

УДК 629.7.05

Алгоритм решения задачи прогнозирования движения космического аппарата по орбите с использованием уравнения Кеплера

Фомичев Алексей Викторович

a.v.fomichev@bmstu.ru
SPIN-код: 1376-6200

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация. Предложен алгоритм решения задачи прогнозирования орбитального движения малого космического аппарата с использованием уравнения Кеплера и fg -соотношений. Уравнения для решения задачи Кеплера записаны с помощью универсальных нормированных переменных. Предложена численная процедура решения уравнения времени на основе метода проб и ошибок и метода Ньютона. Методами математического моделирования показано, что разработанное математико-алгоритмическое обеспечение является работоспособным.

Ключевые слова: орбитальное движение, прогнозирование, уравнение Кеплера, fg -соотношения, метод проб и ошибок, метод Ньютона

Введение. Знание векторов положения $\mathbf{r}$ и скорости $\mathbf{V}$ малого космического аппарата (МКА) в любой момент времени t , полученные в результате решения задачи навигации с использованием, например, данных измерений спутниковой навигационной системы [1], позволяет сформулировать и решить задачу прогнозирования орбитального движения [2]. Для этой цели можно применить подход, описанный в [3], в основе которого лежит понятие fg -соотношений.

Постановка задачи: Пусть в начальный момент времени t_0 известен вектор состояния КА $(\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0)$, где $\mathbf{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$, $\mathbf{V}_0 = [\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0]^T$. Требуется определить вектор состояния $(\mathbf{r}, \mathbf{V})$ в любой другой момент времени $t = t_0 + \Delta t$ ($\Delta t > 0$).

Методы и материалы; результаты. Рассматриваемое орбитальное движение МКА удовлетворяет законам Кеплера и происходит в неизменной плоскости. Уравнения для решения задачи Кеплера после введения универсальных нормированных переменных (черта над переменной) принимают следующий вид [1]:

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \bar{x}^3 S + (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{V}_0) \bar{x}^2 C + \bar{r}_0 \bar{x} (1 - zS), \\ \bar{r} &= \frac{d\bar{t}}{d\bar{x}} = \bar{x}^2 C + (\bar{\mathbf{r}}_0 \cdot \bar{\mathbf{V}}_0) \bar{x} (1 - zS) + \bar{r}_0 (1 - zC), \\ z &= \frac{\bar{x}^2}{\bar{a}}, \quad C = \frac{1}{2!} - \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{6!} - \dots, \quad S = \frac{1}{3!} - \frac{z}{5!} + \frac{z^2}{7!} - \dots\end{aligned}$$

Все расчетные данные и соотношения при нормировании целесообразно выражать в системе единиц, основанной на параметрах круговой орбиты

выбранной определенным образом. Преимущество нормированных переменных — упрощение и улучшение точности вычислений.

Уравнение времени является нелинейным относительно переменной $\bar{x}$ поэтому для его решения необходимо использовать численные процедуры, например, метод проб и ошибок. Для поиска решения $\bar{x}$ уравнения $\bar{t} = t(\bar{x})$ при известном времени полета можно применить численную процедуру метода Ньютона [4]. Итерационный процесс вычислений прекращается, когда $(t - t_n) \leq \varepsilon_t$, где ε_t — заданное значение. Число итераций, требуемых для вычисления $\bar{x}$ с любой желаемой точностью, зависит от начального приближения x_0 .

Алгоритм решения уравнения Кеплера содержит следующие шаги:

- По известным $(\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0)$ определяется r_0 и a (большая полуось эллиптической орбиты).

- Для заданного времени перелета t необходимо решить уравнение для времени полета относительно x , используя процедуру Ньютона.

- Оценить параметры f и g , а затем вычислить $\mathbf{r}$ и $r = |\mathbf{r}|$, используя следующие соотношения

$$\mathbf{r}(t) = f \cdot \mathbf{r}_0(t_0) + g \cdot \mathbf{V}_0(t_0),$$

где $f = 1 - \frac{x^2}{r}C$, $g = t - \frac{x^3}{\sqrt{\mu}}S$.

- Оценить параметры f' и g' , а затем вычислить $\mathbf{V}$, используя следующие соотношения

$$\mathbf{V}(t) = f' \cdot \mathbf{r}_0(t_0) + g' \cdot \mathbf{V}_0(t_0),$$

где $f' = \frac{\sqrt{\mu}}{r \cdot r_0}x(zS - 1)$, $g' = 1 - \frac{x^2}{r}C$.

Заключение. Рассмотрена задача прогнозирования движения МКА по орбите и представлен алгоритм ее решения с использованием уравнения Кеплера, записанного в универсальных нормированных переменных. Для решения нелинейного уравнения Кеплера предложена соответствующая численная процедура. Полученные результаты моделирования показали работоспособность предложенных алгоритмов и численных процедур.

Список источников

- [1] Крамлик А.В. Использование спутниковых радионавигационных систем ГЛОНАСС и GPS для решения задач позиционирования и определения скорости космических аппаратов. Самара, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С.П. Королёва, 2011, 29 с.
- [2] Абламейко С.В., Саечников В.А., Спиридонов А.А. Малые космические аппараты. Минск, БГУ, 2012, 159 с.
- [3] Bate R.R., Mueller D.D., White J.I. *Fundamentals of Astrodynamics*. New York, Dover Publications, Inc., 1971, 455 p.
- [4] Игонина Е.В., Гладких О.Б., Прокуратова О.Н. *Численные методы и их программная реализация*. Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина, 2022, 80 с.