

ЖОРДАНОВА ФОРМА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ДИАГОНАЛИЗУЕМЫХ МАТРИЦ, КАЖДАЯ ИЗ КОТОРЫХ ИМЕЕТ ДВА РАЗЛИЧНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯ

А.М. Ветошкин^{1✉}, А.А. Шум²

¹ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (Мытищинский филиал), Россия, 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1

²ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет» (ТвГТУ), Россия, 170026, г. Тверь, Набережная Афанасия Никитина, д. 22

alexander.vetkin@gmail.com

Показано, что в канонической форме Жордана выражения $F = (R + \mu I)(Q + \nu I)$ от проекторов R, Q наблюдается следующая симметрия относительно значения $\rho = \mu(\mu + 1)\nu(\nu + 1)$. Установлено, что при $\lambda^2 \neq \rho$ если есть несколько клеток $J_k(\lambda)$, то есть ровно столько же клеток $J_k(\rho\lambda^{-1})$, где λ — собственное значение матрицы F . Для клеток с $\lambda \in \sigma = \{\mu\nu, \mu(\nu + 1), (\mu + 1)\nu, (\mu + 1)(\nu + 1)\}$ симметрия несколько нарушена: если есть клетка $J_k(\lambda)$ с $k > 1$, то обязательно есть парная клетка $J_l(\rho\lambda^{-1})$, где $|k - l| \leq 1$. Доказано, что при $\lambda^2 = \rho$ и $\lambda \notin \sigma$ клетки $J_k(\lambda)$ должны иметь четный порядок.

Ключевые слова: проектор, инволюция, нормальная жорданова форма, жорданова клетка, подобие, теорема Фландерса, матрица Паскаля

Ссылка для цитирования: Ветошкин А.М., Шум А.А. Жорданова форма произведения двух диагонализуемых матриц, каждая из которых имеет два различных собственных значения // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2026. Т. 30. № 4. С. 147–160. DOI: 10.17816/2542-1468-2026-4-147-160

Понятие собственного значения является важнейшим в теории матриц и линейной алгебре. Нахождение собственных значений данной матрицы составляет, зачастую, не простую вычислительную задачу, поэтому изучению спектральных особенностей классов матриц посвящено большое число работ [1–10].

Цель работы

Цель работы — изучение матричного класса определяемого произведением двух матриц похожих на инволюции, исследованием свойств спектра таких матриц.

Результаты и обсуждение

Каждую матрицу вида, определяемого в названии этой статьи, можно представить в виде некоторого проектора умноженного на число плюс скалярная матрица. Таким образом, в этой работе рассматривается спектр таких выражений $F' = (aR + bI)(\alpha Q + \beta I)$, где R и Q два проектора. Деление матрицы F' на число $\alpha\alpha$ позволяет далее работать только с двумя параметрами:

$$F'(a\alpha)^{-1} = F = (R + \mu I)(Q + \nu I); \quad \mu = ba^{-1}, \nu = \beta\alpha^{-1}. \quad (1)$$

В работах [11–16] изучаются особенности спектра для простых выражений от двух проекторов. Характерной особенностью спектра для линейной комбинации двух проекторов [14–16] является симметрия относительно некоторого значения β . Если есть несколько клеток $J_k(\lambda)$, то есть ровно столько же клеток $J_k(2\beta - \lambda)$. Для некоторых величин собственного значения λ этой линейной комбинации, указанная симметрия может быть несколько нарушена.

В настоящей работе методы, использованные для получения результатов в работах [14–16], применяются для выражения (1). Сформулируем следующую теорему, основной результат в данной статье.

Теорема 1. Пусть матрицу F можно представить в виде

$$F = (R + \mu I)(Q + \nu I); \quad \mu, \nu \notin \{0, -1\} \quad (2)$$

от проекторов R и Q и параметров μ, ν .

Определим выражение

$$\rho = \mu(\mu + 1)\nu(\nu + 1),$$

и множество

$$\sigma = \{\mu\nu, \mu(\nu + 1), (\mu + 1)\nu, (\mu + 1)(\nu + 1)\}.$$

В зависимости от величины λ — собственного значения матрицы F для канонической формы Жордана этой матрицы выполняются следующие условия (**необходимые** условия):

а) при $\lambda^2 \neq \rho$ и $\lambda \notin \sigma$ в канонической форме Жордана матрицы F если есть несколько клеток $J_k(\lambda)$, то есть ровно столько же клеток $J_k(\rho\lambda^{-1})$;

б) при $\lambda^2 \neq \rho$ и $\lambda \in \sigma$ в канонической форме Жордана матрицы F вместе с клеткой $J_k(\lambda)$ с $k > 1$ имеется клетка $J_l(\rho\lambda^{-1})$, где $|k - l| \leq 1$. Клетка $J_1(\lambda)$ может не иметь такой парной клетки;

в) при $\lambda^2 = \rho$ и $\lambda \notin \sigma$ клетка $J_k(\lambda)$ должна иметь четный порядок.

Если собственное значение λ матрицы F из формулы (2) при заданных параметрах μ , ν попадает в области, задаваемые в пунктах а), б) и в) данной теоремы, и выполняются соответствующие условия для канонической формы Жордана матрицы F из этих пунктов, то этого **достаточно** для того чтобы существовали два проектора R и Q , такие что $F = (R + \mu I)(Q + \nu I)$.

В работах [2–6] рассматривается случай произведения двух инволюций. В теореме 4 из работы [2] получен следующий результат. Невырожденная матрица A порядка n тогда и только тогда представима произведением двух инволюций, когда в канонической форме Жордана матрицы A клеток $J_k(\lambda)$ столько же, сколько клеток $J_k(\lambda^{-1})$.

Каждая инволюция B может быть представлена как линейное выражение от проектора Q : $B = 2Q - I$. Таким образом, можно применить теорему 1 из настоящей работы к такой матрице $F = (R + \mu I)(Q + \nu I)$, где $\mu = \nu = -0,5$; $\rho = 1/16$; $\sigma = \{0,25; -0,25\}$. Из определения (1) имеем $F' = 4F$. С учетом этих параметров можно видеть, что пункт а) приведенной выше теоремы 1 совпадает с результатом, полученным с помощью теоремы 4 в работе [2]. В данном случае — произведения двух инволюций, параметры таковы, что случаи б) и в) в приведенной теореме 1 невозможны.

В теореме 1 нет условия, которое было бы связано с областью величин собственных значений λ , задаваемой как $\lambda^2 = \rho$ и $\lambda \in \sigma$. Однако возникает вопрос о том, существуют ли два проектора, таких, что выполняется условие (2) в этой области? В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос. Такой же вопрос для теоремы 4 из работы [2] формулируется в несколько иной форме: можно ли жор-

данову клетку $J_k(\pm 1)$ представить в виде произведения двух инволюций? Такое представление дано ниже в конце раздела о вычислении матрицы $W' = \bar{P}W\bar{P}$.

В работе [6] доказана теорема 1 о том, что матрица есть произведение двух инволюций тогда и только тогда, когда эта матрица обратима и подобна своей обратной.

Рассмотрим матрицу $F' = (aR + bI)(\alpha Q + \beta I)$. Для простоты считаем, что у матрицы $F = F'(a\alpha)^{-1}$ из формулы (1) есть только собственные значения, удовлетворяющие лишь условию а) теоремы 1. Таким образом, матрица F подобна такой:

$$\text{diag}\{J_{k_1}(x_1), J_{k_1}(\rho x_1^{-1}), J_{k_2}(x_2), J_{k_2}(\rho x_2^{-1}), \dots\}.$$

Нетрудно показать, что если параметры матрицы F' удовлетворяют соотношению $b(a + b)\beta(\alpha + \beta) = 1$, то F' подобна такой матрице

$$\text{diag}\{J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_1}(\lambda_1^{-1}), J_{k_2}(\lambda_2), J_{k_2}(\lambda_2^{-1}), \dots\};$$

$$\lambda_i = x_i a \alpha.$$

Таким образом, при этих значениях параметров матрица F' подобна своей обратной.

Поэтому, в дополнение к результату теоремы 1 из работы [6], можно добавить, что матрица подобная своей обратной может быть представлена не только в виде произведения двух инволюций, но в виде произведения двух матриц вида $a \cdot R + b \cdot I$, определяемых проекторами R, Q .

Используемые факты и обозначения

Обозначим $M_{m,n}$ — множество прямоугольных матриц размера $m \times n$, с элементами из поля $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Кроме того, введем еще некоторые обозначения:

M_n — множество квадратных матриц порядка n ;

$\lambda(A)$ — множество собственных значений квадратной матрицы A ;

$\lambda_i(A)$ — i -е собственное значение квадратной матрицы A ;

I_n — единичная матрица порядка n (или просто I);

$\text{diag}(A_1, A_2, \dots)$ — блочно-диагональная матрица, на диагонали которой расположены квадратные матрицы A_i .

Матрица $Q \in M_n$ называется проектором, если справедливо равенство $Q^2 = Q$. Матрица $V \in M_n$ называется матрицей инволюции, если для нее выполняется равенство $V^2 = I$.

Определим квадратную матрицу T_n порядка n , содержащую $n - 1$ единицу в соседней

с главной диагональю «наддиагонали» и нули во всех остальных позициях матрицы (таким образом, $T_1 = 0$, $(T_n)^n = 0$).

Умножение прямоугольной матрицы M на матрицу T слева или справа приводит к сдвигу элементов матрицы M соответственно на одну строку вверх или один столбец вправо. Изобразим это символически

$$\begin{aligned} TM &= M \uparrow, \quad MT = \vec{M}; \\ \left(T^T M &= M \downarrow, \quad MT^T = \overset{\leftarrow}{M} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Жорданову клетку $J_n(\lambda)$ порядка n можно задать так

$$J_n(\lambda) = \lambda I_n + T_n.$$

Матрица вида $W = \sum_{k=0}^{n-1} w_k T_n^k$ ($T_n^0 = I_n$) является теплицевой верхней треугольной (ТВТ). Назовем множество таких матриц ТВТ-матрицами. Все ТВТ-матрицы перестановочны. Этому множеству принадлежат единичная матрица — I_n , жорданова клетка — $J_n(\lambda)$ и матрица T_n .

Определим матрицу геометрической прогрессии: $S_n(x) = \text{diag}(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$. Случай $x = -1$ обозначим особо: $S_n(-1) = S_n = S$.

Часто будут применяться такие равенства:

$$\begin{aligned} S_n(x^{-1})T_n S_n(x) &= xT_n; \\ (S_n(x^{-1})T_n^m S_n(x) &= x^m T_n^m); \end{aligned} \quad (4)$$

$$J_n(x) = xS_n(x)(I_n + T_n)S_n(x^{-1}). \quad (5)$$

Доказательство формул (4), (5) сводится к применению определений участвующих матриц.

О теореме Фландерса

Для обоснования полученных в работах [15, 16] результатов, а также в настоящей работе большое значение имеет теорема, которую иногда называют теоремой Фландерса [17–19]. Эту теорему можно сформулировать так.

Теорема Фландерса 2.

Пусть $A \in M_m$, $B \in M_n$. Для того чтобы система уравнений

$$\begin{cases} XY = A, \\ YX = B, \end{cases} \quad X \in M_{m,n}, Y \in M_{n,m},$$

относительно неизвестных матриц X и Y имела решение, необходимо и достаточно выполнить следующие условия:

а) канонические формы Жордана матриц A и B имеют одинаковые наборы жордановых клеток для ненулевых собственных значений;

б) если $g_1 \geq g_2 \geq \dots \geq g_s$ и $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_t$ — это размеры вырожденных жордановых клеток в канонических формах Жордана матриц A и B , то обязательно будут справедливы условия $|g_i - h_i| \leq 1$, при $i \leq \min(s, t)$. В случае $i > \min(s, t)$ числа g_i или h_i , если таковые имеются, будут все равны единице.

О матрице Паскаля

Матрица Паскаля [20] определяется как верхняя треугольная матрица

$$P = P_k = \{p_{ij}\} \quad (i, j = 1, \dots, k),$$

$$\text{где } p_{ij} = \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

(Напомним, что биномиальный коэффициент $\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$ нулевой при $j < i$ [21]).

Матрица PS является инволюцией

$$PSPS = I; \quad P^{-1} = SPS. \quad (6)$$

Поскольку эта инволюция далее встречается часто, обозначим ее как

$$\bar{P}_k = P_k S_k \quad (7)$$

Доказательства свойств матрицы Паскаля можно найти в работе [20].

Решение однородного дискретного уравнения Сильвестра

В работе [22] представлено решение однородного дискретного уравнения Сильвестра для случая, когда коэффициенты уравнения являются жордановыми клетками

$$J_m(x)ZJ_n(y) - xyZ = 0; \quad x, y \neq 0. \quad (8)$$

Изложим результаты, полученные в работе [22], которые использованы в настоящей работе. Учитывая уравнение (5), сделаем в формуле (8) замену $Z = S_m(x)VS_n(y^{-1})$, получим

$$(I_m + T_m)V(I_n + T_n) - V = 0. \quad (9)$$

Из полученного уравнения (9) имеем уравнение $(I_m + T_m)V = V(I_n + T_n)^{-1}$ и $T_m V = V(-T_n + T_n^2 - \dots)$. Следовательно, умножение решения уравнения (9) на ТВТ-матрицу слева можно заменить умножением на некую ТВТ-матрицу справа. Таким образом, получим лемму:

Лемма 1. Если V является решением уравнения (9), то для любой матрицы $W_1 \in \text{ТВТ}_m$ существует матрица $W_2 \in \text{ТВТ}_n$ так, что

$W_1 V = V W_2$. Из уравнения (9) получаем эквивалентное уравнение

$$T_m V + V T_n + T_m V T_n = 0. \quad (10)$$

Учитывая перестановочность ТВТ-матриц, получим еще одну лемму:

Лемма 2. Если матрица V является решением уравнения (10), то умножив эту матрицу на ТВТ-матрицу слева или справа, снова получим решение уравнения (10).

Утверждение 1. Решение уравнения (8) дается формулой

$$Z = S_m(x) W V S_n(y^{-1}),$$

где матрица $V \in M_{m,n}$ имеет вид

$$m = n: V = U; m > n: V = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$m < n: V = \begin{bmatrix} 0 & U \end{bmatrix}.$$

Причем $U = \bar{P} = PS \in M_{\min(m,n)}$ $W \in M_m$ — произвольная ТВТ-матрица.

Множители типа $S_m(x)$, W можно «затащить» в блочные матрицы в перечисление формул (11). Так, для умножения ТВТ-матрицы W на

блочную матрицу $\begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$ можно представить матрицу W в блочном виде и получить

$$W \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W' & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W'V \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь W' также ТВТ-матрица, но меньшего размера, в некотором смысле «вырезка» из исходной матрицы W . Матрицу геометрической прогрессии $S_m(x)$ при $m > n$ можно представить в блочном виде как

$$S_m(z) = \text{diag}\{S_{m-n}(z), z^{m-n}S_n(z)\}.$$

Учитывая сказанное утверждение 1 можно сформулировать иным образом:

Теорема 3. Решение уравнения (8) при условии, что $m = n$ дается формулой

$$Z = S_m(x) W \bar{P}_m S_m(y^{-1}), \quad (12)$$

при $m > n$:

$$Z = \begin{bmatrix} S_n(x) W \bar{P}_n S_n(y^{-1}) \\ 0_{m-n,n} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

при $m < n$:

$$Z = y^{m-n} \begin{bmatrix} 0_{n-m,m} & S_m(x) W \bar{P}_m S_m(y^{-1}) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Здесь матрица W — произвольная ТВТ-матрица соответствующего порядка. Этот про-

извольный множитель может быть расположен в формулах (12)–(14) после матрицы $\bar{P}$.

Вычисление матрицы $W' = \bar{P} W \bar{P}$

Если $m = n$, решение уравнения (10) в соответствии с утверждением 1 будет иметь вид $V = \bar{P} = PS$. Согласно лемме 1 справедливо равенство $W \bar{P} = \bar{P} W'$. Отсюда следует: $\bar{P} W = W' \bar{P}$. Возникает вопрос: как по ТВТ-матрице W найти ТВТ-матрицу W' , удовлетворяющую равенству $W \bar{P} = \bar{P} W'$. Ответ на этот вопрос дает утверждение 2:

Утверждение 2. Пусть $W = \sum_k w_k T^k$ и $W' = \sum_k w'_k T^k$ две ТВТ-матрицы, причем $W' = \bar{P} W \bar{P}$.

Два строчных вектора w и w' , задаваемых матрицами W и W' , имеют вид

$$w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}); \quad w' = (w'_0, w'_1, \dots, w'_{n-1}).$$

Тогда

$$w' = w \text{diag}\{1, -\bar{P}_{n-1}\}.$$

Матрица $\bar{P}$ есть решение уравнения (9) — $(I + T) \bar{P} (I + T) = \bar{P}$

Отсюда получаем $(I + T) \bar{P} = \bar{P} (I + T)^{-1}$ или $T \bar{P} = \bar{P} (-T + T^2 - \dots \pm T^{n-1})$.

Обозначим матрицу $H = -T + T^2 - \dots \pm T^{n-1}$, тогда для произвольной ТВТ-матрицы

$W = \sum_{k=0}^{n-1} w_k T^k \in M_n$ выполняется равенство

$$W \bar{P} = \left(w_0 I + \sum_{s=1}^{n-1} w_s T^s \right) \bar{P} = \bar{P} \left(w_0 I + \sum_{s=1}^{n-1} w_s H^s \right) = \bar{P} W'. \quad (15)$$

Отметим, что $w'_0 = w_0$.

Вычисление степеней матрицы H производится по формуле

$$H^s = \sum_{k=s}^{n-1} \binom{k-1}{s-1} (-1)^k T^k,$$

поэтому сумма в правой части равенства (15) принимает вид

$$\sum_{s=1}^{n-1} w_s H^s = \sum_{s=1}^{n-1} w_s \sum_{k=s}^{n-1} \binom{k-1}{s-1} (-1)^k T^k = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k T^k \sum_{s=1}^{n-1} \binom{k-1}{s-1} w_s.$$

Таким образом, получены компоненты вектора w' :

$$w'_k = (-1)^k \sum_{s=1}^k \binom{k-1}{s-1} w_s, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Следовательно $w' = w \operatorname{diag} \{1, -\bar{P}_{n-1}\}$, и утверждение 2 доказано.

Отметим, что матрица $\operatorname{diag} \{1, P_{n-1}\}$ представляет собой модификацию матрицы Паскаля

$$P_n = (I_n + T_n) \operatorname{diag} \{1, P_{n-1}\}. \quad (16)$$

Из формулы (16) получаем:

$$\begin{aligned} (I_n + T_n) &= (P_n S_n) \operatorname{diag} \{1, -P_{n-1} S_{n-1}\}, \\ (I_n - T_n) &= (S_n P_n) \operatorname{diag} \{1, -S_{n-1} P_{n-1}\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Следовательно, жордановы клетки $J_n(1)$, $J_n(-1)$ можно представить в виде произведения двух инволюций.

Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$

Важное значение в настоящей работе имеет функция $\varphi(x)$ с параметрами μ и ν

$$\varphi(x) = (\mu + 1) [x^2 - \mu(2\nu + 1)x + \mu^2\nu(\nu + 1)], \quad (18)$$

и связанная с ней функция

$$\psi(x) = \mu[x^2 - (\mu + 1)(2\nu + 1)x + (\mu + 1)^2\nu(\nu + 1)].$$

Уравнения $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = 0$ имеют следующие решения:

если $\varphi(x) = 0$ то имеем

$$x_1 = \mu\nu, \quad x_2 = \mu(\nu + 1);$$

если $\psi(x) = 0$ то имеем

$$x_3 = (\mu + 1)\nu, \quad x_4 = (\mu + 1)(\nu + 1). \quad (19)$$

Решения этих уравнений составляют вместе множество σ из теоремы 1.

Из теоремы 1 приведем константу

$$\rho = \mu(\mu + 1)\nu(\nu + 1)$$

и определим величину y , связанную с x ,

$$xy = \rho.$$

Имеют место тождества:

$$\varphi(x) - \psi(x) = x^2 - \rho; \quad (20)$$

$$\varphi(y)(y^2 - \rho)^{-1} = -\psi(x)(x^2 - \rho)^{-1}; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x)(x^2 - \rho)^{-1} - [\varphi(x)(x^2 - \rho)^{-1}]^2 = \\ = -\varphi(x)\psi(x)(x^2 - \rho)^{-2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Выражение (22) обозначим как функцию

$$f(x) = -\varphi(x)\psi(x)(x^2 - \rho)^{-2}. \quad (23)$$

Видно, что x_k из равенств (19) это нули функции $f(x)$. Проверка показывает, что выполняются неравенства:

$$f'(x_k) \neq 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (24)$$

Функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ будут вычисляться от матриц:

$$f(J_n(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x) T_n^k}{k!}, \quad T_n^0 = I_n. \quad (25)$$

$$\begin{aligned} f(\operatorname{diag} \{\dots, J_n(x), \dots, J_m(y), \dots\}) = \\ = \operatorname{diag} \{\dots, f(J_n(x)), \dots, f(J_m(y)), \dots\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Функции от матриц и формулы (25), (26) есть в работе [23].

Связь элементов ТВТ-матриц $f(J_k(x))$ и $f(J_k(y))$

Представляет интерес переход от коэффициентов ряда (25) для $f(J_n(x))$ к коэффициентам ряда (25) для $f(J_n(y))$. Вначале возьмем эти коэффициенты в несколько измененном виде. Для этого определим вектор-строки:

$$\begin{aligned} u = (u_0, \dots, u_{k-1}); \quad u_s = x^s f^{(s)}(x); \\ v = (v_0, \dots, v_{k-1}); \quad v_s = y^s f^{(s)}(y). \end{aligned} \quad (27)$$

Некая матрица B связывает векторы u и v

$$u = vB. \quad (28)$$

Из равенств (21) и (22) следует, что $f(x) = f(y)$.

Дифференцируя, обе части последнего равенства получаем:

$$f'(x) = f'(y)y'_x; \Rightarrow xf'(x) = -yf'(y),$$

$$f''(x)x^2 = 2f'(y)y + f''(y)y^2, \text{ и так далее.}$$

Будем вычислять эти производные по рекуррентной формуле

$$f^{(t)}(x)x^t = \sum_{s=1}^t b_{st} f^{(s)}(y)y^s, \quad 1 \leq t \leq n-1.$$

Коэффициенты b_{st} являются элементами верхней треугольной матрицы $B' = \{b_{st}\}$, при этом матрица B' есть блок в матрице B :

$$B = \operatorname{diag} \{1, B'\}. \quad (29)$$

Для этих коэффициентов можно вывести формулу

$$b_{st} = (-1)^t \binom{t-1}{s-1} \frac{t!}{s!}, \quad 1 \leq s, \quad t \leq n-1.$$

Определяем диагональную матрицу

$$K = \operatorname{diag} \{1, \dots, [(i-1)!]^{-1}, \dots\}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (30)$$

Тогда имеем равенство $K^{-1}BK = \text{diag}(1, P')$, где P' — модификация матрицы Паскаля $P' = -P_{n-1}S_{n-1}$

$$K^{-1}BK = \text{diag}\{1, -\bar{P}_{n-1}\}. \quad (31)$$

Таким образом, определена матрица B связывающая векторы u и v .

Уравнение, связывающее матрицы F и R

Матрица F в формуле (1) представлена в виде произведения линейных биномов от проекторов R и Q :

$$F = (R + \mu I)(Q + \nu I). \quad (32)$$

Используем следующее свойство линейной комбинации проектора R и единичной матрицы

$$(R + \mu I)^{-1} = (\mu(\mu + 1))^{-1}[(\mu + 1)I - R]; \quad (33)$$

$$\mu \neq 0, -1.$$

Применив свойство (33) в выражении (32), получаем уравнение

$$Q = (\mu(\mu + 1))^{-1}[(\mu + 1)I - R]F - \nu I, \quad (34)$$

Обозначим в уравнении (34) выражение в квадратных скобках через L , т. е. $L = [(\mu + 1)I - R]$. Исключим матрицу Q в уравнении (34), для этого возведем его в квадрат и приравняем к правой части (34):

$$(\mu(\mu + 1))^{-2}LFLF - 2\nu(\mu(\mu + 1))^{-1}LF + \nu^2 I = (\mu(\mu + 1))^{-1}LF - \nu I. \quad (35)$$

Умножим обе части уравнения (35) слева на $(R + \mu I)$:

$$(\mu(\mu + 1))^{-1}FLF - 2\nu F + \nu^2(R + \mu I) = F - \nu(R + \mu I)I. \quad (36)$$

Раскроем в уравнении (36) скобки и умножим на выражение $(\mu(\mu + 1))$, получим искомое уравнение

$$FRF - \rho R = (\mu + 1)F^2 - \mu(\mu + 1)(2\nu + 1)F + \mu\rho I; \quad (37)$$

$$\rho = \mu(\mu + 1)\nu(\nu + 1).$$

Используем функцию $\varphi(x)$, из определения (18). Она задает правую часть уравнения (37).

Таким образом, связь матриц F и R задается формулой

$$FRF - \rho R = \varphi(F). \quad (38)$$

Поскольку все преобразования при получении формулы (38) из формулы (32) обратимы,

то матрицу F можно выразить через проекторы в виде произведения (32) тогда и только тогда, когда выполняется равенство (38).

При известной матрице F формулу (38) можно рассматривать как уравнение относительно неизвестной матрицы R . Это матричное уравнение является частным случаем дискретного уравнения Сильвестра.

Известно [24], что дискретное уравнение Сильвестра имеет вид

$$AXB - X = C,$$

$$X, C \in M_{m,n}, \quad A \in M_m, \quad B \in M_n$$

и однозначно разрешимо для любой правой части C , если выполняется условие

$$\lambda_i(A)\lambda_j(B) \neq 1, \quad \forall i, j. \quad (39)$$

Из ограничения (39) следует, что если у матрицы F из уравнения (38) нет собственных значений λ_i и λ_j , таких, что $\lambda_i\lambda_j = \rho$, то уравнение (38) имеет единственное решение

$$R = (F^2 - \rho I)^{-1}\varphi(F). \quad (40)$$

Необходимо выяснить, какими свойствами должна обладать матрица F для того, чтобы существовало решение-проектор R уравнения (38).

Применим к матрицам F, R, Q подобие, приводящее матрицу F к жордановой нормальной форме. Обозначим полученные подобные матрицы теми же символами. Таким образом, уравнение (38) не изменит своего вида.

Разделим жордановы клетки матрицы F каким-либо образом на две части

$$F = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Матрицы G и H имеют такой же блочно-диагональный вид, что и матрица F .

Рассмотрим блочное разбиение проектора R , определяемое блоками G и H

$$R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где A и D — квадратные матрицы.

Подставив матрицы (41) и (42) в уравнение (38), получаем следующие уравнения:

$$GAG - \rho A = \varphi(G), \quad (43a)$$

$$HDH - \rho D = \varphi(H), \quad (43б)$$

$$GBH - \rho B = 0, \quad (43в)$$

$$HCG - \rho C = 0. \quad (43г)$$

Поместим в матрицу G все жордановы блоки с собственным значением x матрицы F и собственным значением $y = \rho x^{-1}$

$$G = \text{diag}\{..., J_{k_i}(x), ..., J_{l_j}(y), ...\}, \quad (44)$$

$$xy = \rho, \quad x^2 \neq \rho.$$

В матрице H будут находиться все остальные жордановы блоки матрицы F .

Рассмотрим уравнение (43в). С таким выбором матриц G и H для него будет выполняться условие однозначности (39) — $\lambda_i(G)\lambda_j(H) \neq \rho$, $\forall i, j$, поэтому данное уравнение имеет только нулевое решение — $B = 0$. Аналогично, $C = 0$. Отсюда заключаем, что матрицы A и D являются проекторами.

Таким образом, задача (38) разделена на две такие же подзадачи — (43а) и (43б). Однако задача (43а) имеет свою особенность, которая заключается в специфической матрице коэффициентов (44). Задачу (43б) можно подразделить на подзадачи, также же, как и задачу (38), и т. д. Таким образом, важно исследовать особенность уравнения (43а) с матрицей G вида (44).

Рассмотрим устройство проектора A и матрицы G подробнее:

$$G = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$g = \text{diag}\{J_{k_1}(x), ..., J_{k_i}(x), ..., J_{k_s}(x)\}, \quad k_i \geq k_{i+1},$$

$$h = \text{diag}\{J_{l_1}(y), ..., J_{l_j}(y), ..., J_{l_h}(y)\}, \quad l_j \geq l_{j+1}, \quad (46)$$

$$xy = \rho.$$

Аналогично уравнениям (43а) — (43г) имеем:

$$gag - \rho a = \varphi(g), \quad (47а)$$

$$hdh - \rho d = \varphi(h), \quad (47б)$$

$$gbh - \rho b = 0, \quad (47в)$$

$$hcg - \rho c = 0. \quad (47г)$$

Учитывая, что матрица A является проектором, получаем еще четыре условия:

$$bc = a - a^2, \quad (48а)$$

$$cb = d - d^2, \quad (48б)$$

$$ab + bd = b, \quad (48в)$$

$$ca + dc = c. \quad (48г)$$

Далее при выполнении неравенства $x^2 \neq \rho$ условие однозначной разрешимости (39) выполняется для уравнений (47а) и (47б), а учитывая замечание (40) получаем такие решения этих уравнений

$$a = (g^2 - \rho I)^{-1} \varphi(g), \quad d = (h^2 - \rho I)^{-1} \varphi(h). \quad (49)$$

Эти решения должны удовлетворять зависимостям (48а) — (48г). Подстановка решений (49) в уравнения (48в) и (48г) с учетом того, что выполняются равенства (47в) и (47г) дает тождественные равенства.

Подставим матрицы (49) в уравнения (48а) и (48б). В вычислении матриц a и d в формулах (49) участвует одна и та же функция $(z^2 - \rho)^{-1} \varphi(z)$. Учитывая тождества (20) — (22) и выражение (23), в вычислении матриц $a - a^2$ и $d - d^2$ участвует одна и та же функция $f(z)$:

$$bc = a - a^2 = f(g), \quad (50)$$

$$cb = d - d^2 = f(h). \quad (51)$$

Таким образом, если будут найдены матрицы b и c , такие, что выполняются соотношения (50) и (51), то будет найден проектор A , удовлетворяющий равенству (43а). Матрицы b и c определяются из решения уравнений (47в) и (47г) с помощью теоремы 3.

Необходимость условия а) в теореме 1

Случай $x^2 \neq \rho$ и $x \notin \sigma$. Учитывая выражения (25) и (26) при $x \in \sigma$ получаем, что матрицы $f(g)$ и $f(h)$ являются невырожденными. Поэтому, из равенств (50) и (51) следует, что матрицы b и c также невырожденные. Из равенства (47в) получаем равенство

$$b^{-1}gb = \rho h^{-1}. \quad (52)$$

Из равенства (52) следует, что каноническая жорданова форма матрицы h^{-1} имеет такое же разбиение на жордановы клетки, как и матрица g . А матрица h имеет такой же набор размеров жордановых клеток как и h^{-1} . Отсюда следует необходимость выполнения условия а) теоремы 1.

Необходимость условия б) в теореме 1

Случай $x^2 \neq \rho$ и $x \in \sigma$. Имеем равенство $f(x) = f(y) = 0$.

Блоки $f(J_{k_i}(x))$, $f(J_{l_j}(y))$, составляющие матрицы $f(g)$ и $f(h)$, являются нильпотентными

$$f(J_m(z)) = \sum_{k=1}^{m-1} f^{(k)}(z) T_m^k / k!,$$

$$z \in \{x, y\}.$$

Из неравенства (24) следует, что $f'(z) \neq 0$. Нетрудно показать [16], что матрица $f(J_m(z))$ подобна T_m . Таким образом, учитывая (46), получаем

$$\begin{aligned} bc = f(g) \text{ подобна } \operatorname{diag}\{T_{k_1}, \dots, T_{k_i}, \dots, T_{k_g}\}, \\ cb = f(h) \text{ подобна } \operatorname{diag}\{T_{l_1}, \dots, T_{l_j}, \dots, T_{l_h}\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Применение теоремы Фландерса к матрицам (53) доказывает необходимость выполнения условия б) теоремы 1.

Случай $x^2 = \rho$. Если для собственного значения x матрицы F выполняется равенство $x^2 = \rho$, то из уравнение (43а) уже не удастся выделить две подзадачи (47а) и (47б). Матрица G в уравнении (43а) имеет вид

$$G = \operatorname{diag}\{\dots, J_{k_i}(x), \dots\}, \quad x^2 = \rho.$$

Матрица A в уравнении (43а) подразделяется на блоки в соответствии с блочной структурой матрицы G , и для каждого диагонального блока A_d матрицы A выполняется уравнение

$$J(x)A_dJ(x) - x^2A_d = \varphi(J(x)). \quad (54)$$

Выполним замену жордановой клетки $J(x)$ в левой части уравнения (54) с помощью равенства (5) — $J(x) = xS(x)(I + T)S(x^{-1})$ и соответствующую замену матрицы $A_d - A_d = S(x)ZS(x^{-1})$.

Учитывая уравнение (25), получаем

$$\begin{aligned} x^2S(x)(ZT + TZ + TZT)S(x^{-1}) = \\ = I\varphi(x) + T\varphi'(x) + 0,5T^2\varphi''(x). \end{aligned} \quad (55)$$

В правой части выражения (55) можно увидеть выражения:

$$\varphi(x)x^{-2} = 2\mu + 1 - (2\nu + 1)x((\nu + 1))^{-1};$$

$$\varphi'(x)x^{-1} = \varphi(x)x^{-2} + 1.$$

Определим новую величину $\eta = \varphi(x)x^{-2}$.

Поскольку выполняется тождество $S_k(x^{-1})T_k^m S_k(x) = x^m T_k^m$, и, учитывая равенство $x^2 = \rho$, получаем, что каждый диагональный блок Z удовлетворяет уравнению

$$ZT + TZ + TZT = I\eta + T(\eta + 1) + T^2(\mu + 1). \quad (56)$$

Ниже будет найдено решение-проектор этого неоднородного дискретного уравнения Сильвестра.

Необходимость условия в) в теореме 1

Случай $x^2 = \rho$ и $x \notin \sigma$. Несложно показать, что для случая $\eta \neq 0$ элементы матрицы $Z = \{z_{i,j}\}$ при $i - j > 1$ нулевые. Таким образом, матрица Z — это решение уравнения (56) и является хессенберговой.

Обозначим через k порядок этого блока Z . Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ — это элементы «поддиагонали» соседней с главной в матрице Z , тогда

главная диагональ матрицы $T_k Z + Z T_k + T_k Z T_k$ с учетом правил умножения на матрицу T , описанных в соотношении (3), и того, что матрица Z хессенбергова, будет иметь вид

$$(x_1, x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{k-2} + x_{k-1}, x_{k-1}).$$

Из уравнения (56) следует, что все элементы последнего вектора должны быть равны η . Это возможно только если порядок k имеет четное значение. При этом элементы поддиагонали такие

$$x_1 = x_3 = \dots = x_{k-1} = \eta;$$

$$x_2 = x_4 = \dots = x_{k-2} = 0.$$

Четность порядка k обосновывает необходимость пункта в) в теореме 2.

Достаточность условия а) в теореме 1

Случай $x^2 \neq \rho$ и $x \notin \sigma$. Достаточность следует из следующего примера матрицы G и проектора A из строки (45), удовлетворяющих уравнению (43а).

Матрица G имеет вид

$$G = \operatorname{diag}\{g, h\}; \quad g = J_k(x), \quad h = J_k(y), \quad xy = \rho.$$

Блоки a и d матрицы A из формулы (45) заданы в выражениях (49). Блоки b и c матрицы A можно получить как решение уравнений (47в, г) с помощью теоремы 3:

$$b = S(x)W_1\bar{P}S(y^{-1}); \quad c = S(y)\bar{P}W_2S(x^{-1}). \quad (57)$$

В равенствах (57) все матрицы имеют порядок k . Матрицы W_1 и W_2 — это произвольные ТВТ-матрицы. Учитывая тождество $\bar{P}\bar{P} = I$, уравнения (50), (51) примут вид

$$bc = S(x)W_1W_2S(x^{-1}) = f(g), \quad (58)$$

$$cb = S(y)\bar{P}W_2W_1\bar{P}S(y^{-1}) = f(h). \quad (59)$$

Выразим произведение ТВТ-матриц из формулы (58) — W_1W_2 , и, учитывая перестановочность ТВТ-матриц, подставим его в уравнение (59). Тогда получим уравнение

$$\bar{P}S(x^{-1})f(g)S(x)\bar{P} = S(y^{-1})f(h)S(y). \quad (60)$$

Выполнение равенства (60) обеспечивает наличие проектора A , удовлетворяющего уравнению (43а).

В правой и левой частях равенства (60) есть ТВТ-матрицы:

$$S(x^{-1})f(g)S(x) = \sum_{s=0}^{k-1} x^s f^{(s)}(x) T_k^s (s!)^{-1}, \quad (61)$$

$$S(y^{-1})f(h)S(y) = \sum_{s=0}^{k-1} y^s f^{(s)}(y) T_k^s (s!)^{-1}. \quad (62)$$

Для того чтобы доказать равенство матриц в левой и правой частях равенства (60), достаточно доказать, что первые строки этих матриц равны. Вычисляя первые строки, будем исходить из векторов u и v , определенных в равенствах (27).

Основываясь на равенствах (28), (29) и (30), выразим через вектор v первую строку матрицы (61) и получим строку vBK . Тогда первая строка левой части равенства (60), по утверждению 2, будет такой — $vBKX$, где $X = \text{diag}\{1, -\bar{P}_{k-1}\}$.

Первая строка матрицы (62) будет иметь вид — vK . Для того чтобы выполнялось равенство $vBKX = vK$ достаточно равенства матриц: $BKX = K$, равносильного равенству

$$(K^{-1}BX)X = I_k. \quad (63)$$

Причем согласно равенству (31) можно записать:

$$K^{-1}BX = \text{diag}\{1, -P_{k-1}S_{k-1}\}.$$

Таким образом, в левой части равенства (63) вычисляется произведение двух одинаковых инволюций. Равенство (60) поэтому выполняется, и достаточность условия а) теоремы 1 доказана.

Отметим, что никак не было использовано в этом доказательстве достаточности то, что $f(x) \neq 0$, поэтому в случае $f(x) = 0$, приведенном ниже, рассматриваются только неравные размеры блоков g и h .

Достаточность условия б) в теореме 1

Случай $x^2 \neq \rho$ и $x \in \sigma$. Будет построен пример, когда порядки матриц g и h отличаются на единицу

$$G = \text{diag}\{g, h\}; \quad g = J_k(x), \quad h = J_{k+1}(y), \quad xy = \rho.$$

Размеры матрицы A из формул (45) и ее блоков будут такими

$$A \in M_{2k+l}, \quad a \in M_k, \quad d \in M_{k+1}, \quad b \in M_{k, k+1}, \quad c \in M_{k+1, k}.$$

Блоки a и d матрицы A снова задают формулы (49).

Блоки b и c матрицы A устроены следующим образом:

$$b = [0, b'], \quad b' \in M_k; \quad c = \begin{bmatrix} c' \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c' \in M_k,$$

где блоки b' и c' , как это следует из теоремы 3, имеют вид

$$b' = S(x)W_1\bar{P}S(y^{-1})y^{-1}; \quad c' = S(y)W_2\bar{P}S(x^{-1}). \quad (64)$$

В равенствах (64) все матрицы имеют порядок k .

Произведения матриц b и c можно выразить как

$$bc = b'T_k c' \in M_k; \quad cb = \begin{bmatrix} 0 & c'b' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{k+1}.$$

Уравнения (50), (51) после подстановки выражений из уравнений (64) принимают вид

$$bc = f(g) = y^{-1}S(x)W_1\bar{P}S(y^{-1})TS(y)W_2\bar{P}S(x^{-1}) = (65) \\ = S(x)W_1W_2\bar{P}TPS(x^{-1}),$$

(в этих преобразованиях учитывается, что справедливо равенство $S(y^{-1})TS(y) = yT$; матрицы T и W_2 перестановочны; существует ТВТ-матрица W'_2 , такая, что справедливы равенства: $W'_2\bar{P} = \bar{P}W_2$, и $\bar{P}W'_2 = W_2\bar{P}$),

$$c'b' = y^{-1}S(y)\bar{P}W_1W'_2\bar{P}S(y^{-1}). \quad (66)$$

Выразим ТВТ-матрицу $W_1W'_2$ из выражения (66) и подставим в уравнение (65)

$$\bar{P}S(x^{-1})f(g)S(x)\bar{P} = yS(y^{-1})(c'b')S(y)T. \quad (67)$$

Левая часть равенства (67) не отличается от левой части равенства (60). С учетом условия $f(x) = 0$ аналог выражения (61) для левой части равенства (67) примет вид

$$S(x^{-1})f(g)S(x) = \sum_{s=1}^{k-1} x^s f^{(s)}(x) T_k^s (s!)^{-1}.$$

Что касается правой части равенства (67), то матрица $b'c'$ порядка k находится в правом верхнем углу треугольной матрицы $cb = f(J_{k+1}(y))$ с нулевой главной диагональю, поэтому имеем

$$c'b' = \sum_{s=0}^{k-1} f^{(s+1)}(y) T_k^s ((s+1)!)^{-1}.$$

Учитывая формулы (4) получим

$$S(y^{-1})c'b'S(y) = \sum_{s=0}^{k-1} y^s f^{(s+1)}(y) T_k^s ((s+1)!)^{-1}.$$

Правая часть равенства (67) будет имеет вид

$$yS(y^{-1})f(h)S(y)T = \\ = \sum_{s=0}^{k-1} y^{s+1} f^{(s+1)}(y) T_k^{s+1} ((s+1)!)^{-1} = \\ = \sum_{s=1}^{k-1} y^s f^{(s)}(y) T_k^s (s!)^{-1}.$$

Таким образом, равенство (67) свелось к равенству (60), которое уже доказано. Следовательно, доказана достаточность условия б) теоремы 1.

Достаточность условия в) в теореме 1

Случай $x^2 = \rho$ и $x \notin \sigma$. Определим линейный оператор от квадратных матриц Z

$$L_n(Z) = ZT_n + T_n Z + T_n ZT_n.$$

Построим проектор, дающий решение уравнения (56) при четном значении n . Запишем это уравнение в виде

$$L_n(Z) = I_n \eta + T_n (\eta + 1) + T_n^2 (\mu + 1). \quad (68)$$

Определим треугольную матрицу V_n порядка n , у которой первая строка состоит только из единиц, а главная диагональ содержит чередующиеся единицы и нули. Остальные элементы в верхнем треугольнике строятся так же, как элементы матрицы Паскаля — $v_{i+1,j} = v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1}$.

Рассмотрим матрицу $U_n = V_n S_n$ на основе которой построим решение уравнения (68)

$$U_n = V_n S_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ & & 1 & -2 & 4 & -7 & 11 \\ & & & 0 & 2 & -6 & 13 \dots \\ & & & & 1 & -3 & 9 \\ & & & & & 0 & 3 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & : \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Докажем, что матрица U_n для каждого порядка n является проектором. Для этого обобщим несколько утверждений.

Утверждение 3. $(U_n^2)_{1,n} = (U_n)_{1,n} = (-1)^{n+1}$.

Определим векторы-столбцы:

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)^T; \quad u_n = U_n e_n$$

и вектор-строку — первую строку матрицы U_n :

$$m_n = (1, -1, \dots, (-1)^{n+1}); \quad m_n = (1, -m_{n-1}).$$

Из определения матрицы U_n следует равенство

$$u_n = - \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ u_{n-1} \end{bmatrix} + e_n, \quad (70)$$

которое выполняется независимо от четности порядка n .

Получаем выражение

$$\begin{aligned} (U_n^2)_{1,n} &= m_n u_n = m_n \left(- \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ u_{n-1} \end{bmatrix} + e_n \right) = \\ &= -m_{n-1} u_{n-1} + m_{n-1} u_{n-1} + (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Утверждение 3 доказано.

Матрица U_n , как нетрудно проверить, удовлетворяет равенству

$$L_n(U_n) = U_n T_n + T_n U_n + T_n U_n T_n = T_n \quad (71)$$

для любого значения n .

Утверждение 4. Для того чтобы матрица U_n из формулы (69) была проектором, необходимо и достаточно, чтобы для нее выполнялось равенство $U_n T_n U_n = 0$.

Необходимость: умножим равенство (71) слева на матрицу U

$$U^2 T + U T U + U T U T = U T. \quad (72)$$

Отсюда следует, что справедливы равенства $U T U + U T U T = 0$ и $U T U = 0$, поскольку матрица $I + T$ неособенная.

Достаточность: из выражения (72), учитывая равенство $U T U = 0$, имеем $(U^2 - U)T = 0$. Из последнего равенства следует, что матрицы U^2 и U могут отличаться одна от другой только в последнем столбце. Умножая равенство (71) на матрицу U справа, аналогично получим равенство $T(U^2 - U) = 0$, что означает возможность различия между данными матрицами только в первой строке. А из утверждения 3 следует, что последние элементы первых строк у матриц U^2 и U совпадают. Таким образом, $U^2 = U$.

Утверждение 5. Матрица U_n для любого порядка n является проектором.

Докажем индукцией по n . Для малых значений n база индукции очевидно верна. Пусть U_n — проектор. Следует доказать, что тогда и U_{n+1} является проектором. Для этого, воспользовавшись утверждением 4, докажем, что из того, что справедливо равенство $U_n T_n U_n = 0$, следует, что справедливо равенство $U_{n+1} T_{n+1} U_{n+1} = 0$.

Матрицу U_{n+1} представим в блочном виде

$$U_{n+1} = \begin{bmatrix} U_n & u_{n+1} \\ 0 & \end{bmatrix}.$$

Следующее выражение оказывается нулевым:

$$\begin{aligned} U_{n+1} T_{n+1} \begin{bmatrix} U_n \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_n & u_{n+1} \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_n U_n \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} U_n T_n U_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому остается доказать, что справедливо равенство $U_{n+1} T_{n+1} u_{n+1} = 0$.

Для этого воспользуемся равенством (70):

$$\begin{aligned} T_{n+1}u_{n+1} &= T_{n+1}\left(-\begin{bmatrix} u_n \\ 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ u_n \end{bmatrix}+e_{n+1}\right)= \\ &= -\begin{bmatrix} T_n u_n \\ 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} u_n \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e_n \\ 0 \end{bmatrix}. \\ U_{n+1}T_{n+1}u_{n+1} &= \begin{bmatrix} U_n & u_{n+1} \\ 0 & u_{n+1} \end{bmatrix}\left(-\begin{bmatrix} T_n u_n \\ 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} u_n \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e_n \\ 0 \end{bmatrix}\right)= \\ &= -\begin{bmatrix} U_n T_n u_n \\ 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} U_n u_n \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} U_n e_n \\ 0 \end{bmatrix}=0-\begin{bmatrix} u_n \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_n \\ 0 \end{bmatrix}=0. \end{aligned}$$

Здесь использовано равенство $U_n T_n U_n = 0$, из которого следует равенство $U_n T_n u_n = 0$; а также равенство $U_n^2 = U_n$, из которого следует равенство $U_n u_n = u_n$. Утверждение 5 доказано.

В работе [25] показано, что линейное многообразие матриц вида: $Y + \sum a_i R_i$ может состоять из одних проекторов. Из этой работы следует, что для этого между матрицами Y и R_i должны выполняться следующие соотношения:

$$Y^2 = Y; \quad YR_i + R_i Y = R_i; \quad R_i R_j + R_j R_i = 0. \quad (73)$$

Определим три матрицы R_1, R_2 и Y порядка n , так чтобы для них выполнялись равенства (73), и матрица $Y + \mu R_1 + \eta R_2$ удовлетворяла бы уравнению (68). Подчеркнем, что матрица $Y + \mu R_1 + \eta R_2$ при любых коэффициентах μ, η является проектором при выполнении равенств (73).

$$Y = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_{n-2} - U_{n-2} \right\}. \quad (74)$$

$$R_1 = \text{diag} \left\{ 0, \begin{bmatrix} 0 & U_{n-2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (75)$$

$$R_2 = Y T^T; \quad (Y = R_2 T). \quad (76)$$

Из определений (74) и (75) следует тождество $TY - T + R_1 = 0$. (77)

Для матриц R_1, R_2 и Y выполняются равенства

$$L_n(Y) = Y T_n + T_n Y + T_n Y T_n = T_n + T_n^2, \quad \forall n. \quad (78)$$

$$L_n(R_1) = R_1 T_n + T_n R_1 + T_n R_1 T_n = T_n^2, \quad \forall n. \quad (79)$$

$$\begin{aligned} L_n(R_2) &= R_2 T_n + T_n R_2 + T_n R_2 T_n = \\ &= I_n + T_n, \quad \forall n - \text{четное}. \end{aligned} \quad (80)$$

Равенства (78) — (80) можно получить из рассмотрения устройства матриц R_1, R_2 и Y . Из равенств (78) — (80) следует, что матрица $Y + \mu R_1 + \eta R_2$ удовлетворяет уравнению (68)

$$\begin{aligned} L(Y + \mu R_1 + \eta R_2) &= \\ &= I_n \eta + T_n (\eta + 1) + T_n^2 (\mu + 1). \end{aligned} \quad (81)$$

Для обоснования того, что матрица $Y + \mu R_1 + \eta R_2$ — проектор, докажем, что для матриц R_1, R_2 и Y выполняются равенства (73).

$Y^2 = Y$. Поскольку U — проектор, то из определения (74) следует, что и выражение Y — проектор.

$R_1^2 = 0$. Возведем в квадрат матрицу из определения (75)

$$\begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & UTU \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как U — проектор, то согласно утверждению 4 получаем что справедливо равенство $UTU = 0$.

$R_1 Y = 0$. Умножим тождество (77) справа на Y

$$TY^2 - TY + R_1 Y = 0.$$

$Y R_1 = R_1$. Умножим тождество (77) справа на R_1

$$TYR_1 - TR_1 + R_1^2 = 0 \Rightarrow T(YR_1 - R_1) = 0.$$

Последнее равенство означает, что у матрицы $YR_1 - R_1$ все строки, кроме может быть, первой, нулевые. Однако у матриц R_1 и Y первые строки нулевые, поэтому и сама матрица $YR_1 - R_1$ нулевая.

В полученных до сих пор формулах размер квадратных матриц Y и R_1 мог быть любым. Считаем далее, что все матрицы четного порядка n .

$R_2^2 = 0$. Умножим равенство (78) на R_2 слева, учитывая, что $Y = R_2 T$

$$R_2^2 T^2 + Y^2 + Y^2 T = Y + YT \Rightarrow R_2^2 T^2 = 0.$$

Из последнего равенства следует, что у матрицы R_2^2 все столбцы, кроме, может быть, двух последних, нулевые. Матрица R_2 — треугольная, это означает, что матрица R_2 порядка $n - 2$ в квадрате дает нулевую матрицу. Поскольку n можно выбрать любым, это значит, что матрица R_2 любого порядка в квадрате дает нулевую матрицу.

$R_2 R_1 = 0$. Умножим тождество (77) слева на R_2 , учитывая, что справедливо равенство $Y = R_2 T$ и то, что матрица Y является проектором

$$R_2 TY - R_2 T + R_2 R_1 = 0.$$

$R_2 Y = 0$. Поскольку $R_2^2 = 0$, имеем равенство $R_2 Y = R_2 (R_2 T) = R_2^2 T = 0$.

$Y R_2 = R_2$. Умножим равенство (80) слева на R_2 :

$$R_2^2 T + R_2 T R_2 + R_2 T R_2 T = R_2 + R_2 T.$$

Учитывая равенства $R_2^2 = 0$, $Y = R_2T$ и то, что Y проектор, получаем равенство:

$$R_2TR_2 = R_2 \text{ или } YR_2 = R_2.$$

$R_1R_2 = 0$. Из тождества (77) следует равенство $TR_2T = T - R_1$. Подставив его в равенство (80), имеем уравнение $R_2T + TR_2 - R_1 = I$. Умножив последнее равенство справа на R_2 , получаем равенство:

$$R_2TR_2 + TR_2^2 - R_1R_2 = R_2.$$

Учитывая соотношения $R_2^2 = 0$ и $R_2TR_2 = R_2$, получаем равенство $R_1R_2 = 0$.

Таким образом, обоснована достаточность условия в) теоремы 1.

Случай $x^2 = \rho$ и $x \in \sigma$. Эта область величин собственных значений x матрицы F , которая не оговаривается условиями в теореме 1. Однако возникает вопрос о существовании двух проекторов, при которых x находится в этой области значений.

Это случай уравнения (56), когда $\eta = 0$:

$$L(Y + \mu R_1) = T_n + T_n^2(\mu + 1).$$

Здесь решение дается матрицей $Y + \mu R_1$, которая есть проектор. Порядок этой матрицы произвольный.

Выводы

Доказанная теорема 1 показывает, что спектр произведения двух диагонализируемых матриц имеющих только два различных собственных значения, имеет свойства симметрии, похожие на свойства симметрии спектра произведения двух инволюций. Из случая б) в теореме 1 видно, что эта симметрия может быть несколько нарушена по сравнению с произведением двух инволюций.

Список литературы

- [1] Икрамов Х.Д. Спектральные особенности специальных классов матриц // Вычислительные процессы и системы, 1991. Вып. 8. С. 168–203.
- [2] Икрамов Х.Д. О произведениях симметричных, кососимметричных, эрмитовых и инволютивных матриц // Вестник Московского Университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика, 1998. № 1. С. 8–11.
- [3] Ballantine C.S. Some involutory similarities // Linear and multilinear algebra, 1975, no. 3, pp. 19–23.
- [4] Dokovic D.Z. Product of two involutions // Arch. Math., 1967, v. 18, pp. 582–584.
- [5] Hoffman F., Paige E.C. Product of two involutions in the general linear group // Indiana Univ. Math. J., 1970/71, v. 20, pp. 1017–1020.
- [6] Wonenburger M.J. Transformations which are products of two involutions // J. Math. Mech. 1966, v. 16, pp. 327–338.
- [7] Anderson B.D.O. Orthogonal decompositions defined by a pair of skew-symmetric forms // Linear Algebra Appl., 1974, no. 8, pp. 91–93.
- [8] Dokovic D.Z. On the product of two alternating matrices // Amer. Math. Monthly, 1991, v. 98, no. 10, pp. 935–936.
- [9] Drazin M.P. A note on skew-symmetric matrices // Math. Gazette, 1952, v. 36, pp. 253–255.
- [10] Gow R., Laffey T.J. Paire of alternating forms and products of two skew-symmetric matrices // Linear Algebra Appl., 1984, v. 63, pp. 119–132.
- [11] Anderson W.N., Harner E., Trapp G.E. Eigenvalues of the difference and product of projections // Linear Multilinear Algebra, 1985, v. 17, pp. 295–299.
- [12] Omladic M. Spectra of the difference and product of projections // Proc. Amer. Math. Soc., 1987, v. 99, pp. 317–318.
- [13] Baraa M., Boumazgour M. Spectra of the difference, sum, and product of idempotents // Studia Math., 2001, v. 148, no. 1, pp. 1–3.
- [14] Ветошкин А.М. Жорданова форма разности проекторов // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2014. Т. 54. № 3. С. 375–390.
- [15] Ветошкин А.М. Жорданова форма линейной комбинации двух проекторов // Обзорение прикладной и промышленной математики, 2022. Т. 29. Вып. 3. С. 284–285.
- [16] Ветошкин А.М., Шум А.А. Особенности спектра линейной комбинации двух проекторов // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2023. Т. 27. № 6. С. 151–159. DOI: 10.18698/2542-1468-2023-6-151-159
- [17] Flanders H. Elementary divisors of AB and BA // Proc. Amer. Math. Soc., 1951, no. 2, pp. 871–874.
- [18] Thompson R.C. On the matrices AB and BA // Linear Algebra Appl., 1968, no. 1, pp. 43–58.
- [19] Parker W.V., Mitchell B.E. Elementary divisors of certain matrices // Duke Math. J., 1952, v. 19, pp. 483–485.
- [20] Call G. S., Velleman D. J. Pascal's matrices // Am. Math. Monthly, 1993, v. 100 (4), pp. 372–376.
- [21] Грехем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998. 703 с.
- [22] Ветошкин А.М. Решение однородного дискретного уравнения Сильвестра, коэффициенты которого являются жордановыми клетками // Обзорение прикладной и промышленной математики, 2024. Т. 32. Вып. 3. С. 274–275.
- [23] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1977. 576 с.
- [24] Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192 с.
- [25] Ветошкин А.М. Линейные многообразия проекторов // Чебышевский сборник, 2022. Т. 23. Вып. 2. С. 42–55.

Сведения об авторах

Ветошкин Александр Михайлович [✉] — канд. техн. наук, доцент, ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (Мытищинский филиал), alexander.vetkin@gmail.com

Шум Александр Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет» (ТвГТУ), shum@tstu.tver.ru

Поступила в редакцию 11.09.2025.

Одобрено после рецензирования 19.03.2026.

Принята к публикации 20.04.2026.

JORDAN FORM OF THE PRODUCT OF TWO DIAGONALIZABLE MATRICES, EACH OF WHICH HAS TWO DIFFERENT EIGENVALUES

A.M. Vetoshkin^{1✉}, A.A. Shum²

¹BMSTU (Mytishchi branch), 1, 1st Institutskaya st., 141005, Mytishchi, Moscow reg., Russia

²Tver State Technical University named after Afanasy Nikitin, 22, Afanasy Nikitin Emb., 170026, Tver, Russia

alexander.vetkin@gmail.com

It is shown that in the canonical Jordan form of the expression $F = (R + \mu I)(Q + \nu I)$ for the projectors R, Q the following symmetry with respect to the value $\rho = \mu(\mu + 1)\nu(\nu + 1)$ is observed. For $\lambda^2 \neq \rho$ if there are several cells $J_k(\lambda)$, then there are exactly as many cells $J_k(\rho/\lambda)$, where λ is the eigenvalue of the matrix F . For cells with $\lambda \in \sigma = \{\mu\nu, \mu(\nu + 1), (\mu + 1)\nu, (\mu + 1)(\nu + 1)\}$ the symmetry is somewhat broken: if there is a cell $J_k(\lambda)$ with $k > 1$, then there is necessarily a paired cell $J_l(\rho/\lambda)$, where $|k - l| \leq 1$. For $\lambda^2 = \rho$ and $\lambda \notin \sigma$ the cells $J_k(\lambda)$ must have an even order.

Keywords: projector, involution, Jordan normal form, Jordan cell, similarity, Flanders theorem, Pascal matrix

Suggested citation: Vetoshkin A.M., Shum A.A. *Zhordanova forma proizvedeniya dvukh diagonalizuyemykh matrits, kazhdaya iz kotorykh imeet dva razlichnykh sobstvennykh znacheniya* [Jordan form of the product of two diagonalizable matrices, each of which has two different eigenvalues]. *Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin*, 2026, vol. 30, no. 4, pp. 147–160. DOI: 10.17816/2542-1468-2026-4-147-160

References

- [1] Ikramov Kh.D. *Spektral'nyye osobennosti spetsial'nykh klassov matrits* [Spectral singularities of special classes of matrices]. *Vychislitel'nyye protsessy i sistemy* [Computing processes and systems], 1991, iss. 8, pp. 168–203.
- [2] Ikramov Kh.D. *O proizvedeniyakh simmetrichnykh, kososimmetrichnykh, ermitovykh i involyutivnykh matrits* [On products of symmetric, skew-symmetric, Hermitian and involutive matrices]. *Vestnik Moskovskogo Un-ta. Ser. 15, Vychislitel'naya matematika i kibernetika* [Vestn. Moscow University. Ser. 15, Comput. Mat. and Cybern.], 1998, no. 1, pp. 8–11.
- [3] Ballantine C.S. Some involutory similarities. *Linear and multilinear algebra*, 1975, no. 3, pp. 19–23.
- [4] Dokovic D.Z. Product of two involutions. *Arch. Math.*, 1967, v. 18, pp. 582–584.
- [5] Hoffman F., Paige E.C. Product of two involutions in the general linear group. *Indiana Univ. Math. J.*, 1970/71, v. 20, pp. 1017–1020.
- [6] Wonenburger M.J. Transformations which are products of two involutions. *J. Math. Mech.* 1966, v. 16, pp. 327–338.
- [7] Anderson B.D.O. Orthogonal decompositions defined by a pair of skew-symmetric forms. *Linear Algebra Appl.*, 1974, no. 8, pp. 91–93.
- [8] Dokovic D.Z. On the product of two alternating matrices. *Amer. Math. Monthly*, 1991, v. 98, no. 10, pp. 935–936.
- [9] Drazin M.P. A note on skew-symmetric matrices. *Math. Gazette*, 1952, v. 36, pp. 253–255.
- [10] Gow R., Laffey T.J. Paire of alternating forms and products of two skew-symmetric matrices. *Linear Algebra Appl.*, 1984, v. 63, pp. 119–132.
- [11] Anderson W.N., Harner E., Trapp G.E. Eigenvalues of the difference and product of projections. *Linear Multilinear Algebra*, 1985, v. 17, pp. 295–299.

- [12] Omladic M. Spectra of the difference and product of projections. Proc. Amer. Math. Soc., 1987, v. 99, pp. 317–318.
- [13] Baraa M., Boumazgour M. Spectra of the difference, sum, and product of idempotents. Studia Math., 2001, v. 148, no. 1, pp. 1–3.
- [14] Vetoshkin A.M. *Zhordanova forma raznosti proektorov* [Zhordanov form of difference of projectors]. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2014, v. 54, no. 3, pp. 375–390.
- [15] Vetoshkin A.M. *Zhordanova forma lineynoy kombinatsii dvukh proektorov* [Jordan form of a linear combination of two projectors]. Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki [Survey of applied and industrial mathematics], 2022, v. 29, no. 3, pp. 284–285.
- [16] Vetoshkin A.M., Shum A.A. *Osobennosti spektra lineynoy kombinatsii dvukh proektorov* [Linear combination of two projectors spectrum features]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2023, vol. 27, no. 6, pp. 151–159. DOI: 10.18698/2542-1468-2023-6-151-159
- [17] Flanders H. Elementary divisors of AB and BA // Proc. Amer. Math. Soc., 1951, no. 2, pp. 871–874.
- [18] Thompson R.C. On the matrices AB and BA // Linear Algebra Appl., 1968, no. 1, pp. 43–58.
- [19] Parker W.V., Mitchell B.E. Elementary divisors of certain matrices // Duke Math. J., 1952, v. 19, pp. 483–485.
- [20] Call G. S., Velleman D. J. Pascal's matrices // Am. Math. Monthly, 1993, v. 100 (4), pp. 372–376.
- [21] Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O. *Konkretnaya matematika. Osnovanie informatiki* [Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science]. Moscow: Mir, 1998, 703 p.
- [22] Vetoshkin A.M. *Reshenie odnorodnogo diskretnogo uravneniya Sil'vestra, koefitsienty kotorogo yavlyayutsya zhordanovymi kletkami* [Solution of the homogeneous discrete Sylvester equation whose coefficients are Jordan cells] Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki [Survey of applied and industrial mathematics], 2024, v. 32, no. 3, pp. 274–275.
- [23] Gantmaher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix Theory]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 576 p.
- [24] Ikramov Kh.D. *Chislennoe reshenie matrichnykh uravneniy* [Numerical solution of matrix equations]. Moscow: Nauka, 1984, 192 p.
- [25] Vetoshkin A.M. *Lineynye mnogoobraziya proektorov* [Linear manifolds of projectors]. Chebyshevskiy sbornik [Chebyshev's collection], 2022, v. 23, no. 2, pp. 42–55.

Authors' information

Vetoshkin Aleksandr Mikhaylovich✉ — Cand. Sci. (Tech), Associate Professor of BMSTU (Mytishchi branch), alexander.vetkin@gmail.com

Shum Aleksandr Anatol'evich — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of TvSTU, shum@tstu.tver.ru

Received 11.09.2025.

Approved after review 19.03.2026.

Accepted for publication 20.04.2026.

Вклад авторов: все авторы в равной доле участвовали в написании статьи

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов

Authors' Contribution: All authors contributed equally to the writing of the article

The authors declare that there is no conflict of interest