

УДК 629.7.05

## Численное решение краевой задачи на собственные значения для частично заполненной жидкостью полости вертикально стоящего тора

Афони́на Екатерина Валерьевна

saranchenkova.ev@phystech.edu

МФТИ, Москва, Россия

**Аннотация.** Решение краевой задачи на собственные значения для полостей, частично заполненных жидкостью со свободными поверхностями, имеет важное практическое значение. В текущей работе методом конечных элементов решается задача на поиск собственных значений колебаний жидкости в полости, образованной вертикально стоящим тором.

**Ключевые слова:** краевая задача, метод конечных элементов, собственное значение, подвижность жидкого наполнения полости, свободная поверхность жидкости

**Введение.** Исследование движения жидкости со свободными поверхностями в полостях является важной прикладной задачей, занимающей особое место при проектировании систем управления полетом ракет и космических аппаратов. Современные ракеты космического назначения, являясь жидкостными, содержат в топливных баках большие массы жидкого топлива, что оказывает существенное влияние на динамические характеристики ракеты как объекта управления, связанное с резонансом колебаний исполнительных органов системы управления и собственных частот жидкостей. Поэтому знание собственных частот колебаний жидкостей необходимо для построения качественных систем управления [1, 2].

Собственные колебания жидкости, частично заполняющей некоторую полость, описываются краевой задачей. Однако ее аналитическое решение существует только для некоторых форм полостей, используемых на практике [1, 2]. Реальные же сосуды зачастую имеют более сложные формы или занимают такое положение, при котором нестандартную форму принимают свободные поверхности жидкостей, их заполняющие, и для описания колебаний жидкостей в таких сосудах возможно с применением численных методов. В данной работе рассматривается колебание жидкости в вертикально стоящем торе.

**Материалы и методы.** Рассмотрим случай наполнения полости вертикально стоящего тора жидкостью наполовину, считая от дна. Краевая задача для изучаемой полости описывается уравнением Лапласа для потенциала скоростей жидкости  $\varphi$  в рассматриваемом объеме  $O$  и граничными условиями на смачиваемой поверхности  $S$  и свободной поверхности  $\sigma$  [2]:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \text{ в объеме } O \\ \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S = 0, \left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_\sigma = \lambda\varphi \end{cases} \quad (1)$$

где  $\lambda$  — искомое собственное значение;  $n$  — нормаль к смачиваемой поверхности.

Численное решение методом конечных элементов задачи (1) основано на разбиении полости на трехмерные симплекс-элементы и построении для каждого элемента базисной функции [3, 4]. По этим функциям определяются матрицы масс и жесткости. Далее относительно узловых значений решается система уравнений:

$$K\varphi + M\ddot{\varphi} = 0, \quad (2)$$

где  $K$  — глобальная матрица жесткостей,  $M$  — глобальная матрица масс.

Полученные численным методом собственные значения колебаний жидкости в рассматриваемой полости согласуются с результатами экспериментов, приведенных в [5].

**Заключение.** В ходе проведенной работы было получено численное решение краевой задачи на собственные значения для движения жидкости в вертикально стоящем торе. Рассмотрен случай наполнения полости наполовину. Вычисленные собственные значения колебаний жидкости соответствуют экспериментальным данным, что может свидетельствовать о применимости данного метода для решения прикладных задач.

#### Список источников

- [1] Бужинский В.А. *Динамика и устойчивость движения ракет*. Королёв, Изд-во ВГУП ЦНИИмаш, 2017, 270 с.
- [2] Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. *Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью*. Москва, Машиностроение, 1977, 208 с.
- [3] Макарьянц Г.М., Прокофьев А.Б. *Основы метода конечных элементов*. Самара, Изд-во СГАУ, 2013.
- [4] Белоцерковский О.М. *Численное моделирование в механике сплошных сред*. Москва, Физматлит, 1994.
- [5] Norman Abramson H. *The dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers*. NASA SP-106, 1966, 467 p.