

УДК 531.36

## Формула Д.Е. Охоцимского для первой вариации

Голубев Юрий Филиппович

golubev@keldysh.ru

SPIN-код: 1837-4908

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

**Аннотация.** Представлен метод вычисления первой вариации интегральных функционалов, предложенный Д.Е. Охоцимским для динамических систем с управлением. Показано, что известные необходимые условия оптимальности такие, как принцип Максимиума Л.С. Понтрягина, метод Беллмана, метод Н.Н. Красовского следуют из полученной на основе метода Охоцимского формулы для первой вариации. Она также дает возможность построения градиентных методов поиска оптимального управления. Кроме того, указанная формула может быть положена в основу создания методов «прогноза-коррекции» терминального состояния.

**Ключевые слова:** первая вариация, оптимальное управление, градиентные методы

Пионерские работы, направленные на эффективное решение практических задач оптимального управления принадлежат Д.Е. Охоцимскому, Т.М. Энееву [1, 2], Л.С. Понтрягину [3], Р. Айзексу [4], Р. Беллману [5], Н.Н. Красовскому [6].

Пусть задана динамическая система:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad W = F(\mathbf{x}_k) + \int_{t_0}^{t_k} w(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k), \quad (1)$$

где  $t \in \mathbb{R}$  — время;  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  — вектор фазового состояния;  $\mathbf{u}(t) \in D \subset \mathbb{R}^m$  — искомый вектор управления, обеспечивающий условия существования и единственности решения динамической системы; функционал  $W$  — критерий для оценки качества управления;  $w$  — мгновенная стоимость, моменты  $t_0$  начала и  $t_k$  окончания процесса считаются для простоты фиксированными;  $F(\mathbf{x}_k)$  — терминальная плата;  $D$  — ограниченное замкнутое множество;  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_k$  — начальное и конечное значения фазового вектора.

Подчиним вектор-функцию  $\boldsymbol{\psi}(t) \in \mathbb{R}^n$  системе дифференциальных уравнений Гамильтона

$$H = w + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{f}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}},$$

$$\boldsymbol{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Rightarrow \delta W = \int_{t_0}^{t_k} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} dt - \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\psi} \right)^T \delta \mathbf{x} \right]_{t_0}^{t_k}, \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_0} = 0. \quad (2)$$

В этом случае вектор  $\Psi$  называется «вектором сопряженных переменных»,  $H$  — гамильтонианом задачи, а выражение (3) для  $\delta W$  — формулой Д.Е. Охоцимского [1, 2].

Из формулы Д.Е. Охоцимского непосредственно выводятся Принцип максимума Л.С. Понтрягина [3], Метод Айзекса – Беллмана [4, 5], градиентные методы оптимизации функционала [7], методы решения оптимальных задач в функциональных пространствах [6]. Она также дает возможность установить связь методов теории оптимального управления с вариационными принципами механики.

### Список источников

- [1] Охоцимский Д.Е. К теории движения ракет. *Прикладная математика и механика*, 1946, т. 10, вып. 2, с. 251–272.
- [2] Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. *Успехи физических наук*, 1957, т. 63, № 1а, с. 5–32.
- [3] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. Москва, Физматгиз, 1961, 393 с.
- [4] Asaacs R. *Differential games*. New York-London-Sydney, John Wiley and Sons Inc., 1965.
- [5] Bellman R. *Dynamic Programming*. New Jersey, Princeton University Press, 1957.
- [6] Красовский Н.Н. *Теория управления движением. Линейные системы*. Москва, Наука, 1968, 476 с.
- [7] Энеев Т.М. О применении градиентного метода в задачах теории оптимального управления. *Космические исследования*, 1966, т.4, вып. 5, с. 651–669.