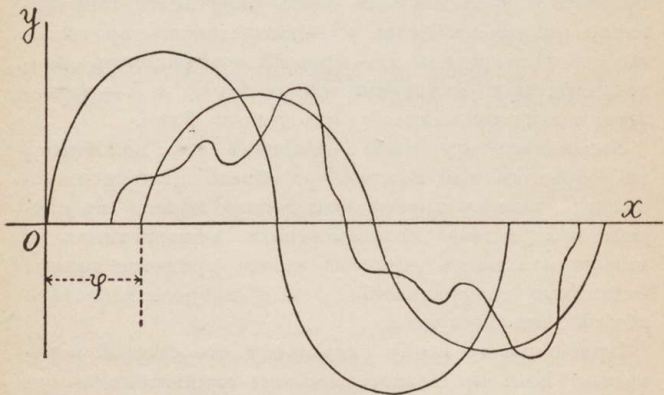
Фиг. 99.

не трудно сдѣлать при посредствѣ ваттметра и ампер-

*) Steinmetz также вводитъ эквивалентную синусоиду, но приходитъ къ этому другимъ путемъ.

метра, какъ это нами будетъ показано въ отдѣлѣ объ электрическихъ измѣреніяхъ. Величину ρ'' мы назовемъ кажущимся сопротивленіемъ отъ гистерезиса или коэффициентомъ магнитнаго тренія, а величину L среднимъ коэффициентомъ самоиндукціи. Какъ ρ'' , такъ и L будутъ зависѣть отъ амплитуды эквивалентнаго синусоидальнаго тока; это показано на фиг. 99. Дѣйствительно въ зависимости отъ амплитудъ тока мѣняется какъ площадь цикла, такъ и $\operatorname{tg} \alpha$ средней прямой.

На фиг. 100 представлены синусоидальная кривая электродвижущей силы и относительное положеніе



Фиг. 100.

дѣйствительной кривой тока и его эквивалентной синусоиды.

Эта синусоида опредѣляется выше приведеннымъ нами дифференціальнымъ уравненіемъ или же уравненіями (5) и (6), гдѣ I , ρ'' и $\cos \varphi$ предварительно измѣряются амперметромъ и уаттметромъ.

б) Предположимъ теперь, что сердечникъ катушки состоитъ изъ сплошной желѣзной массы. Въ такомъ случаѣ намъ придется считаться какъ съ явленіями гистерезиса, такъ и съ явленіями токовъ Фуко. При-

мѣняя параллельно разсужденія § 65 и части а) настоящего параграфа мы найдемъ, что по отношенію къ электрической работѣ данный переменный токъ можно выразить эквивалентною синусоидою, амплитуда которой будетъ вида:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(r + \rho' + \rho'')^2 + (2\pi n)^2(L - \lambda)^2}}, \dots (1)$$

а уголъ разности фазъ этой синусоиды и данной электродвижущей силы опредѣлится отношеніемъ:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(2\pi n)^2(L - \lambda)}{r + \rho' + \rho''} \dots (2)$$

причемъ ρ' представляетъ собою кажущееся сопротивление отъ токовъ Фуко, ρ'' — кажущееся сопротивление отъ гистерезиса, L — средній коэффициентъ самоиндукціи при отсутствіи токовъ Фуко и λ — кажущуюся антисамоиндукцію отъ токовъ Фуко.

Заканчивая эту главу, замѣтимъ, что подобнымъ же образомъ мы можемъ разобрать явленія переменнаго тока въ трансформаторныхъ цѣпяхъ въ случаѣ присутствія металлическихъ немагнитныхъ и магнитныхъ массъ, причемъ также придется ввести фиктивные сопротивления ρ' и ρ'' и средній коэффициентъ взаимной индукціи.

Прибавимъ ко всему сказанному, что данный переменный токъ мы можемъ замѣнять эквивалентною синусоидою только для изслѣдованія электрической работы. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда придется считаться съ явленіями, вызываемыми гармониками высшаго порядка (напримѣръ, въ явленіяхъ резонанса) необходимо будетъ разсматривать сложную гармоническую функцію или какъ это мы покажемъ ниже, всѣ составныя гармоники даннаго тока.

ГЛАВА VIII.

66. Сложные гармоническіе переменные токи. Мы уже замѣтили въ началѣ нашего курса, что какая угодно періодическая функція (§ 4) можетъ быть пред-

ставлена въ видѣ суммы простыхъ синусоидальныхъ функций. Фурье показалъ, что всякую періодическую функцію можно представить въ видѣ:

$$f(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \\ + A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots + A_n \sin(n\omega t + \varphi_n),$$

гдѣ n какое угодно цѣлое число, а $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ положительные или отрицательные коэффициенты.

Замѣчая, что:

$$\sin(n\omega t + \varphi_n) = \sin \varphi_n \cos n\omega t + \cos \varphi_n \sin n\omega t$$

и что $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ не зависятъ отъ t , а слѣдовательно могутъ быть разсматриваемы, какъ постоянныя величины, мы можемъ написать:

$$\sin(n\omega t + \varphi_n) = B_n \sin n\omega t + B'_n \cos n\omega t.$$

Такимъ образомъ функцію $f(t)$ можно представить въ видѣ:

$$f(t) = A_1 B_1 \sin \omega t + A_2 B_2 \sin 2\omega t + A_3 B_3 \sin 3\omega t + \\ + \dots + A_n B_n \sin n\omega t + \\ + A_1 B'_1 \cos \omega t + A_2 B'_2 \cos 2\omega t + A_3 B'_3 \cos 3\omega t + \\ + \dots + A_n B'_n \cos n\omega t$$

или вообще:

$$\left. \begin{aligned} f(t) = & k_1 \sin \omega t + k_2 \sin 2\omega t + k_3 \sin 3\omega t + \\ & + \dots + k_n \sin n\omega t + \\ & + k'_1 \cos \omega t + k'_2 \cos 2\omega t + k'_3 \cos 3\omega t + \\ & + \dots + k'_n \cos n\omega t \end{aligned} \right\} \cdot (1)$$

Функція

$$y_1 = k_1 \sin \omega t + k'_1 \cos \omega t$$

называется основною гармоникою; всѣ же остальные высшими гармониками или гармониками второго, третьяго и т. д. порядковъ, а также четными и нечетными гармониками. Полный періодъ основной гармоники опредѣляется равенствомъ:

$$\omega t = 2\pi,$$

откуда

$$t = T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Если n число полных періодовъ въ секунду, то

$$T = \frac{1}{n},$$

а слѣдовательно

$$\omega = 2\pi n.$$

67. Теорема I. Полный періодъ сложной періодической функціи равенъ полному періоду основной гармоникѣ.

Мы должны доказать, что для моментовъ t и $T + t$ функція $f(t)$ будетъ имѣть одно и то же значеніе и по величинѣ и по знаку.

Подставимъ въ выраженіе функціи $f(t)$ (уравн. 1) вмѣсто t значеніе $T + t$ или $\frac{2\pi}{\omega} + t$; мы тогда получимъ:

$$\begin{aligned} f(T + t) = & k_1 \sin(2\pi + \omega t) + k_2 \sin(2 \times 2\pi + 2\omega t) + \\ & + k_3 \sin(3 \times 2\pi + 3\omega t) + \dots + k_n \sin(n \times 2\pi + n\omega t) + \\ & + k'_1 \cos(2\pi + \omega t) + k'_2 \cos(2 \times 2\pi + 2\omega t) + \\ & + k'_3 \cos(3 \times 2\pi + 3\omega t) + \dots + k'_n \cos(n \times 2\pi + n\omega t). \end{aligned}$$

Замѣчая, что:

$$\begin{aligned} \sin(n \times 2\pi + n\omega t) &= \sin n\omega t \\ \cos(n \times 2\pi + n\omega t) &= \cos n\omega t \end{aligned}$$

закключаемъ, что:

$$f(T + t) = f(t).$$

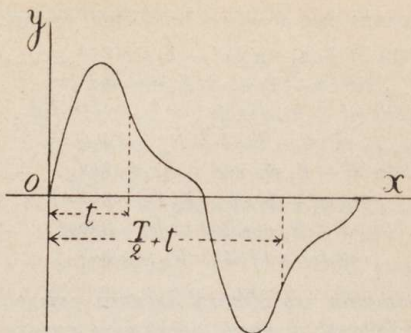
68. Теорема II. Всякая симметричная періодическая функція выражается суммой только нечетныхъ гармоникъ.

Требуется доказать, что всякая симметричная періодическая функція будетъ вида:

$$\begin{aligned} f(t) = & k_1 \sin \omega t + k_3 \sin 3\omega t + \dots + k_{2n \pm 1} \sin(2n \pm 1)\omega t + \\ & + k'_1 \cos \omega t + k'_3 \cos 3\omega t + \dots + k'_{2n \pm 1} \cos(2n \pm 1)\omega t. \end{aligned}$$

Если функція симметрична, то для значеній переменной t равныхъ t и $\frac{T}{2} + t$ мы должны получить:

$$f\left(\frac{T}{2} + t\right) = -f(t).$$



Фиг. 101.

Вставляя въ выражение (1) функции $f(t)$ вмѣсто t значеніе $\frac{T}{2} + t$ или $\frac{\pi}{\omega} + t$, получимъ:

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{T}{2} + t\right) &= k_1 \sin(\pi + \omega t) + k_2 \sin(2\pi + 2\omega t) + \dots \\
 &\dots + k_{n-1} \sin[(n-1)\pi + (n-1)\omega t] + \\
 &\quad + k_n \sin(n\pi + n\omega t) + \\
 &\quad + k'_1 \cos(\pi + \omega t) + k'_2 \cos(2\pi + 2\omega t) + \dots \\
 &\dots + k'_{n-1} \cos[(n-1)\pi + (n-1)\omega t] + \\
 &\quad + k'_n \cos(n\pi + n\omega t),
 \end{aligned}$$

гдѣ мы предположили, что n четное число, а $n-1$ нечетное.

По упрощеніи найдемъ:

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{T}{2} + t\right) &= -k_1 \sin \omega t + k_2 \sin 2\omega t - k_3 \sin 3\omega t + \dots \\
 &\dots - k_{n-1} \sin(n-1)\omega t + k_n \sin n\omega t - \\
 &\quad - k'_1 \cos \omega t + k'_2 \cos 2\omega t - k'_3 \cos 3\omega t + \dots \\
 &\dots - k'_{n-1} \cos(n-1)\omega t + k'_n \cos n\omega t.
 \end{aligned}$$

Мы должны имѣть:

$$f\left(\frac{T}{2} + t\right) = -f(t),$$

каково бы ни было значеніе для t .

Слѣдовательно мы должны получить тождество:

$$\begin{aligned}
 & -k_1 \sin \omega t + k_2 \sin 2\omega t - k_3 \sin 3\omega t + \dots - \\
 & -k_{n-1} \sin (n-1) \omega t + k_n \sin n\omega t - \\
 & -k'_1 \cos \omega t + k'_2 \cos 2\omega t - k'_3 \cos 3\omega t + \dots - \\
 & -k'_{n-1} \cos (n-1) \omega t + k'_n \cos n\omega t \equiv \\
 \equiv & -k_1 \sin \omega t - k_2 \sin 2\omega t - k_3 \sin 3\omega t \dots - \\
 & -k_{n-1} \sin (n-1) \omega t - k_n \sin n\omega t - \\
 & -k'_1 \cos \omega t - k'_2 \cos 2\omega t - k'_3 \cos 3\omega t \dots - \\
 & -k'_{n-1} \cos (n-1) \omega t - k'_n \cos n\omega t.
 \end{aligned}$$

По сокращеніи въ обѣихъ частяхъ тождества одинаковыхъ членовъ, у насъ останутся только четныя гармоникки, приче́мъ въ первой части всѣ онѣ будутъ со знакомъ (+), а во второй со знакомъ (—). Слѣдовательно тождество можетъ имѣть мѣсто только тогда, когда:

$$\begin{array}{c}
 k_2, k_4, k_6 \dots k_n \\
 k'_2, k'_4, k'_6 \dots k'_n
 \end{array}$$

будутъ равны нулю.

Отсюда слѣдуетъ, что симметричная періодическая функція будетъ вида:

$$\begin{aligned}
 f(t) = & k_1 \sin \omega t + k_3 \sin 3\omega t + \dots + k_{2n+1} \sin (2n+1)\omega t + \\
 & + k'_1 \cos \omega t + k'_3 \cos 3\omega t + \dots + k'_{2n+1} \cos (2n+1)\omega t
 \end{aligned}$$

На практикѣ приходится имѣть дѣло большею частью съ симметричными періодическими функціями.

69. Дѣйствующая сила несинусоидальнаго тока.

Мы уже знаемъ, что квадратъ дѣйствующей силы тока (§ 13) опредѣляется выраженіемъ:

$$X^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt,$$

гдѣ T полный періодъ функціи i . Въ данномъ случаѣ сила тока i будетъ вида:

$$i = \sum_{k=1}^{k=n} I_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{k=n} I'_k \cos k\omega t.$$

Слѣдовательно i^2 будетъ вида:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{k=n} I_k^2 \sin^2 k\omega t + \sum_{k=1}^{k=n} I_k^2 \cos^2 k\omega t + \\
 & + 2 \sum_{\substack{k'=1 \\ k''=1}}^{k'=n \\ k''=n} I_{k'} I_{k''} \sin k'\omega t \sin k''\omega t + \\
 & + 2 \sum_{\substack{k'=1 \\ k''=1}}^{k'=n \\ k''=n} I_{k'} I_{k''} \cos k'\omega t \cos k''\omega t + \\
 & + 2 \sum_{\substack{k'=1 \\ k''=1}}^{k'=n \\ k''=n} I_{k'} I_{k''} \sin k'\omega t \cos k''\omega t
 \end{aligned}$$

Изъ этого слѣдуетъ, что въ выраженіе квадрата дѣйствующей силы войдутъ интегралы:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{T} \int_0^T I_k^2 \sin^2 k\omega t dt, \quad \frac{1}{T} \int_0^T I_k^2 \cos^2 k\omega t dt, \\
 & \frac{1}{T} \int_0^T 2 I_{k'} I_{k''} \sin k'\omega t \sin k''\omega t dt, \\
 & \frac{1}{T} \int_0^T 2 I_{k'} I_{k''} \cos k'\omega t \cos k''\omega t dt, \\
 & \frac{1}{T} \int_0^T 2 I_{k'} I_{k''} \sin k'\omega t \cos k''\omega t dt.
 \end{aligned}$$

Опредѣлимъ сначала первые два интеграла. Періодъ функции $I_k \sin k\omega t$ будетъ $\frac{T}{k}$; слѣдовательно мы можемъ написать (см. § 13)

$$\int_0^T I_k^2 \sin^2 k\omega t \, dt = k \int_0^{\frac{T}{k}} I_k^2 \sin^2 k\omega t \, dt.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_k^2 \sin^2 k\omega t \, dt = \frac{1}{\left(\frac{T}{k}\right)} \int_0^{\frac{T}{k}} I_k^2 \sin^2 k\omega t \, dt,$$

т. е. это будетъ средняя квадратовъ простой періодической функции, періодъ которой равенъ $\frac{T}{k}$. Но мы уже знаемъ, что средній квадратъ такой функции будетъ:

$$\frac{I_k^2}{2}$$

Точно также найдемъ, что:

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_k^2 \cos^2 k\omega t \, dt = \frac{I_k^2}{2}.$$

Перейдемъ теперь къ интегралу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T 2I_{k'} I_{k''} \sin k'\omega t \sin k''\omega t \, dt &= \\ &= 2I_{k'} I_{k''} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \sin k'\omega t \sin k''\omega t \, dt. \end{aligned}$$

Покажемъ, что:

$$\int_0^T \sin k' \omega t \sin k'' \omega t dt = 0.$$

Воспользуемся формулою:

$$\sin k' \omega t \cdot \sin k'' \omega t = \frac{1}{2} \left\{ \cos (k' - k'') \omega t - \cos (k' + k'') \omega t \right\}$$

При посредствѣ этой формулы предыдущій интегралъ разложится на два:

$$\frac{1}{2} \int_0^T \cos (k' - k'') \omega t dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos (k' + k'') \omega t dt.$$

Періодъ первой функции будетъ $\frac{T}{k' - k''}$, а второй

$\frac{T}{k' + k''}$. Но:

$$\int_0^{\frac{T}{k' - k''}} \cos (k' - k'') \omega t dt = 0$$

$$\int_0^{\frac{T}{k' + k''}} \cos (k' + k'') \omega t dt = 0,$$

а такъ какъ

$$\int_0^T \cos (k' - k'') \omega t dt = (k' - k'') \int_0^{\frac{T}{k' - k''}} \cos (k' - k'') \omega t dt,$$

$$\int_0^T \cos (k' + k'') \omega t dt = (k' + k'') \int_0^{\frac{T}{k' + k''}} \cos (k' + k'') \omega t dt,$$

то ясно, что эти интегралы будутъ также равны нулю, а слѣдовательно и выраженіе

$$\int_0^T \sin k' \omega t \sin k'' \omega t dt = 0.$$

Такимъ образомъ:

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2 I_{k'} I_{k''} \sin k' \omega t \sin k'' \omega t dt = 0.$$

Такимъ же образомъ докажемъ, что:

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2 I_{k'} I_{k''} \cos k' \omega t \cos k'' \omega t dt = 0.$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2 I_{k'} I_{k''} \sin k' \omega t \cos k'' \omega t dt = 0,$$

а слѣдовательно $\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt$ сведется къ суммѣ:

$$X^2 = \frac{1}{2} (I_1^2 + I_1'^2 + I_2^2 + I_2'^2 + \dots + I_n^2 + I_n'^2).$$

Если силу тока i представить въ видѣ:

$$i = J_1 \sin (\omega t + \varphi_1) + J_2 \sin (2\omega t + \varphi_2) + \dots + J_n \sin (n\omega t + \varphi_n),$$

то ясно, что:

$$\begin{aligned} I_1 &= J_1 \cos \varphi_1 \\ I_1' &= J_1 \sin \varphi_1 \\ &\dots \dots \dots \\ I_n &= J_n \cos \varphi_n \\ I_n' &= J_n \sin \varphi_n. \end{aligned}$$

Слѣдовательно:

$$X^2 = I_0^2 = \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 + \dots + J_n^2).$$

Точно также докажемъ, что если у насъ имѣется сложная періодическая электродвижущая сила вида:

$$e = E_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + E_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + E_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

то:

$$E_0^2 = \frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2 + \dots + E_n^2),$$

каковы бы ни были $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$.

70. Резюмируя все сказанное выше, мы видимъ, что несимметричный періодическій токъ и несимметричная электродвижущая сила могутъ быть представлены въ видѣ:

$$\begin{aligned} i &= I_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + I_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots \\ &\quad \dots + I_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \\ e &= E_1 \sin(\omega t + \psi_1) + E_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots \\ &\quad \dots + E_n \sin(n\omega t + \psi_n), \end{aligned}$$

гдѣ n какое угодно цѣлое число.

Симметричный же періодическій токъ и симметричная электродвижущая сила будутъ вида:

$$\begin{aligned} i &= I_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + I_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots \\ &\quad \dots + I_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \\ e &= E_1 \sin(\omega t + \psi_1) + E_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots \\ &\quad \dots + E_n \sin(n\omega t + \psi_n), \end{aligned}$$

гдѣ n какое угодно нечетное число. Если же выбрать за начало время моментъ, когда первая гармоника равна нулю, то будемъ имѣть выраженія:

$$\begin{aligned} i &= I_1 \sin \omega t + I_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots \\ &\quad \dots + I_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \\ e &= E_1 \sin \omega t + E_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots \\ &\quad \dots + E_n \sin(n\omega t + \psi_n). \end{aligned}$$

71. Дѣйствіе сложной періодической электродвижущей силы въ цѣпи съ самоиндукціею и емкостью. Предположимъ, что у насъ имѣется электродвижущая сила

$$\begin{aligned} e &= E_1 \sin \omega t + E_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots \\ &\quad \dots + E_n \sin(n\omega t + \psi_n) \end{aligned}$$

дѣйствующая въ цѣпи, сопротивление которой равно R самоиндукція L и емкость C .

Уравнение элементарной работы (см. § 24) будетъ:

$$e idt = Ri^2 dt + L i di + \frac{1}{C} idt \int_0^t idt,$$

откуда:

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt \dots \dots (1)$$

Пусть i будетъ вида:

$$\begin{aligned} i &= I_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + I_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots \\ &\dots + I_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = \\ &\sum_{k=1}^{k=n} I_k \sin(k\omega t + \varphi_k). \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \sum_{k=1}^{k=n} k\omega I_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \\ \int_0^t idt &= - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k\omega} I_k \sin(k\omega t + \varphi_k). \end{aligned}$$

Вставляя эти выраженія въ уравненіе (1), получимъ:

$$\begin{aligned} e &= R \sum_{k=1}^{k=n} I_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \\ &+ \sum_{k=1}^{k=n} \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \right) I_k \cos(\omega t + \varphi_k). \end{aligned}$$

Такъ какъ это уравненіе должно имѣть мѣсто для всякаго значенія t , и такъ какъ

$$e = E_1 \sin \omega t + E_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + E_n \sin(n\omega t + \psi_n),$$

то мы должны имѣть рядъ равенствъ:

$$\begin{aligned}
 E_1 \sin \omega t &= I_1 R \sin (\omega t + \varphi_1) + \\
 &+ I_1 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos (\omega t + \varphi_1) \\
 E_2 \sin (2\omega t + \psi_2) &= I_2 R \sin (2\omega t + \varphi_2) + \\
 &+ I_2 \left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C} \right) \cos (2\omega t + \varphi_2) \\
 &\dots \dots \dots \\
 E_n \sin (n\omega t + \psi_n) &= I_n R \sin (n\omega t + \varphi_n) + \\
 &+ I_n \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C} \right) \cos (n\omega t + \varphi_n),
 \end{aligned}$$

причемъ очевидно n' должно равняться n .

Полагая сначала $\omega t = 0$, а затѣмъ $\omega t = \frac{\pi}{2}$, $2\omega t = \frac{\pi}{2}$, $\dots$, $n\omega t = \frac{\pi}{2}$, получимъ рядъ уравненій, которыя намъ опредѣлятъ $I_1, I_2, \dots, I_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Эти уравненія будутъ вида:

$$E_k \sin \psi_k = I_k R \sin \varphi_k + I_k \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \right) \cos \varphi_k$$

$$E_k \cos \psi_k = I_k R \cos \varphi_k - I_k \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \right) \sin \varphi_k,$$

откуда выводимъ:

$$E_k^2 = I_k^2 \left\{ R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \right)^2 \right\}$$

$$I_k = \frac{E_k}{\sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \right)^2}} \dots \dots (3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{R \operatorname{tg} \psi_k - \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \right)}{R + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \right) \operatorname{tg} \psi_k} \dots \dots (4)$$

Слѣдовательно сила тока будетъ вида:

$$i = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{E_k}{\sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}} \cdot \sin(k\omega t + \varphi_k),$$

гдѣ φ_k опредѣляется уравненіемъ (4).

Дѣйствующая сила тока будетъ равна:

$$I_{\partial} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} \frac{E_k^2}{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}.$$

72. Резонансъ напряженій. Обратимся къ фиг. 34 § 24 и предположимъ, что между зажимами aa' дѣйствуетъ напряжение вида:

$$v = \sum_{k=1}^{k=n} V_k \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Согласно предыдущему сила тока будетъ вида:

$$i = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{V_k}{\sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}} \sin(k\omega t + \varphi_k + \theta_k),$$

гдѣ θ_k опредѣлится отношеніемъ:

$$\operatorname{tg} \theta_k = \frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{r}.$$

Напряжение у зажимовъ конденсатора будетъ:

$$v_c = \frac{1}{C} \int_0^t i dt,$$

т. е. будетъ функція вида:

$$v_c = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{-V_k}{k\omega C \sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}} \cos(k\omega t + \varphi_k + \theta_k)$$

Дѣйствующее напряженіе слѣдовательно выразится суммою:

$$V_c^{\partial} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} \frac{V_k^2}{k^2 \omega^2 C^2 \left[r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \right)^2 \right]}}.$$

Предположимъ, что всѣ величины V_k остаются постоянными, какъ бы мы не измѣняли r , L и C , т. е. иначе говоря, будемъ поддерживать напряженіе v у зажимовъ aa' постояннымъ. Предположимъ далѣе, что r и C остаются постоянными и что измѣняется L . Ясно, что V_c^{∂} будетъ также измѣняться, ибо оно является функціею отъ L .

Значеніе этой функціи будетъ maximum, когда

$$\frac{d}{dL} \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} \frac{V_k^2}{k^2 \omega^2 C^2 \left[r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \right)^2 \right]}} = 0.$$

Этотъ maximum можно опредѣлить графически. Выберемъ значенія L , опредѣляемые уравненіемъ:

$$k\omega L - \frac{1}{k\omega C} = 0,$$

откуда

$$L = \frac{1}{k^2 \omega^2 C},$$

т. е.

$$L_1 = \frac{1}{\omega^2 C}$$

$$L_2 = \frac{1}{4\omega^2 C}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$L_n = \frac{1}{n^2 \omega^2 C}.$$

Очевидно, что $L_1 > L_2 > L_3 \dots > L_n$. Возьмемъ двѣ оси координатъ и будемъ откладывать на оси

абсциссъ значенія L , а на оси ординатъ значенія функцій:

$$\frac{V_k}{k\omega C \sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}$$

Такимъ образомъ мы получимъ рядъ кривыхъ, соотвѣствующихъ функціямъ:

$$\frac{V_1}{\omega C \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{V_2}{2\omega C \sqrt{r^2 + \left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)^2}} \dots \dots \dots (2)$$

$$\dots \dots \dots \frac{V_n}{n\omega C \sqrt{r^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}} \dots \dots \dots (n)$$

Когда мы будемъ измѣнять L отъ 0 до $\frac{1}{n^2\omega^2 C}$, то всѣ функціи будутъ возрастать и когда L станетъ равнымъ $\frac{1}{n^2\omega^2 C}$, то функція (n) станетъ maximum (см. § 26). При дальнѣйшемъ увеличеніи L , эта функція будетъ убывать, тогда какъ функціи $(1) \dots (n-1)$ будутъ продолжать возрастать; затѣмъ когда L сдѣлается равнымъ $\frac{1}{(n-1)^2\omega^2 C}$, функція $(n-1)$ станетъ maximum и т. д. Наибольшія значенія соотвѣствующихъ функцій будутъ:

$$\frac{V_1}{\omega Cr}, \frac{V_2}{2\omega Cr}, \frac{V_3}{3\omega Cr} \dots \dots \frac{V_n}{n\omega Cr}$$

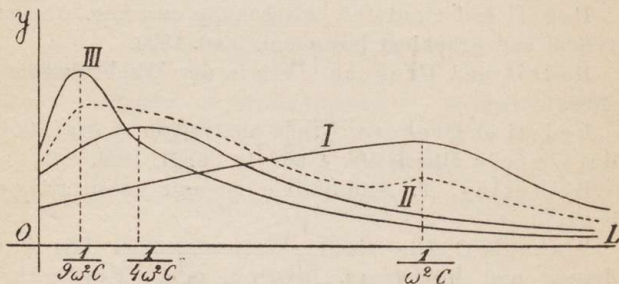
(см. § 26). Кривая функціи V_c^d получится, если построимъ для cadaго L корень квадратный изъ суммы соотвѣствующихъ ординатъ кривыхъ $(1), (2), (3) \dots$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ и помножимъ на $\sqrt{2}$ полученный результатъ. На фи-

гуръ 102 представлень графикъ для случая, когда $n=3$, т. е. когда имѣемъ:

$$v = V_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + V_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + V_3 \sin(3\omega t + \varphi_3).$$

Пунктиромъ показана кривая V_c^0 .



Фиг. 102.

Такимъ образомъ можно изслѣдовать вліяніе высшихъ гармоникъ на резонансъ напряженій.

ПРИБАВЛЕНИЕ.

Литература по теории переменных токовъ.

Блекслей, Т. Г. Переменные электрические токи. Руководство для студентовъ и техникувъ. Перев. съ 2-го франц. изд. подъ ред. Лебединскаго, 1894 г.

Bedell and Crehore. Alternating currents. An analytical and graphical treatment. 3 ed. 1896.

Bedell und Crehore. Theorie der Wechselströme. 1895.

Bedell et Crehore. Etude analytique et graphique des courants alternatifs. Trad. de l'angl. 1894.

Blakesley, T. Alternating currents of electricity. 3 ed.

Blakesley. Die electr. Wechselströme. Für Studenten und Ingenieure. Deutsch. v. C. Feldmann, 1891.

Blakesley. Les courants alternatifs d'électricité. Trad. sur 3 ed. angl. et augm. par W. Rechniewski, 1893.

Chevrier. Pratique industrielle des courants alternatifs.

Galileo Ferraris. Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik.

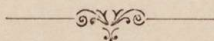
Loppe, F. et Bouquet, R. Traite theorique et pratique des courants alternatifs industriels. 1896.

Loppe et Bouquet. Alternate currents in practice. Translated from French by F. Y. Moffett. 1898.

Rodet. Distribution de l'energie par courants polyphasés. 1898.

Steinmetz. Theorie und Berechnung der Wechselstromerscheinungen.

Tompson, S. Courants polyphasés. Новое издание.



ОПЕЧАТКИ.

Стр.:	Строка:	Напечатано:	Должно быть:
4	сверху	3 $\sin (2\pi nt + \psi)$	$\sin 2\pi n (t + \psi)$
4	„	11 $\sin (2\pi nt - \psi)$	$\sin 2\pi n (t - \psi)$
17	„	8 $= \sin (\theta + \varphi)$	$= A \sin (\theta + \varphi)$
23	снизу	10 $\widehat{A} \quad k = c$	$\widehat{A} \cdot k = \widehat{c}$
32	„	10 $E_1^3 +$	$E_1^2 +$
35	сверху	8 $\sin^2 \pi nt \, dt$	$\sin^2 2\pi nt \, dt$
45	„	3 и 4 $E'_s =$	$\widehat{E}'_s =$
46	„	2 $+ E'_s =$	$+ \widehat{E}'_s =$
46	„	3 $Z =$	$\widehat{Z} =$
46	снизу	1 $\sin^2 (2\pi nt - \psi)$	$\sin^2 (2\pi nt - \psi) \, dt$
49	сверху	7 $E_\theta =$	$\widehat{E}_\theta =$
49	снизу	5 $E =$	$\widehat{E} =$
50	сверху	9 $E'_\theta =$	$\widehat{E}'_s =$
50	„	12 $E_\theta I_\theta =$	$E_\theta \widehat{I}_\theta =$
51	„	14 E	$\widehat{E}$
54	снизу	3 $E =$	$\widehat{E} =$
55	сверху	5 $V =$	$\widehat{V} =$
66	„	13 AB	OB
82	„	6 ρ_2	ρ_2^2
82	„	7 ρ_n	ρ_n^2
86	„	12 $Z =$	$Z_1 =$
92	„	4 и 5 $2\pi n L_0 I_0$	$2\pi n L_0 I'_0$

Стр.:	Строка:	Напечатано:	Должно быть:
93	снизу	12	$E = \widehat{E}$
94	сверху	2	$E = \widehat{E}$
100	снизу	2	$n-1) \quad (n-1)$
124	сверху	8	$\sin \left(2\pi n + \frac{2\pi}{n} \right) \quad \sin \left(2\pi nt + \frac{2\pi}{n} \right)$
130	снизу	6	Слѣдуетъ выпустить фразу „и замѣчая, что $D'B$ параллельна оси OX “.
131	„	1	$4k'^2 \cos \frac{2\pi}{n} \quad 4k'^2 \cos^2 \frac{2\pi}{n}$
149	сверху	2	$V = V \cos \theta =$
158	снизу	11	$E_3 = \widehat{E}_3 =$
167	сверху	5	$+ \frac{\widehat{\partial}_3}{\widehat{Z} + \widehat{\partial}_3} \quad + \widehat{E}_3 \frac{\widehat{\partial}_3}{\widehat{Z} + \widehat{\partial}_3}$
172	„	3	$= \frac{\pi}{4} \quad = tg \frac{\pi}{4}$

Кромѣ того слѣдуетъ RJ замѣнить на $k'J$ на страницѣ 136 въ строкахъ: 6, 14, 16 и 17; на страницѣ 137 въ строкахъ 11 и 13; на страницѣ 140 въ строкахъ 1 и 2.

Изданія К. Л. Риккера въ С.-Петербургѣ.

Невскій пр., № 14.

Курсъ теоретической механики, для техниковъ и инженеровъ. Сост. проф. **Н. Б. Делоне**. Съ 163 фиг. 1902, ц. 3 р. 50 к., въ пер. 4 р.

Лекціи по практической механикѣ, читанныя въ Варш. Политехнич. Инст., ордин. профессор. **Н. Б. Делоне**. Съ 214 фиг. 1901, ц. 2 р., въ пер. 2 р. 50 к.

Желѣзные части зданій. Руководство для техническихъ школъ и пособіе для практическаго пользованія проф. **Р. Лауэнштейна**. Переводъ со 2 нѣм. изданія подъ ред. и съ дополненіями проф. **В. Г. Тюрина** и **Г. Г. Кривошеина**. Съ 542 фиг. въ текстъ и 4 листами чертежей. 1902, ц. 3 р., въ пер. 3 р. 50 к.

Изъ предисловія русск. изд.: Въ настоящее время строителямъ приходится на каждомъ шагѣ встрѣчаться съ желѣзн. частями даже въ самыхъ простыхъ постройкахъ; въ этомъ случаѣ удобно имѣть подъ рукой справочную книгу съ описаніемъ какъ устройства, такъ и расчета желѣз. частей обыкновенныхъ построекъ. Въ русской техн. литературѣ этотъ вопросъ еще мало разработанъ, почему мы и рѣшили перевести курсъ **Лауэнштейна**. Дословный переводъ книги представлялъ бы неудобство для насъ, русскихъ, не заключая въ себѣ нѣкот. чисто мѣстныхъ данныхъ; поэтому мы старались передать только основныя идеи автора, дѣлая болѣе или менѣе значительныя измѣненія и дополненія въ деталяхъ, сообразно съ русскими условіями и распространенными между нашими техниками взглядами.

Графическая статика сооружений. Соч. профессора **Müller-Breslau**, переводъ съ нѣмецкаго **Т. Т. Кривошеина** и **П. Н. Назина**. 2 тома съ многими рис. и табл. черт. 1900, ц. 12 р.

Плоскія междуэтажныя покрытія и ихъ расчетъ. Составилъ штатный преподаватель Николаевской Инженерной Академіи **Н. Житневичъ**. Съ 139 рис. 1900, ц. 2 руб., въ перепл. 2 р. 40 к.

Плоскія желѣзо-бетонныя покрытія и ихъ расчетъ. Сост. **Н. Житневичъ**. 2-ое дополн. изданіе. Съ 71 чертеж. 1900, ц. 1 р. 40 к., въ перепл. 1 р. 90 к.

Подпорныя стѣны. Сочиненіе **М. Богдановскаго**. Съ 16 чертежами. 1900, ц. 80 к.

Изданія К. Л. Риккера въ С.-Петербургѣ.

Невскій пр., № 14.

Курсъ сопротивленія строительныхъ матеріаловъ. Пособіе для студентовъ технологическихъ институтовъ и для самообразованія проф. **М. Н. Демьянова.** Съ 186 рис. 1900, ц. 4 р.

Курсъ паровыхъ машинъ. Лекціи, читанныя проф. **А. П. Кондратьевымъ.** Посм. изданіе подъ ред. проф. **А. Н. Митинскаго.** Съ 262 чертеж. 1902, ц. 4 р., въ пер. 4 р. 50 к.

Уходъ за паровыми котлами и машинами. Руководство для машинистовъ и кочегаровъ, удостоенное преміи Импер. Русскаго Техническаго Общества. Соч. **С. Войслава.** 3 исправл. издан. Съ 18 рис. 1898. Въ перепл. 1 р.

Описаніе судовыхъ машинъ и котловъ, а также вспомогательныхъ механизмовъ, водоотливныхъ средствъ и водотрубныхъ котловъ. Составилъ старшій инженеръ-механикъ флота **П. Перновскій.** 2-е исправл. и дополн. изданіе. Съ 337 рис. 1899, ц. 2 р. 25 к., въ пер. 2 р. 80 к.

Современное оборудованіе машиностроительныхъ заводовъ и желѣзнодорожныхъ мастерскихъ. На основаніи личнаго осмотра 125 заграничныхъ заводовъ и мастерскихъ. Сост. проф. **В. С. Кнаббе** 2-е перераб. и значит. дополнен. изданіе. Съ 217 политипаж. въ текстѣ и отдѣл. атласомъ изъ 45 табл. 1900, ц. 12 руб.

Машины-орудія для холодной обработки металловъ. Систематическій обзоръ отдѣльныхъ составныхъ механизмовъ и цѣлыхъ конструкцій металлообдѣлочныхъ станковъ нормальнаго обихода проф. **В. С. Кнаббе.** 370 рис. 1902, ц. 6 р.

Передача силы на далекія разстоянія и устройство передаточныхъ механизмовъ и регуляторовъ. Практическое руководство для конструкторовъ, механиковъ, фабрикантовъ и заводчиковъ. Инж. **Г. Мейснера.** Переводъ со 2-го нѣм. изд. съ допол. Инж.-техн. **Л. А. Боровича.** Съ 404 рис. 1900, ц. 7 р.

Электрическая передача работы на большое разстояніе съ экономической точки зрѣнія. Соч. **Э. Дюзомэ.** Перевели съ франц. **А. Е. Бѣлой** и **В. П. Шуберскій.** 1901, ц. 80 к.